ODBITKA Z ROCZNIKÓW NAUK ROLNICZYCH
I LEŚNYCH.

Tadeusz Wielgosz

# Teorja dokładności wzorów ksylometrycznych

(Théorie de l'exactitude des formules xylométriques)

„Roczniki Nauk Rolniczych i Leśnych" Tom XV

Poznań 1926
Czcionkami Drukarni Uniwersytetu Poznańskiego

Tadeusz Wielgosz.

# Teorja dokładności wzorów ksylometrycznych.

## (Théorie de l'exactitude des formules xylométriques).

Z instytutu [redacted] statyki leśnej Uniwersytetu Poznańskiego.

(Wrzesień 1924).

I. CZĘŚĆ TEORETYCZNA.



II. CZĘŚĆ ZASTOSOWANA.

# I. CZĘŚĆ TEORETYCZNA.

## 1. Wstęp.

Najbardziej wartościową częścią naszych drzew leśnych jest tak zwany pień, który umocowany zapomocą korzeni w glebie wznosi się pionowo do góry i nosi na sobie koronę, złożoną z konarów i gałęzi. Pień, który na całej swej długości pozostaje w jednym kawałku, nazywa się także s t r z a ł ą drzewa.

Strzały drzew wyrosłych w zwartych drzewostanach wykazują w zasadzie prostolinijną oś długości i względem tej osi mniej lub więcej symetryczną budowę: przekroje poprzeczne tj. prostopadłe do osi mają zwłaszcza w części środkowej strzały kształt zbliżony do koła, natomiast w dolnych i górnych częściach spotykamy formę nieco nieregularną, co przedewszystkiem ma miejsce u drzew liściastych, podczas gdy drzewa iglaste odznaczają się prawie kolistymi przekrojami poprzecznymi. Możemy zatem uważać strzały drzew jako ciała obrotowe powstałe przez obrót danej tworzącej około osi. Tworzącą tę możemy sobie przedstawić jako przecięcie się płaszczyzny przechodzącej przez oś strzały (pł. południkowej) z jej pobocznicą; w ten sposób zdefinjowaną tworzącą nazwijmy m o r f o l o g i c z n ą krzywą strzały drzewa w odróżnieniu do m a t e m a t y c z n e j krzywej strzały, która dając się wyrazić analitycznem równaniem przedstawia linję geometryczną, zbliżoną co do kształtu swego najbardziej do morfologicznej krzywej strzały. W następnych rozważaniach będziemy matematyczną krzywę strzały nazywali krótko krzywą strzały. Analityczne równanie krzywej strzały nazywamy r ó w n a n i e m k r z y w e j s t r z a ł y drzewa; natomiast matematyczną relację między powierzchnią dowolnego przekroju poprzecznego a jego odległością od wierzchołka względnie początku układu współrzędnych nazywamy r ó w n a n i e m p r z e k r o j u strzały drzewa. Posługiwanie się tą ostatnią relacją zamiast równania krzywej strzały przy wyprowadzaniu wzorów na obliczanie miąższości strzał jest wolne od warunku kolistych przekrojów poprzecznych, dla zastosowania bowiem swego wymaga tylko, żeby przekroje poprzeczne podlegały temu samemu matematycznemu prawu powstawania. Za-

sługuje to na podkreślenie z tego względu, że — jak wyżej podkreśliliśmy — przekroje poprzeczne strzał drzew naszych nie wykazują ściśle kształtu koła.

W literaturze dendrometrycznej wysuwa się na pierwszy plan z powodu swego prostego kształtu i dostatecznego zbliżenia się do rzeczywistości następujące równanie przekroju strzały:

$$g_x = A \cdot x^r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1$$

przyczem $g_x$ oznacza powierzchnię przekroju w odległości $x$ od wierzchołka strzały, $r$ zowie się wykładnikiem kształtu, a $A$ jest stałą, z której obliczamy tak zwany parametr strzały drzewa według wzoru $p = \frac{A}{\pi}$; wykładnik i parametr kształtu są stałemi charakteryzującemi kształt danej strzały drzewa, wobec czego możemy je nazwać dendrometrycznemi elementami kształtu.

Znając wykładnik kształtu $r$ i zastosowując ogólny wzór na objętość:

$$V = \int_a^b g_x \, dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2$$

otrzymujemy wzory stereometryczne na objętość dotyczących brył. W dendrometrycznych zastosowaniach przybiera $r$ wartość od zera do około $r = 3{\cdot}5$; większe wartości na $r$ występują w praktyce tylko wyjątkowo, wobec czego możemy wszystkie możliwe powyższym interwałem zmiennej $r$ objęte bryły nazwać bryłami dendrometrycznemi. Najprostsze z nich są te, dla których $r$ przybiera wartości: 0, 1, 2, 3, tj. walec, paraboloida, stożek zwykły i nejloida; te cztery bryły nazywać będziemy zasadniczemi lub podstawowemi bryłami dendrometrycznemi w odróżnieniu od brył przejściowych, które odpowiadają pozostałym wartościom zmiennej $r$. Doświadczenie uczy nas, że strzały drzew w pewnych swych częściach zbliżają się w większym lub mniejszym stopniu do odpowiednich brył dendrometrycznych i tak naogół możemy powiedzieć, że wierzchołek strzał drzew leśnych ma kształt mniej więcej

zwykłego stożka, środkowa część strzały waha się między paraboloidą a walcem, a dolna część strzały czyli tak zwany odziomek zbliża się do nejloidy.

Dla systematycznego ugrupowania brył dendrometrycznych służyć może następujący szemat:[1])

strzały drzew, których $r$ posiada niżej podane wartości, przyjmują określenia

| wartość wykładnika kształtu $r$ | określenie brył |
|---|---|
| $r = 0$ | walcowate |
| $0 < r < 0{\cdot}5$ | podwalcowate |
| $0{\cdot}5 \leqq r < 1$ | nadparaboloidalne |
| $r = 1$ | paraboloidalne |
| $1 < r < 1{\cdot}5$ | podparaboloidalne |
| $1{\cdot}5 \leqq r < 2$ | nadstożkowate |
| $r = 2$ | stożkowate |
| $2 < r < 2{\cdot}5$ | podstożkowate |
| $2{\cdot}5 \leqq r < 3$ | nadnejloidalne |
| $r = 3$ | nejloidalne |
| $3 < r < 3{\cdot}5$ | podnejloidalne |

Z nauki o kubaturze brył wiemy, że objętość konoid całkowitych wyraża się wzorem:

$$V = \frac{Gh}{r+1} = Gh \cdot f(r) \quad \ldots\ldots\ldots 3$$

tj. objętość całkowitej konoidy równa się iloczynowi z objętości walca o przekroju podstawy i całkowitej wysokości konoidy, czyli objętości walca podstawowego i funkcji, której jedynym argumentem jest wykładnik kształtu; funkcja ta przedstawia w tym szczególnym wypadku dendrometryczną absolutną liczbę kształtu, czyli liczbę wyrażającą stosunek rzeczywistej miąższości strzały do walca porównawczego o tej samej wysokości i tym samym przekroju podstawowym.

[1]) Vide: Ferd. L. Langenbacher und Emanuel Nossek. Lehr und Handbuch der Holzmesskunde. Die Kubierung des Holzes im liegenden Zustande. Leipzig 1889.

Ażeby zakresem naszych badań objąć nietylko całkowite bryły dedrometryczne, lecz również i ścięte czyli części tych brył, wychodzimy od znanego ogólnego wzoru na objętość ściętych konoid, który brzmi:

$$V = \frac{h}{r+1} \frac{G^{\frac{r+1}{r}} - g^{\frac{r+1}{r}}}{G^{\frac{1}{r}} - g^{\frac{1}{r}}} \quad \ldots\ldots 4$$

przyczem $G$ oznacza powierzchnię przekroju podstawowego (w czole), $g$ powierzchnię przekroju wierzchołkowego (w czubie), $h$ wysokość, $r$ wykładnik kształtu.

Wyciągając w liczniku i mianowniku $G$ z odpowiednim wykładnikiem potęgowym przed nawias, odpowiednio skracając i zastąpiwszy iloraz $\frac{g}{G} = \left(\frac{d}{D}\right)^2 = u^2$ kwadratem z ilorazu średnic krańcowych $u$ tj. stosunkiem średnicy w czubie do średnicy w czole, otrzymujemy:

$$V = \frac{Gh}{r+1} \frac{1 - u^{\frac{2r+2}{r}}}{1 - u^{\frac{2}{r}}} = Gh \cdot F(r, u) \ldots\ldots 5$$

Widzimy zatem, że objętość wszystkich brył dendrometrycznych i ich części da się ogólnie przedstawić jako iloczyn z objętości walca podstawowego i funkcji o dwóch zmiennych $r$ i $u$; również i w tym wypadku wyraża funkcja o dwu zmiennych stosunek rzeczywistej miąższości strzały lub jej części do objętości walca podstawowego.

Interwał zmiennej niezależnej $r$ został wyżej ze względu na wymagania nauki o dendrometrji ustalony jako wahający się od $r = 0$ do $r = 3{\cdot}5$; dolna granica tego interwału tj. $r = 0$ jest ściśle oznaczona, gdyż wprowadzenie ujemnej wartości dla $r$ wykazywałoby dla $0 > r > -1$, że objętość danej strzały jest większa od objętości walca podstawowego, czyli że powierzchnie poprzecznych przekrojów wyżej położonych musiałyby być większe od powierzchni przekroju podstawowego, co w odniesieniu do

budowy drzew naszych jest wykluczone, dalej dla $r = -1$ objętość według wzorów 3 lub 5 równałaby się nieskończoności, a przy $r < -1$ otrzymalibyśmy wartość ujemną, co w zastosowaniu do dendrometrji jest również bez znaczenia praktycznego; natomiast wybór górnej granicy $r = 3{\cdot}5$ jest raczej aktem subjektywnego uznania, opierającego się na dotychczasowych ogólnikowych badaniach w tym kierunku. W przeciwieństwie do zmiennej $r$ obydwie granice interwału drugiej zmiennej niezależnej $u$ tj. ilorazu średnic krańcowych dadzą się ściśle określić, a mianowicie jako wykazujące wartości $u = 0$ i $u = 1$, przyczem należy podkreślić, że z chwilą, gdy $u$ przybiera wartość krańcową jednostki, musi równocześnie $r$ przybrać wartość zera t. zn. dana bryła staje się walcem, czyli w tym momencie funkcja staje się nieciągłą, a zmienne niezależne stają się stałemi; ten matematyczny zwiazek odegra ważną rolę w części zastosowanej niniejszej publikacji. Również należy zauważyć, że z chwilą gdy $u$ przybierze wartość zera, to wtedy mówimy o bryłach całkowitych i wzór 5 przechodzi we wzór 3.

Następnie biorąc pod uwagę tę okoliczność, że całkowite bryły drzew nie mogą wykazywać wykładników kształtu zbliżonych do zera t. zn. swym całkowitym kształtem nie zbliżają się do walca, lecz raczej do paraboloidy i brył o bardziej zbieżystej budowie, a tylko części strzały, wykazujące dla $u$ wartości zbliżone do 1, zbliżają się swym kształtem do walca czyli: bryły dendrometryczne o kształcie podwalcowatym tj. o $r$ zbliżonem do zera muszą być w praktyce bryłami ściętymi o $u$ zbliżonem do jednostki.

Dla celów praktycznych ważnem jest zatem ustalenie krańcowej wartości dla $r$, którą całkowite strzały drzew mogłyby wykazywać. Ponieważ jednak dotychczas nie mamy przeprowadzonych dokładnych badań co do ściślejszego interwału wykładnika kształtu drzew leśnych, a nawet w literaturze nie znajdujemy jeszcze opracowania ściślejszych metod co do sposobu przeprowadzenia tych badań,[2]) dlatego obecnie nie pozostaje nic innego, jak dla naszych teoretycznych badań przyjąć od-

[2]) Metody oznaczania dendrometrycznych elementów kształtu są w toku opracowania i zostaną wkrótce opublikowane.

powiednią krańcową wartość na $r$. Opierając się na obserwacji drzew zdaje się uzasadnionem być założenie, że $r$ całkowitych strzał drzew leśnych nie będzie mniejsze od wartości 0·5 tj. strzały drzew w swej całkowitej wielkości nie będą co do kształtu pełniejsze od najpełniejszej nadparaboloidalnej bryły dendrometrycznej.

Powyższe interwały zmiennych $r$ (0, 3·5) i $u$ (0,1) nazwijmy ogólnymi interwałami w odróżnieniu do ściślejszych interwałów, gdyby nam chodziło o węższe amplitudy wahań zmiennych $r$ i $u$ w ramach ogólnych interwałów.

Wyrażając objętość brył dendrometrycznych w odsetkach objętości walca podstawowego tj. dzieląc prawą stronę równania 5 przez $Gh$ i mnożąc przez 100 otrzymujemy wyrażenie, które nam umożliwia bliższe poznanie $F(r, u)$, a mianowicie:

$$100 \cdot F(r, u) = \frac{100}{r+1} \cdot \frac{1 - u^{2r+2}}{1 - u^{\frac{2}{r}}} \qquad \ldots\ldots 6$$

Wzór powyższy obliczamy przez kolejne podstawianie w odstopniowaniu wynoszącem 0·1 wartości na $r$ i $u$, zawartych w powyżej ustalonych ogólnych interwałach; otrzymane w ten sposób wartości wzoru 6 są tabelarycznie zestawione według argumentów $r$ i $u$ w tabeli nr. 1. Z tego zestawienia widzimy, że objętość brył dendrometrycznych jest w prostym stosunku do $u$ a w odwrotnym do $r$ i tak np. wartość wzoru 6 maleje z 100% dla $r = 0$ na 22·22% dla $r = 3{\cdot}5$ w odniesieniu do brył całkowitych tj. przy $u = 0$, natomiast zmienia się powyższa wartość dla $r = 3{\cdot}5$ z 22·22% przy $u = 0$ na 90·26% przy $u = 0{\cdot}9$, a na 100% przy $u = 1$, rozumie się, że dla $u = 1$ musi $r$ przybrać wartość zera, czyli że mamy do czynienia z walcem, dla którego otrzymujemy wartość 100%.

Nauka o dendrometrji wyprowadza wzory stereometryczne, które podają ściśle objętość bądźto wszystkich czterech (np. wzory Rieckiego, Simonyego, Breymanna) bądźto niektórych z zasadniczych brył dendrometrycznych, jak wzory Smaljana i Hubera walec i paraboloidę, wzór Hossfelda walec, paraboloidę i stożek zwykły. Wzory te noszą nazwę wzorów ksylometrycznych i przeszły (zwłaszcza

odznaczające się prostotą i łatwością wykonania) do praktycznej dendrometrji. Wzory ksylometryczne dadzą się również — jak się o tem w części zastosowanej przekonamy — analogicznie do ścisłych wzorów na objętość konoid przedstawić jako iloczyny z objętości walca podstawowego i funkcji o dwu zmiennych $r$ i $u$ względnie jednej tylko zmiennej $r$ (dla brył całkowitych) lub $u$ (wzór Smaljana). Oznaczając zatem objętość brył dendrometrycznych, obliczoną na podstawie wzorów ksylometrycznych przez $V'$ możemy napisać:

$$V' = Gh \cdot \Phi(r, u) \quad \ldots\ldots\ldots 7$$

Wzory ksylometryczne podają objętość przejściowych brył dendrometrycznych i ewentualnie niektórych z zasadniczych z błędami stałemi, których wielkość, abstrahując od rodzaju błędów, zależna jest od danego wzoru ksylometrycznego oraz od $r$ i $u$. Dla poznania zatem i charakterystyki dokładności, z jaką dany wzór ksylometryczny oznacza miąższość strzał drzew, ważną jest rzeczą określić wielkość błędów, z którymi dany wzór podaje objętość tak brył zasadniczych jak też przejściowych, czyli poznać przebieg tych błędów.

Ponieważ w dotychczasowej literaturze dendrometrycznej nie znajdujemy badań nad dokładnością wzorów ksylometrycznych w odniesieniu do brył przejściowych ani też ujęcia czyto cyfrowego - czyto graficznego całokształtu przebiegu błędów odnoszących się do wszystkich brył dendrometrycznych, przeto zadaniem niniejszej publikacji będzie podać w pierwszej linji ogólną teorję obliczania wielkości poszczególnych rodzajów błędów stałych czyli teorję dokładności wzorów ksylometrycznych, następnie zastosować tę teorję do najważniejszych z tych wzorów tj. Smaljana, Hubera, Hossfelda, Rieckego, Simonyego i Breymanna, a wkońcu przedstawić graficznie przebieg wielkości przynajmniej niektórych z wyprowadzonych błędów odnoszących się tak do całkowitych jak też do ściętych brył.

Przechodząc do szczegółowego przedstawienia wspomnianej teorji konieczną jest rzeczą podać klasyfikację błędów, które w naszych badaniach występować będą.

## 2. Klasyfikacja błędów stałych.

Typem[3]) błędów występujących w naszych zagadnieniach są błędy systematyczne czyli regularne względnie stałe t. j. błędy mające za źródło swe nie dający się usunąć, a na uzyskane wyniki w sposób prawidłowy działający błąd przyrządu względnie metody, a w naszym wypadku wzoru.

Objętość danej bryły dendrometrycznej obliczoną na podstawie wzoru 5 względnie 3 zowiemy rzeczywistą, którą oznaczyliśmy przez $V$, natomiast objętość obliczoną zapomocą dotyczącego wzoru ksylometrycznego i oznaczoną przez $V'$ uważamy za przybliżoną; ażeby zatem oznaczyć dokładność danego wzoru ksylometrycznego możemy objętości rzeczywistą i przybliżoną porównywać ze sobą bądźto przez odejmowanie bądźto przez dzielenie czyli tworząc stosunek bądźto arytmetyczny bądźto geometryczny, dalej ważnem jest poznanie warunków, dla których następują największe bezwzględne wartości danych błędów, w końcu nieodzowną jest rzeczą podać miarę dokładności, z jaką oznaczać możemy miąższość większej grupy drzew. Widzimy zatem, że do scharakteryzowania dokładności wzorów ksylometrycznych musimy posługiwać się kilkoma rodzajami błędów, których systematyczne ugrupowanie czyli klasyfikację podajemy.

### *a) Błąd absolutny.*

Różnicę między objętością przybliżoną i rzeczywistą nazywamy błędem absolutnym ($\Delta v$) czyli w kształcie wzoru:

$$\Delta v = V' - V \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8$$

$\Delta v$ podaje wielkość błędu, który musimy odjąć od wartości przybliżonej, ażeby otrzymać objętość rzeczywistą. Dodatni znak przy $\Delta v$ mówi, że dany wzór podaje w danym wypadku objętość za wielką, a ujemny znak przy $\Delta v$ jest dowodem, że obliczona objętość jest w porównaniu z rzeczywistą za małą.

[3]) Patrz: T. Wielgosz. Pomiar drzew na podstawie metody najmniejszych kwadratów. Roczniki Nauk Rolniczych. Tom IX. Zeszyt 1. Rok 1923.

Możnaby również błąd absolutny obliczać jako różnicę między $V$ a $V'$, w którym to wypadku znak dodatni przy $\Delta v$ wskazywałby, że dany wzór podaje objętość za małą i odwrotnie, co nie byłoby zgodnem z duchem języka i dlatego też dla pojęcia błędu absolutnego ustaliliśmy powyższą definicję.

Uwzględniając wzory 5 i 7 otrzymujemy na błąd absolutny wyrażenie:

$$\Delta v = Gh\{\Phi(r, u) - F(r, u)\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8a$$

Ażeby otrzymać wartości na $\Delta v$, nadające się do porównywania, staramy się uwolnić od czynnika $Gh$ w ten sposób, że błąd absolutny wyrażamy w odsetkach objętości walca podstawowego i oznaczamy go przez $\alpha$:

$$\alpha = \{\Phi(r, u) - F(r, u)\}\, 100 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 9$$

Dla brył całkowitych wzór ten redukuje się do wyrażenia:

$$\alpha' = \{\varphi(r) - f(r)\}\, 100 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 9a$$

*b) Błędy procentowe.*

Błędy procentowe przedstawiają procentowy stosunek błędu absolutnego do jednej z dwóch danych wartości na objętość; zależnie zatem od tego, czy wartość przybliżona $V'$ czy rzeczywista $V$ tworzy mianownik błędu procentowego, rozróżniamy zasadniczy błąd procentowy ($p_1$), i wtórny błąd procentowy ($p_2$), z których pierwszy oznacza, o jaki procent swej objętości musi być objętość przybliżona poprawiona, ażeby otrzymać wartość rzeczywistą, a drugi określa o jaki procent swej objętości jest rzeczywista objętość błędnie podana.

Z powyższych definicyj widzimy, że w praktyce będzie zasadniczy błąd procentowy miał większe znaczenie.

We wzorach na błędy procentowe występować będzie iloraz objętości ($\sigma$), przedstawiający stosunek objętości rzeczywistej do przybliżonej:

$$\sigma = \frac{V}{V'} = \frac{F(r, u)}{\Phi(r, u)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 10$$

względnie dla brył całkowitych t. j. dla $u=0$:

$$\sigma'=\frac{f(r)}{\varphi(r)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 10\,a$$

Błędy procentowe we formie wzorów przedstawiają się następująco:

Zasadniczy błąd procentowy oblicza się jako stosunek procentowy błędu absolutnego do objętości przybliżonej:

$$p_1=\frac{V'-V}{V'}100=\left(1-\frac{V}{V'}\right)100$$

czyli wprowadzając $\sigma$ lub wymienione we wzorach 5 i 7 funkcje:

$$p_1=(1-\sigma)\,100=\left\{1-\frac{F(r,u)}{\Phi(r,u)}\right\}100 \quad \ldots\ldots \quad 11$$

względnie dla brył całkowitych

$$p'_1=(1-\sigma')100=\left\{1-\frac{f(r)}{\varphi(r)}\right\}100 \quad \ldots \quad 11\,a$$

Analogicznie dochodzimy do wzorów na wtórny błąd procentowy:

$$p_2=\left(\frac{1}{\sigma}-1\right)100=\left\{\frac{\Phi(r,u)}{F(r,u)}-1\right\}100 \quad \ldots \quad 12$$

względnie dla brył całkowitych:

$$p'_2=\left(\frac{1}{\sigma'}-1\right)100=\left\{\frac{\varphi(r)}{f(r)}-1\right\}100 \quad \ldots \quad 12\,a$$

### *c) Błędy maksymalne i kulminacyjne.*

Badając analitycznie funkcję przedstawiającą przebieg danego rodzaju błędów dotyczącego wzoru ksylometrycznego w określonych przez nas interwałach ogólnych obu argumentów zauważymy, że dana funkcja wykazuje albo punkty kulminacyjne albo, jeśli kulminacja w danych interwałach nie występuje, punkty, dla których dana funkcja posiada największą lub najmniejszą szczególną swą wartość, a dla których przynajmniej jeden z argumentów przedstawia wartość końcową swego interwału.

Największą wartość dodatnią i najmniejszą wartość ujemną[4]) danej funkcji, przedstawiającej przebieg odnośnego błędu w interesujących nas interwałach swych zmiennych niezależnych nazywamy b ł ę d e m m a k s y m a l n y m d o d a t n i m względnie u j e m n y m. Błędy te maksymalne mogą występować albo jako k u l m i n a c j a albo jako w a r t o ś ć k r a ń c o w a, jeśli w tym drugim wypadku przynajmniej jedna z dwu zmiennych niezależnych występuje jako wartość krańcowa swego interwału.[5])

Wartość błędu odpowiadającą danemu punktowi kulminacyjnemu funkcji tego błędu nazywamy b ł ę d e m k u l m i n a c y j n y m; zatem błąd maksymalny występujący jako kulminacja jest największym co do swej bezwzględnej wartości błędem kulminacyjnym o danym znaku algebraicznym.

Przy obliczeniu wartości błędów kulminacyjnych i maksymalnych najważniejszą rzeczą jest oznaczenie wartości zmiennych niezależnych, które spełniają daną funkcję błędów do jej wartości kulminacyjnej względnie maksymalnej. Przy funkcjach błędów o jednej zmiennej niezależnej przedstawia się wyszukiwanie wartości argumentu, która prowadzi do kulminacyjnej względnie maksymalnej wartości funkcji stosunkowo łatwo, a mianowicie bądźto przez zastosowanie teorji o minimum i maximum, jeśli chodzi o kulminację, bądźto przez wywnioskowanie z przebiegu krzywej błędu, że maksymalna wartość funkcji następuje dla krańcowej wartości zmiennej niezależnej.

Trudniej przedstawia się rzecz przy funkcjach błędów o dwu zmiennych niezależnych, gdyż z powodu zbyt skomplikowanego kształtu funkcji błędów naszych wzorów ksylometrycznych, zastosowanie teorji o minimum i maximum nie da się przeprowadzić, wobec czego pozostaje szukanie wartości argumentów przez próbowanie obliczając wartości danej funkcji dla szeregu par zmien-

[4]) Przez „najmniejszą wartość ujemną" należy rozumieć szczególną wartość funkcji błędów, która przedstawia największą wartość bezwzględną ze wszystkich rozważanych ujemnych wartości funkcji.

[5]) Jeśli przebieg danego błędu wykazywałby wartości albo tylko dodatnie, albo tylko ujemne, to interesowałyby nas również błędy minimalne, przedstawiające najmniejszą bezwzględną wartość takiej funkcji błędów; błędy omawianych w niniejszej publikacji wzorów ksylometrycznych wykazują w interesujących nas interwałach wartości tak dodatnie jak też ujemne.

nych niezależnych, a kulminujące względnie maksymalne wartości funkcji przyjmując za odpowiednie błędy.

Obliczenie jednak omawianych rodzajów błędów u wyżej wymienionych sześciu wzorów ksylometrycznych ogranicza się tylko do badania funkcji o jednej zmiennej, gdyż jak z przebiegu błędów, obliczonych w części zastosowanej zobaczymy, największe wartości błędów występują dla brył całkowitych tj. przy $u = 0$.

Symbolicznie będziemy oznaczać błędy maksymalne wyrażeniem „max" z następującym nawiasem owalnym, jeśli chodzi o błąd maksymalny występujący jako kulminacja, lub z nawiasem prostokątnym, jeśli mowa o błędzie maksymalnym, przedstawiającym się jako wartość krańcowa; w nawiasie zaś umieszczać będziemy oznaczenie danego rodzaju błędu z odpowiednim znakiem algebraicznym. Wartość argumentów, dla których błąd maksymalny występuje, podana będzie u dołu nawiasu; ponieważ jednak — jak już wyżej podkreśliliśmy — błędy maksymalne w naszych dalszych rozważaniach w części zastosowanej będą się odnosić do brył całkowitych, dlatego określenie $u = 0$ u dołu nawiasu można opuszczać i tak np. u wzoru Hubera posiada maksymalny błąd absolutny dodatni, występujący jako kulminacja dla $r = 0{\cdot}3614$ wartość: $4{\cdot}39\%$, a ujemny występujący jako wartość krańcowa dla $r = 3{\cdot}5$ osiąga wartość: $-13{\cdot}38\%$ objętości walca podstawowego, co symbolicznie piszemy:

$$\max\,(+\acute{a})_{r=0{\cdot}3614} = 4{\cdot}39\% \text{ i } \max\,[-a']_{r=3{\cdot}5} = -13{\cdot}38\%$$

Dla oznaczenia błędów kulminacyjnych, które nie są równocześnie błędami maksymalnymi w naszych ogólnych interwałach zmiennych, używać będziemy zamiast symbolu „max" symbol „kul" z nawiasem owalnym.

### *d) Błędy przeciętne.*

Wzory ksylometryczne służą w praktyce przeważnie do oznaczania łącznej miąższości większej grupy drzew bądźto tworzących pewne sortymenty bądźto złączonych według pewnych zasad dendrometrycznych, dlatego ważną jest rzeczą poznać miarę dokładności, z jaką oznaczać możemy miąższość większej

grupy drzew, których wykładnik kształtu i iloraz średnic krańcowych wahają się w pewnych w danym wypadku miarodajnych interwałach.

Jako miernik teoretycznej dokładności, jaką uzyskujemy przy pomiarze objętości większej grupy brył dendrometrycznych służyć będzie przeciętny błąd, który w następstwie omawiać będziemy. Celem łatwiejszego uzmysłowienia sobie pojęcia błędu przeciętnego zajmiemy się wpierw tym rodzajem błędów systematycznych w odniesieniu do funkcji o jednej zmiennej przyjmując każdorazowo zależnie od danego zagadnienia dla drugiej zmiennej wartość stałą, a następnie dopiero rozszerzymy nasze badania na fukcje błędów o dwu zmiennych niezależnych.

α) Jeśli dany błąd wyrażony jest za pomocą funkcji o jednej zmiennej np. $\psi(r)$ lub $\psi_1(u)$ to geometrycznie otrzymujemy jako przebieg błędu linję przeważnie krzywą, przyczem dla danego ściślejszego interwału argumentu zawartego w granicach np. $r = r_1$ i $r = r_2$ względnie $u = u_1$ i $u = u_2$ obliczają się krańcowe rzędne $\psi(r_1)$ i $\psi(r_2)$ względnie $\psi_1(u_1)$ i $\psi_1(u_2)$, które wraz z osią odciętych i daną linją błędu, wyrażoną analitycznie przez $\psi(r)$ względnie $\psi_1(u)$, zamykają powierzchnię, którą obliczyć możemy zapomocą wzoru na kwadraturę:

$$\int_{r_1}^{r_2} \psi(r)\,dr \quad \text{względnie} \quad \int_{u_1}^{u_2} \psi_1(u)\,du$$

Zamieniwszy tę powierzchnię na prostokąt o podstawie $r_2 - r_1$ względnie $u_2 - u_1$ otrzymujemy wysokość prostokąta, która przedstawia nam żądany błąd przeciętny wobec czego b ł ą d p r z e c i ę t n y przy funkcji błędu o jednej zmiennej przedstawia się jako całka oznaczona z funkcji błędu o granicach żądanego interwału podzielona przez różnicę wartości krańcowych tegoż interwału[6]).

[6]) W wypadku, kiedy krzywa błędu przecina oś odciętych mamy do czynienia z wielkościami o różnych znakach algebr., zatem błędy przeciętne przy błędach systematycznych uwzględniają znaki algebraiczne poszczególnych wartości odnośnych błędów, (w przeciwieństwie do błędów przeciętnych przy błędach przypadkowych, które obliczają się z absolutnych wartości odnośnych błędów).

Oznaczając błąd przeciętny przez t z następującym nawiasem, w którym umieszcza się oznaczenie danego rodzaju błędu, oraz z podaniem u dołu i góry nawiasu granic ściślejszego interwału zmiennej, o którą nam w danym wypadku chodzi, jak też umieszczeniem pośrodku tych granic stałej wartości drugiej zmiennej, otrzymujemy wzór ogólny na błąd przeciętny przy funkcji o jednej zmiennej n. p. dla zasadniczego błędu procentowego u brył całkowitych:

$$t(p_1)\begin{matrix} r=r_2 \\ u=0 \\ r=r_1 \end{matrix} = \frac{1}{r_2 - r_1} \int_{r_1}^{r_2} \psi(r)\, dr \quad . \; . \; . \; . \; 13$$

Obliczenie występujących we wzorach na błędy przeciętne całek oznaczonych napotyka przeważnie na znaczne trudności, dlatego jesteśmy często zmuszeni posługiwać się sposobami przybliżonymi do obliczenia powierzchni, którą zamieniamy na prostokąt, jak n. p. wzorem trapezowym, polegającym na podzieleniu danej powierzchni na wązkie paski, których powierzchnie oblicza się jako trapezy, i zesumowaniu otrzymanych powierzchni poszczególnych pasków.

