

Uniwersytet Zielonogórski
Wydział Mechaniczny

Mgr inż. Tomasz Belica

*Stateczność dynamiczna
porowatej powłoki walcowej*

Rozprawa doktorska

Promotor: prof. dr hab. inż. Krzysztof Magnucki,
Politechnika Poznańska

Praca zrealizowana w ramach grantu promotorskiego Nr N501 054 31/3650

Zielona Góra 2007

Spis treści

Streszczenie	3
Wykaz ważniejszych oznaczeń	4
1. Wstęp	6
2. Założenia i podstawowe zależności	15
2.1. Przedmiot badań	15
2.2. Model fizyczny materiału porowatego	16
2.3. Model geometryczny powłoki	18
3. Równania dynamiczne stateczności	22
4. Siły i momenty wewnętrzne	28
5. Rozwiązanie układu równań	33
6. Przykład obliczeń	41
6.1. Zagadnienie stateczności statycznej powłoki walcowej	45
6.1.1. Rozwiązanie geometrycznie liniowe	46
6.1.2. Rozwiązanie geometrycznie nieliniowe	50
6.2. Zagadnienie stateczności dynamicznej powłoki walcowej	53
6.2.1. Obciążenie rosnące proporcjonalnie do czasu	53
6.2.2. Obciążenie o charakterze quasi-impulsowym	62
6.3. Badania porównawcze MES	67
7. Zakończenie	72
Literatura	74
Załączniki	

Streszczenie

Przedmiotem pracy jest cylindryczna powłoka walcowa o strukturze porowatej, obciążona ciśnieniem zewnętrznym i ściskana wzdłuż tworzących siłami rozłożonymi równomiernie na brzegach krzywoliniowych. Powłoka została zorientowana w walcowym układzie współrzędnych oraz podparta swobodnie na krawędziach zewnętrznych. Wskaźniki mechaniczne i fizyczne powłoki po grubości są zmienne i zależą od porowatości materiału. Zmiana modułów sprężystości oraz gęstość została opisana za pomocą pewnych funkcji. Przyjęty został nieliniowy stan przemieszczeń w przekroju poprzecznym oraz nieliniowe związki geometryczne pomiędzy składowymi stanu odkształcenia i przemieszczenia.

Równania stateczności powłoki wyprowadzono z zasady wariacyjnej Hamiltona, a następnie odpowiednio przekształcono. W tym celu zdefiniowano naprężenia i siły wewnętrzne oraz wprowadzono funkcję sił i przemieszczeń. Otrzymany układ równań różniczkowych ruchu rozwiązano metodą Bubnowa-Galerkina. Ostateczną zależność pomiędzy parametrami ugięcia i obciążenia otrzymano w postaci układu dwóch nieliniowych równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu.

Na podstawie rozwiązania analitycznego przeprowadzone zostały badania numeryczne. W pierwszej części, na podstawie kryterium wytrzymałościowego, określono obszar rozwiązań dopuszczalnych dla badanej rodziny powłok. Następnie przedstawiono wybrane przypadki zagadnienia stateczności statycznej. Analizę stateczności powłoki poddanej obciążeniom dynamicznym przeprowadzono w oparciu o algorytm metody Rungego-Kutty. Analizowano przypadek obciążenia liniowo narastającego w czasie oraz obciążenia o charakterze quasi-impulsowym. W końcowym etapie pracy, przeprowadzono analizę porównawczą wybranych przypadków metodą elementów skończonych z użyciem systemu ANSYS. Wyniki obliczeń przedstawiono na wykresach.

Wykaz ważniejszych oznaczeń

- x, φ, z – współrzędne układu walcowego,
 L – długość powłoki,
 r – promień powierzchni środkowej powłoki,
 t – grubość powłoki,
 E – moduł sprężystości podłużnej,
 G – moduł sprężystości postaciowej,
 ρ – gęstość materiału,
 e_0 – bezwymiarowy parametr porowatości,
 e_m – bezwymiarowy parametr gęstości,
 u, v, w – składowe przemieszczenia punktu powłoki w kierunkach osi x, φ, z ,
 u_0, v_0 – przemieszczenia styczne dowolnego punktu powierzchni środkowej,
 ψ, ϕ – bezwymiarowe funkcje przemieszczeń uogólniające hipotezę płaskich przekrojów,
 ζ – bezwymiarowa współrzędna,
 T_k – energia kinetyczna,
 U_ε – energia potencjalna odkształcenia sprężystego,
 W – praca obciążenia zewnętrznego,
 C_0, \dots, C_5 – stałe całkowania po grubości powłoki,
 F – funkcja sił,
 $\alpha_{f_1}, \dots, \alpha_{f_6}$ – parametry funkcji sił,
 Φ – funkcja przemieszczeń,
 \tilde{w}_1, \tilde{w}_2 – bezwymiarowe parametry ugięcia powłoki,
 m – liczba półfal wzdłuż tworzącej powłoki,
 n – liczba fal po obwodzie powłoki,
 N_0 – obciążenie powłoki,
 k_0 – parametr obciążenia powłoki,
 N_x – osiowe siły ściskające,
 N_φ – obwodowe siły ściskające,
 p – ciśnienie zewnętrzne,
 N_{0g} – górne krytyczne obciążenie powłoki,
 N_{0d} – dolne krytyczne obciążenie powłoki,