Dzieląc interwał $r_2 - r_1$ względnie $u_2 - u_1$ na pewną ilość równych części, obliczając dla punktów podziału szczególne wartości danej funkcji błędów i przyjmując stosownie do przyjętego przy obliczeniach tabelarycznych zestawień, że najmniejsza działka podzielonego interwału wynosi 0·1 oraz równocześnie zastępując, celem oznaczenia użycia sposobu przybliżonego, w symbolu na błąd przeciętny nawias owalny nawiasem prostokątnym, otrzymujemy dla błędu przeciętnego n. p. błędu absolutnego wyrażonego w odsetkach objętości walca podstawowego dla brył całkowitych wzór:

$$t[\alpha]\begin{matrix} r=r_2 \\ u=0 \\ r=r_1 \end{matrix} = \frac{0{\cdot}1}{r_2 - r_1} \left\{ \frac{1}{2} [\psi(r_1) + \psi(r_2)] + \psi(r_1 + 0{\cdot}1) + \psi(r_1 + 0{\cdot}2) + \right.$$

$$\left. + \psi(r_2 - 0{\cdot}1) \right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; 13\,a$$

$$= \frac{0{\cdot}1}{r_2 - r_1}\left\{\frac{1}{2}\sum \psi\left(r = \frac{r_2}{r_1}\right) + \sum \psi\left(r \neq \frac{r_2}{r_1}\right)\right\}^{7}) \quad . \quad 13\,b$$

t. z. błąd przeciętny danego rodzaju błędu, wyrażonego przez funkcję o jednej zmiennej, obliczony zapomocą wzoru trapezowego równa się sumie algebraicznej z połowy wartości funkcji błędu dla krańcowych wartości interwału i z pełnych wartości funkcji dla innych punktów podziału danego interwału zmiennej niezależnej, podzielonej przez różnicę krańcowych wartości interwału oraz pomnożonej przez najmniejszą działkę podzielonego interwału tj. 0·1.

β) Jeżeli wzór na dany rodzaj błędów przedstawia funkcję o dwu zmiennych tj. $\Psi(r, u)$ to do pojęcia błędu przeciętnego dochodzimy w ten sposób, że uzmysławiamy sobie bryłę, której objętość określa się następującą podwójną całką określoną:

$$\int_{r_1}^{r_2} dr \int_{r_1}^{r_2} \Psi(r, u)\, du,$$

a następnie dzielimy otrzymaną objętość przez powierzchnię prostokąta o bokach $r_2 - r_1$ i $u_2 - u_1$ tj. zamieniamy bryłę na prostopadłościan, którego podstawą jest prostokąt o bokach odpowiadających ściślejszym interwałom zmiennych $r$ i $u$, a którego wysokość przedstawia żądany błąd przeciętny.

Zatem błąd przeciętny np. absolutnego błędu wyrażonego w odsetkach objętości walca podstawowego dla ściślejszych interwałów $r = r_1$ i $r = r_2$ oraz $u = u_1$ i $u = u_2$ określa się zapomocą ogólnego wzoru

$$t(\alpha)_{\substack{r = r_2,\ u = u_2 \\ r = r_1,\ u = u_1}} = \frac{1}{(r_2 - r_2)(u_2 - u_1)} \int_{r_1}^{r_2} dr \int_{u_1}^{u_1} \Psi(r, u)\, du \quad . \quad . \quad 14$$

---

[7]) Symbol $\sum \psi\left(r = \frac{r_1}{r_2}\right)$ oznacza sumę dwóch szczególnych wartości funkcji $\psi(r)$ dla $r = r_1$ i $r = r_2$; symbol zaś $\sum \psi\left(r \neq \frac{r_1}{r_2}\right)$ oznacza sumę szczególnych wartości funkcji błędów dla $r$ obejmującego przy danem odstopniowaniu wszystkie wartości zawarte między $r_1$ i $r_2$ z wyłączeniem wartości krańcowych $r_1$ i $r_2$.

t. zn. wzór na przeciętny błąd danego rodzaju błędów stałych, wyrażonych przez funkcję błędów o dwóch zmiennych, przedstawia się jako podwójna całka oznaczona o granicach krańcowych wartości ściślejszych interwałów zmiennych $r$ i $u$ z funkcji błędu podzielona przez iloczyn z różnic krańcowych wartości interwałów.

Obliczenie powyższej podwójnej całki odbywa się metodą przybliżoną, polegającą na tem, że dane interwały $r_2 - r_1$ i $u_2 - u_1$ dzielimy na pewną ilość równych części i dla poszczególnych par wartości argumentów tych podziałów obliczamy szczególne wartości funkcji błędów, przez co otrzymujemy w danej bryle szereg wysokości, z których najpierw za pomocą wzoru trapezowego obliczamy powierzchnie przekrojów w równych od siebie odległościach się znajdujących i równoległych do jednej pary ścian prostopadłych do podstawy, a następnie z tych powierzchni przekrojów obliczamy za pomocą wzoru znanego w dendrometrji pod nazwą wzoru sekcyjnego opartego na wzorze ksylometrycznym Smaljana objętość całej bryły. Zastosowanie tego wzoru sekcyjnego do obliczenia objętości bryły polega na założeniu, że całą bryłę dzielimy na wązkie warstwy, których objętość obliczamy jako iloczyn z grubości i średniej arytmetycznej powierzchni podstaw danej warstwy, które to założenie przy małej grubości warstw jest uzasadnione.

Zatem w myśl tej metody przybliżonej wyprowadzenie ogólnego wzoru na objętość wspomnianej bryły przedstawia się następująco:

Bryłę funkcji błędów o dwu zmiennych $r$ i $u$ w interwałach $(r_1, r_2)$ i $(u_1, u_2)$ dzielimy np. na $m$ warstw o grubości $\varepsilon$ i o podstawach: $P_0, P_1, P_2 \ldots . P_m$, z których każda powierzchnia podzielona jest na $n$ pasków o szerokości $\delta$ i o bokach: $a_0, a_1, a_2 \ldots . a_n$ w przekroju $P_0$; $b_0, b_1, b_2 \ldots . b_n$ w przekroju $P_1$; $c_0, c_1, c_2 \ldots . c_n$ w przekroju $P_2$; $l_0, l_1, l_2 \ldots . l_n$ w przekroju $P_{m-1}$; $m_0, m_1, m_2 \ldots . m_n$ w przekroju $P_m$.

Na podstawie wzoru trapezowego obliczamy powierzchnie poszczególnych przekrojów:

$$P_0 = \delta \left| \frac{1}{2}(a_0 + a_n) + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} \right|$$

$$P_1 = \delta\left\{\frac{1}{2}(b_0 + b_n) + b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1}\right\}$$

$$P_2 = \delta\left\{\frac{1}{2}(c_0 + c_n) + c_1 + c_2 + \ldots + c_{n-1}\right\}$$

. . . . . .

$$P_{m-1} = \delta\left\{\frac{1}{2}(l_0 + l_n) + l_1 + l_2 + \ldots + l_{n-1}\right\}$$

$$P_m = \delta\left\{\frac{1}{2}(m_0 + m_n) + m_1 + m_2 + \ldots + m_{n\ 1}\right\}$$

Objętość bryły oblicza się zapomocą wzoru:

$$V = \varepsilon\left\{\frac{1}{2}(P_0 + P_m) + P_1 + P_2 + \ldots + P_{m-1}\right\}$$

Podstawiając powyżej otrzymane wartości na powierzchnie przekrojów w ostatnim wzorze otrzymujemy:

$$V = \varepsilon\delta\left\{\frac{1}{4}[a_0 + a_n + m_0 + m_n] + \frac{1}{2}[a_1 + a_2 + \ldots a_{n-1} + \right.$$
$$+ b_0 + b_n + c_0 + c_n + \ldots + l_0 + l_n + m_1 + m_2 + \ldots m_{n-1}] +$$
$$+ b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1} + c_1 + c_2 + \ldots + c_{n-1} + \ldots +$$
$$\left. + l_1 + l_2 + \ldots + l_{n-1}\right\}$$

Jeśli otrzymaną w ten sposób objętość bryły podzielimy przez iloczyn z interwałów zmiennych: $(r_2 - r_1)\cdot(u_2 - u_1)$, dalej jeśli weźmiemy pod uwagę, że w naszych późniejszych obliczeniach najmniejsza działka obydwóch interwałów wynosi: $\varepsilon = \delta = 0{\cdot}1$ i na miejsce powyższych oznaczeń wprowadzimy symbole sumy funkcji błędu z analogicznym określeniem interwałów, jakto miało miejsce przy funkcji błędu o jednej zmiennej, otrzymujemy następujący wzór na przeciętny błąd np. dla zasadniczego błędu procentowego w interwałach $(r_1, r_2)$ i $(u_1, u_2)$:

$$t[p_1]_{r=r_1,\,u=u_1}^{r=r_2,\,u=u_2} = \frac{0{\cdot}01}{(r_2 - r_1)(u_2 - u_1)}\left\{\frac{1}{4}\sum\Psi\left(r = \tfrac{r_2}{r_1},\ u = \tfrac{u_2}{u_1}\right) + \right.$$
$$+ \frac{1}{2}\left[\sum\Psi\left(r = \tfrac{r_2}{r_1},\ u \neq \tfrac{u_2}{u_1}\right) + \sum\Psi\left(r \neq \tfrac{r_2}{r_1},\ u = \tfrac{u_2}{u_1}\right)\right] +$$
$$\left. + \sum\Psi\left(r \neq \tfrac{r_2}{r_1},\ u \neq \tfrac{u_2}{u_1}\right)\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \quad 14\,a$$

t. zn. błąd przeciętny danego rodzaju błędu, wyrażonego przez funkcję o dwu zmiennych, obliczony sposobem przybliżonym równa się iloczynowi z najmniejszych działek, na jakie interwały obu zmiennych zostały podzielone — w naszym wypadku 0·01 — podzielonemu przez iloczyn z różnic krańcowych wartości tych interwałów i pomnożemu przez sumę, złożoną z trzech grup szczególnych wartości danej funkcji błędów, a mianowicie pierwsza grupa z czynnikiem $\frac{1}{4}$ obejmuje sumę algebraiczną czterech szczególnych wartości funkcji błędu obliczonych dla krańcowych wartości interwałów zmiennych $r$ i $u$; druga grupa z czynnikiem $\frac{1}{2}$ obejmuje sumę algebraiczną tych wszystkich szczególnych wartości funkcji błędu, przy obliczaniu których posiada na przemian jedna z dwu zmiennych krańcowe wartości swego interwału, podczas gdy druga właśnie wszystkie inne wartości prócz dwu krańcowych swego interwału, a trzecia grupa z czynnikiem 1 obejmuje sumę algebraiczną reszty szczególnych wartości danej funkcji, przy obliczaniu których żadna z obu zmiennych nie posiada wartości krańcowych swego interwału.

Ze względu na cyfrowe zestawienie szczególnych wartości funkcyj poszczególnych błędów dla pojedyńczych wzorów ksylometrycznych zgrupowane w tabelach, dołączonych do niniejszej publikacji, możemy podać dla obliczenia przeciętnego błędu błędów, wyrażonych za pomocą funkcji o dwu zmiennych, następujący sposób obliczenia:

Zgrupowane szczególne wartości funkcji błędów dla danych ściślejszych interwałów $(r_1, r_2)$ i $(u_1, u_2)$ tworzą prostokąt liczb, ustawionych tak, że cztery liczby znajdujące się na wierzchołkach prostokąta liczb, przedstawiają pierwszą grupę liczb, których algebraiczną sumę dzielimy przez cztery; liczby tworzące boki prostokąta z wyłączeniem liczb wierzchołkowych dają drugą grupę liczb, których algebraiczną sumę dzielimy przez dwa; pozostałe liczby znajdujące się wewnątrz tego prostokąta liczb, tworzą trzecią grupę liczb. Sumę algebraiczną tych trzech grup liczb mnożymy przez 0·01 i dzielimy przez iloczyn z różnic wartości krańcowych interwałów zmiennych; otrzymany w ten sposób wynik jest żądanym przeciętnym błędem.

Zastosowanie jednak błędu przeciętnego do określania dokładności wzorów ksylometrycznych napotyka o tyle na trudności, że dotychczas — jak wyżej podkreślono — nie mamy przeprowadzonych dokładnych badań co do ściślejszego interwału wykładnika kształtu $r$ ani w odniesieniu do poszczególnych gatunków drzew, ani w zastosowaniu do pewnych grup drzew, złączonych według pewnych zasad dendrometrycznych.

Wobec tego zadaniem niniejszej publikacji zwłaszcza jej części zastosowanej w odniesieniu do błędów przeciętnych będzie przedstawić w jaki sposób odbywa się w konkretnym wypadku ścisłe obliczenie błędu przeciętnego danego rodzaju błędów i wykazać na cyfrowych przykładach, że wyniki obliczenia ścisłego są zgodne z wynikami, otrzymanymi sposobem przybliżonym; następnie celem utworzenia skali dokładności wzorów ksylometrycznych przyjmiemy na podstawie pewnych danych ściślejsze interwały zmiennych $r$ i $u$ i obliczymy błędy przeciętne dla poszczególnych rodzajów błędów dla wszystkich omawianych wzorów ksylometrycznych.

W wymienionym poprzednio w uwadze 1. podręczniku Langenbachera i Nosseka znajdujemy obliczenie wykładników kształtu dla poszczególnych 18 sekcji — długich po 1·6 m i wierzchołku o długości 2·9 m — strzały drzewa o całkowitej długości 31·7 m za pomocą znanego wzoru:

$$r = 2\frac{\log y_1 - \log y_2}{\log x_1 - \log x_2} \text{ względnie } r = \frac{\log g_1 - \log g_2}{\log x_1 - \log x_2}$$

Otrzymane, w myśl ostatniego wzoru pojęte, wykładniki kształtu wahają się w podanym przykładzie od $r = 0{\cdot}517$ do $r = 2{\cdot}304$, wobec czego możemy — abstrahując od rozważań nad trafnością takiego sposobu obliczenia wykładnika kształtu — przyjąć dla naszych późniejszych pokazowych przykładów, że ściślejszy interwał jest zawarty między $r_1 = 0{\cdot}5$ a $r_2 = 2{\cdot}3$.

Również możemy na podstawie obserwacji przyjąć, że stosunek średnic krańcowych dla kloców, spotykanych w praktyce, waha się w ściślejszym interwale od mniej więcej $u_1 = 0{\cdot}5$ do $u_2 = 0{\cdot}8$.

### 3. Ogólne twierdzenia o wzajemnym stosunku poszczególnych rodzajów błędów podstawowych.

Definicje błędu absolutnego i obydwóch odmian błędu procentowego opierają się na określeniach noszących piętno podstawowych pojęć, podczas gdy błędy kulminacyjne, maksymalne i przeciętne przedstawiają pewne fazy względnie tworzą niejako dalszą budowę poprzednich rodzajów błędów, dlatego możemy błędy absolutne i procentowe nazwać p o d s t a w o w y m i.

Zrównując wzory na błędy podstawowe z zerem i rozwiązując otrzymane w ten sposób równania, otrzymujemy wartości na $r$ względnie pary wartości na $r$ i $u$, dla których odnośne bryły dendrometryczne obliczają się zapomocą danego wzoru ksylometrycznego bez błędu, przyczem przekonujemy się, że następuje to dla tychsamych wartości argumentów równocześnie dla wszystkich rodzajów błędów podstawowych dotyczącego wzoru ksylometrycznego, gdyż dochodzimy we wszystkich wypadkach do tego samego warunku, a mianowicie do następujących równań:

$$\Phi(r, u) - F(r, u) = 0 \text{ względnie } \varphi(r) - f(r) = 0$$

Ażeby znaleść wartości argumentów, dla których występują kulminacyjne błędy absolutne, musimy pierwsze pochodne funkcyj błędów absolutnych zrównać z zerem i rozwiązać następujące równania:

$$\Phi'_r(r, u) - F'_r(r, u) = 0 \text{ i } \Phi'_u(r, u) - F'_u(r, u) = 0$$
$$\text{względnie } \varphi'(r) - f'(r) = 0$$

Ażeby znaleść wartości argumentów, dla których występują kulminacyjne błędy procentowe, musimy pierwsze pochodne funkcyj błędów procentowych zrównać z zerem, przyczem dla obydwóch odmian błędu procentowego dochodzimy do tychsamych równań, których pierwiastki przedstawiają żądane wartości argumentów. Równania te brzmią.

$$\Phi(r, u) F'_r(r, u) - F(r, u) \Phi'_r(r, u) = 0$$
$$\text{i } \Phi(r, u) F'_u(r, u) - F(r, u) \Phi'_u(r, u) = 0$$
$$\text{względnie } \varphi(r) f'(r) - f(r) \varphi'(r) = 0$$

Funkcje $F(r, u)$, $\Phi(r, u)$, $f(r)$, $\varphi(r)$ przedstawiają dla ustalonych przedtem interwałów ogólnych zmiennych $r$ i $u$ czynniki, przez które mnożymy objętości dotyczących walców podstawowych, ażeby otrzymać rzeczywiste względnie przybliżone objętości brył dendrometrycznych i ich części, wobec czego muszą one przedstawiać wartości dodatnie i z wyjątkiem zastosowania do walca, w którym to wypadku równają się jednostce, muszą być zawsze ułamkami właściwymi.

Opierając się na powyższych rozważaniach możemy ustalić następujące o g ó l n e t w i e r d z e n i a odnoszące się do podstawowych i kulminacyjnych błędów:

1. Rzeczywiste pierwiastki równania $\Phi(r, u) - F(r, u) = 0$ względnie $\varphi(r) - f(r) = 0$ przedstawiają te pary wartości na $r$ i $u$ względnie wartości na $r$, dla których dotyczące bryły dendrometryczne obliczają się za pomocą danego wzoru ksylometrycznego bez błędu tj. dla których błędy podstawowe są równe zeru.

2. Rzeczywiste pierwiastki równań:

$$\Phi'_r(r, u) - F'_r(r, u) = 0 \quad \text{i} \quad \Phi'_u(r, u) - F'_u(r, u) = 0$$

względnie

$$\varphi'(r) - f'(r) = 0$$

przedstawiają te pary wartości na $r$ i $u$ względnie $r$, dla których występują kulminacyjne błędy absolutne.

3. Rzeczywiste pierwiastki równań:

$$\Phi(r, u) F'_r(r, u) - F(r, u) \Phi'_r(r, u) = 0$$

$$\text{i } \Phi(r, u) F'_u(r, u) - F(r, u) \Phi'_u(r, u) = 0$$

względnie

$$(r) f'(r) - \varphi'(r) f(r) = 0$$

przedstawiają te pary wartości na $r$ i $u$ względnie na $r$, dla których otrzymujemy kulminacyjne błędy procentowe tak zasadnicze jak też wtórne.

Na podstawie twierdzeń 2 i 3 dochodzimy do wniosku, że kulminacja błędu absolutnego z jednej strony a procentowych

z drugiej nie następuje w zasadzie dla tychsamych wartości swych argumentów.

4. Z zasadniczych wzorów na pojęcia błędów podstawowych wynika, że

$$p_1 = \frac{\alpha}{\Phi(r, u)} \text{ względnie } p_1' = \frac{\alpha'}{\varphi(r)}$$

$$\text{i } p_2 = \frac{\alpha}{F(r, u)} \text{ względnie } p_2' = \frac{\alpha'}{f(r)}.$$

Ponieważ funkcje na przybliżone i rzeczywiste objętości brył dendrometrycznych są wartościami dodatnimi i z wyjątkiem zastosowania do walca, dla którego przybierają wartość jednostki, ułamkami właściwymi, dlatego wszystkie rodzaje błędów podstawowych posiadają dla tychsamych argumentów jednakowe znaki algebraiczne, a błędy procentowe są większe od błędu absolutnego, wyrażonego w odsetkach objętości walca podstawowego, o ile wogóle błędy podstawowe nie są równe zeru i z wyjątkiem wypadków, jak się w części zastosowanej przekonamy, tylko o teoretycznem znaczeniu, w których $f(0)$ będzie równała się jednostce, a $\alpha'$ będzie różne od zera.[8])

5. Ze wzorów 11 i 12 wynika wzór: $\frac{p_1}{p_2} = \sigma$, czyli $p_1 = \sigma p_2$, z czego wyłania się następująca dyskusja:

$\alpha$) jeśli $\sigma = 1$ tj. jeśli błąd absolutny równa się zeru, to wtedy $p_1 = p_2 = 0$

$\beta$) jeśli $\sigma > 1$ czyli błędy podstawowe są ujemne to $p_1 > p_2$

$\gamma$) jeśli $\sigma < 1$ czyli błędy podstawowe są dodatnie to $p_1 < p_2$.

Zatem wniosek:

Błędy podstawowe są sobie równe, jeśli się równają zeru; przy ujemnym znaku błędów podstawowych zasadniczy błąd procentowy jest większy od wtórnego, a przy dodatnim znaku wtórny jest większy od zasadniczego.

[8]) Patrz: Wtórny błąd procentowy u wzorów Smaljana, Hossfelda, Rieckego, Breymanna dla $r = 0$ i $u = 0$.

## II. CZĘŚĆ ZASTOSOWANA.

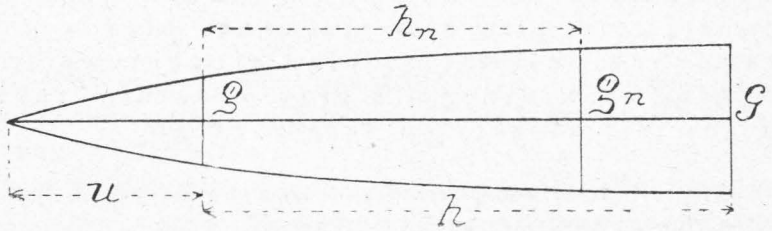
### 4. Ogólny wzór odnoszący się do wzajemnego stosunku przekrojów poprzecznych u brył dendrometrycznych.

Zastosowanie teorji, wyłuszczonej w części teoretycznej, do wzorów ksylometrycznych prowadzi do zbyt skomplikowanych funkcji, ażeby na podstawie algebraicznego rozwiązania utworzonych z tych funkcji równań można nad niemi dyskutować, rzecz się jednak staje rozwiązalną, jeśli sobie uprzytomnimy, że dla argumentów $r$ i $u$ ustaliliśmy ściśle ograniczone interwały ogólne. Ażeby zatem przedstawić przebieg wartości omawianych rodzajów błędów systematycznych u wzorów ksylometrycznych dla wszystkich brył dendrometrycznych i ich części, uciekamy się do szczegółowego obliczenia i tabelarycznych zestawień szczególnych wartości naszych funkcji błędów przez kolejne podstawianie w odstopniowaniu wynoszącem 0·1 na $r$ i $u$ wartości objętych odnośnymi interwałami ogólnymi.

Otrzymane tabelaryczne zestawienie cyfrowe zużytkujemy do sporządzenia wykresów, które prócz potwierdzenia słuszności twierdzeń ogólnych, podanych przy końcu części pierwszej są nam potrzebne przy ustalaniu nowych szczegółowych wniosków odnoszących się już specjalnie do poszczególnych wzorów ksylometrycznych.

Zanim jednak przejdziemy do szczegółowego omawiania przebiegu i charakterystyki błędów systematycznych u poszczególnych wzorów ksylometrycznych musimy podać wzór odnoszący się do wzajemnego stosunku przekrojów poprzecznych u brył dendrometrycznych, a mianowicie:

Matematyczna relacja między przekrojami krańcowymi i przekrojem dowolnym, leżącym między temi u brył dendrometrycznych:



Jeżeli przez $n$ oznaczymy stosunek odległości przekroju $g_n$ od podstawy $(G)$ do całkowitej długości $(h)$ ściętej bryły dendrometrycznej, to $h_n = (1-n)\,h$ a następnie:

$$g = A\,u^r\,,\quad g_n = A\,[u+(1-n)\,h]^r\,,\quad G = A\,(u+h)^r$$

z czego: $u = \left(\frac{g}{A}\right)^{\frac{1}{r}}$, $u+(1-n)\,h = \left(\frac{g_n}{A}\right)^{\frac{1}{r}}$, $u+h = \left(\frac{G}{A}\right)^{\frac{1}{r}}$.

Mnożąc $u$ przez $n$, a $u+h$ przez $1-n$; otrzymamy jako rezultat $u+(1-n)\,h$ czyli podstawiając za te wyrażenia prawe strony powyższych równań i mnożąc powstałe w ten sposób równanie przez $A^{\frac{1}{r}}$ dostaniemy jako rezultat żądany wzór:

$$n\,g^{\frac{1}{r}} + (1-n)\,G^{\frac{1}{r}} = g_n^{\frac{1}{r}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 15$$

względnie dla całkowitych brył dendrometrycznych tj. przy $g = 0$

$$g_n = (1-n)^r \cdot G \quad \ldots\ldots\ldots \quad 16$$

Dyskusja równań 15 i 16:

α) Jeżeli $n = \frac{1}{2}$, to: $g^{\frac{1}{r}} + G^{\frac{1}{r}} = 2g^{\frac{1}{r}}{}_{1/2}$ wzgl. $g_{1/2} = \left(\frac{1}{2}\right)^r G$ 17

β) „ $n = \frac{1}{3}$, „ $g^{\frac{1}{r}} + 2G^{\frac{1}{r}} = 3g^{\frac{1}{r}}{}_{1/3}$ „ $g_{1/3} = \left(\frac{2}{3}\right)^r G$ 18

γ) „ $n = \frac{2}{3}$, „ $2g^{\frac{1}{r}} + G^{\frac{1}{r}} = 3g^{\frac{1}{r}}{}_{2/3}$ „ $g_{2/3} = \left(\frac{1}{3}\right)^r G$ 19

δ) „ $n = \frac{1}{4}$, „ $g^{\frac{1}{r}} + 3G^{\frac{1}{r}} = 4g^{\frac{1}{r}}{}_{1/4}$ „ $g_{1/4} = \left(\frac{3}{4}\right)^r G$ 20

ε) „ $n = \frac{3}{4}$, „ $3g^{\frac{1}{r}} + G^{\frac{1}{r}} = 4g^{\frac{1}{r}}{}_{3/4}$ „ $g_{3/4} = \left(\frac{1}{4}\right)^r G$ 21

Po tych wstępnych rozważaniach przechodzimy do zastosowania naszej teorji do poszczególnych, wyżej wymienionych wzorów ksylometrycznych.

## 5. Wzór Smaliana

nosi w praktyce miano „kubikowania z końców" i wyraża się następującym wzorem matematycznym:

$$V' = \frac{1}{2}(G + g)\,h$$

gdzie $G$ oznacza przekrój podstawowy (w czole), $g$ przekrój górny (w czubie), a $h$ długość osi strzały drzewa.

Dla brył całkowitych przybrałby wzór ten wobec $g = 0$ następujący kształt:

$$V'' = \frac{1}{2}Gh$$

Wzór Smaljana przekształca się przez wyciągnięcie $G$ przed nawias i zastąpienie wyrażenia $\frac{g}{G}$ przez $u^2$:

$$V = Gh\left\{\frac{1}{2}(1 + u^2)\right\} \quad \ldots\ldots \quad 22$$

Przez odjęcie wzoru 5 od ostatniego względnie przez podzielenie wzoru 5 przez ostatni dochodzimy do wzoru na błąd absolutny ($\Delta v$) i na iloraz objętości ($\sigma$), a mianowicie

$$\Delta v = Gh\left\{\frac{1}{2}(1 + u^2) - \frac{1 - u^{\frac{2r+2}{r}}}{(r+1)\left(1 - u^{\frac{2}{r}}\right)}\right\} \quad \ldots \quad 23$$

względnie dla brył całkowitych:

$$\Delta v' = Gh\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{r+1}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 23\,a$$

$$\text{i } \sigma = \frac{2\left(1 - u^{\frac{2r+2}{r}}\right)}{(r+1)\,(1+u^2)\left(1 - u^{\frac{2}{r}}\right)} \quad \ldots\ldots \quad 24$$

względnie

$$\sigma' = \frac{2}{r+1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 24\,a$$

Na podstawie wzorów 23 do 24 a obliczamy błędy podstawowe dla wzoru Smaljana:

$\alpha$) Błąd absolutny wyrażony w odsetkach objętości walca podstawowego równa się:

$$\alpha = \left\{ \frac{1}{2}(1+u^2) - \frac{1-u^{\frac{2r+2}{r}}}{(r+1)\left(1-u^{\frac{2}{r}}\right)} \right\} 100 \quad \ldots \quad 25$$

względnie

$$\alpha' = \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{r+1} \right\} 100 \quad \ldots\ldots \quad 25\,a$$

$\beta$) Zasadniczy błąd procentowy

$$p_1 = \left\{ 1 - \frac{2\left(1-u^{\frac{2r+2}{r}}\right)}{(r+1)(1+u^2)\left(1-u^{\frac{2}{r}}\right)} \right\} 100 \quad \ldots \quad 26$$

względnie

$$p'_1 = \left\{ 1 - \frac{2}{r+1} \right\} 100 \ldots\ldots\ldots \quad 26\,a$$

$\gamma$) Wtórny błąd procentowy

$$p_2 = \left\{ \frac{(r+1)(1+u^2)\left(1-u^{\frac{2}{r}}\right)}{2\left(1-u^{\frac{2r+2}{r}}\right)} - 1 \right\} 100 \quad \ldots \quad 27$$

względnie

$$p'_2 = \left\{ \frac{1}{2}(r+1) - 1 \right\} 100 = 50\,(r-1) \ldots \quad 27\,a$$

Obliczenia i wykresy powyższych trzech rodzajów błędów znajdują się w tabelach 2, 3, 4 i tablicy I i uprawniają do następujących wniosków:

1. Ze wzrostem $u$ bezwzględna wartość błędów podstawowych maleje czyli największe co do wartości błędy wykazują bryły całkowite.

2. Błędy maksymalne błędów podstawowych występują jako wartości krańcowe.

3. Dla $r=0$ i $u=0$ błędy podstawowe wykazują następujące wartości: $\alpha' = -50\%$, $p'_1 = -100\%$, $p'_2 = -50\%$. Z początkowych rozważań części teoretycznej wiemy, że dla $r=0$ musi $u$ być równe 1 t. zn. że mamy wtedy do czynienia z walcem, dla którego błędy podstawowe równają się zeru; zjawisko to staje się zrozumialszem, jeśli sobie uprzytomnimy, że dany przebieg błędów odnosi się przy $u=0$ do brył całkowitych, podczas gdy walec o skończonej długości przedstawia bryłę ściętą, u której przekrój górny równa się podstawie.

Również z poprzednich rozważań wiemy, że jako krańcową wartość na wykładnik kształtu $r$ dla całkowitych brył dendrometrycznych ze względu na wymagania praktyki co do kształtu drzew leśnych przyjęliśmy $r=0{\cdot}5$ gdyż strzały drzew o kształcie podwalcowatym muszą być w praktyce brytami ściętemi, zatem o $u$ większem od zera, wobec tego przebieg błędów podstawowych będzie w rzeczywistości inny niż teoretycznie obliczony, tj. od mniej więcej $r=0{\cdot}5$ krzywa błędów będzie zbliżała się do początku układu spółrzędnych, a nie tworzyła skoków.

W analogicznych wypadkach będziemy mówili, że przebieg błędów danego wzoru ksylometrycznego wykazuje dla walca punkt nieciągły tworząc skoki o dotyczących teoretycznych wartościach, natomiast dla rzeczywistego przebiegu błędów przyjmować będziemy we wszystkich wypadkach jako największe możliwe wartości dla brył podwalcowatych te, jakie funkcja błędów posiada dla $u=0$ i $r=0{\cdot}5$.

4. Wtórny błąd procentowy przedstawia się dla brył całkowitych jako prosta.

W literaturze znajdujemy obliczenia wielkości błędu absolutnego w odniesieniu do stożka zwykłego i nejloidy w stanie ściętym; do tych samych wyników dochodzimy, jeśli we wzorze na $\Delta v$ podstawimy za $r$ wartość: 2 i 3:

Dla $r=2$ otrzymujemy $\Delta v = \frac{1}{6} Gh(1-u)^2$ t. zn. błąd absolutny w tym wypadku jest dodatni i wprost proporcjonalny do kwadratu uzupełnienia $u$ do jednostki czyli odwrotnie proporcjonalny do $u$.

Zastępując $u$ średnicami obliczymy: $\Delta v = \frac{1}{6}\frac{\pi h}{4}(D-d)^2$ tj. błąd absolutny, jaki popełniamy przy zastosowaniu wzoru Smaljana do stożka zwykłego, jest dodatni i wynosi $\frac{1}{6}$ objętości walca różnicy średnic krańcowych.

Dla $r=3$ oblicza się $\Delta v = \frac{1}{4}Gh(1-u^{2/3}-u^{4/3}+u^2)$ czyli prawie równe $(\doteq)\ \frac{1}{4}(1-u)^2$ względnie $\Delta v \doteq \frac{1}{4}\frac{\pi h}{4}(D-d)^2$ tj. w odniesieniu do nejloidy jest również dodatni i wynosi prawie $\frac{1}{4}$ objętości walca różnicy średnic krańcowych.

W ogólności możemy zatem powiedzieć, że błąd absolutny przy zastosowaniu wzoru Smaljana do brył dendrometrycznych jest, dla danej wartości na $r$, wprost proporcjonalny do różnicy średnic krańcowych i do długości danej części strzały czyli z tego wynika praktyczna reguła, że pełniejsze odcinki strzały mogą być dłuższe niż odcinki, których grubość szybko maleje, jeśli błąd w objętości ma pozostawać na tej samej wysokości.

Przebieg błędów podstawowych wzoru Smaljana jest następujący:

Dla walca wynoszą błędy podstawowe zero tworząc tak zwany punkt nieciągły o skokach, wykazujących następujące teoretyczne wartości: $(-\alpha')_{r=0} = -50\%$ objętości walca podstawowego, $(-p'_1)_{r=0} = -100\%$ objętości przybliżonej i $(-p'_2)_{r=0} = -50\%$ objętości rzeczywistej.[9]) Błędy podstawowe przebiegu błędów określonego jako rzeczywisty wykazują dla $r=0{\cdot}5$ i $u=0$ następujące wartości, przedstawiające równocześnie ujemne błędy maksymalne:

$$\max_{r=0{\cdot}5}[-\alpha'] = -16{\cdot}67\%,\quad \max_{r=0{\cdot}5}[-p'] = -33{\cdot}33\%,$$
$$\max_{r=0{\cdot}5}[-p'_2] = -25{\cdot}00\%.$$

[9]) Należy zapamiętać, że odsetek przy $\alpha$ odnosi się do objętości walca podstawowego, przy $p_1$ do objętości przybliżonej, a przy $p_2$ do objętości rzeczywistej; przy dalszych rozważaniach określenia te będą opuszczane.

*Błąd przeciętny.*

Ponieważ funkcje błędów, jakie popełniamy przy zastosowaniu wzoru S m a l j a n a, są stosunkowo proste i wobec tego umożliwiają w łatwy sposób obliczenie błędów przeciętnych sposobem ścisłym zapomocą całkowania, dlatego wykonamy kilka przykładów celem porównania z wynikami uzyskanymi sposobem przybliżonym, a dopiero następnie przystąpimy do przykładów, mających nam służyć do porównawczej charakterystyki omawianych wzorów ksylometrycznych.

Przykłady dające się obliczyć sposobem ścisłym:

$$1.\ t(\alpha)\ \begin{matrix} r=b \\ u=0 \\ r=a \end{matrix} = \frac{100}{b-a}\int_a^b \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r+1}\right)dr =$$

$$= \frac{100}{b-a}\left|\frac{1}{2}(b-a) - \frac{\log\left(\frac{b+1}{a+1}\right)}{\log e}\right|$$

przyczem $e$ jest zasadą logarytmów naturalnych; jeśli $a = 0{\cdot}5$ $b = 2{\cdot}3$, to:

$$t(\alpha)\ \begin{matrix} r=2{\cdot}3 \\ u=0 \\ r=0{\cdot}5 \end{matrix} = 50\left\{1 - \frac{2\log 2{\cdot}2}{1{\cdot}8\log e}\right\} = 6{\cdot}197\%$$

a sposobem przybliżonem na podstawie tabeli nr. 2:

$$t[\alpha]\ \begin{matrix} r=2{\cdot}3 \\ u=0 \\ r=0{\cdot}5 \end{matrix} = \frac{0{\cdot}1}{1{\cdot}8}\left\{\frac{1}{2}(19{\cdot}697 - 16{\cdot}667) + 139{\cdot}243 - 29{\cdot}511\right\} = 6{\cdot}180\%$$

$$2.\ t(p_1)\ \begin{matrix} r=b \\ u=0 \\ r=a \end{matrix} = \frac{100}{b-a}\int_a^b \left(1-\frac{2}{r+1}\right)dr = 100\left|1 - \frac{2\log\left(\frac{b+1}{a+1}\right)}{(b-a)\log e}\right|$$

$$t(p_1)\ \begin{matrix} r=2{\cdot}3 \\ u=0 \\ r=0{\cdot}5 \end{matrix} = 100\left\{1 - \frac{2\log 2{\cdot}2}{1{\cdot}8\log e}\right\} = 12{\cdot}394\%$$

$$t[p_1]\ \begin{matrix} r=2{\cdot}3 \\ u=0 \\ r=0{\cdot}5 \end{matrix} = 12{\cdot}361\%$$

$$3.\ t(p_2)\begin{matrix}r=b\\u=0\\r=a\end{matrix}=\frac{100}{2(b-a)}\int_a^b (r-1)\,dr=50\left\{\frac{1}{2}(b+a)-1\right\}$$

$$t(p_2)\begin{matrix}r=2{\cdot}3\\u=0\\r=0{\cdot}5\end{matrix}=50\left\{\frac{1}{2}(2{\cdot}3+0{\cdot}5)-1\right\}=20{\cdot}00\%$$

$$t[p_2]\begin{matrix}r=2{,}3\\u=0\\r=0{,}5\end{matrix}=20{\cdot}00\%$$

$$4.\ t(\alpha)\begin{matrix}u=b\\r=2\\u=a\end{matrix}=\frac{100}{6(b-a)}\int_a^b (1-u)^2\,du=$$

$$=\frac{100}{6}\left\{1-(b+a)+\frac{1}{3}(b^2+ab+a^2)\right\}$$

albo

$$=\frac{100}{18(b-a)}\left\{(1-a)^3-(1-b)^3\right\}$$

$$t(\alpha)\begin{matrix}u=1\\r=2\\u=0\end{matrix}=\frac{100}{18}=5{\cdot}56\%$$

$$t[\alpha]\begin{matrix}u=1\\r=2\\u=0\end{matrix}=0{\cdot}1\left\{\frac{1}{2}16{\cdot}667+47{\cdot}496\right\}=5{\cdot}58\%$$

$$5.\ t(p_1)\begin{matrix}u=b\\r=2\\u=a\end{matrix}=\frac{100}{b-a}\int_a^b\left(1-\frac{2}{3}\,\frac{1+u+u^2}{1+u^2}\right)du=$$

$$=\frac{100}{b-a}\int_b^a\left[1-\frac{2}{3}\left(1+\frac{u}{1+u^2}\right)\right]du=\frac{100}{3}\left\{1-\frac{\log\left(\frac{b^2+1}{a^2+1}\right)}{(b-a)\log e}\right\}$$

$$t(p_1)\begin{matrix}u=1\\r=2\\u=0\end{matrix}=\frac{100}{3}\left\{1-\frac{\log 2}{\log e}\right\}=10{\cdot}229\%$$

$$t[p_1]\begin{matrix}u=1\\r=2\\u=0\end{matrix}=0{\cdot}1\left\{\frac{1}{2}(6{\cdot}667+85{\cdot}467)\right\}=10{\cdot}213\%$$

$$6.\quad t(\alpha)\begin{matrix}u=b\\ r=3\\ u=a\end{matrix}=\frac{100}{b-a}\cdot\frac{1}{4}\int_a^b(1-u^{2/3}-u^{4/3}+u^2)\,du=$$

$$=\frac{100}{4(b-a)}\left\{b-a-\frac{3}{5}(b^{5/3}-a^{5/3})-\frac{3}{7}(b^{7/3}-a^{7/3})+\frac{1}{3}(b^3-a^3)\right\}$$

$$t(\alpha)\begin{matrix}u=1\\ r=3\\ u=0\end{matrix}=25\left\{1-\frac{3}{5}-\frac{3}{7}+\frac{1}{3}\right\}=7{\cdot}61\,\%$$

$$t[\alpha]\begin{matrix}u=1\\ r=3\\ u=0\end{matrix}=0{\cdot}1\left\{\frac{1}{2}\cdot 25+64{\cdot}583\right\}=7{\cdot}708\,\%$$

Jak z powyższych przykładów widzimy wyniki na błędy przeciętne, obliczone sposobem przybliżonym na podstawie tabel różnią się nieznacznie w miejscach dziesiętnych od wyników otrzymanych sposobem ścisłym przez całkowanie, wobec czego możemy przyjąć, że obliczanie błędów przeciętnych na podstawie tabel jest całkowicie wystarczające dla celów dendrometrycznych.

Nadmienić jeszcze należy, że gdybyśmy mieli cyfrowe dane co do częstości występowania pewnych kształtów strzał lub ich części dla pewnych wartości na $r$ i $u$, to przy obliczaniu błędów przeciętnych należałoby wprowadzić wagi dla poszczególnych szczegółowych wartości funkcji i zastosować wzór na kwalifikowaną średnią arytmetyczną.

*Przykłady dla celów porównawczych:*

Prócz tych trzech pierwszych przykładów obliczonych także sposobem ścisłym, a służących do celów porównawczych możemy również do tych samych celów użyć następujących przykładów, opierających się na funkcjach błędów o dwu zmiennych:

$$1.\quad t[\alpha]\begin{matrix}r=2{\cdot}3,\ u=0{\cdot}8\\ r=0{\cdot}5,\ u=0{\cdot}5\end{matrix}=\frac{0{\cdot}01}{1{\cdot}8\cdot 0{\cdot}3}\left\{\frac{1}{4}[5{\cdot}475-8{\cdot}818]+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}[46{\cdot}941-21{\cdot}308]+36{\cdot}454-11{\cdot}819\right\}=0{\cdot}6799\,\%=0{\cdot}680\,\%$$

$$2.\quad t[p_1]\begin{matrix}r=2{\cdot}3,\ u=0{\cdot}8\\ r=0{\cdot}5,\ u=0{\cdot}5\end{matrix}=\frac{0{\cdot}01}{0{\cdot}54}\left\{\frac{1}{4}[8{\cdot}450-13{\cdot}607]+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}[71{\cdot}257-31{\cdot}960]+51{\cdot}922-16{\cdot}870\right\}=0{\cdot}989\,\%$$

$$3.\ t[p_2]_{\substack{r=2{\cdot}3,\ u=0{\cdot}8\\ r=0{\cdot}5,\ u=0{\cdot}5}} = \frac{0{\cdot}01}{0{\cdot}54}\left\{\frac{1}{4}[9{\cdot}098 - 12{\cdot}296] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}[75{\cdot}807 - 30{\cdot}278] + 53{\cdot}398 - 16{\cdot}334\right\} = 1{\cdot}093\%$$

## 6. Wzór Hubera

nosi w praktyce nazwę „kubikowania ze środka" i wyraża się następującym wzorem matematycznym, który podaje przybliżoną objętość tak całkowitych jak też ściętych brył dendrometrycznych:

$$V' = g_{1/2} \cdot h$$

gdzie $g_{1/2}$ oznacza powierzchnię przekroju środkowego, a $h$ długość osi strzały drzewa względnie konoidy.

Na podstawie wzoru 17 wyrażamy przekrój środkowy przez krańcowe:

$$g_{1/2} = \left(\frac{1}{2}\right)^r \left(G^{\frac{1}{r}} + g^{\frac{1}{r}}\right)^r$$

i wprowadzając zmienną $u = \left(\frac{g}{G}\right)^{\frac{1}{2}}$ przekształcamy wzór Hubera na odpowiednią funkcję o dwu zmiennych $r$ i $u$:

$$V' = Gh\left(\frac{1}{2}\right)^r \left(1 + u^{\frac{2}{r}}\right)^r \quad \ldots\ldots 28$$

wobec czego błąd absolutny brzmi:

$$\Delta v = Gh\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^r \left(1 + u^{\frac{2}{r}}\right)^r - \frac{1 - u^{\frac{2r+2}{r}}}{(r+1)\left(1 + u^{\frac{2}{r}}\right)}\right\} \quad \ldots 29$$

względnie dla brył całkowitych:

$$\Delta v' = Gh\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^r - \frac{1}{r+1}\right\} \quad \ldots\ldots 29\,a$$

Również iloraz objętości wyraża się wzorem:

$$\sigma = \frac{2^r\left(1-u^{\frac{2r+2}{r}}\right)}{(r+1)\left(1+u^{\frac{2}{r}}\right)^r\left(1-u^{\frac{2}{r}}\right)} \quad \ldots\ldots 30$$

względnie dla brył całkowitych:

$$\sigma' = \frac{2^r}{r+1} \quad \ldots\ldots\ldots 30\,a$$

Zatem błędy podstawowe dla wzoru Hubera obliczają się:

$\alpha$) Błąd absolutny wyrażony w odsetkach objętości walca podstawowego

$$\alpha = \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^r\left(1+u^{\frac{2}{r}}\right)^r - \frac{1-u^{\frac{2r+2}{r}}}{(r+1)\left(1-u^{\frac{2}{r}}\right)}\right\} 100 \quad \ldots 31$$

a dla brył całkowitych

$$\alpha' = \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^r - \frac{1}{r+1}\right\} 100 \quad \ldots\ldots 31\,a$$

$\beta$) Zasadniczy błąd procentowy:

$$p_1 = \left\{1 = \frac{2^r\left(1-u^{\frac{2r+2}{r}}\right)}{(r+1)\left(1+u^{\frac{2}{r}}\right)^r\left(1-u^{\frac{2}{r}}\right)}\right\} 100 \quad \ldots 32$$

względnie:

$$p'_1 = \left\{-\frac{2^r}{r+1}\right\} 100 \quad \ldots\ldots 32\,a$$

$\gamma$) Wtórny błąd procentowy

$$p_2 = \left\{\frac{(r+1)\left(1+u^{\frac{2}{r}}\right)^r\left(1-u^{\frac{2}{r}}\right)}{2^r\left(1-u^{\frac{2r+2}{r}}\right)} - 1\right\} 100 \quad \ldots 33$$

względnie

$$p'_2 = \left\{\frac{r+1}{2^r} - 1\right\} 100 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 33\,a$$

Obliczenia i wykresy wszystkich trzech rodzajów błędów znajdują się w tabelach 5, 6, 7 i tablicy II i uprawniają do następujących wniosków:

1. Ze wzrostem $u$ bezwzględna wartość błędów podstawowych maleje.

2. Dodatni błąd kulminacyjny o znaczeniu teoretycznem dla brył całkowitych występuje dla $\alpha'$ przy $r = 0{\cdot}35$, a dla $p'_1$ i $p'_2$ przy $r = 0{\cdot}45$; rzeczywisty dodatni błąd maksymalny występuje dla przyjętego $r = 0{\cdot}5$.

Również należy podkreślić, że ze zwiększaniem się $u$ punkt kulminacyjny poszczególnych błędów podstawowych przybliża się ku początkowi układu współrzędnych.

3. Ujemny błąd maksymalny błędów podstawowych występuje jako wartość krańcowa dla $r = 3{\cdot}5$ i to równocześnie dla wszystkich wartości na $u$, a mianowicie:

$$\max_{r=3{\cdot}5} [-\alpha'] = -13{\cdot}38\%, \quad \max_{r=3{\cdot}5} [-p'_1] = -151{,}42$$

$$\text{i} \max_{r=3{\cdot}5} [-p'_2] = -60{\cdot}25\%.$$

4. Omawiany przy wzorze Smaljana t. zw. punkt nieciągły jaki powstaje dla walca, staje się przy wzorze Hubera pozornie ciągłym, wobec czego przebieg błędów podstawowych nie wykazuje tu skoków.

Ażeby obliczyć wartość maksymalnego błędu dodatniego błędów podstawowych, należy wpierw obliczyć wartości dla $r$, dla których następuje kulminacja krzywych, przedstawiających przebieg poszczególnych błędów podstawowych dla brył całkowitych, co uskuteczniamy na podstawie zasad teorji o minimum i maximum.

Przebieg obliczenia dla $\alpha'$ jest następujący

$$\alpha' = \frac{1}{2^r} - \frac{1}{r+1}$$

$$\frac{d\alpha'}{dr} = -\frac{\text{Log } 2}{2^r} + \frac{1}{(r+1)^2} = 0\ ^{10})$$

czyli: $(r+1)^2 \log 2 - 2^r \log e = 0$

Ostatnie równanie rozwiązujemy metodą Newtona,[11]) polegającą na tem, że dla danego równania wyrażającego się funkcją np. $\chi(r) = 0$ przyjmujemy przybliżoną wartość pierwiastka np. $r_0$, a następnie poprawimy $r_0$ o $h_0$, które oblicza się za pomocą wzoru:

$$h_0 = -\frac{\chi(r_0)}{\chi'(r_0)}$$

wskutek czego otrzymujemy dokładniejszą wartość na $r$, a mianowicie $r_1 = r_0 + h_0$, z którą postępujemy analogicznie tak długo, aż dwie po sobie następujące wartości na $r$ (nie będą lub) prawie nie będą między sobą się różnić.

W naszym wypadku mamy:

$$\chi(r) = (r+1)^2 \log 2 - 2^r \log e$$

$$\text{a } \chi'(r) = \{2(r+1) - 2^r\} \log 2$$

Przyjmując, że $r_0 = 0{\cdot}35$ obliczamy $\chi(0{\cdot}35) = -0{\cdot}0049$, a $\chi'(0{\cdot}35) = 0{\cdot}4291$, z czego $h_0 = 0{\cdot}0114192$. Widzimy zatem, że różnica dwu po sobie następujących wartości na $r$ uwydatnia się dopiero na drugiem miejscu po kropce dziesiętnej, wskutek czego możemy przyjąć tę ostatnią wartość za wystarczającą.

Zatem

$$\max_{r = 0{\cdot}3614} (+a') = 4{\cdot}387\ \%$$

---

[10]) Symbol Log. odnosi się do logarytmów naturalnych, a symbol log. do logarytmów zwyczajnych, wobec czego: $\text{Log } a = \frac{\log a}{\log e}$

[11]) Bliższe objaśnienie tej metody można po za odnośnymi podręcznikami matematycznemi znaleść również w pracy:

Tadeusz Wielgosz: „Pomiar drzew na podstawie metody najmniejszych kwadratów" Roczniki nauk rolniczych, tom IX. Zeszyt 1. Rok 1923.

Dla obydwóch odmian błędu procentowego obliczenie powyższe przedstawia się następująco:

Zrównana z zerem pochodna funkcji błędu po opuszczeniu czynnika stałego 100 brzmi:

$$-\frac{(r+1)\,2^r \operatorname{Log} 2 - 2^r}{(r+1)^2} = 0$$

czyli

$$(r+1)\log 2 - \log e = 0$$

z czego

$$r = \frac{\log e - \log 2}{\log 2} = 0{\cdot}442$$

Zatem

$$\max_{r\,=\,0{\cdot}442}(+p'_1) = 5{\cdot}79\,\%$$

$$\max_{r\,=\,0{\cdot}442}(+p'_2) = 6{\cdot}15\,\%$$

Celem stwierdzenia identyczności z wynikami, podanymi w podręcznikach dendrometrycznych, obliczymy wartości błędu absolutnego $\Delta v$ w odniesieniu do stożka zwykłego i do nejloidy.

Dla $r = 2$ obliczamy $\Delta v = -\frac{1}{12} Gh(1-u)^2$ t. zn. błąd absolutny w tym wypadku jest ujemny i wprost proporcjonalny do $u$; jego absolutna wartość równa się połowie odpowiadającego błędu przy wzorze Smaljana.

Wyrażając iloraz średnic $u$ przez średnice otrzymujemy $\Delta v = -\frac{1}{12}\cdot\frac{\pi h}{4}(D-d)^2$ tj. błąd absolutny, jaki popełniamy przy zastosowaniu wzoru Hubera do stożka zwykłego, jest ujemny i równa się $\frac{1}{12}$ objętości walca różnicy średnic krańcowych.

Dla $r = 3$ oblicza się $\Delta v = -\frac{1}{8} Gh(1 - u^{1/3} - u^{4/3} + u^2)$ czyli prawie równa sie: $\Delta v \doteq -\frac{1}{8} Gh\,(1-u)^2$ względnie $\Delta v \doteq -\frac{1}{8}\frac{\pi h}{4}(D-d)^2$ tj. w odniesieniu do nejloidy jest błąd absolutny również ujemny i wynosi prawie $\frac{1}{8}$ objętości walca różnicy średnic krańcowych.

Analogicznie jak przy wzorze Smaljana możemy i w odniesieniu do wzoru Hubera powiedzieć, że błąd absolutny przy zastosowaniu tegoż ostatniego do brył dendrometrycznych jest wprost proporcjonalny do różnicy średnic krańcowych i do długości danej części bryły, czyli dochodzimy do tej samej praktycznej reguły, że odcinki pełniejsze mogą być dłuższe niż odcinki zbieżyste, jeśli błąd w objętości ma posiadać tę samą wielkość.

Przebieg błędów podstawowych wzoru Hubera jest następujący:

Dla walca wynoszą błędy podstawowe zero tworząc punkt pozornie ciągły, następnie przybierają wartość dodatnią, wykazują następujący teoretyczny błąd kulminacyjny: kul $(+\alpha') = \underset{r=0{\cdot}361}{} = 4{\cdot}39^0/_0$, kul $(+p_1') = \underset{r=0{\cdot}442}{5{\cdot}79^0/_0}$ i kul $(+p_2') = \underset{r=0{\cdot}442}{6{\cdot}15^0/_0}$. Rzeczywisty przebieg wykazuje dla $r = 0{\cdot}5$ następujący dodatni błąd maksymalny $\max \underset{r=0{\cdot}5}{[+\alpha']} = 4{\cdot}05^0/_0$, $\max \underset{r=0{\cdot}5}{[+p_1]'} = 5{\cdot}72^0/_0$ i $\max \underset{r=0{\cdot}5}{[+p_2']} = 6{\cdot}06^0/_0$, następnie błędy podstawowe dla paraboloidy maleją do zera, przechodzą w wartość ujemną, stale wzrastają i opuszczają interwał zmiennej $r$ ujemnym błędem maksymalnym: $\max \underset{r=3{\cdot}5}{[-\alpha']} = -13{\cdot}38^0/_0$, $\max \underset{r=3{\cdot}5}{[-p_1']} = -151{\cdot}42^0/_0$ i $\max \underset{r=3{\cdot}5}{[-p_2']} = -60{\cdot}25^0/_0$.

*Błąd przeciętny.*

Przykłady dające się obliczyć sposobem ścisłym:

$$1.\ t(\alpha)\ \underset{r=a}{\overset{r=b}{u=0}} = \frac{100}{b-a}\int_a^b \left(\frac{1}{2^r} - \frac{1}{r+1}\right) dr =$$

$$= \frac{100}{b-a}\left\{\frac{\log e}{\log 2}\left[\frac{1}{2^a} - \frac{1}{2^b}\right] - \frac{\log\left(\frac{b+1}{a+1}\right)}{\log e}\right\}$$

$$t(\alpha)\begin{matrix} r=2{\cdot}3 \\ u=0 \\ r=0{\cdot}5 \end{matrix} = \frac{100}{1{\cdot}8}\left\{\frac{\log e}{\log 2}\left[\frac{1}{2^{0{\cdot}5}}-\frac{1}{2^{2{\cdot}3}}\right]-\frac{\log 2{\cdot}2}{\log e}\right\} = -3{\cdot}40^0/_0$$

$$t[\alpha]\begin{matrix} r=2{\cdot}3 \\ u=0 \\ r=0{\cdot}5 \end{matrix} = \frac{0{\cdot}1}{1{\cdot}8}\left\{\frac{1}{2}(4{\cdot}045-9{\cdot}997)+9{\cdot}044-67{\cdot}349\right\} = -3{\cdot}40^0/_0$$

$$2.\ t(\alpha)\begin{matrix} u=b \\ r=2 \\ u=a \end{matrix} = -\frac{100}{b-a}\cdot\frac{1}{12}\int_a^b (1-u)^2\,du =$$

$$= -\frac{100}{12}\left\{1-(b+a)+\frac{1}{3}(b^2+ab+a^2)\right\}$$

$$t(\alpha)\begin{matrix} u=1 \\ r=2 \\ u=0 \end{matrix} = -\frac{100}{12}\cdot\frac{1}{3} = -2{\cdot}79^0/_0$$

$$t[\alpha]\begin{matrix} u=1 \\ r=2 \\ u=0 \end{matrix} = 0{\cdot}1\left\{\frac{1}{2}(-8{\cdot}333)+(-23{\cdot}767)\right\} = -2{\cdot}79^0/_0$$

$$3.\ t(p_1)\begin{matrix} u=b \\ r=2 \\ u=a \end{matrix} = \frac{100}{b-a}\int_a^b\left(1-\frac{4}{3}\frac{1+u+u^2}{(1+u)^2}\right)du =$$

$$= -\frac{100}{3(b-a)}\int_a^b\left(\frac{1-u}{1+u}\right)^2 du = -\frac{100}{3(b-a)}\left\{\frac{b(b+2)-3}{b+1}-\right.$$

$$\left.-\frac{a(a+2)-3}{a+1}-\frac{4\log\left(\frac{b+1}{a+1}\right)}{\log e}\right\}$$

$$t(p_1)\begin{matrix} u=1 \\ r=2 \\ u=0 \end{matrix} = -\frac{100}{3}\left\{+3-\frac{4\log 2}{\log e}\right\} = -7{\cdot}47^0/_0$$

$$t[p_1]\begin{matrix} u=1 \\ r=2 \\ u=0 \end{matrix} = 0{\cdot}1\left\{\frac{1}{2}(-33{\cdot}333)+(-59{\cdot}974)\right\} = -7{\cdot}66^0/_0$$

Przykłady dla celów porównawczych:

$$1.\ t(\alpha)\begin{matrix} r=2{\cdot}3 \\ u=0 \\ r=0{\cdot}5 \end{matrix} = -3{\cdot}40^0/_0$$

$$2.\ t[p_1]\begin{matrix} r=2{\cdot}3 \\ u=0 \\ r=0{\cdot}5 \end{matrix} = -13{\cdot}83^0/_0$$

$$3.\ t[p_2]\begin{matrix} r=2{\cdot}3 \\ u=0 \\ r=0{\cdot}5 \end{matrix} = -10{\cdot}43^0/_0$$

$$4.\ t[\alpha]_{r=0{\cdot}5,\ u=0{\cdot}5}^{r=2{\cdot}3,\ u=0{\cdot}8} = \frac{0{\cdot}01}{0{\cdot}54}\left\{\frac{1}{4}(3{\cdot}524-2.739)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}(9{\cdot}428-19{\cdot}397)+5{\cdot}527-18{\cdot}197\right\} = -0{\cdot}323^0/_0$$

$$5.\ t[p_1]_{r=0{\cdot}5,\ u=0{\cdot}5}^{r=2{\cdot}3,\ u=0{\cdot}8} = -0{\cdot}52^0/_0$$

$$6.\ t[p_2]_{r=0{\cdot}5,\ u=0{\cdot}5}^{r=2{\cdot}3,\ u=0.8} = -0{\cdot}56^0/_0$$

## 7. Wzór Hossfelda

podaje przybliżoną objętość ściętych brył dendrometrycznych zapomocą następującego wzoru matematycznego:

$$V' = \frac{h}{4}(3g_{1/3}+g)$$

który dla brył całkowitych redukuje się do kształtu:

$$V'' = \frac{3}{4}g_{1/3}h$$

przyczem $g_{1/3}$ oznacza powierzchnię przekroju znajdującego się w $\frac{1}{3}$ wysokości od podstawy.

Na podstawie wzoru 18 wyrażamy $g_{1/3}$ przez przekroje krańcowe:

$$g_{1/3} = \left(\frac{1}{3}\right)^r (2\,G^{1/r}+g^{1/r})^r$$

wobec czego wzór H o s s f e l d a przekształca się na następującą funkcję o dwu zmiennych:

$$V' = \frac{1}{4} Gh \left\{3^{1-r}(2+u^{2/r})^r + u^2\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 34$$

względnie dla brył całkowitych:

$$V'' = \frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^r \cdot G \cdot h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 34\,a$$

a iloraz objętości przedstawia się:

$$\sigma = \frac{4\left(1-u^{\frac{2r+2}{r}}\right)}{(r+1)(1-u^{2/r})[3^{1-r}(2+u^{2/r})^r + u^2]} \quad . \quad . \quad 35$$

względnie:

$$\sigma' = \frac{4}{3(r+1)\left(\frac{2}{3}\right)^r} = \frac{1}{3^{1-r}.2^{r-2}(r+1)} \quad . \quad . \quad 35\,a$$

Znając wartości $V, V', V''$, $\sigma$ i $\sigma'$ możemy na podstawie wzorów 9, 9 a, 11, 11 a, 12, 12 a, obliczyć funkcje błędów podstawowych, których szczególne wartości są podane w tabelach 8, 9 i 10 (wykres na tablicy III) i uprawniają do następujących wniosków:

1. Ze wzrostem $u$ bezwzględna wartość błędów podstawowych maleje.

2. Dodatni błąd maksymalny błędów podstawowych występuje we formie kulminacji, a mianowicie $\max(+\alpha')$ dla $r \doteq 1{\cdot}4$, a $\max(+p'_1)$ i $\max(+p'_2)$ dla $r \doteq 1{\cdot}45$. Ze zwiększaniem się $u$ punkty kulminacyjne błędów przybliżają się stale do początku układu spółrzędnych.