- $\alpha_{w_0}, \dots, \alpha_{w_6}$ – parametry układu równań,
 α_Φ, k_Φ – parametry wyznaczone z równania zgodności przemieszczeń,
 $\sigma_{eq,max}$ – największe naprężenia zredukowane (naprężenia Hubera-Misesa),
 σ_{all} – dopuszczalne naprężenia dla danego materiału,
 τ – czas,
 c – prędkość narastania obciążenia zewnętrznego,
 $\tilde{\tau}$ – bezwymiarowy parametr czasu,
 A – stopień podwyższenia górnego obciążenia krytycznego,
 T – czas trwania obciążenia impulsowego.

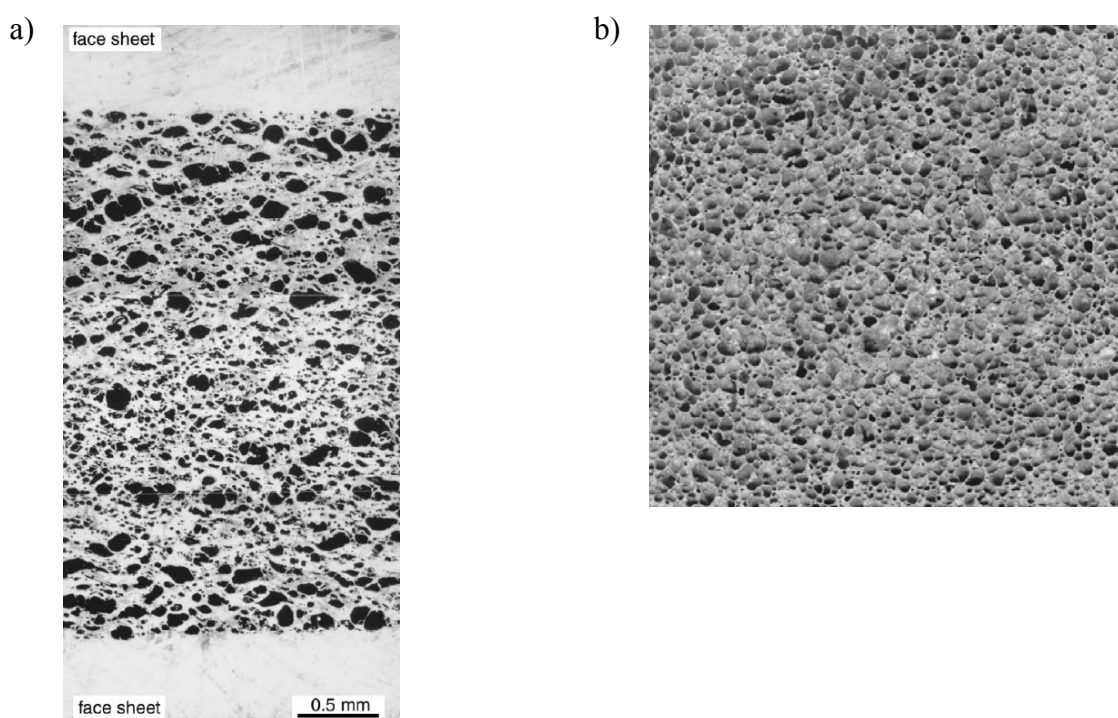
1. Wstęp

Powłoki walcowe ze względu na swoją budowę oraz charakter obciążenia zaliczane są do cienkościennych dźwigarów powierzchniowych. Konstrukcje takie podlegają obciążeniu powierzchniowemu lub rozłożonemu liniowo na brzegach. Powłoki walcowe znajdują szerokie zastosowanie w różnych gałęziach przemysłu. Można wymienić tutaj konstrukcje samolotów i okrętów, zbiorniki na ciecze i gazy, rury cienkościenne. Różnorodność charakteru oraz środowiska pracy takich konstrukcji wymusza stosowanie podczas ich wytwarzania nowoczesnych materiałów. W zależności od zastosowania można wymienić szereg czynników decydujących o ich wyborze, np. wytrzymałość, zdolność tłumienia drgań, masa konstrukcji, koszt wytwarzania lub odporność na działanie związków chemicznych.