3. Rzeczywisty ujemny błąd maksymalny występuje dla przyjętej wartości $r = 0{\cdot}5$.

4. Tak zwany punkt nieciągły dla walca wykazuje skoki o wartościach teoretycznych.

Wyszukiwanie wartości na $r$, spełniających funkcje błędów podstawowych do kulminacji:

Dla błędu absolutnego mamy:

$$\frac{d\alpha'}{dr} = \frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^r \operatorname{Log}\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{(r+1)^2} = 0$$

czyli

$$(r+1)^2 (\log 2 - \log 3) + 2^{2-r} \cdot 3^{r-1} \cdot \log e = 0$$

zatem

$$\chi(r) = 2^{2-r} \cdot 3^{r-1} \log e - (r+1)^2 (\log 3 - \log 2)$$

a $\chi'(r) = 3^{r-1} \log 3 - 2^{2-r} \cdot \log 2 - 2(r+1)(\log 3 - \log 2)$

Przyjmując, że $r_0 = 1{\cdot}4$ otrzymamy $\chi(1{\cdot}4) = 0{\cdot}007$, $\chi'(1{\cdot}4) = -0{\cdot}5610$ czyli

$$h_0 = +0{\cdot}125, \text{ a } r_1 = 1{\cdot}4125$$

dalej

$$\chi(1{\cdot}4125) = +0{,}00184,\ \chi'(1{\cdot}4125) = -0{,}5513,\ h_1 = +0{,}00334$$

a $r_2 = 1{,}4158$, zatem $\max\limits_{r=1{\cdot}416}(+\alpha') = 0{,}849\%$.

Dla błędów procentowych analogiczne obliczenie przedstawia się:

Pochodna z $\sigma'$ zrównana z zerem i odpowiednio uproszczona brzmi:

$$(r+1)(\log 3 - \log 2) - \log e = 0$$

z czego

$$r = \frac{\log e - \log 1{\cdot}5}{\log 1{\cdot}5} = 1{\cdot}4663$$

zatem $\max\limits_{r=1{\cdot}466}(+p'_1) = 2{\cdot}0295\%$, $\max\limits_{r=1{\cdot}466}(+p'_2) = 2{\cdot}071\%$

Dla $r = 3$ oblicza się $\Delta v = -\frac{1}{36}\frac{\pi h}{4}(D^{2/3} - d^{2/3})^3$,[12]) względnie zastępując przekrój albo średnicę dolną przez przekrój albo

[12]) Max Kunze: „Lehrbuch der Holzzmesskunst", 1873, str. 61, wzór. 15.

średnicę na $\frac{1}{3}h$ od podstawy otrzymujemy: $\Delta v = -\frac{3}{4}\left(\frac{g^{1/3}-g^{1/3}}{2}\right)^3 h$ [13])

względnie $\Delta v = -\frac{3\pi h}{16}\left(\frac{d_{1/3}^{2/3}-d^{2/3}}{2}\right)^3$

Przebieg błędów podstawowych wzoru Hossfelda brzmi:

Dla walca wynoszą błędy podstawowe zero, tworząc równocześnie skoki o następujących teoretycznych wartościach $[\alpha']_{r=0} = -25^0/_0$, $[-p'_1]_{r=0} = -33{\cdot}33$, $[-p_4]_{r=0} = -25^0/_0$, dla przyjętego $r = 0{\cdot}5$ wykazują następujące wartości: $\max\limits_{r=0{\cdot}5}[-\alpha'] = -5{\cdot}429^0/_0$, $[-p'_1]_{r=0{\cdot}5} = -8{\cdot}865^0/_0$, $[-p'_2]_{r=0{\cdot}5} = -8{\cdot}122^0/_0$, następnie maleją do zera dla paraboloidy, poczem przybierają wartość dodatnią i zdążają do kulminacji tworząc następujący dodatni błąd maksymalny: $\max\limits_{r=1{\cdot}415}[+\alpha'] = 0{\cdot}85^0/_0$, $\max\limits_{r=1{\cdot}466}[+p'_1] = 2{\cdot}03^0/_0$, $\max\limits_{r=1{\cdot}466}[+p'_2] = 2{\cdot}07^0/_0$, dalej maleją do zera dla stożka zwykłego, stają się ujemnymi i opuszczają interwał zmiennej $r$ przy następujących wartościach: $[-\alpha']_{r=3{\cdot}5} = -4{\cdot}078^0/_0$, $\max\limits_{r=5{\cdot}5}[-p'_1] = -22{\cdot}47^0/_0$, $\max\limits_{r=3{\cdot}5}[-p'_2] = -18{\cdot}35^0/_0$.

*Błąd przeciętny.*

Dla celów porównawczych obliczamy następujące przykłady:

$$1.\ t(\alpha)_{\substack{r=0{\cdot}5\\u=0\\r=2{\cdot}3}} = \frac{100}{1{\cdot}8}\int_{0{\cdot}5}^{2{\cdot}3}\left(3^{1-r}\,2^{r-2} - \frac{1}{r+1}\right)dr =$$

$$= \frac{100}{1{\cdot}8}\left\{\frac{3\log e}{4\log\left(\frac{2}{3}\right)}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2{\cdot}3} - \left(\frac{2}{3}\right)^{0{\cdot}5}\right] - \frac{\log 2{\cdot}2}{\log e}\right\} = -0{\cdot}34^0/_0$$

[13]) Ferd. Langenbacher u. Em. Nossek: „Lehr und Handbuch der Holzmesskunde", str. 74. wzór 43.

$$t[\alpha]\begin{matrix} r=2{\cdot}3 \\ u=0 \\ r=0{\cdot}5 \end{matrix} = \frac{0{\cdot}1}{1{\cdot}8}\left|\frac{1}{2}(-6{\cdot}216)+5{\cdot}526-8{\cdot}708\right| = -0{\cdot}349\%$$

$$2.\ t[p_1]\begin{matrix} r=2{\cdot}3 \\ u=0 \\ r=0{\cdot}5 \end{matrix} = -0{\cdot}488\%$$

$$3.\ t(p_2)\begin{matrix} r=2{\cdot}3 \\ u=0 \\ r=0{\cdot}5 \end{matrix} = \frac{100}{1.8}\int_{0{\cdot}5}^{2{\cdot}3}\left[\frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^r(r+1)-1\right]dr =$$

$$= \frac{100}{1{\cdot}8}\left|\frac{3}{4}\frac{\log e}{\log\left(\frac{2}{3}\right)}\left|\frac{\log e}{\log\left(\frac{2}{3}\right)}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{0{\cdot}5}-\left(\frac{2}{3}\right)^{2{\cdot}3}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+3{\cdot}3\left(\frac{2}{3}\right)^{2{\cdot}3}-1{\cdot}5\left(\frac{2}{3}\right)^{0{\cdot}5}\right|-1{\cdot}8\right| = -0{\cdot}403$$

$$4.\ t[\alpha]\begin{matrix} r=2{\cdot}3,\ u=0{\cdot}8 \\ r=0{\cdot}5,\ u=0{\cdot}5 \end{matrix} = -0{\cdot}0472\%$$

$$5.\ t[p_1]\begin{matrix} r=2{\cdot}3,\ u=0{\cdot}8 \\ r=0{\cdot}5,\ u=0{\cdot}5 \end{matrix} = -0{\cdot}0665\%$$

$$6.\ t[p_2]\begin{matrix} r=2{\cdot}3,\ u=0{\cdot}5 \\ r=0{\cdot}5,\ u=0{\cdot}5 \end{matrix} = -0{\cdot}0658\%.$$

## 6. Wzór Riecke'go

podaje przybliżoną objętość ściętych brył dendrometrycznych zapomocą następującego wzoru matematycznego

$$V' = \frac{h}{6}(G+4g_{1/2}+g)$$

który dla brył całkowitych redukuje się do kształtu:

$$V'' = \frac{h}{6}(G+4g_{1/2})$$

uwzględniając wzór 17 przekształcamy wzór powyższy:

$$V' = \frac{h}{6}\{G + 2^{2-r}(G^{1/r} + g^{1/r}) + g\}$$

względnie w kształcie funkcji o dwu zmiennych:

$$V' = \frac{1}{6} Gh\{1 + 2^{2-r}(1 + u^{2/r})^r + u^2\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 36$$

względnie

$$V'' = \frac{1}{6} Gh\,(1 + 2^{2-r}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 36a$$

a iloraz objętości

$$\sigma = \frac{6\left(1 - u^{\frac{2r+2}{r}}\right)}{(r+1)(1+u^{2/r})[1+2^{2-r}(1+u^{2/r})^r + u^2]} \quad . \quad 37$$

względnie

$$\sigma' = \frac{6}{(1+2^{2-r})(r+1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 37a$$

Znając $V$, $V'$, $V''$, $\sigma$ i $\sigma'$ możemy obliczyć funkcję błędów podstawowych, których szczególne wartości dla brył całkowitych są podane w tabeli 11 (częściowy wykres na tablicy IV) i uprawniają do następujących wniosków:

1. Ze wzrostem $u$ bezwzględna wartość błędów podstawowych maleje (obliczeń dla brył ściętych nie podano w tabelach).

2. Dodatni błąd maksymalny błędów podstawowych występuje jako wartość krańcowa dla $r = 3{\cdot}5$; dodatni błąd kulminacyjny występuje dla $\alpha'$ przy $r \doteq 1{\cdot}35$, a dla $p'_1$ i $p'_2$ przy $r \doteq 1{\cdot}4$.

3. Rzeczywisty ujemny błąd maksymalny występuje dla przyjętego $r = 0{\cdot}5$; ujemny błąd kulminacyjny występuje dla $\alpha'$ przy $r \doteq 2{\cdot}5$, a dla $p'_1$ i $p'_2$ przy $r \doteq 2{\cdot}55$.

4. Tak zwany punkt nieciągły dla walca wykazuje skoki o wartościach teoretycznych.

Wyszukiwanie wartości na $r$, dla których występują błędy kulminacyjne.

Dla błędu absolutnego:

$$\frac{da'}{dr} = -\frac{1}{6} \cdot 2^{2-r} \cdot \text{Log } 2 + \frac{1}{(r+1)^2} = 0$$

czyli

$$6 \cdot 2^r \cdot \log e - 4(r+1)^2 \log 2 = 0$$

z czego

$$\chi(r) = 3 \cdot 2^r \cdot \log e - 2(r+1)^2 \log 2$$
$$\chi'(r) = \log 2 \,[3 \cdot 2^r - 4(r+1)],$$

Jeżeli $r_0 = 1{\cdot}35$, to: $\chi(1{\cdot}5) = -0{\cdot}0037$, $\chi'(1{\cdot}5) = -0{\cdot}52$, $h_0 = -0{\cdot}00698$, z czego $r_1 = 1{\cdot}3430$, a

$$\underset{r\,=\,1{\cdot}343}{\text{kul}\,(+\alpha')} = 0{\cdot}27^0/_0.$$

Jeżeli $r_0 = 2{\cdot}5$, to: $\chi(2{\cdot}5) = -0{\cdot}005$, $\chi'(1{\cdot}5) = 0{\cdot}8942$, $h_0 = 0{\cdot}0056$ z czego $r_1 = 2{\cdot}5056$, a

$$\underset{r\,=\,2{\cdot}5056}{\text{kul}\,(-\alpha')} = -0{\cdot}12^0/_0.$$

Dla błędów procentowych wychodzimy od ilorazu objętości względnie odwrotności tegoż, przyczem pochodna odwrotności ilorazu objętości zrównana z zerem przedstawia się:

$$1 + 2^{2-r} - (r+1)\,2^{2-r} \text{Log } 2 = 0$$

czyli

$$\chi(r) = (1 + 2^{2-r}) \log e - (r+1)\,2^{2-r} \log 2$$

$$\chi'(r) = 2^{2-r} \log 2 \left\{ \frac{\log 2}{\log e}(r+1) - 2 \right\}$$

Jeżeli $r_0 = 1{\cdot}4$, to: $\chi(1{\cdot}4) = -0{\cdot}0025$, $\chi'(1{\cdot}4) = -0{\cdot}15351$, $h_0 = -0{\cdot}0163$, z czego $r_1 = 1{\cdot}3837$, a

$$\underset{r\,=\,1{\cdot}384}{\text{kul}\,(+p'_1)} = 0{\cdot}624^0/_0\,;\quad \underset{r\,=\,1{\cdot}384}{\text{kul}\,(+p'_2)} = 0{\cdot}628^0/_0$$

jeżeli $r_0 = 2{\cdot}55$, to: $\chi(2{\cdot}55) = 0{\cdot}001$, $\chi'(2{\cdot}55) = 0{\cdot}0947$, $h_0 = -0{\cdot}01056$, z czego $r_1 = 2{\cdot}5394$, a

$$\underset{r=2{\cdot}5394}{\text{kul}\,(-p'_1)} = -0{\cdot}423^0/_0,\quad \underset{r=2{\cdot}5394}{\text{kul}\,(-p'_2)} = -0{\cdot}422^0/_0$$

Przebieg błędów podstawowych wzoru Rieckego jest następujący:

Dla walca wynoszą błędy podstawowe zero, tworząc równocześnie skoki o następujących teoretycznych wartościach:

$$[-\alpha'] \underset{r=0}{} = -16{\cdot}67^0/_0, \quad [-p'_1] \underset{r=0}{} = -20{\cdot}00^0/_0, \quad [-p'_2] \underset{r=0}{} = -16{\cdot}67^0/_0,$$

dla przyjętego $r = 0{\cdot}5$ wykazują rzeczywisty ujemny błąd maksymaksymalny o wartościach:

$$\max [-\alpha'] \underset{r=0{\cdot}5}{} = -2{\cdot}859^0/_0, \max [-p'_1] \underset{r=0{\cdot}5}{} = -4{\cdot}481^0/_0, \max [-p'_2] \underset{r=0{\cdot}5}{} = -4{\cdot}290^0/_0,$$

następnie maleją do zera dla paraboloidy, przechodzą w wartość dodatnią i dążą do kulminacji z następującymi wielkościami:

$$\text{kul}\,(+\alpha') \underset{r=1{\cdot}343}{} = 0{\cdot}27^0/_0, \quad \text{kul}\,(+p'_1) \underset{r=1{\cdot}384}{} = 0{\cdot}624^0/_0, \quad \text{kul}\,(+p'_2) \underset{r=1{\cdot}384}{} = 0{\cdot}628^0/_0,$$

następnie maleją do zera dla stożka zwykłego, stają się ujemnymi dążąc powtórnie do kulminacji o następujących wartościach:

$$\text{kul}\,(-\alpha') \underset{r=2{\cdot}506}{} = -0{\cdot}12^0/_0, \quad \text{kul}\,(-p'_1) \underset{r=2{\cdot}539}{} = -0{\cdot}423^0/_0, \quad \text{kul}\,(-p'_2) \underset{r=2{\cdot}530}{} = -0{\cdot}422^0/_0,$$

poczem zrównują się znowu z zerem dla nejloidy i opuszczają interwał zmiennej $r$ dodatnim błędem maksymalnym:

$$\max [+\alpha'] \underset{r=3{\cdot}5}{} = 0{\cdot}337^0/_0, \quad \max [+p'_1] \underset{r=3{\cdot}5}{} = 1{\cdot}492^0/_0, \quad \max [+p'_2] \underset{r=3{\cdot}5}{} = 1{\cdot}524^0/_0.$$

*Błąd przeciętny.*

Dla celów porównawczych obliczamy następujące przykłady:

$$1.\quad t\,(\alpha') \underset{r=0{\cdot}5}{\overset{r=2{\cdot}3}{u=0}} = \frac{100}{1{\cdot}8} \int_{0{\cdot}5}^{2{\cdot}3} \left[ \frac{1}{6} \left( 1 + 2^{2-r} \right) - \frac{1}{r+1} \right] dr =$$

$$= \frac{100}{1{\cdot}8} \left\{ 0{\cdot}3 + \frac{\log e}{6 \log 2} \left[ 2^{1{\cdot}5} - 2^{-0{\cdot}3} \right] - \frac{\log 2{\cdot}2}{\log e} \right\} = -0{\cdot}204^0/_0.$$

$$t\,[\alpha'] \underset{r=0{\cdot}5}{\overset{r=2{\cdot}3}{u=0}} = -0{\cdot}209^0//_0$$

$$2.\quad t\,[p'_1] \underset{r=0{\cdot}5}{\overset{r=2{\cdot}3}{u=0}} = -0{\cdot}297^0/_0$$

$$3.\ t\,[p'_2]\ \begin{matrix} r=2{\cdot}5 \\ u=0 \\ r=0{\cdot}5 \end{matrix} = -0{\cdot}283\,\%$$

$$4.\ t\,[\alpha']\ \begin{matrix} r=2{\cdot}3,\ u=0{\cdot}8 \\ r=0{\cdot}5,\ u=0{\cdot}5 \end{matrix} = -0{\cdot}014\,\%$$

$$5.\ t\,[p'_1]\ \begin{matrix} r=2{\cdot}3,\ u=0{\cdot}8 \\ r=0{\cdot}5,\ u=0{\cdot}5 \end{matrix} = -0{\cdot}0198\,\%$$

$$6.\ t\,[p'_2]\ \begin{matrix} r=2{\cdot}3,\ u=0{\cdot}8 \\ r=0{\cdot}5,\ u=0{\cdot}5 \end{matrix} = -0{\cdot}0196\,\%$$

## 9. Wzór Simony'ego

podaje przybliżoną objętość całkowitych i ściętych brył dendrometrycznych zapomocą następującego wzoru matematycznego:

$$V' = \frac{h}{3}\{2\,(g_{1/4} + g_{3/4}) - g_{1/2}\}.$$

Na podstawie wzorów 17,20,21 wiemy, że

$$g_{1/4} = \left(\frac{1}{4}\right)^r (G^{1/r} + g^{1/r})^r$$

$$g_{3/4} = \left(\frac{1}{4}\right)^r (G^{1/r} + g^{1/r})^r$$

$$g_{1/2} = \left(\frac{1}{2}\right)^r (G^{1/r} + g^{1/r})^r$$

wskutek czego wzór powyższy przekształca się na funkcję o dwu zmiennych:

$$V' = \frac{1}{3} Gh \left(\frac{1}{2}\right)^r \{2^{1-r}\,[(3 + u^{2/r})^r + (1 + 3u^{2/r})^r] - (1 + u^{2/r})^r\} \qquad 38.$$

względnie dla brył całkowitych:

$$V'' = \frac{1}{3} Gh \left(\frac{1}{2}\right)^r \{2^{1-r}\,(3^r + 1) - 1\} \qquad 38a.$$

a iloraz objętości

$$\sigma = \frac{3\left(1 - u^{\frac{2r+2}{r}}\right)}{(r+1)(1-u^{2/r})\{2^{1-r}[(3+u^{2/r})^r + (1+3u^{2/r})^r] - 2^{-r}(1+u^{2/r})^r\}} \quad 39$$

względnie

$$\sigma = \frac{3}{(r+1)[2^{1-2r}\cdot(3^r+1) - 2^{-r}]} \quad 39a.$$

Na podstawie $V$, $V'$, $V''$, $\sigma$ i $\sigma'$ możemy obliczyć funkcje błędów podstawowych, których szczególne wartości dla brył całkowitych są podane w tabeli 11 (częściowy wykres na tabl. IV.), i uprawniają do następujących wniosków:

1. Ze wzrostem u bezwzględna wartość błędów podstawowych maleje, (obliczeń dla brył ściętych nie podano w tabelach).

2. Dodatni błąd kulminacyjny o znaczeniu teoretycznem dla brył całkowitych występuje dla $\acute{a}$ przy $r \doteq 0{\cdot}255$ a dla $p'_1$ i $p'_2$ przy $r \doteq 0{\cdot}3$; rzeczywisty dodatni błąd maksymalny występuje dla przyjętego $r = 0{\cdot}5$; dodatni błąd maksymalny występuje dla $\acute{a}$ przy $r \doteq 2{\cdot}5$, a dla $p'_1$, $p'_2$ przy $r \doteq 2{\cdot}55$.

3. Ujemny błąd maksymalny występuje jako krańcowa wartość przy $r = 3{\cdot}5$; ujemny błąd kulminacyjny występuje dla $\acute{a}$ przy $r \doteq 1{\cdot}37$, a dla $p_1$ i $p_2$ przy $r \doteq 1{\cdot}43$.

4 Tak zwany punkt nieciągły dla walca jest pozornie ciągłym.

Wyszukiwanie wartości na $r$, dla których występują błędy kulminacyjne:

Dla błędu absolutnego:

$$\frac{da'}{dr} = 3^{-1}\left\{2^{1-2r}\cdot 3^r\cdot \operatorname{Log} 3 - 2\,(3^r+1)\,2^{1-2r}\cdot \operatorname{Log} 2 + \right.$$

$$\left. + 2^{-r}\cdot \operatorname{Log} 2\right\} + \frac{1}{(r+1)^2} = 0$$

z czego

$$\chi(r) = (r+1)^2\left\{2^r \log 2 - 2\,[3^r(2\cdot\log 2 - \log 3) + 2\log 2]\right\} + \\ + 3.2^{2r}\log e$$

$$\chi'(r) = 2(r+1)\left\{2^r \log 2 - 2\,[3^r(2\log 2 - \log 3) + 2\log 2]\right\} + \\ + \frac{(r+1)^2}{\log e}\left\{2^r(\log 2)^2 - 2.3^r\cdot\log 3\,(2\log 2 - \log 3)\right\} + 6.2^r \log 2$$

Jeżeli $r_0 = 0{\cdot}255$, to: $\chi(0{\cdot}255) = 0{\cdot}00385$, $\chi'(0{\cdot}255) = -0{\cdot}9753$, $h_0 = 0{\cdot}0039$ z czego $r_1 = 0{\cdot}2589$, zatem

$$\max_{r = 0{\cdot}259}(+\alpha') = 1{\cdot}152^0/_0$$

Jeżeli $r_0 = 1{\cdot}37$, to: $\chi(1{\cdot}37) = -0{\cdot}0113$, $\chi'(1{\cdot}37) = -6{\cdot}6029$, $h_0 = -0{\cdot}0017$, z czego $r_1 = 1{\cdot}3683$, zatem

$$\operatorname{kul}_{r = 1{\cdot}368}(-\alpha') = -0{\cdot}159^0/_0$$

Jeżeli $r_0 = 2{\cdot}5$, to: $\chi(2{\cdot}5) = 0{\cdot}2084$, $\chi'(2{\cdot}5) = -51{\cdot}45$, $h_0 = 0{\cdot}00405$, z czego $r_1 = 2{\cdot}50405$, zatem

$$\operatorname{kul}_{r = 2{\cdot}504}(+\alpha') = 0{\cdot}097^0/_0$$

Dla błędów procentowych wyjdziemy od odwrotności ilorazu objętości, przyczem otrzymamy:

$$\chi(r) = [2(3^r + 1) - 2^r]\log e - (r+1)\{2(2\log 2 - \log 3) + 2\log 2] - 2^r \log 2$$

$$\chi'(r) = 2.3^r \log 3 - 2[3^r(2\log 2 - \log 3) + 2\log 2] - \frac{r+1}{\log e}[2.3^r(2\log 2 - \log 3)\log 3 - 2^r \cdot (\log 2)^2]$$

Jeżeli $r_0 = 0{\cdot}3$, to: $\chi(0{\cdot}3) = 0{\cdot}00645$, $\chi'(0{\cdot}3) = -0.387$, $h_0 = 0{\cdot}01666$, z czego $r_1 = 0{\cdot}3166$, zatem

$$\max_{r = 0{\cdot}317}(+p'_1) = 1{\cdot}463^0/_0, \quad \max_{r = 0{\cdot}317}(+p'_2) = 1{\cdot}485^0/_0$$

Jeżeli $r = 1{\cdot}43$, to: $\chi(1{\cdot}43) = 0{\cdot}00106$, $\chi'(1{\cdot}43) = 0{\cdot}34148$, $h_0 = -0{\cdot}0031$, z czego $r_1 = 1{\cdot}4269$, zatem

$$\operatorname{kul}_{r = 1{\cdot}427}(-p'_1) = -0{\cdot}385^0/_0, \quad \operatorname{kul}_{r = 1{\cdot}427}(-p'_2) = -0{\cdot}384^0/_0$$

Jeżeli $r_0 = 2{\cdot}55$, to: $\chi(2{\cdot}55) = 0{\cdot}0047$, $\chi'(2{\cdot}55) = -1{\cdot}3155$, $h_0 = 0{\cdot}00357$, z czego $r_1 = 2{\cdot}55367$, zatem

$$\operatorname{kul}_{r = 2{\cdot}5536}(+p'_1) = 0{\cdot}337^0/_0, \quad \operatorname{kul}_{r = 2{\cdot}5536}(+p'_2) = 0{\cdot}338^0/_0$$

Przebieg błędów podstawowych wzoru Simony'ego jest następujący:

Dla walca błędy podstawowe wynoszą zero tworząc punkt pozornie ciągły, następnie przybierają wartość dodatnią i wykazują następujący teoretyczny dodatni błąd kulminacyjny:

$$\underset{r=0{\cdot}259}{\mathrm{kul}}\,(+\alpha) = 1{\cdot}152^{0}/_{0}, \quad \underset{r=0{\cdot}317}{\mathrm{kul}}\,(+p'_1) = 1{\cdot}463^{0}/_{0}, \quad \underset{r=0{\cdot}317}{\mathrm{kul}}\,(+p'_2) = 1{\cdot}485^{0}/_{0},$$

Rzeczywisty przebieg wykazuje dla przyjętego $r = 0{\cdot}5$ następujący dodatni błąd maksymalny:

$$\max_{r=0{\cdot}5}[+\alpha'] = 0{\cdot}831^{0}/_{0}, \quad \max_{r=0{\cdot}5}[+p'_1] = 1{\cdot}231^{0}/_{0},$$

$$\text{oraz } \max_{r=0{\cdot}5}[+p'_2] = 1{\cdot}246^{0}/_{0},$$

następnie błędy podstawowe maleją dla parabolidy do zera, przybierają wartość ujemną i kulminują wartościami:

$$\underset{r=1{\cdot}368}{\mathrm{kul}}\,(-\alpha') = -0{\cdot}159^{0}/_{0}, \quad \underset{r=1{\cdot}427}{\mathrm{kul}}\,(-p'_1) = -0{\cdot}385^{0}/_{0},$$

$$\underset{r=0{\cdot}427}{\mathrm{kul}}\,(-p'_2) = -0{\cdot}384^{0}/_{0},$$

maleją do zera dla stożka zwykłego, przechodzą w wartość dodatnią i kulminują wartościami:

$$\underset{r=2{\cdot}504}{\mathrm{kul}}\,(+\alpha') = 0{\cdot}097^{0}/_{0}, \quad \underset{r=2{\cdot}554}{\mathrm{kul}}\,(+p'_1) = 0{\cdot}337_{0}/_{0} \text{ i } \underset{r=2{\cdot}554}{\mathrm{kul}}\,(+p'_2) = 0{\cdot}338^{0}/_{0},$$

następnie maleją do zera dla nejloidy i stają się ujemnemi oraz opuszczają interwał zmiennej $r$ ujemnym błędem maksymalnym:

$$\max_{r=3{\cdot}5}[-\alpha'] = -0{\cdot}292^{0}/_{0}, \quad \max_{r=3{\cdot}5}[-p'_1] = -1{\cdot}3515^{0}/_{0},$$

$$\max_{r=3{\cdot}5}[-p'_2] = -1{\cdot}314^{0}/_{0}.$$

*Błąd przeciętny.*

Dla celów porównawczych obliczamy następujące przykłady:

$$1.\ t\,[\alpha']_{r=0{\cdot}5}^{r=2{\cdot}3}{}_{u=0} = 0{,}047^{0}/_{0}$$

$$2.\ t\,[p'_1]_{r=0{\cdot}5}^{r=2{,}3}{}_{u=0} = 0{,}051^{0}/_{0}$$

$$3.\ t\,[p'_2]\begin{matrix} r=2{\cdot}3 \\ u=0 \\ r=0{\cdot}5 \end{matrix} = 0{,}052^0/_0$$

$$4.\ t\,[\alpha]\begin{matrix} r=2{\cdot}3,\ u=0{\cdot}8 \\ r=0{\cdot}5,\ u=0{\cdot}5 \end{matrix} = 0{,}0137^0/_0$$

$$5.\ t\,[p_1]\begin{matrix} r=2{\cdot}3,\ u=0{\cdot}8 \\ r=0{\cdot}5,\ u=0{\cdot}5 \end{matrix} = 0{,}0186^0/_0$$

$$6.\ t\,[p_2]\begin{matrix} r=2{\cdot}3,\ u=0{\cdot}8 \\ r=0{\cdot}5,\ u=0{\cdot}5 \end{matrix} = 0{,}0189^0/_0$$

## 10. Wzór Breymanna

podaje przybliżoną objętość brył dendrometrycznych zapomocą wzoru matematycznego:

$$V' = \frac{h}{8}\{G + 3\,(g^{1/3} + g^{2/3}) + g\}$$

który dla brył całkowitych redukuje się do kształtu:

$$V'' = \frac{h}{8}\{G + 3\,(g^{1/3} + g^{2/3})\}$$

Na podstawie wzorów 18 i 19 wiemy, że:

$$g^{1/3} = \left(\frac{1}{3}\right)^r (2\,G^{1/r} + g^{1/r})^r \text{ i } g^{2/3} = \left(\frac{1}{3}\right)^r \cdot (G^{1/r} + 2\,g^{1/r})^r$$

wskutek czego wzór Breymanna możemy przekształcić na funkcję o dwu zmiennych:

$$V' = \frac{1}{8}\,Gh\left\{1 + 3^{1-r}\left[(2 + u^{2/r})^r + (1 + 2\,u^{2/r})^r\right] + u^2\right\} \qquad 40$$

względnie

$$V'' = \frac{1}{8}\,Gh\{1 + 3^{1-r}(2^r + 1)\} \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 40\,a$$

a iloraz objętości

$$\sigma = \frac{8\left(1 - u^{\frac{2r+2}{r}}\right)}{(r+1)\,(1-u^{2/r})\,\{1+3^{1-r}[(2+u^{2/r})^r + (1+2u^{2/r})^r] + u^2\}} \qquad 41$$

względnie

$$\sigma' = \frac{8}{(r+1)[1+3^{1-r}(2^r+1)]} \quad \ldots \quad 41\,a$$

Na podstawie $V, V', V'', \sigma$ i $\sigma'$ możemy obliczyć funkcje błędów podstawowych, których szczególne wartości dla brył całkowitych są podane w tabeli 11 (częściowy wykres na tablicy IV) i uprawniają do następujących wniosków:

1. Ze wzrostem u bezwzględna wartość błędów podstawowych maleje, (obliczeń dla brył ściętych nie podano w tabelach).

2. Dodatni błąd maksymalny błędów podstawowych występuje jako wartość krańcowa dla $r = 3{\cdot}5$; dodatni błąd kulminacyjny występuje dla $\alpha'$ przy $r = 1{\cdot}33$, a dla $p'_1$ i $p'_2$ przy $r = 1{\cdot}36$.

3. Rzeczywisty ujemny błąd maksymalny występuje dla $r = 0{\cdot}5$; ujemny błąd kulminacyjny występuje dla $\alpha'$ przy $r = 2{\cdot}5$, a dla $p'_1$ i $p'_2$ przy $r = 2{\cdot}53$.

4. Tak zwany punkt nieciągły dla walca wykazuje skoki o wartościach teoretycznych.

Wyszukiwanie wartości na $r$, dla których występują błędy kulminacyjne:

Dla błędu absolutnego otrzymujemy:

$$\chi(r) = 8.3^r \cdot \log e - 3(r+1)^2 [2^r (\log 3 - \log 2) + \log 3]$$

$$\chi'(r) = 8.3^r \cdot \log 3 - 6(r+1)[2^r (\log 3 - \log 2) + \log 3] - 3.2^r (r+1)^2 (\log 3 - \log 2) \frac{\log 2}{\log e}.$$

Jeżeli $r_0 = 1{\cdot}33$, to: $\chi(1{\cdot}33) = -0{\cdot}0031$, $\chi'(1{\cdot}33) = -1{\cdot}4019$, $h_0 = -0{\cdot}00221$, z czego $r_1 = 1{\cdot}32779$, zatem

$$\underset{r = 1{\cdot}328}{\text{kul}}\,(+\alpha') = 0{\cdot}151\,\%.$$

Jeżeli $r = 2{\cdot}5$, to: $\chi(2{\cdot}5) = 0{\cdot}0181$, $\chi'(2{\cdot}5) = 3{\cdot}1882$, $h_0 = -0{\cdot}005677$, z czego $r_1 = 2{\cdot}4943$, zatem

$$\underset{r = 2{\cdot}494}{\text{kul}}\,(-\alpha') = -0{\cdot}0575\,\%.$$

Dla błędów procentowych wychodzimy od odwrotności ilorazu objętości, przyczem otrzymujemy:

$$\chi(r) = [3^r + 3(2^r + 1)] \log e - 3(r+1)[2^r(\log 3 - \log 2) + \log 3]$$

$$\chi'(r) = 3^r \log 3 + 3 \cdot 2^r \cdot \log 2 - 3[2^r(\log 3 - \log 2) + \log 3] - 3 \cdot 2^r (r+1)(\log 3 - \log 2)\frac{\log 2}{\log e}.$$

Jeżeli $r_0 = 1{\cdot}36$, to: $\chi(1{\cdot}36) = 0{\cdot}00397$, $\chi'(1{\cdot}36) = -0{\cdot}56168$, $h_0 = 0{\cdot}00706$, z czego $r_1 = 1{\cdot}36706$, zatem

$$\underset{r=1{\cdot}367}{\text{kul}}\,(+p_1') = 0{\cdot}3495, \quad \underset{r=1{\cdot}367}{\text{kul}}\,(+p_2') = 0{\cdot}3506\%.$$

Jeżeli $r_0 = 2{\cdot}53$, to: $\chi(2{\cdot}53) = 0.0015$, $\chi'(2{\cdot}53) = 0{\cdot}9547$, $h_0 = -0{\cdot}00157$, z czego $r_1 = 2{\cdot}52843$, zatem

$$\underset{r=2.528}{\text{kul}}\,(-p_1') = -0{\cdot}202\%, \quad \underset{r=2{\cdot}528}{\text{kul}}\,(-p_2') = -0{\cdot}2019\%.$$

Przebieg błędów podstawowych wzoru B r e y m a n n a jest następujący:

Dla walca wynoszą błędy podstawowe zero, tworząc równocześnie skoki o następujących teoretycznych wartościach:

$$\underset{r=0}{[-\alpha']} = -12{\cdot}50\%, \quad \underset{r=0}{[-p_1']} = -14{\cdot}29\%, \quad \underset{r=0}{[-p_2']} = -12{\cdot}50\%, \text{ dla}$$

$r = 0{\cdot}5$ wykazują rzeczywisty ujemny błąd maksymalny o wartościach: $\max\limits_{r=0{\cdot}5}[-\alpha'] = -1{\cdot}898\%$, $\max\limits_{r=0{\cdot}5}[-p_1'] = -2{\cdot}930\%$ i $\max\limits_{r=0.5}[-p_2'] = -2{\cdot}848\%$, następnie maleją do zera dla paraboloidy, przechodzą w wartość dodatnią i tworzą kulminację z następującemi wartościami:

$$\underset{r=1{\cdot}328}{\text{kul}}\,(+\alpha') = 0{\cdot}151\%, \quad \underset{r=1{\cdot}367}{\text{kul}}\,(+p_1') = 0{\cdot}349\%, \quad \underset{r=1{\cdot}367}{\text{kul}}\,(+p_2') = 0{\cdot}351\%,$$

poczem maleją do zera dla stożka zwykłego, przybierają wartość ujemną z kulminacją o wartościach:

$$\underset{r=2{\cdot}494}{\text{kul}}\,(-\alpha') = -0{\cdot}0575\%, \quad \underset{r=2{\cdot}528}{\text{kul}}\,(-p_1') = -0{\cdot}201\%, \quad \underset{r=2{\cdot}528}{\text{kul}}\,(-p_2') = -0{\cdot}2019\%,$$

maleją do zera dla nejloidy, stają się dodatnimi i opuszczają interwał zmiennej $r$ dodatnim błędem maksymalnym o wartościach:

$$\max\limits_{r=3{\cdot}5}[+\alpha] = 0{\cdot}152\%, \quad \max\limits_{r=3{\cdot}5}[+p_1'] = 0{\cdot}682\%, \quad \max\limits_{r=3{\cdot}5}[+p_2'] = 0{\cdot}683\%.$$

*Błąd przeciętny.*

Dla celów porównawczych obliczono przykłady:

$$1.\ t\,[\alpha']\begin{matrix} r=2{\cdot}3 \\ u=0 \\ r=0{\cdot}5 \end{matrix} = -0{\cdot}142^{0}/_{0}$$

$$2.\ t\,[p'_1]\begin{matrix} r=2{\cdot}3 \\ u=0 \\ r=0{\cdot}5 \end{matrix} = -0{\cdot}211^{0}/_{0}$$

$$3.\ t\,[p'_2]\begin{matrix} r=2{\cdot}3 \\ u=0 \\ r=0{\cdot}5 \end{matrix} = -0\ 206^{0}/_{0}$$

$$4.\ t\,[\alpha]\begin{matrix} r=2{\cdot}3,\ u=0{\cdot}8 \\ r=0{\cdot}5,\ u=0{\cdot}5 \end{matrix} = -0{\cdot}008^{0}/_{0}$$

$$5.\ t\,[p_1]\begin{matrix} r=2{\cdot}3,\ u=0{\cdot}8 \\ r=0{\cdot}5,\ u=0{\cdot}5 \end{matrix} = -0{\cdot}01^{0}/_{0}$$

$$6.\ r\,[p_2]\begin{matrix} r=2{\cdot}3,\ u=0{\cdot}8 \\ r=0{\cdot}5,\ u=0{\cdot}5 \end{matrix} = -0{\cdot}01^{0}/_{0}$$

## 11. Zestawienia i wnioski.

Ponieważ, jak już poprzednio podkreślono, nie mamy jeszcze ustalonych na podstawie pomiarów doświadczalnych ściślejszych interwałów wykładnika kształtu $r$ i ilorazu średnic krańcowych $u$, dlatego też przy omawianiu relatywnej dokładności poszczególnych wzorów ksylometrycznych t. z. przy zaszeregowaniu ich ze względu na stopień dokładności będziemy opierali się również nadal na węższych interwałach zmiennych $r$ i $u$, które poprzednio przyjęliśmy za ściślejsze, a mianowicie obraliśmy dla $r$ ściślejszy interwał wahający się od $r_1 = 0{\cdot}5$ do $r_2 = 2{\cdot}3$, a dla $u$, o ile nie będzie chodziło o bryły całkowite, wartości od $u_1 = 0{\cdot}5$ do $u_2 = 0{\cdot}8$, jak to już uczyniliśmy przy obliczaniu błędów przeciętnych dla pojedyńczych wzorów ksylometrycznych.

Wychodząc z tego założenia sporządziliśmy cyfrowe zestawienie błędów charakterystycznych tj. maksymalnych i przeciętnych dla naszych sześciu wzorów ksylometrycznych przy przyjętych ściślejszych interwałach, wykazane w tabeli 12; na

podstawie tego zestawienia możemy omawiane w niniejszej publikacji wzory ksylometryczne podzielić pod względem ich dokładności na trzy grupy, a mianowicie do pierwszej grupy zaliczamy wzory Smaljana i Hubera, dokładniejszym jest wzór Hossfelda, który tworzy grupę środkową, a grupę najdokładniejszych wzorów przedstawiają wzory Rieckego, Simonyego i Breymanna, przyczem co do dwóch ostatnich, które podają ściślej objętość brył dendrometrycznych od wzoru Rieckego, trudno ogólnie rozstrzygnąć, który wysuwa się na pierwsze miejsce.

Ponieważ z tego cyfrowego zestawienia widzimy, że bezwzględna wartość błędów przeciętnych dla brył ściętych w odniesieniu do $\alpha$ i $p_1$, o który w praktyce przedewszystkiem nam chodzi, nie przekracza dla wszystkich sześciu wzorów ksylometrycznych wartości $1^0/_0$, a w odniesieniu do $p_2$ przybiera dla wzoru Smaljana wielkość $1{\cdot}09^0/_0$ podczas gdy dla innych wzorów również pozostaje poniżej $1^0/_0$, z czego możemy wnioskować, że zastosowanie wzoru Smaljana, a przedewszystkiem Hubera do pomiarów metodą sekcyjną prowadzi do wyników, leżących w granicach dokładności wymaganej przy pomiarach doświadczalnych w dendrometrji.

Na podstawie rozważań w części zastosowanej dochodzimy poza wnioskami natury ogólnej, umieszczonemi przy końcu części teoretycznej, do następujących szczegółowych twierdzeń, odnoszących się do omawianych sześciu wzorów ksylometrycznych:

1. Błędy podstawowe wykazują w obrębie ustalonych ogólnych interwałów zmiennych $r$ i $u$ analogiczny przebieg; należy bowiem zauważyć, że — jak orjentacyjne w niniejszej publikacji niepodane obliczenia wykazały — przebieg dla innych wartości na $r$ może być dla poszczególnych rodzajów błędów podstawowych bardzo odmienny.

2. Wzory ksylometryczne, nie posiadające przekroju w czubie (Huber, Simony), wykazują dla walca t. zw. punkt pozornie ciągły; natomiast inne wzory (Smaljan, Hossfeld, Riecke, Breymann) tworzą dla walca t. zw. punkt nieciągły robiąc skoki o wartościach, mających tylko teoretyczne znaczenie. Błędy te dla walca obliczają się dlatego, że funkcje

błędów przybierają dla górnego przekroju walca zero, co jest niedopuszczalnem.

3. U tych czterech wzorów ksylometrycznych, które posiadają przekrój w czubie, spostrzegamy jeszcze to zjawisko, że wtórny błąd procentowy dla $r = 0$ i $u = 0$ równa się błędowi absolutnemu, wyrażonemu w odsetkach objętości walca podstawowego, pomimo że posiadają wartość różną od zera. Wielkość tych teoretycznych wartości, które tworzą skoki w t. zw. punktach nieciągłych da się obliczyć według wzoru

$$\alpha' = p'_2 = \frac{100}{m}, \text{ a } p'_1 = \frac{100}{m-1},$$

jeśli przez $m$ rozumiemy sumę algebraiczną czynników przy poszczególnych powierzchniach przekrojów poprzecznych występujących u dotyczących wzorów ksylometrycznych i tak $m$ dla wzoru Smaljana wynosi 2, dla wzoru Hossfelda 4, dla wzoru Hieckego 6, a dla wzoru Breymanna 8.

4. Ze zwiększaniem się wartości na $u$ bezwzględna wartość błędów podstawowych maleje t. zn. bryły całkowite wykazują największe błędy; z tego wynika wniosek, że wielkość błędów podstawowych jest wprost proporcjonalna do różnicy średnic krańcowych.

5. Ze zwiększaniem się wartości na $u$ ewentualna kulminacja błędów podstawowych następuje dla $r$ o wartości zmniejszającej się t. zn. kulminacja przy wzrastającem $u$ cofa się w kierunku początku układu współrzędnych.

6. Kulminacja błędów procentowych następuje dla większych wartości na $r$ niż kulminacja odpowiadającego błędu absolutnego.

*Moim asyst. pp. E. Lorenzowi, Z. Selensowi i St. Smólskiemu składam serdeczne podziękowanie za łaskawą pomoc przy żmudnych obliczeniach, które w niniejszej publikacji występują.*

## Objaśnienia i uwagi do tabel i tablic.

Dwanaście dołączonych tabel odnosi się do następujących zagadnień:

a) Tabela 1 podaje wartości rzeczywistych objętości brył dendrometrycznych, wyrażonych w odsetkach objętości walca podstawowego.

b) Tabele 2, 3, 4 podają wartości funkcji błędów podstawowych dla wzoru Smaljana.

c) Tabele 5, 6, 7 podają to samo dla wzoru Hubera.

d) „ 8, 9, 10 „ „ „ „ „ Hossfelda.

e) Tabela 11 podaje wartości funkcji błędów podstawowych dla brył całkowitych dla wzorów Rieckego, Simonyego i Breymanna.

f) Tabela 12 podaje cyfrowe zestawienie błędów maksymalnych i przeciętnych dla sześciu wzorów ksylometrycznych przy interwałach $r$ (0·5, 2·3) i $u = 0$ względnie $u$ (0·5 i 0·8).

Obliczenia szczególnych wartości funkcji błędów podstawowych uskuteczniono zopomocą pięciocyfrowych logarytmów, w wypadkach wątpliwych posługiwano się również siedmiocyfrowymi logarytmami, a miejscami trzeba było uciec się do interpolacji poszczególnych wartości.

Z powodów technicznych znaki algebraiczne umieszczono tylko dla $u = 0$, przyczem należy rozumieć, że wartości funkcyj błędów dla wyższych wartości na $u$ posiadają te same znaki jak dla $u = 0$.

Cztery tablice przedstawiają wykresy następujących błędów:

a) Tablica I. przedstawia przebieg błędów podstawowych przy wzorze Smaljana dla wartości na $u = 0$, 0·2, 0·4, 0·6 i 0·8.

b) Tablica II. przedstawia tosamo przy wzorze Hubera.

c) Tablica III. przedstawia tosamo przy wzorze Hossfelda dla wartości na $u = 0$, 0·2 i 0·4.

d) Tablica IV. przedstawia przebieg błędów $\alpha'$ i $p'_1$ przy wzorach Rieckego, Simonyego i Breymanna dla brył całkowitych tj. $u = 0$, przyczem należy zauważyć, że z linij kreskowanych ta, która wykazuje mniejsze odchylenia od osi odciętych, odnosi się do wzoru Breymanna.

Tabela 1.

**Rzeczywista objętość brył dendrometrycznych,**
wyrażona w odsetkach objętości walca podstawowego.
(Wartości wzoru 6.)

| $r$ | $u$ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0·0 | 0·1 | 0·2 | 0·3 | 0·4 | 0·5 | 0·6 | 0·7 | 0·8 | 0·9 |
| 0·0 | 100·000 | 100·000 | 100·000 | 100·000 | 100·000 | 100·000 | 100·000 | 100·000 | 100·000 | 100·000 |
| 0·1 | 90·910 | 90·910 | 90·910 | 90·910 | 90·910 | 90·910 | 90·914 | 90·948 | 91·290 | 93·299 |
| 0·2 | 83·334 | 83·334 | 83·334 | 83·334 | 83·340 | 83·393 | 83·656 | 84·567 | 86·942 | 91·725 |
| 0·3 | 76·923 | 76·923 | 76·925 | 76·947 | 77·068 | 77·498 | 78·614 | 80·934 | 85·006 | 91·271 |
| 0·4 | 71·428 | 71·428 | 71·450 | 71·585 | 72·048 | 73·158 | 75·282 | 78·786 | 83·964 | 90·998 |
| 0·5 | 66·667 | 66·673 | 66·771 | 67·163 | 68·138 | 70·000 | 73·020 | 77·412 | 83·318 | 90·833 |
| 0·6 | 62·500 | 62·529 | 62·783 | 63·546 | 65·099 | 67·661 | 71·410 | 76·462 | 82·882 | 90·720 |
| 0·7 | 58·823 | 58·903 | 59·395 | 60·596 | 62·710 | 65 886 | 70·220 | 75·765 | 82·570 | 90·643 |
| 0·8 | 55·556 | 55·729 | 56·528 | 58·176 | 60·809 | 64·501 | 69·304 | 75·243 | 82·332 | 90·584 |
| 0·9 | 52·632 | 52·946 | 54·085 | 56·175 | 59·270 | 63·399 | 68·583 | 74·832 | 82·145 | 90·541 |
| 1·0 | 50·000 | 50·500 | 52·000 | 54·500 | 58·000 | 62·500 | 68·000 | 74·500 | 82 000 | 90·498 |
| 1·1 | 47·619 | 48·346 | 50·209 | 53·086 | 56·940 | 61·756 | 67·521 | 74·230 | 81·878 | 90·470 |
| 1·2 | 45·455 | 46·445 | 48·659 | 51·879 | 56·046 | 61·131 | 67·117 | 74·003 | 81·780 | 90·445 |
| 1·3 | 43·478 | 44·761 | 47·309 | 50 839 | 55·279 | 60·597 | 66·774 | 73·812 | 81·692 | 90·422 |
| 1·4 | 41·667 | 43·264 | 46·129 | 49·937 | 54·619 | 60·137 | 66·483 | 73·645 | 81·622 | 90·405 |
| 1·5 | 40·000 | 41·928 | 45·087 | 49·148 | 54·040 | 59·738 | 66·228 | 73·502 | 81·557 | 90·388 |
| 1·6 | 38·462 | 40·732 | 44·163 | 48·452 | 53·535 | 59·390 | 66·006 | 73·377 | 81·498 | 90·375 |
| 1·7 | 37·038 | 39·655 | 43·339 | 47·831 | 53·084 | 59·080 | 65·808 | 73·267 | 81·452 | 90·363 |
| 1·8 | 35·714 | 38·681 | 42·600 | 47·278 | 52·683 | 58·803 | 65·631 | 73·167 | 81·405 | 90·351 |
| 1·9 | 34·483 | 37·801 | 41·935 | 46·781 | 52·324 | 58·557 | 65·474 | 73·082 | 81·370 | 90·342 |
| 2·0 | 33·333 | 37·001 | 41·334 | 46·333 | 52·001 | 58·334 | 65·334 | 73·000 | 81·334 | 90·333 |
| 2·1 | 32·258 | 36·268 | 40·787 | 45·926 | 51·708 | 58·133 | 65·205 | 72·930 | 81·302 | 90·326 |
| 2·2 | 31 250 | 35·601 | 40 287 | 45·556 | 51·440 | 57·951 | 65·088 | 72·862 | 81·276 | 90·317 |
| 2·3 | 30·303 | 34·988 | 39·831 | 45 219 | 51·195 | 57·781 | 64·983 | 72 803 | 81·244 | 90·312 |
| 2·4 | 29·411 | 34·420 | 39·412 | 44·908 | 50·971 | 57·628 | 64·884 | 72·752 | 81·216 | 90·306 |
| 2·5 | 28·571 | 33·898 | 39·025 | 44·621 | 50·766 | 57·489 | 64·794 | 72·702 | 81·195 | 90·301 |
| 2·6 | 27·778 | 33·415 | 38·668 | 44·356 | 50·576 | 57·355 | 64·714 | 72·657 | 81·174 | 90·295 |
| 2·7 | 27·027 | 32·967 | 38 336 | 44·111 | 50·399 | 57 236 | 64·639 | 72·610 | 81·158 | 90·288 |
| 2·8 | 26·316 | 32·549 | 38·028 | 43·883 | 50·237 | 57·123 | 64·567 | 72·568 | 81·138 | 90·286 |
| 2·9 | 25·641 | 32·160 | 37·743 | 43·672 | 50·083 | 57·019 | 64·494 | 72·530 | 81·133 | 90·282 |
| 3·0 | 25·000 | 31·796 | 37·473 | 43·475 | 49·941 | 56·921 | 64 434 | 72·495 | 81·104 | 90·278 |
| 3·1 | 24·391 | 31·456 | 37·224 | 43·290 | 49·809 | 56·830 | 64·377 | 72·463 | 81 098 | 90·273 |
| 3·2 | 23 809 | 31·136 | 36·989 | 43·115 | 49·682 | 56·745 | 64·320 | 72·435 | 81·082 | 90 270 |
| 3·3 | 23 256 | 30·837 | 36·768 | 42·953 | 49·564 | 56·661 | 64·271 | 72·405 | 81·070 | 90·267 |
| 3·4 | 22·727 | 30·554 | 36·561 | 42·848 | 49·456 | 56·586 | 64·223 | 72·380 | 81·060 | 90·266 |
| 3·5 | 22·223 | 30·289 | 36·365 | 42·655 | 49·351 | 56·519 | 64·181 | 72·357 | 81 052 | 90·262 |

Tabela 2.

**Wzór Smaliana.**

Błąd obsolutny $\alpha$, wyrażony w odsetkach objętości walca podstawowego.

| $r$ | $u$ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0·0 | 0·1 | 0·2 | 0·3 | 0·4 | 0·5 | 0·6 | 0·7 | 0·8 | 0·9 |
| 0·0 | —50·000 | —49·500 | —48·000 | —45·500 | —42·000 | —37·500 | —32·000 | —25·500 | —18·000 | — 9·500 |
| 0·1 | —40·910 | 40·410 | 39·910 | 36·410 | 32·910 | 28·410 | 22·914 | 16·448 | 9.290 | 2·800 |
| 0·2 | —33·334 | 32·834 | 31·334 | 28·834 | 25·340 | 20·893 | 15·656 | 10·067 | 4·942 | 1·225 |
| 0·3 | —26·923 | 26·423 | 24·925 | 22·447 | 19·068 | 14·998 | 10·614 | 6.434 | 3·006 | 0·771 |
| 0·4 | —21·428 | 20·928 | 19·450 | 17·085 | 14·048 | 10·658 | 7·282 | 4·286 | 1·964 | 0.493 |
| 0·5 | —16.667 | 16·173 | 14·771 | 12·663 | 10·138 | 7·500 | 5·020 | 2·912 | 1·318 | 0·333 |
| 0·6 | —12.500 | 12·029 | 10·783 | 9·046 | 7·099 | 5.161 | 3·410 | 1·962 | 0·832 | 0·220 |
| 0·7 | — 8·823 | 8·403 | 7·398 | 6·095 | 4·710 | 3·386 | 2·220 | 1·265 | 0·570 | 0·143 |
| 0·8 | — 5·556 | 5·229 | 4·528 | 3·676 | 2·809 | 2·001 | 1·304 | 0·743 | 0·332 | 0·084 |
| 0·9 | — 2·632 | 2·446 | 2·085 | 1·675 | 1·270 | 0·899 | 0·583 | 0·332 | 0·145 | 0·041 |
| 1·0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1·1 | + 2·381 | + 2·154 | + 1·791 | + 1·414 | + 1·060 | + 0·744 | + 0·479 | + 0·270 | + 0·122 | + 0·030 |
| 1·2 | + 4·545 | 4·055 | 3·341 | 2·621 | 1·945 | 1·369 | 0·883 | 0·497 | 0·220 | 0·055 |
| 1·3 | + 6·522 | 5·739 | 4·691 | 3·661 | 2·721 | 1·903 | 1.226 | 0·688 | 0·308 | 0·078 |
| 1·4 | + 8·333 | 7·236 | 5·871 | 4·563 | 3·381 | 2·363 | 1·517 | 0·855 | 0·378 | 0·098 |
| 1·5 | +10·000 | 8·572 | 6·913 | 5·352 | 3·960 | 2·762 | 1·772 | 0·998 | 0·443 | 0·112 |
| 1·6 | +11·538 | 9·768 | 7·837 | 6·048 | 4·465 | 3·110 | 1·994 | 1·123 | 0·502 | 0·125 |
| 1·7 | +12·962 | 10·845 | 8·661 | 6·669 | 4·916 | 3·420 | 2·192 | 1·233 | 0·548 | 0·137 |
| 1·8 | +14·286 | 11·819 | 9·400 | 7·222 | 5·317 | 3·697 | 2·369 | 1·333 | 0·595 | 0·149 |
| 1·9 | +15·517 | 12·699 | 10·065 | 7·719 | 5·676 | 3·943 | 2·526 | 1·418 | 0·630 | 0·158 |
| 2·0 | +16.667 | 13·499 | 10·666 | 8·167 | 5·999 | 4·166 | 2·666 | 1·500 | 0·666 | 0·167 |
| 2·1 | +17·742 | +14·232 | +11·213 | + 8·574 | + 6·292 | + 4·367 | + 2·795 | + 1·570 | + 0·698 | + 0·175 |
| 2·2 | +18·750 | 14·899 | 11·713 | 8·944 | 6·560 | 4·549 | 2·912 | 1·638 | 0·724 | 0·183 |
| 2·3 | +19·697 | 15·512 | 12·169 | 9·281 | 6·805 | 4·719 | 3·017 | 1·697 | 0·756 | 0·188 |
| 2·4 | +20·589 | 16·080 | 12·588 | 9·592 | 7·029 | 4·872 | 3·116 | 1·748 | 6·784 | 0·194 |
| 2·5 | +21·429 | 16·602 | 12·975 | 9·879 | 7 234 | 5·011 | 3·206 | 1·798 | 0·805 | 0·200 |
| 2·6 | +22·222 | 17·085 | 13·332 | 10·144 | 7·424 | 5·145 | 3·286 | 1·843 | 0·826 | 0·206 |
| 2·7 | +22·973 | 17·533 | 13·664 | 10·389 | 7·601 | 5·264 | 3·361 | 1·890 | 0·842 | 0·212 |
| 2·8 | +23·684 | 17·951 | 13·972 | 10·617 | 7·763 | 5·377 | 3·433 | 1·932 | 0·862 | 0·215 |
| 2·9 | +24·359 | 18·340 | 14·257 | 10·828 | 7·917 | 5·481 | 3·506 | 1·970 | 0·867 | 0·218 |
| 3·0 | +25·000 | 18·704 | 14·527 | 11·025 | 8·059 | 5·579 | 3·566 | 2·005 | 0·896 | 0·222 |
| 3·1 | +25·609 | +19·044 | +14·776 | +11·210 | + 8·191 | + 5·670 | + 3·623 | + 2·037 | + 0·902 | + 0·227 |
| 3·2 | +26·191 | 19·364 | 15·011 | 11·385 | 8·318 | 5·755 | 3·680 | 2·065 | 0·918 | 0·230 |
| 3·3 | +26·744 | 19·663 | 15·232 | 11·547 | 8·436 | 5·839 | 3·729 | 2·095 | 0·930 | 0·233 |
| 3·4 | +27·273 | 19·946 | 15·439 | 11·652 | 8·544 | 5·914 | 3·777 | 2·120 | 0·940 | 0·234 |
| 3·5 | +27·777 | 20·211 | 15·635 | 11·845 | 8·649 | 5·981 | 3·819 | 2·143 | 0·948 | 0·234 |

Tabela 3.

**Wzór Smaliana.**

Zasadniczy błąd procentowy $p_1$.

| $r$ | $u$ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0·0 | 0·1 | 0·2 | 0·3 | 0·4 | 0·5 | 0·6 | 0·7 | 0·8 | 0·9 |
| 0·0 | —100·000 | —98·020 | —92·308 | —83·486 | —72·414 | —60·000 | —47·059 | —34·228 | —21·951 | —10·497 |
| 0·1 | — 81·820 | 80·020 | 74·827 | 66·807 | 56·741 | 45·456 | 33 697 | 22·078 | 11·329 | 3·094 |
| 0·2 | — 66·668 | 65·018 | 60·258 | 52·906 | 43·690 | 33·429 | 23·024 | 13·513 | 6·027 | 1·353 |
| 0·3 | — 53·846 | 52·323 | 47·933 | 41·187 | 32·876 | 23·996 | 15·609 | 8·636 | 3·666 | 0·852 |
| 0.4 | — 42·856 | 41·441 | 37·404 | 31·349 | 24·221 | 17·053 | 10·709 | 5·753 | 2·395 | 0·550 |
| 0·5 | — 33·334 | 32·422 | 28·466 | 23·235 | 17·474 | 12·000 | 7·382 | 3·909 | 1·607 | 0·368 |
| 0·6 | — 25·000 | 23·820 | 20·737 | 16·598 | 12·240 | 8·258 | 5·015 | 2·634 | 1·076 | 0·245 |
| 0·7 | — 17·646 | 16·640 | 14·227 | 11·185 | 8·121 | 5·418 | 3·265 | 1·698 | 0·695 | 0·157 |
| 0·8 | — 11·112 | 10 354 | 8·708 | 6·745 | 4·843 | 3·202 | 1·918 | 0·997 | 0·405 | 0·092 |
| 0·9 | — 5·264 | 4·844 | 4·010 | 3·073 | 2·190 | 1·438 | 0·857 | 0·446 | 0·177 | 0·045 |
| 1·0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1·1 | + 4·762 | + 4·265 | + 3·444 | + 2·595 | + 1·828 | + 1·190 | + 0·704 | + 0·362 | + 0·149 | + 0·033 |
| 1·2 | + 9·090 | 8·030 | 6·425 | 4·809 | 3·369 | 2·190 | 1·299 | 0·667 | 0·268 | 0·067 |
| 1·3 | + 13·044 | 11·364 | 9·021 | 6·717 | 4·691 | 3·045 | 1·803 | 0·923 | 0·376 | 0·086 |
| 1·4 | + 16·666 | 14·329 | 11·290 | 8·372 | 5 829 | 3·781 | 2·231 | 1·148 | 0·461 | 0·105 |
| 1·5 | + 20·000 | 16·974 | 13·294 | 9·820 | 6·828 | 4·419 | 2·606 | 1·340 | 0 540 | 0·124 |
| 1·6 | + 23·076 | 19·343 | 15·071 | 11·097 | 7·698 | 4·976 | 2·932 | 1·507 | 0·612 | 0·139 |
| 1·7 | + 25·924 | 21·475 | 16·656 | 12·237 | 8·476 | 5·472 | 3·224 | 1·655 | 0·668 | 0·157 |
| 1·8 | + 28·572 | 23·404 | 18·077 | 13·251 | 9·167 | 5·915 | 3·482 | 1·789 | 0·726 | 0 164 |
| 1·9 | + 31·034 | 25·147 | 19·356 | 14·163 | 9·786 | 6·309 | 3·715 | 1·903 | 0·768 | 0·175 |
| 2·0 | + 33·334 | 26·731 | 20·512 | 14·985 | 10·343 | 6·066 | 3·921 | 2·013 | 0·812 | 0·184 |
| 2·1 | + 35·484 | +28·182 | +21·563 | +15·732 | +10·848 | + 6·987 | + 4·110 | + 2·107 | + 0·851 | + 0·193 |
| 2·2 | + 37·500 | 29·503 | 22·525 | 16·411 | 11·310 | 7·278 | 4·282 | 2·199 | 0·883 | 0·202 |
| 2·3 | + 39·394 | 30·717 | 23·402 | 17·029 | 11·733 | 7·550 | 4·437 | 2·278 | 0·900 | 0·208 |
| 2·4 | + 41·178 | 31·842 | 24·208 | 17·600 | 12·119 | 7·795 | 4·582 | 2·346 | 0·956 | 0·215 |
| 2·5 | + 42·858 | 32·875 | 24·952 | 18·127 | 12·472 | 8·018 | 4·715 | 2·413 | 0·982 | 0·220 |
| 2·6 | + 44·444 | 33·832 | 25·638 | 18·613 | 12·800 | 8·232 | 4·812 | 2·474 | 1·007 | 0·226 |
| 2·7 | + 45·946 | 34·729 | 26·277 | 19·062 | 13·105 | 8·422 | 4·943 | 2·537 | 1·027 | 0·234 |
| 2·8 | + 47·368 | 35·547 | 26·869 | 19·481 | 13·384 | 8·603 | 5·049 | 2·593 | 1·051 | 0·236 |
| 2·9 | + 48·718 | 36·317 | 27.417 | 19·868 | 13·650 | 8·770 | 5·156 | 2·644 | 1·057 | 0·240 |
| 3·0 | + 50·000 | 37·038 | 27.937 | 20 229 | 13.895 | 8·926 | 5·244 | 2·691 | 1·093 | 0·245 |
| 3·1 | + 51·218 | +37·711 | +28·415 | +20·569 | +14·122 | + 9·072 | + 5·328 | + 2·734 | + 1·100 | + 0·249 |
| 3·2 | + 52·382 | 38·345 | 28·867 | 20·890 | 14·341 | 9·208 | 5·412 | 2·772 | 1·120 | 0·253 |
| 3·3 | + 53·488 | 38·937 | 29·292 | 21·187 | 14 545 | 9·342 | 5·484 | 2·812 | 1·134 | 0·257 |
| 3·4 | + 54·546 | 39·497 | 29·690 | 21·379 | 14·731 | 9·462 | 5·554 | 2·846 | 1·146 | 0·258 |
| 3·5 | + 55·554 | 40·022 | 30 067 | 21·734 | 14·912 | 9·570 | 5·616 | 2·877 | 1·156 | 0·263 |

Tabela 4.