W latach trzydziestych dwudziestego wieku pojawiły się pierwsze konstrukcje trójwarstwowe. Konstrukcja taka składa się z dwóch, stosunkowo cienkich i wytrzymałych warstw zewnętrznych połączonych warstwą środkową. Stosunkowo gruba i lekka warstwa środkowa, stanowiąca rdzeń konstrukcji, może być wykonana ze spienionego tworzywa sztucznego lub w postaci szkieletowej. Całość odznacza się przede wszystkim dużą sztywnością giętą i wytrzymałością przy stosunkowo małej masie. Dodatkową zaletą konstrukcji trójwarstwowych jest duża zdolność tłumienia drgań. Ze względu na swoje własności znalazły zastosowanie szczególnie w przemyśle lotniczym. Konstrukcje te nie są jednak pozbawione wad. Jako podstawowe należy wymienić niedoskonałości kształtu, wynikające z dość trudnej technologii wykonania, duży koszt produkcji oraz możliwość rozwarstwienia się konstrukcji.

Pojawienie się nowych wieloskładnikowych materiałów, zwanych kompozytami, przyczyniło się do powstania konstrukcji wielowarstwowych. Konstrukcje takie charakteryzują się tym, że mają zmienne skokowo właściwości mechaniczne i fizyczne na grubości materiału. W zależności od sposobu ułożenia poszczególnych warstw, można tutaj odpowiednio sterować rozkładem ich właściwości a tym samym odpowiednio kształtować charakterystyki sztywnościowe konstrukcji. Jednym z rodzajów materiałów kompozytowych są laminaty. Powstają one z połączenia dwóch różnych materiałów, cienkich włókien spełniających podstawową rolę konstrukcyjną oraz spajające je lepiszcze. Wytrzymałość i sztywność takiego materiału jest ściśle zależna od sposobu i kierunku ułożenia włókien konstrukcyjnych. Odpowiednie sterowanie tymi parametrami powoduje, że konstrukcje te są bardziej wytrzymałe oraz mają mniejszą masę w odniesieniu do większości konstrukcji z materiałów jednorodnych.

Cechy charakterystyczne dla konstrukcji wielowarstwowych można wykorzystać w tzw. konstrukcjach integralnych. Konstrukcje takie nie posiadają oddzielnych warstw. Zmiana właściwości fizycznych i mechanicznych następuje poprzez zróżnicowanie gęstości materiału. Przykładem mogą być tutaj materiały porowate (komórkowe). W ostatnich kilkunastu latach obserwuje się dynamiczny rozwój technologii wykonania tych materiałów. Dzięki różnym zabiegom technologicznym, materiały porowate wytwarzane są najczęściej na bazie stopów aluminium z magnezem, niklem, miedzią i tytanem. Technologie wytwarzania materiałów porowatych przedstawił w obszernej pracy Banhart [7]. Przykładowe struktury porowate uzyskane różnymi metodami przedstawiono na rysunku 1.1.



Rys. 1.1. Przykładowe struktury porowate [7]

Materiały porowate były przedmiotem badań wielu autorów. Badania i właściwości tych materiałów przedstawił w swoich pracach Bart-Smith i inni [8]. Zależność pomiędzy modułem sprężystości a gęstością materiału porowatego badali Gibson i Ashby [25], Simone i Gibson [58], Choi i Lakes [19], Kovacic [34, 35], Koval'chenko [36]. Przegląd modeli dotyczących modułu sprężystości materiałów porowatych przedstawili Kaczmarek i Goueygou [32]. Ujęcie matematyczne struktur porowatych z uwzględnieniem efektów plastycznych zostało zaprezentowane w pracy Mielniczuka [50]. Włodarczyk i inni [68] przeprowadzili badania różnych aluminiowych materiałów pianowych w zakresie oceny zdolności pochłaniania energii.

Powłoki walcowe ze względu na swoją cienkościenną konstrukcję są szczególnie narażone na utratę stateczności. Dlatego określenie obciążeń krytycznych oraz analiza zachowania się przy obciążeniach dynamicznych, stanowi istotny element analizy wytrzymałościowej powłok. Charakterystykę rozwoju teorii płyt i powłok można prześledzić na podstawie monografii [5, 69]. Podstawy teoretyczne teorii sprężystości stanowią monografie [30, 62]. Ze starszych prac poświęconych zagadnieniu stateczności powłok warto wyróżnić monografie Timoshenki [61, 63], Volmira [66], Donnella [21], Filina [24] oraz Girkmanna [26].