**Wzór Smaliana.**

Wtórny błąd procentowy $p_2$.

| $r$ | $u =$ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0·0 | 0·1 | 0·2 | 0·3 | 0·4 | 0·5 | 0·6 | 0·7 | 0·8 | 0·9 |
| 0·0 | — 50·000 | —49·500 | —48·000 | —45·500 | —42 000 | —37·500 | —32·000 | —25·500 | —18·000 | — 9·500 |
| 0·1 | — 45·000 | 44·450 | 42·800 | 40·051 | 36·201 | 31·252 | 25·204 | 18·085 | 10·176 | 3·001 |
| 0·2 | — 40·000 | 39·400 | 37·600 | 34·601 | 30·406 | 25·054 | 18·714 | 11·904 | 5·684 | 1·335 |
| 0·3 | — 35·000 | 34·350 | 32·402 | 29·172 | 24·742 | 19·352 | 13·501 | 7·950 | 3·536 | 0·875 |
| 0·4 | — 30·000 | 29·299 | 27·222 | 23·867 | 19·498 | 14·568 | 9·673 | 5·440 | 2·339 | 0·547 |
| 0·5 | — 25·000 | 24·257 | 22·122 | 18·854 | 14·879 | 10·714 | 6·875 | 3·762 | 1·582 | 0·366 |
| 0·6 | — 20·000 | 19·237 | 17·175 | 14·235 | 10·905 | 7 628 | 4·775 | 2·566 | 1·064 | 0·242 |
| 0·7 | — 15·000 | 14·266 | 12·455 | 10·060 | 7·511 | 5·139 | 3·160 | 1·670 | 0·690 | 0·157 |
| 0·8 | — 10·000 | 9·383 | 8·010 | 6·319 | 4·619 | 3·102 | 1·882 | 0·987 | 0·403 | 0·092 |
| 0·9 | — 5·000 | 4·620 | 3·855 | 2·982 | 2·142 | 1·418 | 0·850 | 0·444 | 0·177 | 0·045 |
| 1·0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1·1 | + 5·000 | + 4·455 | + 3·558 | + 2·664 | + 1·862 | + 1·205 | + 0·709 | + 0·364 | + 0·149 | + 0·033 |
| 1·2 | + 10·000 | 8·731 | 6·866 | 5·052 | 3·486 | 2·240 | 1·316 | 0·672 | 0·269 | 0·061 |
| 1·3 | + 15·000 | 12·821 | 9·916 | 7·201 | 4·922 | 3·140 | 1·836 | 0·932 | 0·377 | 0·085 |
| 1·4 | + 20 000 | 16·725 | 12·727 | 9·138 | 6·190 | 3·929 | 2·282 | 1·161 | 0·463 | 0·104 |
| 1·5 | + 25·000 | 20·445 | 15·333 | 10·890 | 7·328 | 4·624 | 2·676 | 1·358 | 0·543 | 0·124 |
| 1·6 | + 30·000 | 23 981 | 17·746 | 12·482 | 8·340 | 5·237 | 3·021 | 1·530 | 0·616 | 0·129 |
| 1·7 | + 35·000 | 27·348 | 19·984 | 13·943 | 9·261 | 5·789 | 3 331 | 1·683 | 0·673 | 0·151 |
| 1·8 | + 40·000 | 30·555 | 22·066 | 15·275 | 10·092 | 6·287 | 3·610 | 1·822 | 0·731 | 0·164 |
| 1·9 | + 45·000 | 33·594 | 24·001 | 16·500 | 10·848 | 6·734 | 3·858 | 1·940 | 0·774 | 0·175 |
| 2·0 | + 50 000 | 36·483 | 25·804 | 17·627 | 11·536 | 7·142 | 4·081 | 2·055 | 0·819 | 0·185 |
| 2·1 | + 55·000 | +39·241 | +27·492 | +18·670 | +12·168 | + 7·512 | + 4·286 | + 2·153 | + 0·859 | + 0·192 |
| 2·2 | + 60·000 | 41·850 | 29·074 | 19·633 | 12·753 | 7·850 | 4·474 | 2·248 | 0·891 | 0·203 |
| 2·3 | + 65·000 | 44·335 | 30·552 | 20·525 | 13·292 | 8·167 | 4·643 | 2·331 | 0·931 | 0·208 |
| 2·4 | + 70·000 | 46·717 | 31·940 | 21·359 | 13·790 | 8·454 | 4·802 | 2·403 | 0·965 | 0·215 |
| 2·5 | + 75·000 | 48·976 | 33·247 | 22·140 | 14·250 | 8·716 | 4·948 | 2·473 | 0·991 | 0·221 |
| 2·6 | + 80·000 | 51·130 | 34·478 | 22·870 | 14·679 | 8·970 | 5·078 | 2·573 | 1·018 | 0·227 |
| 2·7 | + 85·000 | 53·183 | 35·644 | 23·552 | 15·082 | 9·197 | 5·200 | 2·603 | 1·037 | 0·235 |
| 2·8 | + 90·000 | 55·151 | 36·741 | 24·194 | 15·453 | 9·413 | 5·317 | 2·662 | 1·062 | 0·237 |
| 2·9 | + 95·000 | 57·027 | 37·774 | 24·794 | 15·808 | 9·613 | 5·436 | 2 716 | 1·069 | 0·241 |
| 3 0 | +100·000 | 58·825 | 38·768 | 25·359 | 16·137 | 9·801 | 5·534 | 2·766 | 1·105 | 0·246 |
| 3·1 | +105·000 | +60·542 | +39·695 | +25·895 | +16·445 | + 9·977 | + 5·628 | + 2·811 | + 1·112 | + 0·251 |
| 3·2 | +110·000 | 62·192 | 40·582 | 26·406 | 16·742 | 10·142 | 5·721 | 2 851 | 1·132 | 0·254 |
| 3·3 | +115·000 | 63·764 | 41·427 | 26·883 | 17·020 | 10·305 | 5·802 | 2·893 | 1·147 | 0·258 |
| 3·4 | +120·000 | 65·281 | 42·228 | 27·194 | 17·276 | 10·451 | 5·881 | 2·930 | 1·160 | 0·259 |
| 3·5 | +125·000 | 66·727 | 42·995 | 27·769 | 17·525 | 10·582 | 5·959 | 2·962 | 1·170 | 0·263 |

Tabela 5.

**Wzór Huber'a.**

Błąd absolutny $\alpha$, wyrażony w odsetkach objętości walca podstawowego.

| $r$ | $u$ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0·0 | 0·1 | 0·2 | 0·3 | 0.4 | 0·5 | 0·6 | 0·7 | 0·8 | 0·9 |
| 0·0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0·1 | + 2·394 | +2·394 | +2·394 | +2·394 | +2·394 | +2·394 | +2·390 | +2·362 | +2·122 | +1·081 |
| 0·2 | + 3·720 | 3·720 | 3·720 | 3·720 | 3·716 | 3·677 | 3·502 | 2·973 | 1·906 | 0·696 |
| 0·3 | + 4·302 | 4·302 | 4·300 | 4·285 | 4·212 | 3·967 | 3·410 | 2·482 | 1·338 | 0·376 |
| 0·4 | + 4·358 | 4·358 | 4·347 | 4·275 | 4·048 | 3·567 | 2·808 | 1·860 | 0·920 | 0·246 |
| 0·5 | + 4·045 | 4·042 | 3·997 | 3·834 | 3·474 | 2·888 | 2·133 | 1·332 | 0·636 | 0·165 |
| 0·6 | + 3·475 | 3·464 | 3·377 | 3·142 | 2·726 | 2·167 | 1·533 | 0·924 | 0·430 | 0·112 |
| 0·7 | + 2·734 | 2·714 | 2·593 | 2·337 | 1·958 | 1·501 | 1·031 | 0·613 | 0·278 | 0·071 |
| 0·8 | + 1·879 | 1·852 | 1·728 | 1·514 | 1·231 | 0 922 | 0·623 | 0·362 | 0·166 | 0·042 |
| 0·9 | + 0·956 | 0·932 | 0·850 | 0·725 | 0·574 | 0·424 | 0·280 | 0·161 | 0·075 | 0·014 |
| 1·0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1·1 | — 0·967 | —0.913 | —0·798 | —0·655 | —0·502 | —0·360 | —0·238 | —0·135 | —0·058 | —0·015 |
| 1·2 | — 1·928 | 1·790 | 1·536 | 1·238 | 0·942 | 0·672 | 0·437 | 0·250 | 0·112 | 0·029 |
| 1·3 | — 2·865 | 2·606 | 2·202 | 1·755 | 1·324 | 0·937 | 0·606 | 0·344 | 0·152 | 0·038 |
| 1·4 | — 3·774 | 3·378 | 2·808 | 2·215 | 1·663 | 1·166 | 0·753 | 0·427 | 0·192 | 0·047 |
| 1·5 | — 4·644 | 4·081 | 3·353 | 2·624 | 1·954 | 1·368 | 0·882 | 0·495 | 0·219 | 0·054 |
| 1·6 | — 5 475 | 4·728 | 3·838 | 2·986 | 2·215 | 1·549 | 0·997 | 0·562 | 0·248 | 0·063 |
| 1·7 | — 6·260 | 5·311 | 4·273 | 3·308 | 2·446 | 1·705 | 1·094 | 0·619 | 0·274 | 0·059 |
| 1·8 | — 6·995 | 5·837 | 4·665 | 3·593 | 2·650 | 1 845 | 1·181 | 0·664 | 0·292 | 0·072 |
| 1·9 | — 7·689 | 6·317 | 5·017 | 3·850 | 2·836 | 1·971 | 1·261 | 0·710 | 0·315 | 0·079 |
| 2·0 | — 8·333 | 6·752 | 5 334 | 4·084 | 3·001 | 2·084 | 1·334 | 0·750 | 0·336 | 0·083 |
| 2·1 | — 8·932 | —7·140 | —5·619 | —4·291 | —3·150 | —2·184 | —1·398 | —0·788 | —0·350 | —0·087 |
| 2·2 | — 9·486 | 7·494 | 5·875 | 4·481 | 3·284 | 2·280 | 1·457 | 0·815 | 0·368 | 0·090 |
| 2.3 | — 9·997 | 7·814 | 6·110 | 4·654 | 3·408 | 2·362 | 1·510 | 0·850 | 0·377 | 0·094 |
| 2·4 | —10·464 | 8·102 | 6·323 | 4 811 | 3·521 | 2·442 | 1·560 | 0·877 | 0·384 | 0·096 |
| 2·5 | —10·893 | 8·362 | 6·516 | 4·951 | 3·622 | 2·512 | 1·603 | 0·904 | 0·395 | 0·099 |
| 2·6 | —11·284 | 7·600 | 6·692 | 5·083 | 3·717 | 2 575 | 1·647 | 0·927 | 0·408 | 0·102 |
| 2·7 | —11·638 | 8·816 | 6·853 | 5·204 | 3·805 | 2·633 | 1·687 | 0·945 | 0·418 | 0·104 |
| 2·8 | —11·957 | 9·010 | 7·000 | 5·316 | 3·887 | 2·688 | 1·720 | 0·963 | 0·422 | 0·106 |
| 2·9 | —12·244 | 9·188 | 7·139 | 5·419 | 3·960 | 2·741 | 1·748 | 0·983 | 0·433 | 0·110 |
| 3·0 | —12 500 | 9·352 | 7·262 | 5·514 | 4·029 | 2·790 | 1·778 | 0·998 | 0·442 | 0·111 |
| 3·1 | —12·728 | —9·501 | —7·380 | —5 602 | —4·094 | —2·835 | —1·808 | —1·015 | —0·454 | —0·112 |
| 3·2 | —12·927 | 9·636 | 7·487 | 5·683 | 4·155 | 2·879 | 1·838 | 1·037 | 0·459 | 0·115 |
| 3·3 | 13·103 | 9·762 | 7·587 | 5·759 | 4·212 | 2·918 | 1·858 | 1·045 | 0·462 | 0·116 |
| 3·4 | —13·254 | 9·876 | 7·679 | 5·880 | 4·263 | 2·953 | 1·887 | 1·058 | 0·474 | 1·118 |
| 3·5 | —13·384 | 9·932 | 7·764 | 5·898 | 4·313 | 2·986 | 1·911 | 1·070 | 0·475 | 1·118 |

Tabela 6.

**Wzór Huber'a.**

Zasadniczy błąd procentowy $p_1$.

| $r$ | $u =$ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0·0 | 0·1 | 0·2 | 0·3 | 0·4 | 0·5 | 0·6 | 0·7 | 0·8 | 0·9 |
| 0·0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0·1 | + 2·566 | + 2·566 | + 2·566 | + 2·566 | +2·566 | +2·566 | +2·562 | +2·532 | +2·272 | +1·147 |
| 0·2 | + 4·274 | 4·274 | 4·274 | 4·274 | 4·270 | 4·222 | 4·018 | 3·397 | 2·146 | 0·754 |
| 0·3 | + 5·296 | 5·296 | 5·294 | 5·276 | 5·180 | 4·870 | 4·157 | 2·976 | 1·550 | 0·410 |
| 0·4 | + 5·750 | 5·750 | 5·735 | 5·635 | 5·320 | 4·650 | 3·597 | 2·305 | 1·085 | 0·269 |
| 0·5 | + 5·718 | 5·714 | 5·646 | 5·398 | 4·847 | 3·960 | 2·837 | 1·690 | 1·755 | 0·181 |
| 0·6 | + 5·267 | 5·250 | 5·106 | 4·712 | 4·020 | 3·102 | 2·102 | 1·195 | 1·517 | 0·121 |
| 0·7 | + 4·442 | 4·404 | 4·184 | 3·715 | 3·027 | 2·220 | 1·447 | 0·802 | 0·335 | 0·078 |
| 0·8 | + 3·272 | 3·217 | 2·967 | 2·537 | 1·982 | 1·408 | 0·890 | 0·477 | 0·200 | 0·045 |
| 0·9 | + 1·785 | 1·730 | 1·547 | 1·275 | 0·960 | 0·655 | 0·407 | 0·214 | 0·092 | 0·016 |
| 1·0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1·1 | — 2·072 | — 1·926 | — 1·616 | — 1·242 | —0·891 | —0·586 | —0·353 | —0·182 | —0·072 | —0·017 |
| 1·2 | — 4·429 | 4·010 | 3·257 | 2·445 | 1·712 | 1·112 | 0·653 | 0·340 | 0·139 | 0·028 |
| 1·3 | — 7·056 | 6·183 | 4·881 | 3·576 | 2·455 | 1·571 | 0·916 | 0·468 | 0·186 | 0·041 |
| 1·4 | — 9·959 | 8·470 | 6·456 | 4·640 | 3·138 | 1·977 | 1·147 | 0·581 | 0·237 | 0·053 |
| 1·5 | — 13·138 | 10·785 | 8·032 | 5·641 | 3·755 | 2·345 | 1·351 | 0·681 | 0·272 | 0·061 |
| 1·6 | — 16·595 | 13·131 | 9·515 | 6·568 | 4·317 | 2·676 | 1·533 | 0·772 | 0·307 | 0·069 |
| 1·7 | — 20·333 | 15·462 | 10·938 | 7·429 | 4·831 | 2·971 | 1·691 | 0 851 | 0·337 | 0·076 |
| 1·8 | — 24·353 | 17·773 | 12·297 | 8·225 | 5·295 | 3·240 | 1·833 | 0·914 | 0·360 | 0·081 |
| 1·9 | — 28·694 | 20·064 | 13·592 | 8·968 | 5·731 | 3·483 | 1·965 | 0·981 | 0·388 | 0·087 |
| 2·0 | — 33·333 | 22·036 | 14·818 | 9·665 | 6·123 | 3·705 | 2·084 | 1·037 | 0·414 | 0·092 |
| 2·1 | — 38·294 | —24·514 | —15·976 | —10·305 | —6·485 | —3·902 | —2·190 | — 1·093 | —0·432 | —0·097 |
| 2·2 | — 43·590 | 26·663 | 17·076 | 10·910 | 6·820 | 4·095 | 2·290 | 1·133 | 0·455 | 0·100 |
| 2·3 | — 49·231 | 28·753 | 18·118 | 11·474 | 7·133 | 4·263 | 2·379 | 1·181 | 0·466 | 0·105 |
| 2·4 | — 55·236 | 30·782 | 19·108 | 11·997 | 7·420 | 4·424 | 2·464 | 1·219 | 0·475 | 0·106 |
| 2·5 | — 61·626 | 32·748 | 20·044 | 12·484 | 7·680 | 4·571 | 2·540 | 1·260 | 0·491 | 0·111 |
| 2·6 | — 68·415 | 34·653 | 20·925 | 12·944 | 7·933 | 4·700 | 2·612 | 1·293 | 0·505 | 0·114 |
| 2·7 | — 75·624 | 36·503 | 21·767 | 13·376 | 8·165 | 4·824 | 2·679 | 1·319 | 0·516 | 0·115 |
| 2·8 | — 83·274 | 38·274 | 22·563 | 13·784 | 8·380 | 4·937 | 2·733 | 1·347 | 0·523 | 0·119 |
| 2·9 | — 91·395 | 40·000 | 23·328 | 14·166 | 8·585 | 5·051 | 2·788 | 1·374 | 0·539 | 0·122 |
| 3.0 | —100·000 | 44·671 | 24·040 | 14·524 | 8·775 | 5·152 | 2·840 | 1·395 | 0·547 | 0·124 |
| 3·1 | —109 129 | —43·277 | —24·726 | —14·866 | —8·955 | —5·251 | —2·888 | —1·421 | —0·563 | —0·125 |
| 3·2 | —118·800 | 44·820 | 25·377 | 15·184 | 9·128 | 5·344 | 2·938 | 1·451 | 0·569 | 0·127 |
| 3·3 | —129·047 | 46·323 | 26·000 | 15·484 | 9·290 | 5 432 | 2·979 | 1·465 | 0 572 | 0·129 |
| 3·4 | —139·911 | 47·762 | 26·588 | 15·772 | 9·433 | 5·507 | 3·026 | 1 484 | 0·588 | 0·130 |
| 3·5 | —151·418 | 49·159 | 27.144 | 16 049 | 9·578 | 5·580 | 3·071 | 1·502 | 0·591 | 0·130 |

Tabela 7.

**Wzór Huber'a.**

Wtórny błąd procentowy $p_2$.

| $r$ | $u$ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0·0 | 0·1 | 0·2 | 0·3 | 0·4 | 0·5 | 0·6 | 0·7 | 0·8 | 0·9 |
| 0·0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0·1 | + 2·633 | + 2·633 | + 2·633 | + 2·633 | +2·633 | +2·633 | +2·629 | +2·598 | +2·324 | +1·158 |
| 0·2 | + 4·464 | 4·464 | 4·464 | 4·464 | 4·460 | 4·410 | 4·186 | 3·517 | 2·193 | 0·760 |
| 0·3 | + 5·593 | 5·593 | 5·590 | 5·571 | 5·463 | 5·119 | 4·338 | 3·067 | 1·574 | 0·412 |
| 0·4 | + 6·101 | 6·100 | 6·083 | 5·971 | 5·620 | 4·476 | 3·731 | 2·360 | 1·098 | 0·269 |
| 0·5 | + 6·063 | 6 059 | 5·983 | 5·707 | 5·095 | 4·124 | 2·919 | 1·719 | 0·760 | 0·181 |
| 0·6 | + 5·561 | 5·541 | 5·380 | 4·944 | 4·188 | 3·202 | 2·148 | 1·209 | 0·519 | 0·122 |
| 0·7 | + 4·648 | 4·607 | 4·367 | 3·857 | 3·121 | 2·270 | 1·467 | 1·809 | 0·337 | 0·079 |
| 0·8 | + 3·383 | 3·324 | 3·057 | 2·602 | 2·023 | 1·428 | 0·898 | 0·480 | 0·200 | 0·045 |
| 0·9 | + 1·817 | 1·760 | 1·571 | 1·291 | 0·970 | 0·670 | 0·409 | 0·214 | 0·093 | 0·016 |
| 1·0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1·1 | — 2·030 | — 1·888 | — 1·590 | — 1·227 | —0·882 | —0·582 | —0·352 | —0·182 | —0·072 | —0·017 |
| 1·2 | — 4·240 | 3·854 | 3·154 | 2·386 | 1·682 | 1·100 | 0·650 | 0·337 | 0·138 | 0·030 |
| 1·3 | — 6·590 | 5·822 | 4 655 | 3·452 | 2·395 | 1·547 | 0·907 | 0·466 | 0·186 | 0·041 |
| 1·4 | — 9·056 | 7·808 | 6·064 | 4 435 | 3·042 | 1·938 | 1·132 | 0·578 | 0·237 | 0·052 |
| 1·5 | —11·612 | 9·735 | 7·434 | 5·340 | 3·620 | 2·292 | 1·334 | 0·677 | 0·272 | 0·060 |
| 1 6 | —14·233 | 11·606 | 8·688 | 6·164 | 4·137 | 2·606 | 1·510 | 0·766 | 0·306 | 0·068 |
| 1·7 | —16·898 | 13·392 | 9·860 | 6·915 | 4·608 | 2·886 | 1·662 | 0·844 | 0·335 | 0·076 |
| 1·8 | —19·590 | 15·092 | 10·950 | 7·600 | 5·030 | 3·138 | 1·800 | 0·905 | 0·358 | 0·081 |
| 1·9 | —22·297 | 16·710 | 11·966 | 8·230 | 5·420 | 3·366 | 1·927 | 0·972 | 0·386 | 0·087 |
| 2·0 | —25·000 | 18·058 | 12.906 | 8·814 | 5·570 | 3·572 | 2·042 | 1·026 | 0·412 | 0·092 |
| 2·1 | —27·690 | —19·688 | —13·776 | — 9·344 | —6·090 | —3·757 | —2·144 | —1·080 | —0·430 | —0·096 |
| 2·2 | —30·357 | 21·050 | 14·586 | 9·836 | 6·384 | 3·934 | 2·238 | 1·120 | 0·452 | 0·099 |
| 2·3 | —32·990 | 22·332 | 15·340 | 10·292 | 6·657 | 4·088 | 2·324 | 1·167 | 0·464 | 0·104 |
| 2·4 | —35·581 | 23·537 | 16·042 | 10·712 | 6·906 | 4·236 | 2·405 | 1·204 | 0·472 | 0·107 |
| 2·5 | —38·129 | 24·670 | 16·692 | 11·078 | 7·134 | 4·370 | 2·476 | 1·245 | 0·490 | 0·111 |
| 2·6 | —40·623 | 25·735 | 17·305 | 11·460 | 7·350 | 4·490 | 2·546 | 1·277 | 0·502 | 0·113 |
| 2·7 | —43·060 | 26·742 | 17·876 | 11·798 | 7·550 | 4·602 | 2·608 | 1·302 | 0·515 | 0·114 |
| 2·8 | —45·436 | 27·680 | 18·410 | 12·114 | 7·732 | 4·705 | 2·660 | 1·330 | 0·522 | 0·118 |
| 2·9 | —47·752 | 28·572 | 18·915 | 12·408 | 7·906 | 4·808 | 2·712 | 1·356 | 0.536 | 0·121 |
| 3·0 | —50·000 | 29·413 | 19·380 | 12·682 | 8·067 | 4·900 | 2·760 | 1·376 | 0·544 | 0·123 |
| 3·1 | —52·182 | —30·206 | —19·825 | —12·942 | —8·220 | —4·990 | —2·803 | —1·402 | —0·560 | —0·124 |
| 3·2 | — 54·297 | 30·949 | 20·242 | 13·182 | 8·364 | 5·072 | 2·855 | 1·430 | 0·565 | 0·126 |
| 3·3 | —56·341 | 31·657 | 20·635 | 13·408 | 8·500 | 5·152 | 2·892 | 1·445 | 0·570 | 0·128 |
| 3·4 | —58·318 | 32·323 | 21·003 | 13·622 | 8·620 | 5·220 | 2·938 | 1·462 | 0·585 | 0·132 |
| 3·5 | —60·226 | 32·957 | 21·350 | 13·830 | 8·740 | 5·285 | 2·980 | 1·480 | 0·587 | 0·132 |

Tabela 8.

**Wzór Hossfeld'a.**

Błąd absolutny $\alpha$, wyrażony w odsetkach objętości walca podstawowego.

| $r$ | $u =$ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0·0 | 0·1 | 0·2 | 0·3 | 0·4 | 0·5 | 0·6 | 0·7 | 0·8 | 0·9 |
| 0·0 | 25·000 | —24·750 | —24·000 | —22·750 | —21·000 | —18·750 | —16·000 | —12·750 | — 9·000 | — 4·750 |
| 0·1 | —18·899 | 18·640 | 17·890 | 16·640 | 14·890 | 12·640 | 9·894 | 7·304 | 3·232 | 0·604 |
| 0·2 | —14·174 | 13·925 | 13·175 | 11·925 | 10·181 | 7·977 | 5·455 | 2·966 | 1·058 | 0·142 |
| 0·3 | —10·513 | 10·263 | 9·515 | 8·284 | 6·637 | 4·740 | 2·876 | 1·364 | 0·428 | 0·053 |
| 0·4 | — 7·657 | 7·407 | 6·675 | 5·534 | 4·147 | 2·741 | 1·530 | 0·675 | 0·200 | 0·024 |
| 0·5 | — 5·429 | 5·184 | 4·509 | 3·551 | 2·510 | 1·563 | 0·830 | 0·351 | 0·101 | 0·012 |
| 0·6 | — 3·695 | 3·466 | 2·896 | 2·174 | 1·467 | 0·873 | 0·449 | 0·185 | 0·053 | 0·006 |
| 0·7 | — 2·356 | 2·158 | 1·731 | 1·245 | 0·808 | 0·467 | 0·237 | 0·095 | 0·027 | 0·003 |
| 0·8 | — 1·333 | 1·185 | 0·916 | 0·637 | 0·401 | 0·227 | 0·112 | 0·045 | 0·013 | 0·001 |
| 0·9 | — 0·563 | 0·486 | 0·362 | 0·245 | 0·152 | 0·084 | 0·041 | 0·016 | 0·005 | 0·001 |
| 1·0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1·1 | + 0·394 | + 0·319 | + 0·222 | + 0·124 | + 0·089 | + 0·047 | + 0·021 | + 0·009 | + 0·003 | + 0·000 |
| 1·2 | + 0·651 | 0·508 | 0·345 | 0·221 | 0·131 | 0·071 | 0·036 | 0·012 | 0·004 | 0·000 |
| 1·3 | + 0·795 | 0·597 | 0·398 | 0·252 | 0·148 | 0·079 | 0·038 | 0·015 | 0·004 | 0·001 |
| 1·4 | + 0·847 | 0·614 | 0·401 | 0·250 | 0·144 | 0·078 | 0·037 | 0·014 | 0·004 | 0·001 |
| 1·5 | + 0·825 | 0·576 | 0·371 | 0·230 | 0·134 | 0·072 | 0·034 | 0·013 | 0·003 | 0·001 |
| 1·6 | + 0·741 | 0·499 | 0·317 | 0·194 | 0·111 | 0·060 | 0·030 | 0·011 | 0·003 | 0·000 |
| 1·7 | + 0·608 | 0·397 | 0·250 | 0·154 | 0·088 | 0·045 | 0·024 | 0·009 | 0·002 | 0·000 |
| 1·8 | + 0·435 | 0·276 | 0·172 | 0·103 | 0·060 | 0·031 | 0·017 | 0·006 | 0·002 | 0·000 |
| 1·9 | + 0·230 | 0·141 | 0·086 | 0·054 | 0·030 | 0·016 | 0·009 | 0·003 | 0·001 | 0·000 |
| 2·0 | + 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2·1 | — 0·249 | — 0·143 | — 0·087 | — 0·050 | — 0·031 | — 0·016 | — 0·008 | — 0·003 | — 0·001 | — 0·000 |
| 2·2 | — 0·512 | 0·290 | 0·174 | 0·103 | 0·060 | 0·034 | 0·014 | 0·006 | 0·002 | 0·000 |
| 2·3 | — 0·787 | 0·437 | 0·261 | 0·157 | 0·088 | 0·048 | 0·024 | 0·009 | 0·002 | 0·000 |
| 2·4 | — 1·069 | 0·575 | 0·347 | 0·205 | 0·117 | 0·062 | 0·028 | 0·011 | 0·003 | 0·000 |
| 2·5 | — 1·354 | 0·714 | 0·427 | 0·254 | 0·144 | 0·078 | 0·036 | 0·013 | 0·004 | 0·001 |
| 2·6 | — 1·642 | 0·850 | 0·500 | 0·299 | 0·170 | 0·090 | 0·043 | 0·015 | 0·005 | 0·001 |
| 2·7 | — 1·930 | 0·980 | 0·581 | 0·343 | 0·195 | 0·104 | 0·051 | 0·019 | 0·005 | 0·001 |
| 2·8 | — 2·217 | 1·106 | 0·656 | 0·387 | 0·222 | 0·117 | 0·058 | 0·021 | 0·006 | 0·001 |
| 2·9 | — 2·499 | 1·225 | 0·724 | 0·428 | 0·243 | 0·130 | 0·062 | 0·024 | 0·007 | 0·001 |
| 3·0 | — 2·778 | 1·341 | 0·789 | 0·466 | 0·265 | 0·141 | 0·064 | 0·026 | 0·007 | 0·001 |
| 3·1 | — 3·050 | — 1·452 | — 0·857 | — 0·504 | — 0·287 | — 0·152 | — 0·069 | — 0·028 | — 0·008 | — 0·001 |
| 3·2 | — 3·318 | 1·557 | 0·918 | 0·538 | 0·307 | 0·162 | 0·074 | 0·030 | 0·009 | 0·001 |
| 3·3 | — 3·579 | 1·660 | 0·975 | 0·576 | 0·325 | 0·171 | 0·080 | 0·032 | 0·009 | 0·001 |
| 3·4 | — 3·832 | 1·756 | 1·031 | 0·608 | 0·347 | 0·183 | 0·086 | 0·034 | 0·010 | 0·001 |
| 3·5 | — 4·077 | 1·851 | 1·085 | 0·640 | 0·364 | 0·195 | 0·094 | 0·036 | 0·010 | 0·001 |

Tabela 9.

**Wzór Hossfeld'a.**

Zasadniczy błąd procentowy $p_1$.

| $r$ | $u =$ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0·0 | 0·1 | 0·2 | 0·3 | 0·4 | 0·5 | 0·6 | 0·7 | 0·8 | 0·9 |
| 0·0 | —33 333 | —32·889 | —31·580 | —29 449 | —26·581 | —23·078 | —19·047 | —14·613 | — 9·890 | — 4·977 |
| 0·1 | —26·229 | 25·791 | 24·500 | 22·405 | 19·589 | 16·152 | 12·212 | 7·919 | 3·670 | 0·651 |
| 0·2 | —20·495 | 20·060 | 18·779 | 16·700 | 13·915 | 10·581 | 7·224 | 3·635 | 1·232 | 0·155 |
| 0·3 | —15·832 | 15·398 | 14·117 | 12·065 | 9·426 | 6·515 | 3·560 | 1·715 | 0·506 | 0·058 |
| 0·4 | —12·008 | 11·571 | 10·304 | 8·378 | 6·108 | 3·892 | 2·075 | 0·864 | 0·239 | 0·026 |
| 0·5 | — 8·865 | 8·430 | 7·243 | 5·882 | 3·825 | 2·285 | 1·149 | 0 455 | 0·123 | 0·010 |
| 0·6 | — 6·285 | 5·869 | 4·773 | 3·543 | 2·303 | 1·307 | 0·633 | 0·243 | 0·064 | 0 007 |
| 0·7 | — 4·171 | 3·803 | 3·001 | 2·122 | 1·307 | 0·714 | 0·339 | 0·126 | 0·033 | 0·004 |
| 0·8 | — 2·459 | 2·174 | 1·646 | 1·109 | 0·665 | 0·353 | 0·161 | 0·060 | 0·015 | 0·002 |
| 0·9 | — 1·081 | 0·928 | 0·675 | 0·438 | 0·256 | 0·131 | 0·062 | 0·022 | 0·006 | 0·001 |
| 1·0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1·1 | + 0·820 | + 0·656 | + 0·441 | + 0·271 | + 0·154 | + 0·076 | + 0·032 | + 0·012 | + 0·003 | + 0·000 |
| 1·2 | + 1·413 | 1·081 | 0·704 | 0·423 | 0·232 | 0·115 | 0·053 | 0·018 | 0·005 | 0·001 |
| 1·3 | + 1·796 | 1·318 | 0·832 | 0·492 | 0·267 | 0·129 | 0·055 | 0·020 | 0·005 | 0·001 |
| 1·4 | + 1·992 | 1·397 | 0·864 | 0·493 | 0·264 | 0·131 | 0·055 | 0·020 | 0·005 | 0·001 |
| 1·5 | + 2·022 | 1·356 | 0·819 | 0·464 | 0·246 | 0·120 | 0·053 | 0·018 | 0·005 | 0·001 |
| 1·6 | + 1·891 | 1·213 | 0·711 | 0·398 | 0·205 | 0·101 | 0·041 | 0·015 | 0·004 | 0·001 |
| 1·7 | + 1·615 | 0·992 | 0·574 | 0·320 | 0·168 | 0·076 | 0·035 | 0·012 | 0·003 | 0·000 |
| 1·8 | + 1·202 | 0·707 | 0·400 | 0·216 | 0·113 | 0·051 | 0·025 | 0·008 | 0 002 | 0 000 |
| 1 9 | + 0·662 | 0·372 | 0·205 | 0·115 | 0·058 | 0·028 | 0·009 | 0·004 | 6·001 | 0·000 |
| 2·0 | + 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2·1 | — 0·779 | — 0·401 | — 0·214 | — 0·111 | — 0·058 | — 0·032 | — 0·014 | — 0·007 | — 0·001 | — 0·000 |
| 2·2 | — 1·668 | 0·830 | 0·434 | 0·228 | 0·118 | 0·060 | 0·021 | 0·009 | 0·002 | 0·000 |
| 2·3 | — 2·669 | 1·263 | 0·661 | 0·348 | 0·175 | 0·085 | 0·037 | 0·013 | 0·003 | 0·001 |
| 2·4 | — 3·771 | 1·700 | 0·888 | 0·457 | 0·228 | 0 106 | 0·044 | 0·016 | 0·004 | 0·001 |
| 2·5 | — 4·974 | 2·181 | 1·105 | 0·573 | 0·284 | 0·129 | 0·055 | 0·020 | 0·005 | 0·001 |
| 2·6 | — 6·285 | 2·610 | 1·323 | 0·679 | 0·337 | 0 157 | 0·067 | 0·024 | 0·006 | 0·001 |
| 2·7 | — 7·690 | 3·062 | 1·538 | 0·784 | 0·388 | 0·182 | 0·078 | 0·027 | 0·007 | 0·001 |
| 2·8 | — 9·200 | 3·517 | 1·754 | 0·890 | 0·443 | 0·205 | 0·090 | 0·030 | 0·007 | 0 001 |
| 2·9 | —10·800 | 3·963 | 1·958 | 0·988 | 0·489 | 0·231 | 0·094 | 0·033 | 0·008 | 0·001 |
| 3·0 | —12·500 | 4·405 | 2·153 | 1·083 | 0·533 | 0·247 | 0·106 | 0·036 | 0·009 | 0·001 |
| 3·1 | —14·297 | — 4·836 | — 2·355 | — 1·179 | — 0·580 | — 0·270 | — 0·110 | — 0 039 | — 0·010 | — 0·001 |
| 3·2 | —16·189 | 5·266 | 2·542 | 1·265 | 0·621 | 0·288 | 0·115 | 0·042 | 0·010 | 0·001 |
| 3·3 | —18·187 | 5·689 | 2·721 | 1·361 | 0·661 | 0·304 | 0·127 | 0·045 | 0·011 | 0·001 |
| 3·4 | —20·281 | 6·099 | 2·903 | 1·438 | 0·707 | 0·325 | 0·134 | 0·047 | 0·012 | 0·001 |
| 3·5 | —22·472 | 6·505 | 3·074 | 1·522 | 0·744 | 0.346 | 0·147 | 0·050 | 0·012 | 0·002 |

Tabela 10.

**Wzór Hossfeld'a.**

Wtórny błąd procentowy $p_2$.

| $r$ | $u =$ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0·0 | 0·1 | 0·2 | 0·3 | 0·4 | 0·5 | 0·6 | 0·7 | 0·8 | 0·9 |
| 0·0 | —25·000 | —24·749 | —24·000 | —22·750 | —20·999 | —18·750 | —16·000 | —12·730 | — 9·000 | — 4·750 |
| 0·1 | —20·778 | 20·503 | 19·679 | 18·304 | 16·380 | 13·907 | 11·293 | 7·338 | 3·540 | 0·647 |
| 0·2 | —17·010 | 16·708 | 15·810 | 14·310 | 12.215 | 9·568 | 6·737 | 3·508 | 1·217 | 0·155 |
| 0·3 | —13·671 | 13·344 | 12·371 | 10·766 | 8·614 | 6·116 | 3·437 | 1·686 | 0·503 | 0·058 |
| 0·4 | —10·720 | 10·371 | 9·341 | 7·730 | 5 768 | 3·746 | 2·033 | 0·857 | 0·232 | 0·026 |
| 0·5 | — 8·122 | 7·775 | 6·754 | 5·287 | 3.684 | 2·234 | 1·136 | 0·453 | 0 121 | 0·010 |
| 0·6 | — 5·912 | 5·544 | 4·556 | 3·422 | 2·252 | 1·290 | 0·629 | 0·242 | 0·063 | 0·006 |
| 0·7 | — 4 005 | 3·664 | 2·913 | 2·078 | 1.290 | 0·709 | 0·338 | 0 126 | 0·033 | 0·003 |
| 0·8 | — 2·400 | 1·128 | 1 619 | 1·097 | 0·661 | 0·352 | 0·161 | 0·060 | 0·015 | 0·002 |
| 0·9 | — 1·070 | 0·919 | 0·670 | 0·437 | 0·255 | 0·131 | 0·062 | 0·022 | 0·006 | 0·001 |
| 1·0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1·1 | + 0·828 | + 0·660 | + 0·443 | + 0·272 | + 0·154 | + 0·076 | + 0·032 | + 0·012 | = 0·003 | + 0·000 |
| 1·2 | + 1·433 | 1·093 | 0·709 | 0·425 | 0·233 | 0·115 | 0·053 | 0·018 | 0 005 | 0 001 |
| 1·3 | + 1 829 | 1·335 | 0·839 | 0·494 | 0·267 | 0·129 | 0·055 | 0·020 | 0·005 | 0·001 |
| 1·4 | + 2·033 | 1·417 | 0·872 | 0·501 | 0·265 | 0·131 | 0·055 | 0·019 | 0·005 | 0·001 |
| 1·5 | + 2·063 | 1 315 | 0·825 | 0·466 | 0·247 | 0·122 | 0·053 | 0·018 | 0·005 | 0·001 |
| 1·6 | + 1·927 | 1·228 | 0·716 | 0·399 | 0·205 | 0·101 | 0·041 | 0·015 | 0·004 | 0·001 |
| 1·7 | + 1·642 | 1·002 | 0·577 | 0·321 | 0·168 | 0·076 | 0·035 | 0·012 | 0·003 | 0·000 |
| 1·8 | + 1·216 | 1·712 | 0·401 | 0·217 | 0·113 | 0·051 | 0·025 | 0·008 | 0·002 | 0·000 |
| 1·9 | + 1·667 | 0·374 | 0·205 | 0·115 | 0·057 | 0·028 | 0·009 | 0·004 | 0·001 | 0·000 |
| 2·0 | + 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2·1 | — 0·772 | — 0·400 | — 0·214 | — 0·110 | — 0·058 | — 0·032 | — 0·014 | — 0·007 | — 0·001 | — 0·000 |
| 2·2 | — 1·640 | 0 823 | 0·432 | 0·228 | 0·117 | 0 060 | 0·021 | 0·009 | 0·002 | 0·000 |
| 2 3 | — 2 600 | 1·247 | 0·656 | 0·347 | 0 175 | 0·085 | 0 037 | 0·013 | 0·003 | 0·001 |
| 2·4 | — 3·635 | 1·671 | 0·880 | 0·455 | 0·228 | 0·106 | 0·044 | 0·016 | 0·004 | 0·001 |
| 2·5 | — 4·740 | 2·134 | 1 095 | 0 569 | 0·283 | 0·129 | 0·055 | 0·020 | 0·005 | 0·001 |
| 2·6 | — 6 012 | 2 544 | 1·306 | 0·675 | 0·334 | 0·157 | 0·067 | 0·024 | 0·006 | 0·001 |
| 2·7 | — 7·142 | 2·971 | 1·515 | 0 778 | 0·386 | 0·182 | 0·078 | 0·027 | 0·007 | 0·001 |
| 2·8 | — 8·424 | 3·397 | 1·723 | 0·883 | 0·441 | 0·205 | 0·090 | 0·030 | 0·007 | 0·001 |
| 2·9 | — 9·747 | 3·812 | 1·920 | 0 978 | 0·487 | 0·230 | 0·097 | 0·033 | 0·008 | 0·001 |
| 3·0 | —11·111 | 4·219 | 2·107 | 0·072 | 0·530 | 0·246 | 0·105 | 0·036 | 0·009 | 0·001 |
| 3·1 | —12·510 | — 4·613 | — 2·301 | — 1·165 | — 0·576 | — 0·269 | — 0 110 | — 0·039 | — 0·010 | — 0·001 |
| 3·2 | —13·934 | 5·003 | 2·479 | 1·249 | 0·617 | 0·287 | 0 115 | 0·042 | 0·910 | 0 001 |
| 3·3 | —15·388 | 5·383 | 2·649 | 1·343 | 0·656 | 0·303 | 0·127 | 0·045 | 0·011 | 0 001 |
| 3·4 | —16·862 | 5·748 | 2·822 | 1·417 | 0·702 | 0·324 | 0·133 | 0·047 | 0·012 | 0·001 |
| 3·5 | —18·350 | 6·108 | 2·983 | 1·499 | 0·739 | 0·345 | 0·147 | 0·050 | 0·012 | 0·002 |

Tabela 11.

**Wzory: Riecke'go, Simony'ego i Breymann'a.**

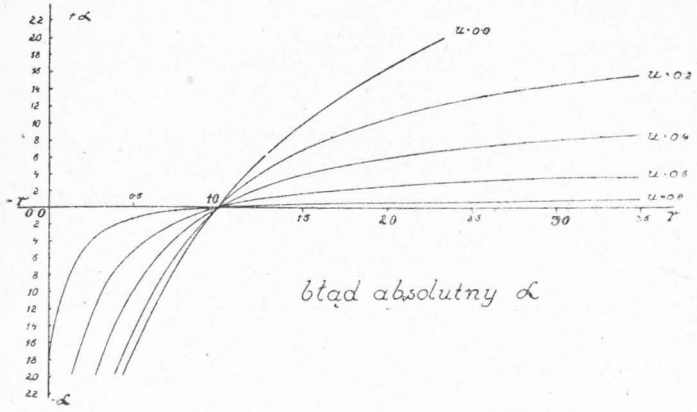
Błędy podstawowe dla brył całkowitych t. j. dla $u = 0$.

| Wzór | Riecke'go | | | Simony'ego | | | Breymann'a | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r =$ | $\alpha'$ | $p'_1$ | $p'_2$ | $\alpha'$ | $p'_1$ | $p'_2$ | $\alpha'$ | $p'_1$ | $p'_2$ |
| 0·0 | 16·667 | −20·000 | −16·667 | 0 | 0 | 0 | −12·500 | −14·284 | −12·500 |
| 0·1 | −12·039 | −15·266 | −13·244 | +0·803 | +0·876 | +0·883 | − 8·802 | −10·717 | − 9·680 |
| 0·2 | − 8·630 | −11·556 | −10·356 | +1·111 | +1·316 | +1·333 | − 6·151 | − 7·970 | − 7·380 |
| 0·3 | − 6·106 | − 8·623 | − 7·933 | +1·140 | +1·450 | +1·482 | − 4·248 | − 5·846 | − 5·524 |
| 0·4 | − 4·233 | − 6·310 | − 5·934 | +1·020 | +1·408 | +1·428 | − 2·878 | − 4·198 | − 4·030 |
| 0·5 | − 2·859 | − 4·481 | − 4·230 | +0·831 | +1·231 | +1·246 | − 1·898 | − 2·930 | − 2·848 |
| 0·6 | − 1·850 | − 3·050 | − 2·960 | +0·624 | +0·989 | +0·997 | − 1·200 | − 1·958 | − 1·920 |
| 0·7 | − 1·119 | − 1·940 | − 1·902 | +0·427 | +0·722 | +0·726 | − 0·709 | − 1·220 | − 1·206 |
| 0·8 | − 0·599 | − 1·091 | − 1·078 | +0·252 | +0·452 | +0·454 | − 0·373 | − 0·677 | − 0·673 |
| 0·9 | − 0·239 | − 0·457 | − 0·455 | +0·109 | +0·207 | +0·207 | − 0·146 | − 0·279 | − 0·280 |
| 1·0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1·1 | + 0·149 | + 0·312 | + 0·314 | −0·073 | −0·164 | −0·164 | + 0·087 | + 0·200 | + 0·200 |
| 1·2 | + 0·230 | + 0·502 | + 0·505 | −0·129 | −0·285 | −0·286 | + 0·132 | + 0·303 | + 0·303 |
| 1·3 | + 0·264 | + 0·604 | + 0·607 | −0·154 | −0·355 | −0·354 | + 0·149 | + 0·342 | + 0·343 |
| 1·4 | + 0·262 | + 0·625 | + 0·628 | −0·160 | −0·385 | −0·384 | + 0·145 | + 0·331 | + 0·332 |
| 1·5 | + 0·237 | + 0·587 | + 0·591 | −0·150 | −0·377 | −0·375 | + 0·129 | + 0·297 | + 0·298 |
| 1·6 | + 0·197 | + 0·510 | + 0·512 | −0·110 | −0·339 | −0·338 | + 0·105 | + 0·244 | + 0·244 |
| 1·7 | + 0·149 | + 0·402 | + 0·402 | −0·102 | −0·276 | −0·275 | + 0·078 | + 0·186 | + 0·186 |
| 1·8 | + 0·098 | + 0·272 | + 0·272 | −0·067 | −0·188 | −9·193 | + 0·051 | + 0·121 | + 0·121 |
| 1·9 | + 0·047 | + 0·138 | + 0·139 | −0·034 | −0·099 | −0·099 | + 0·025 | + 0·060 | + 0·061 |
| 2·0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2·1 | − 0·041 | − 0·127 | − 0·127 | +0·031 | +0·096 | +0·099 | − 0·020 | − 0·070 | − 0·070 |
| 2·2 | − 0·074 | − 0·237 | − 0·237 | +0·056 | +0·179 | +0·179 | − 0·037 | − 0·133 | − 0·133 |
| 2·3 | − 0·099 | − 0·328 | − 0·326 | +0·077 | +0·253 | +0·254 | − 0·048 | − 0·168 | − 0·167 |
| 2·4 | − 0·114 | − 0·388 | − 0·386 | +0·090 | +0·305 | +0·306 | − 0·055 | − 0·189 | − 0·189 |
| 2·5 | − 0·119 | − 0·420 | − 0·418 | +0·096 | +0·335 | +0·336 | − 0·057 | − 0·200 | − 0·200 |
| 2·6 | − 0·115 | − 0·418 | − 0·416 | +0·092 | +0·330 | +0·331 | − 0·055 | − 0·193 | − 0·193 |
| 2·7 | − 0·101 | − 0·374 | − 0·372 | +0·082 | +0·302 | +0·303 | − 0·047 | − 0·172 | − 0·172 |
| 2·8 | − 0·077 | − 0·293 | − 0·292 | +0·063 | +0·238 | +0·246 | − 0·036 | − 0·133 | − 0·133 |
| 2·9 | − 0·043 | − 0·168 | − 0·167 | +0·036 | +0·140 | +0·140 | − 0·020 | − 0·074 | − 0·075 |
| 3·0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3·1 | + 0·052 | + 0·212 | + 0·212 | −0·044 | −0·186 | −0·180 | + 0·024 | + 0·103 | + 0·103 |
| 3·2 | + 0·111 | + 0·466 | + 0·468 | −0·094 | −0·396 | −0·395 | + 0·052 | + 0·228 | + 0·228 |
| 3·3 | + 0·180 | + 0·768 | + 0·774 | −0·154 | −0·667 | −0·662 | + 0·082 | + 0·368 | + 0·368 |
| 3·4 | + 0·255 | + 1·108 | + 1·121 | −0·219 | −0·973 | −0·964 | + 0·116 | + 0·520 | + 0·520 |
| 3·5 | + 0·337 | + 1·492 | + 1·514 | −0·292 | −1·331 | −1·314 | + 0·152 | + 0·682 | + 0·683 |

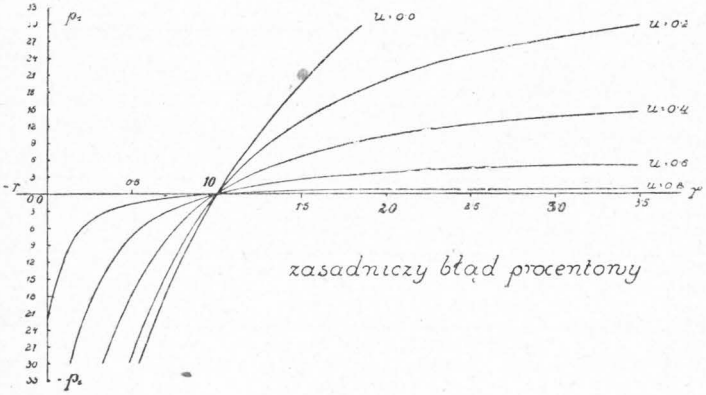
Tabela 12.

Cyfrowe zestawienie charakterystycznych błędów wzorów ksylometrycznych dla ściślejszych interwałów zmiennych: $r$ (0·5, 2·3) i $u$ (0·5, 0·8).

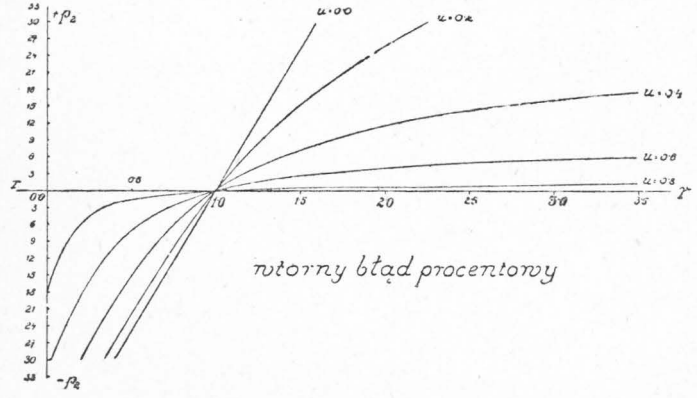
| Wzór ksylometryczny | Rodzaj błędu podstawowego | Błąd maksymalny dla brył całkowitych w interwale od $r_1 = 0{\cdot}5$ do $r_2 = 2{\cdot}3$ | | | | Błąd przeciętny dla brył | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | dodatni | | ujemny | | całkowitych | | ściętych | |
| | | dla $r =$ | wartość | dla $r =$ | wartość | znak | $r$ (0·5, 2·3) $u = 0$ | znak | $r$ (0·5, 2·3) $u$ (0·5, 0·8) |
| Smaliana | $\alpha$ | 2·3 | 19·70 % | 0·5 | 16·67 % | + | 6.20 % | + | 0·68 % |
| | $p_1$ | , | 39·39 % | „ | 33·33 % | + | 12.40 % | + | 0·99 % |
| | $p_2$ | „ | 65·00 % | „ | 25·00 % | + | 20·00 % | + | 1·09 % |
| Hubera | $\alpha$ | 0·5 | 4·05 % | 2·3 | 10·00 % | — | 3·40 % | — | 0·32 % |
| | $p_1$ | „ | 5·72 % | „ | 49·23 % | — | 13·83 % | — | 0·52 % |
| | $p_2$ | „ | 6·06 % | „ | 32·99 % | — | 10·43 % | — | 0·56 % |
| Hossfelda | $\alpha$ | 1·42 | 0·85 % | 0·5 | 5·43 % | — | 0 35 % | — | 0·047 % |
| | $p_1$ | 1·47 | 2·03 % | „ | 8·87 % | — | 0·49 % | — | 0·067 % |
| | $p_2$ | „ | 2·67 % | „ | 8·12 % | — | 0·40 % | — | 0·066 % |
| Rieckego | $\alpha$ | 1·34 | 0·27 % | 0·5 | 2·86 % | — | 0·204 % | — | 0·014 % |
| | $p_1$ | 1·38 | 0·63 % | „ | 4·48 % | — | 0·297 % | — | 0·02 % |
| | $p_2$ | „ | 0·63 % | „ | 4·29 % | — | 0·283 % | — | 0 02 % |
| Simonyego | $\alpha$ | 0·5 | 0 83 % | 1·37 | 0·16 % | + | 0·047 % | + | 0·014 % |
| | $p_1$ | „ | 1·23 % | 1·42 | 0·35 % | + | 0·051 % | + | 0·0186 % |
| | $p_2$ | „ | 1·25 % | „ | 0·32 % | + | 0·052 % | + | 0·0189 % |
| Breymanna | $\alpha$ | 1·33 | 0·15 % | 0·5 | 1·90 % | — | 0·14 % | — | 0·008 % |
| | $p_1$ | 1·37 | 0·349 % | „ | 2·93 % | — | 0·21 % | — | 0·01 % |
| | $p_2$ | „ | 0·351 % | „ | 2·85 % | — | 0·21 % | — | 0·01 % |




błąd absolutny $\alpha$

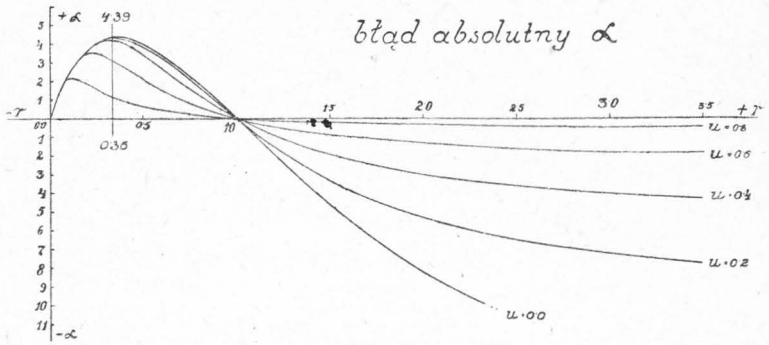



zasadniczy błąd procentowy

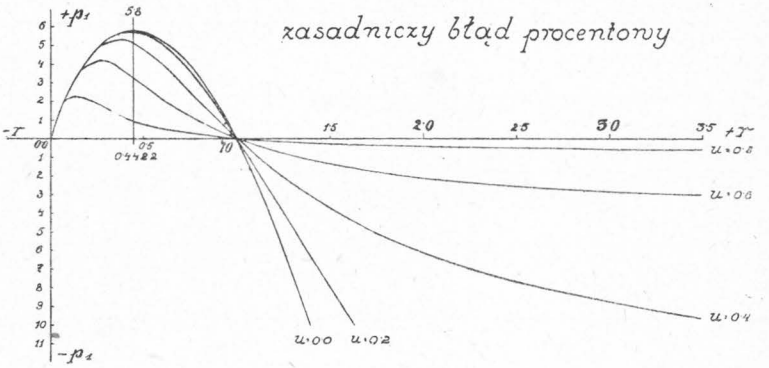



wtorny błąd procentowy

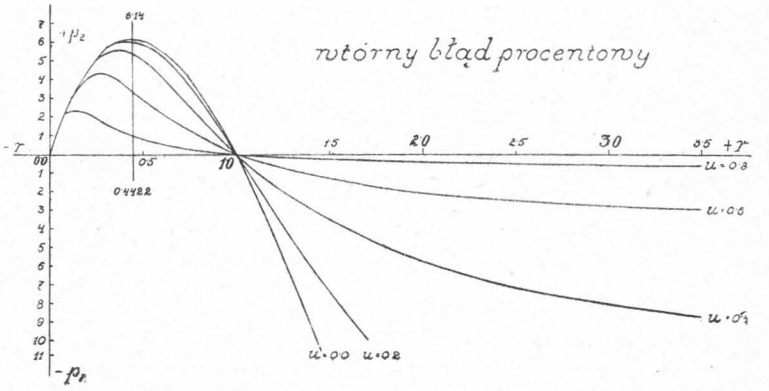
błąd absolutny $\alpha$

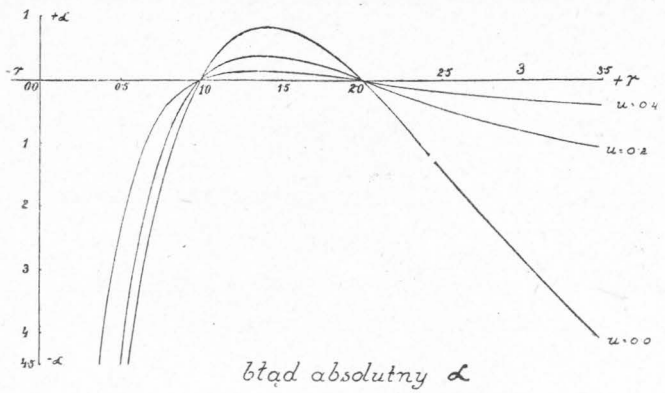



zasadniczy błąd procentowy

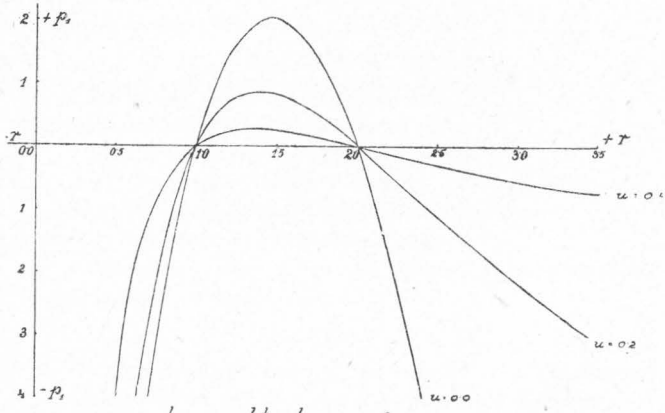



wtórny błąd procentowy

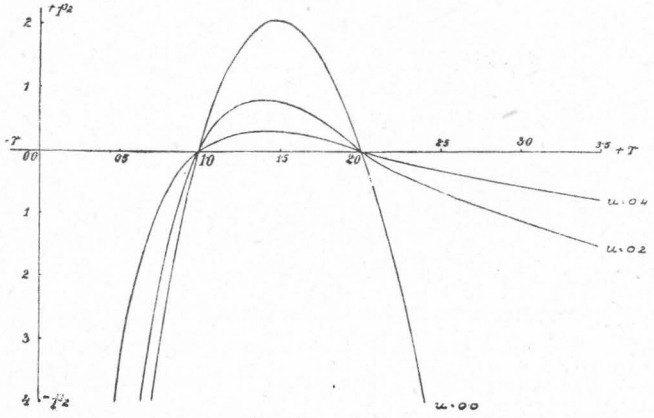





błąd absolutny α



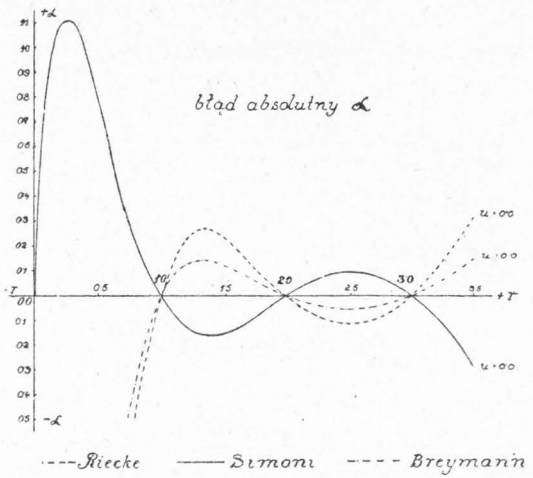

zasadniczy błąd procentowy



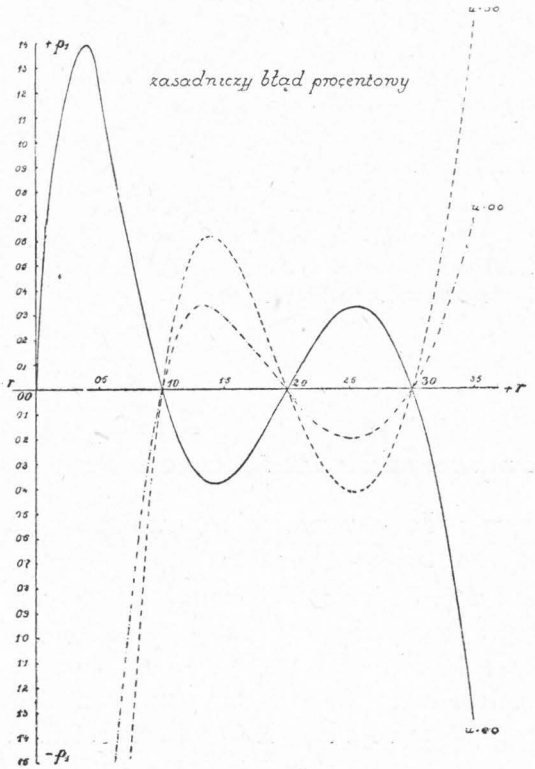

wtórny błąd procentowy

TABLICA IV

SIMONI RIECKE BREYMANN




---Riecke ——Simoni - - - - Breymann



Thaddäus Wielgosz.

# Theorie der Genauigkeit der xylometrischen Formeln.

Institut für Holzmesskunde, Waldwertrechnung und Forststatik an der Universität in Poznań (Polen).

Zusammenfassung.

Die Disposition der Abhandlung lautet:

I. THEORETISCHER TEIL.

1. Einleitung. Dendrometrische Körper.
2. Klassifikation der konstanten Fehler
   *a) Der absolute Fehler*
   *b) Die prozentuellen Fehler*
   *c) Die Kulminations- und Maximalfehler*
   *d) Die durchschnittlichen Fehler.*
3. Allgemeine Sätze über das gegenseitige Verhältnis der einzelnen Arten der Grundfehler.

II. ANGEWANDTER TEIL.

4. Die allgemeine Formel betreffend das Verhältnis der Querschnitte bei den dendrometrischen Körpern.
5. Die xylometrische Formel von Smalian.
6. „ „ „ „ Huber.
7. „ „ „ „ Hossfeld.
8. „ „ „ „ Riecke.
9. „ „ „ „ Simony.
10. „ „ „ „ Breymann.
11. Zusammenstellung und Folgerungen.

Die in kurzer Form verfasste Inhaltsangabe der einzelnen Punkte der obigen Disposition folgt:

1. Die auf der Querschnittgleichung 1 (Formel 1 im polnischen Texte) basierenden und von dem zwischen den Werten 0 bis 3·5 liegenden Intervalle der Veränderlichen $r$ (Formexponent) eingeschlossenen Konoide und deren Abschnitte werden als dendrometrische Körper bezeichnet, wobei die

einfachsten derselben d. h. die Walze, das Paraboloid, der Kegel und das Neiloid ($r = 0, 1, 2, 3$) als dendrometrische Grundkörper und die den übrigen Werten von $r$ entsprechenden Körper als dendrometrische Übergangskörper benannt werden.

Aus den Formeln 3 und 5 sehen wir, dass das Volumen der dendrometrischen Körper sich als das Produkt aus dem Volumen der Grundwalze ($Gh$) und einer Funktion, und zwar von einer Veränderlichen ($r$), wenn es sich nur um die ganzen Konoide handelt, beziehungsweise von zwei Veränderlichen ($r$, $u$), wenn es auch von den Abschnitten der Konoide die Rede ist, darstellen lässt ($u$ ist das Verhältnis des obersten zum untersten Durchmesser).

Wenn wir das Volumen der dendrometrischen Körper in Prozenten des Grundwalzenvolums ausdrücken, erhalten wir die Formel 6, deren einzelne für die Abstufung 0·1 der Veränderlichen $r$ und $u$ sich ergebende Werte in der Tabelle 1 zusammengestellt sind, woraus zu entnehmen ist, dass das Volumen der dendrometrischen Körper direkt proportional dem $u$ und umgekehrt proportional dem $r$ ist.

Die Grenzwerte der Intervalle der Veränderlichen $r$ und $u$ werden nach folgenden Erwägungen festgesetzt:

Die untere Grenze $r = 0$ ist genau festgesetzt, weil die Einführung eines negativen Wertes für $r$ bedeuten würde: $\alpha$) für $0 > r > -1$, dass das Stammvolumen grösser als das Volum der Grundwalze ist, was in der Wirklichkeit nicht zutreffen kann; $\beta$) für $r = -1$ müsste das nach den Formeln 3 und 5 berechnete Volum unendlich gross werden; $\gamma$) für $r < -1$ würde das Volum negativ, was praktisch anwendungslos ist. Dagegen ist die obere Grenze $r = 3{\cdot}5$ eher ein Akt der subjektiven Anschauung, die sich auf bisherige ganz allgemeine Erhebungen stützt.

Die Intervallsgrenzwerte für $u$ und zwar $u_1 = 0$ und $u_2 = 1$ lassen sich leicht erklären, denn für $u = 0$ haben wir mit den ganzen Konoiden zu tun und andererseits für $u = 1$ stossen wir an die Walzenform an, wobei zu bemerken ist, das in dem Momente, wann $u = 1$ ist, auch $r = 0$ sein muss; in diesem

letzten Falle wird die Funktion praktisch unstetig und die Veränderlichen werden zu Konstanten.

Die obigen Intervalle $r$ (0, 3·5), $u$ (0, 1) werden allgemeine Intervalle genannt; wenn es sich aber um engere Variierungen der Veränderlichen in Rahmen der allgemeinen Intervalle handeln wird, so werden wir von engeren Intervallen sprechen.

Der Formenponent der ganzen Stämme der Waldbäume kann nicht den Wert von Null haben, denn nur die Stammteile, die der Einheit sich näherndes $u$ besitzen, nähern sich in ihrem $r$ der Null zu; für praktische Zwecke aber wäre es vorteilhaft festzustellen, welchen Grenzwert für $r$ man für ganze Baumstämme annehmen darf. Weil wir aber diesbezüglich noch keine Versuchserhebungen[14]) besitzen, bleibt es nichts übrig als für unsere theoretischen Auseinandersetzungen einen aproximativen Wert anzunehmen. Uns auf die allgemeine Beobachtung stützend glauben wir den Satz aussprechen zu können, dass der Wert von $r$ für ganze Baumstämme nicht unter 0·5 herabsinken kann.

Die zu besprechenden xylometrischen Formeln lassen sich auch als Produkt aus dem Grundwalzenvolum und einer entsprechenden Funktion von einer bzgw. zweien Veränderlichen darstellen.

2. Klassifikation der konstanten Fehler, mit denen die xylometrischen Formeln behaftet sind.

a) Die Differenz zwischen dem sog. Näherungsvolumen ($v'$), welches wir bei der Anwendung der betreffenden xylometrischen Formel erhalten, und dem sog. wirklichen Volumen ($v$), welches sich nach der Formel 3 oder 5 berechnet, wird als der absolute Fehler benannt ($\Delta v$). (Siehe Formel 8 und 8a).

Der absolute Fehler in Prozenten des Grundwalzenvolums ausgedrückt wird mit $\alpha$ beziehungsweise, wenn es sich bloss um ganze Körper handelt, mit $\alpha'$ bezeichnet. (Formel 9, 9a).

---

[14]) Die Methoden der Bestimmung der dendrometrischen Formelemente befinden sich in Bearbeitung und werden bald veröffentlicht.

b) Das Verhältnis des wirklichen Volums zum Näherungsvolum wird der Volumquotient $\sigma$ bzgw. $\sigma'$ genannt. (Formel 10, 10a).

Der primär-prozentuelle Fehler ($p_1$ bzw. $p_1'$) stellt das prozentuelle Verhältnis des absoluten Fehlers zum Näherungsvolumen dar und ist von besonderer Bedeutung für die Praxis, (Formel 11, 11a).

Der sekundär-prozentuelle Fehler ($p_2$ bzgw. $p_2'$) stellt das prozentuelle Verhältnis des absoluten Fehlers zum wirklichen Volumen dar. (Form. 12, 12a).

c) Den grössten positiven und den kleinsten negativen[15]) Wert der gegebenen Fehlerfunktion innerhalb der angegebenen Intervalle der Veränderlichen $r$ und $u$ nennen wir den positiven bzw. negativen Maximalfehler, der entweder in Form von Kulmination (als Kulminationsfehler) oder als Funktionsgrenzwert für den Grenzwert des Intervalls einer Veränderlichen auftritt. Der Maximalfehler wird mit dem Symbol „max" und der Kulminationsfehler, der nicht zugleich Maximalfehler ist, wird mit „kul" bezeichnet.

d) Die durchschnittlichen Fehler. Für die Fehlerfunktion mit einer Veränderlichen berechnet sich der durchschnittliche Fehler nach der streng wissenschaftlichen Formel 13 oder nach einem Näherungsverfahren im Sinne der Formeln 13a und 13b und stellt sich als Höhe jenes Rechteckes, dessen Fläche gleich der Fläche ist, welche von der Fehlerfunktionskurve und der Abscissenaxe, innerhalb der gegebenen engeren Intervallsgrenzwerte der betreffenden Veränderlichen eingeschlossen und dessen Basis die Differenz der Intervalsgrenzwerte ist. Schneidet die Fehlerfunktionskurve die Abscissenaxe, dann wird die algebraische Summe der Teilflächen in Rechnung genommen.

---

[15]) Der kleinste negative Wert ist der grösste absolute Wert aller in Betracht fallenden negativen Funktionswerte.

Der durchschnittliche Fehler bei der Fehlerfunktion mit zwei Veränderlichen stellt sich als die Höhe jenes geraden Parallelepipeds, dessen Volum durch das bestimmte Doppelintegrale der gegebenen Fehlerfunktion mit den den engeren Grenzwerten der Intervalle der Veränderlichen gleichen Integralsgrenzen bestimmt ist und dessen Grundfläche dem Produkte der Differenzen der Intervallsgrenzwerte der Veränderlichen: $(r_2 - r_1)$, $(u_2 - u_1)$ gleicht (F. 14). Tatsächlich wird dieser durchschnittliche Fehler nur nach dem Näherungsverfahren nach der Formel 14a berechnet.

3. Der absolute und die beiden prozentuellen Fehler werden als Grundfehler bezeichnet.

Nachdem die allgemeinen Bedingungen, unter welchen die Grundfehler gleich Null werden bzw. unter welchen die Kulmination der einzelnen Grundfehlerarten erfolgt, auseinandergesetzt wurden, wurden folgende allgemeinen Sätze über Grund- und Kulminationsfehler aufgestellt:

1. Für dieselben Werte von $r$ und $u$ werden gleichzeitig alle Grundfehlerarten gleich Null.
2. Die Kulmination des absoluten Fehlers einerseits und der beiden Arten des prozentuellen Fehlers anderseits erfolgen grundsätzlich nicht für dieselben Werte für $r$ und $u$.
3. Alle Grundfehlerarten besitzen für dieselben Werte für $r$ und $u$ dasselbe algebraische Zeichen.
4. Die prozentuellen Fehler sind grösser als der in Prozenten des Grundwalzenvolums ausgedrückte absolute Fehler ausser alle Fehlerarten sind gleich Null und mit Ausnahme einer teoretischen Möglichkeit, wenn der sekundärprozentuelle Fehler gleich $\alpha'$ ist, was — wie am Schlusse der Abhandlung erklärt wird — für $f(0) = 1$ bei gleichzeitigem von Null verschiedenem Werte für $\alpha'$ geschieht.
5. Bei negativem Zeichen der Grundfehler ist der primärprozentuelle Fehler grösser als der sekundäre und umgekehrt beim positiven Zeichen ist der sekundäre grösser als der primäre.

4. Die Formeln 15 und 16 stellen die allgemeine matematische Relation zwischen den Endquerflächen und einer dritten dazwischenliegenden Querfläche bei den dendrometrischen Körpern dar, wobei $n$ das Verhälltniss der Entfernung der Querfläche $g_n$ von der Grundfläche $G$ zur ganzen Körperhöhe $h$ vorstellt. Die Formel 16 bezieht sich bloss auf ganze Körper und die Formeln 17 bis 21 stellen Spezialisierungen der allgemeinen Formeln 15 und 16 für

$$n = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \text{ dar.}$$

## 5. Die Formel von Smalian.

Die Formeln 23 und 23a stellen den absoluten Fehler dar, den wir bei Anwendung der Smalianschen Formel zur Bestimmung der Volumens aller dendrometrischen Körper begehen; die Formeln 25 und 25a beziehen sich auch auf den absoluten Fehler, der aber in Prozenten des Grundwalzenvolums ausgedrückt ist. Die prozentuellen Fehler werden in den Formeln 26 bis 27a dargestellt.

Der Verlauf der Grundfehler bei der Smalianschen Formel lautet:

Für die Walze betragen die Grundfehler Null, bilden aber den sog. unstetigen Punkt mit den Sprüngen, die folgende von nur teoretischer Bedeutung Werte aufweisen:

$$\underset{r=0}{(-\alpha')} = -50\%$$

des Grundwalzenvolums,

$$\underset{r=0}{(-p'_1)} = -100\%$$

des Näherungsvolums und

$$\underset{r=0}{(-p'_2)} = -50\%$$

des wirklichen Volumens.[16])

[16]) Es ist zu bemerken, dass der Prozent bei $\alpha$ sich auf das Grundwalzenvolum bei $p_1$ auf das Nährungsvolum und bei $p_2$ auf das wirkliche Volum bezieht; bei den weiteren Angaben werden diese näheren Bezeichnungen weggelassen.

Da wir angenommen haben, dass $r$ für ganze Körper nicht unter 0·5 herabsinken kann, so müssen wir auch annehmen, das auch beiläufig von $r = 0{\cdot}5$ der tatsächliche Verlauf der Grundfehler keine Sprünge bilden sondern sich dem Ursprunge des Koordinatensystem nähern wird d. h. die Grundfehler zeigen bei dem wirklichen Verlauf für das angenommene $r = 0{\cdot}5$ und $u = 0$ folgende Werte, die zugleich die negativen Maximalfehler vorstellen:

$$\max_{r=0{\cdot}5}[-\alpha'] = -16{\cdot}67\%, \quad \max_{r=0{\cdot}5}[-p'_1] = -33{\cdot}33\%,$$

$$\max_{r=0{\cdot}5}[-p'_2] = -25{\cdot}00\%$$

dann nehmen dieselben immer mehr ab, werden gleich Null für das Paraboloid, dann übernehmen sie positive Werte, nehmen stetig zu und verlassen das Intervall der Veränderlichen $r$ mit dem positiven Maximalfehler für $r = 3{\cdot}5$:

$$\max_{r=3{\cdot}5}[+\alpha'] = 27{\cdot}77\%, \quad \max_{r=3{\cdot}5}[+p'_1] = 55{\cdot}50\%,$$

$$\text{und} \quad \max_{r=3{\cdot}5}[+p'_2] = 125\%.$$

## 6. Die Formel von Huber.

In den Formeln 31 bis 33a sind die Grundfehler angegeben. Der Verlauf der Grundfehler zeigt einen Kulminationsfehler, dessen $r$ nach den Regeln der Theorie von Minima und Maxima bestimmt wurde, wobei man zwecks Lösung der erhaltenen Gleichungen zur Methode von Newton greifen musste.

Der Verlauf der Grundfehler lautet:

Für die Walze betragen die Grundfehler Null und bilden den sog. scheinbar stetigen Punkt, nehmen positive Werte an und weisen folgenden teoretischen Kulminationsfehler aus:

$$\operatorname{kul}_{r=0{\cdot}36}(+\alpha') = 4{\cdot}39\%, \quad \operatorname{kul}_{r=0{\cdot}442}(+p'_1) = 5{\cdot}79\%, \quad \operatorname{kul}_{r=0{\cdot}442}(+p'_2) = 6{\cdot}15\%.$$

Der wirkliche Verlauf weist für den angenommenen Wert für $r = 0{\cdot}5$ folgenden positiven Maximalfehler aus:

$$\max_{r=0{\cdot}5}[+\alpha'] = 4{\cdot}05^0/_0, \quad \max_{r=0{\cdot}5}[+p'_1] = 5{\cdot}72^0/_0, \quad \max_{r=0{\cdot}5}[+p'_2] = 6{\cdot}06^0/_0,$$

dann nehmen die Grundfehler ab, gleichen der Null für das Paraboloid, übergehen in negativen Wert, nehmen stetig zu und verlassen das Intervall von $r$ mit dem negativen Maximalfehler:

$$\max_{r=3{\cdot}5}[-\alpha'] = -13{\cdot}38^0/_0, \quad \max_{r=3{\cdot}5}[-p'_1] = -151{\cdot}42 \text{ und}$$

$$\max_{r=3{\cdot}5}[-p'_2] = -60{\cdot}25^0/_0.$$

## 7. Die Formel von Hossfeld.

Das Näherungsvolum $v'$ bzw. $v''$ und der Volumquotient $\sigma$ bezw. $\sigma'$ sind in Form von Funktion in den Formeln 34 bis 35a angegeben.

Der Verlauf der Grundfehler lautet:

Für die Walze betragen die Grundfehler Null und bilden Sprünge mit den teoretischen Werten:

$$[-\alpha']_{r=0} = -25^0/_0, \quad [-p'_1]_{r=0} = -33{\cdot}33^0/_0, \quad [-p'_2]_{r=0} = -25^0/_0.$$

Für den angenommenen Wert von $r = 0{\cdot}5$ erhalten wir:

$$\max_{r=0{\cdot}5}[-\alpha'] = -5{\cdot}42^0/_0, \quad [-p'_1]_{r=0{\cdot}5} = -8{\cdot}87^0/_0, \quad [-p'_2]_{r=0{\cdot}5} = -8{\cdot}12^0/_0,$$

dann nehmen die Grundfehler ab bis zur Null für das Paraboloid, übergehen in positiven Wert, kulminieren mit dem positiven Maximalwert:

$$\max_{r=1{\cdot}42}(+\alpha') = 0{\cdot}85_0/_0, \quad \max_{r=1{\cdot}47}(+p'_1) = 2{\cdot}03^0/_0, \quad \max_{r=1{\cdot}47}(+p'_2) = 2{\cdot}07^0/_0,$$

gleichen der Null für den Kegel, werden negativ und verlassen das Intervall von $r$ mit den Werten:

$$[\alpha']_{r=3{\cdot}5} = -4{\cdot}08^0/_0, \quad \max_{r=3{\cdot}5}[-p'_1] = -22{\cdot}47\ /_0, \quad \max_{r=3{\cdot}5}[-p'_2] = -18{\cdot}35^0/_0.$$

## 8. Die Formel von Riecke.

Das Näherungsvolumen und der Volumquotient sind in den Formeln 36 bis 37a angegeben.

Der Verlauf der Grundfehler lautet:

Für die Walze betragen die Grundfehler Null und bilden Sprünge mit den teoretischen Werten:

$$[-\alpha'] = -16{\cdot}67_0/_0, \quad [-p'_1] = -20{\cdot}00^0/_0, \quad [-p'_2] = -16{\cdot}67^0/_0.$$
$$r=0 \qquad\qquad r=0 \qquad\qquad r=0$$

Für den angenommenen Wert für $r=0{\cdot}5$ erhalten wir den Maximalfehler:

$$\max [-\alpha'] = -2{\cdot}86^0/_0, \quad \max [-p'_1] = -4{\cdot}48^0/_0 \text{ und}$$
$$r=0{\cdot}5 \qquad\qquad r=0{\cdot}5$$
$$\max [-p'_2] = -4{\cdot}29^0/_0,$$
$$r=0{\cdot}5$$

dann nehmen die Grundfehler ab bis zur Null für das Paraboloid, übernehmen den positiven Wert und kulminieren mit den Werten:

$$\text{kul}\,(+\alpha') = 0{\cdot}27^0/_0, \quad \text{kul}\,(+p'_1) = 0{\cdot}62^0/_0, \quad \text{kul}\,(+p'_2) = 0{\cdot}63^0/_0,$$
$$r=1{\cdot}34 \qquad\qquad r=1{\cdot}38 \qquad\qquad r=1{\cdot}38$$

für den Kegel gleichen dieselben Null, übergehen in den negativen Wert und kulminieren wiederum mit den Werten:

$$\text{kul}\,(-\alpha') = -0{\cdot}12^0/_0, \quad \text{kul}\,(-p'_1) = -0{\cdot}42^0/_0, \quad \text{kul}\,(-p'_2) = -0{\cdot}422^0/_0,$$
$$r=2{\cdot}51 \qquad\qquad r=2{\cdot}54 \qquad\qquad r=2{\cdot}54$$

gleichen der Null für das Neiloid und verlassen das Intervall vor $r$ mit dem positiven Maximalfehler:

$$\max [+\alpha'] = 0{\cdot}337^0/_0, \quad \max [+p'_1] = 1{\cdot}49^0/_0, \quad \max [-p'_2] = 152^0/_0.$$
$$r=3{\cdot}5 \qquad\qquad r=3{\cdot}5 \qquad\qquad r=3{\cdot}5$$

## 9. Die Formel von Simony.

Das Näherungsvolumen und der Volumquotient sind in den Formeln 38 bis 39a angegeben.

Der Verlauf der Grundfehler lautet:

Für die Walze betragen die Grundfehler Null und bilden zugleich den sog. scheinbar stetigen Punkt, dann übergehen in positiven Wert und kulminieren mit den teoretischen Werten:

$$\text{kul}\,(+\alpha) = 1{\cdot}16^0/_0, \quad \text{kul}\,(+p'_1) = 1.46^0/_0, \quad \text{kul}\,(+p'_2) = 1{\cdot}48^0/_0.$$
$$r=0{\cdot}26 \qquad\qquad r=0{\cdot}32 \qquad\qquad r=0{\cdot}32$$

Für den angenommenen Wert $r = 0{\cdot}5$ erhalten die Grundfehler den positiven Maximalwert:

$$\max_{r=0{\cdot}5}[+\alpha'] = 0{,}83^0/_0, \quad \max_{r=0{\cdot}5}[+p'_1] = 1{\cdot}23^0/_0, \quad \max_{r=0{\cdot}5}[+p'_2] = 1{\cdot}25^0/_0,$$

nehmen bis zur Null für das Paraboloid ab, übergehen in den negativen Wert und kulminieren mit den Grössen:

$$\operatorname{kul}_{r=1.37}(-\alpha') = -0{\cdot}16^0/_0, \quad \operatorname{kul}_{r=1{\cdot}43}(-p'_1) = -0{,}39^0/_0, \quad \operatorname{kul}_{r=1{\cdot}43}(-p'_2) = -0{\cdot}38^0/_0,$$

gleichen der Null für den Kegel, werden positiv und kulminieren mit den Werten:

$$\operatorname{kul}_{r=2{\cdot}50}(+\alpha') = 0{\cdot}097^0/_0, \quad \operatorname{kul}_{r=2{\cdot}55}(+p'_1) = 0{\cdot}337^0/_0, \quad \operatorname{kul}_{r=2{\cdot}55}(+p'_2) = 0{\cdot}338^0/_0,$$

gleichen der Null für das Neiloid, werden negativ und verlassen das Intervall von $r$ mit dem negativen Maximalwert:

$$\max_{r=3{\cdot}5}[-\alpha'] = -0{\cdot}29^0/_0, \quad \max_{r=3{\cdot}5}[-p'_1] = -1{\cdot}35^0/_0 \text{ und}$$

$$\max_{r=3{\cdot}5}[-p'_2] = 1{\cdot}31^0/_0.$$

## 10. Die Formel von Breymann.

Das Näherungsvolum und der Volumquotient und in den Formeln 40 bis 41a angegeben.

Der Verlauf der Grundfehler lautet:

Für die Walze betragen die Grundfehler Null und bilden Sprünge mit den teoretischen Werken:

$$[-\alpha']_{r=0} = -12{\cdot}50^0/_0, \quad [-p'_1]_{r=0} = -14{\cdot}29^0/_0, \quad [-p'_2]_{r=0} = -12{\cdot}50^0/_0.$$

Für den angenommenen Wert für $r = 0{\cdot}5$ erhalten die Grundfehler den negativen Maximalwert:

$$\max_{r=0{\cdot}6}[-\alpha'] = -1{\cdot}90^0/_0, \quad \max_{r=0{\cdot}5}[-p'_1] = -2{\cdot}93^0/_0,$$

$$\max_{r=0{\cdot}5}[-p'_2] = -2{\cdot}85^0/_0,$$

dann gleichen der Null für das Paraboloid, werden positiv und kulminieren mit den Werten:

$$\operatorname{kul}_{r=1{\cdot}33}(+\alpha') = 0{\cdot}15^0/_0, \quad \operatorname{kul}_{r=1{\cdot}37}(+p'_1) = 0{\cdot}349^0/_0, \quad \operatorname{kul}_{r=1{\cdot}37}(+p'_2) = 0{\cdot}351^0/_0$$

gleichen der Null für den Kegel, werden negativ und kulminieren mit den Werten:

$$\underset{r=2{\cdot}49}{\mathrm{kul}}\,(-\alpha') = -0{\cdot}058\,^0/_0, \quad \underset{r=2{\cdot}53}{\mathrm{kul}}\,(-p'_1) = -0{\cdot}202\,^0/_0,$$

$$\underset{r=0.53}{\mathrm{kul}}\,(-p'_2) = -0{\cdot}2019\,^0/_0,$$

gleichen der Null für das Neiloid, werden positiv und verlassen das Intervall von $r$ mit dem positiven Maximalwert:

$$\max_{r=3{\cdot}5}[+\alpha'] = 0{\cdot}15\,^0/_0, \quad \max_{r=3{\cdot}5}[+p'_1] = 0{\cdot}682\,^0/_0, \quad \max_{r=3{\cdot}5}[+p'_2] = 0{\cdot}683\,^0/_0.$$

Bei der Besprechung der einzelnen xylometrischen Formeln wurden die durchschnittlichen Fehler für die Intervalle $r$ (0·5, 2·3) und $u = o$ dh. für ganze dendrometrischen Körper und für die Intervalle $r$ (0·5, 2·3), $u$ (0·5, 0·8) dh. für dendrometrische Körperschnitte berechnet.

Ausserdem wurden die durchschnittlichen Fehler auch für andere Intervalle berechnet und zwar in den Fällen, in welchen man auch durch die Integration zu demselben Resultat gelangen kann, um auf diese Weise zu beweisen, dass die näherungsweise Berechnung in den Rahmen der ausreichenden Genauigkeit liegt.

## 11. Zusammenstellung und Folgerungen.

Für die Intervalle $r(0{\cdot}5, 2{\cdot}3), u = 0$ bezw. $r(0{\cdot}5, 2{\cdot}3), u(0{\cdot}5, 0{\cdot}8)$ wurden in der Tabelle 12 die Maximal- und durchschnittlichen Fehler für alle sechs xylometrischen Formeln zusammengestellt. Auf Grund der erhaltenen Resultate können wir die besprochenen xylometrischen Formeln, was ihre relative Genauigkeit anbelangt, in drei Gruppen teilen, und zwar zur ersten Gruppe zählen wir die Formeln von Smalian und Huber, genauer ist die Hossfeld'sche Formel, die die zweite Gruppe ausmacht, und die Gruppe der genauesten Formeln bilden die Formeln von Riecke, Simony und Breymann, wobei von den zwei letzten, die das Volumen der dendrometrischen Körper genauer als jene von Riechе angeben, schwer zu entscheiden ist, welcher der beiden der Vorrang was die Genauigkeit anbelangt zuzuschreiben ist.

Der absolute Wert der durchschnittlichen Fehler für die Interralle $r$ (0·5, 2·3), $u$ (0·5, 0·8) übersteigt was $\alpha$ und $p_1$ anbelangt sogar nicht 1% und was $p_2$ betrifft beträgt derselbe für die Smaliansche Formel 1·09%, sonst erreicht er auch nicht 1%, woraus wir schliessen können, dass die Anwendung der Smalianschen und besonders der Huberschen Formel für die sektionsweise Methode zu den Resultaten führt, die innerhalb der Grenzen jener Genauigkeit liegen, die bei den dendrometrischen Versuchsmessungen verlangt wird.

Auf Grund der Auseinandersetzungen, die im angewandten Teile besprochen wurden, gelangen wir nebst den allgemeinen Folgerungen, die am Schlusse des teoretischen Teiles angegeben sind, zu den folgenden speziellen Sätzen, die sich auf die sechs xylometrischen Formeln beziehen:

1. Die Grundfehler weisen innerhalb der festgesetzten allgemeinen Interralle der veränderlichen $r$ und $u$ einen analogen Verlauf aus; es wäre nähmlich zu bemerken, dass — wie die in der Publikation nicht angegebenen Orientierungsrechnungen beweisen — der Verlauf für andere Werte von $r$ für die einzelnen Grundfehlerarten sehr verschieden sein kann.

2. Die xylometrischen Formeln, die den obersten Querschnitt nicht enthalten (Huber, Simony), weisen für die Walze den sog. scheinbar stetigen Punkt aus; dagegen die übrigen Formeln (Smalian, Hossfeld, Riecke, Breymann) bilden für die Walze den sog. unstetigen Punkt mit den Sprüngen von nur teoretischen Fehlerwerten. Diese Fehlerwerte berechnen sich für die Walze deshalb, weil die Fehlerfunktionen nehmen für den obersten Querschnitt Null an, was für die Walze (von endlicher Länge) unzulässig ist.

3. Bei diesen vier xylometrischen Formeln, die den obersten Querschnitt besitzen, finden wir noch diese Tatsache, dass der sekundär-prozentuelle Fehler für $r = 0$ und $u = 0$ gleich dem in Prozenten des Grundwalzenvolum ausgedrückten absoluten Fehler ist, trotzdem beide einen von Null verschiedenen Wert besitzen. Die Grösse dieser teoretischen Fehlerwerte die als Sprünge in den sog. unstetigen Punkten auftreten, läst sich nach den folgenden Formeln berechnen: $\alpha' = p'_2 = \frac{100}{m}$, und $p'_1 = \frac{100}{m-1}$,

wenn wir unter $m$ die algebraische Summe der Koiffizienten bei den Querschnittsflächen in den einzelnen xylometrischen Formeln verstehen; $m$ beträgt für die Smaliansche Formel 2, für die Hossfeldsche 4, für die Simonysche 6 und für die Breymannsche 8.

4. Der absolute Wert der Grundfehler nimmt mit dem Zunehmen der Werte von $u$ ab d. h. die ganzen Körper weisen die grösten Fehler aus, woraus folgt, dass die Grösse der Grundfehler direkt proportional der Differenzen der äussersten Durchmesser ist.

5. Die eventuelle Kulmination der Grundfehlerfunktion tritt mit zunehmendem $u$ für abnehmendes $r$ ein d. h. die Kulmination nähert sich dem Ursprunge des Koordinationsystems mit zunehmendem Werte von $u$.

6. Die Kulmination für die beiden prozentuellen Fehler tritt für höhere Werte von $r$ als die Kulmination des korrespondierenden absoluten Fehler ein.

*Meinen Assistenten Herrn E. Lorenz, S. Selens und St. Smólski danke ich herzlichst für die freundliche Hilfe bei den langwierigen Rechnungen, die in der Abhandlung auftreten.*