Obecny stan wiedzy z zakresu mechaniki powłok omówili Romanów [55], Bażant i Cedolin [9], Magnucki i inni [41, 44], Woźniak i inni [69] a także Zielnica [70]. Na szczególną uwagę zasługuje monografia [69], w której przedstawiono współczesną wiedzę dotyczącą teorii sprężystych płyt i powłok. Autorzy omówili podstawy matematycznego formułowania różnych zagadnień inżynierskich. Szczegółowo przedstawione zostały problemy liniowej i nieliniowej teorii powłok jednorodnych w zakresie statycznym. Magnucki w pracy [41] badał stateczność różnych typów konstrukcji w ujęciu energetycznym. Jednym z rozpatrywanych przykładów była powłoka walcowa o strukturze jednorodnej, zamknięta na końcach przeponami i obciążona wewnętrznym ciśnieniem hydrostatycznym. Konstrukcje podparto przegubowo na krawędziach zewnętrznych. W pracy [9] przedstawiono ogólny przegląd podstawowych problemów stateczności powłok dla różnych przypadków obciążenia. Zwrócono szczególną uwagę na energetyczne kryterium stateczności.

Teoretyczne podstawy obliczania konstrukcji warstwowych przedstawiono w pracach [44, 55]. W pracy zbiorowej [44] przedstawiono rozwiązanie zagadnienia swobodnie podpartej powłoki walcowej, poddanej obciążeniu złożonemu (ciśnieniu zewnętrznemu, ścisaniu osiowemu oraz skręcaniu). Uwzględniono niesymetryczną budowę warstw nośnych. Zagadnienie rozwiązane zostało w oparciu o hipotezę linii łamanej z uwzględnieniem nieliniowych związków geometrycznych pomiędzy przemieszczeniem i odkształceniem. Stan pokrytyczny analizowano dla różnej konfiguracji postaci wyboczenia powłoki. Przedstawiono również obszerny rozdział poświęcony zagadnieniu optymalizacji badanych powłok. Nowatorskim podejściem autora monografii [55] było zaproponowanie w opisie matematycznym, hiperbolicznej hipotezy trójosiowego stanu przemieszczeń rdzenia. W pracy rozpatruje się między innymi osiowo ścisaną powłokę walcową o symetrycznej budowie. Wyniki zweryfikowano za pomocą badań doświadczalnych.

Ogólne równania różniczkowe małowyniosłej powłoki trójwarstwowej z uwzględnieniem nieliniowego stanu przemieszczeń rdzenia oraz nieliniowych związków pomiędzy przemieszczeniami i odkształceniami przedstawiono w pracy [54]. Zielnica [70] omawia zagadnienie liniowych i nieliniowych problemów stateczności konstrukcji powłokowych w zakresie sprężysto plastycznym. Jednym z analizowanych przykładów była jedno i trójwarstwowa powłoka walcowa. Autor wiele uwagi poświęca formułowaniu algorytmów przeznaczonych do iteracyjnego uzyskiwania rozwiązań numerycznych.

Bardzo istotnym czynnikiem wpływającym na obciążenia krytyczne konstrukcji powłokowych są wstępne imperfekcje (odchylenia od geometrycznie idealnego kształtu). W zależności od wielkości, obniżają one w mniejszym lub większym stopniu nośność konstrukcji. Wpływ tych czynników był analizowany w wielu pracach. Ostwald [52] przedstawił nieliniową analizę przebiegu utraty stateczności trójwarstwowej powłoki walcowej poddanej osiowemu ścisłaniu i ciśnieniu zewnętrznemu. Choong i Ramm [20] omówili symulację procesu utraty stateczności z wykorzystaniem MES. W pracy badano między innymi osiowo ścisłaną powłokę walcową. Autorzy zwrócili uwagę na uwzględnienie odpowiedniego zakłócenia warunków początkowych w celu zapoczątkowania procesu utraty stateczności. Bazując na kryterium stateczności Lyapunov'a badano wpływ oraz zmianę postaci odkształcenia powłoki w procesie przebiegu utraty stateczności. Kheyrkahan i Peek [33] analizowali stan pokrywczy i wrażliwość na imperfekcje powłok z wykorzystaniem MES. Bazując na rozkładzie Lyapunov-Schmidt-Koiter'a zaproponowano nowy element skończony. Gusic i inni [28] wykorzystali MES do analizy wpływu obwodowych zmian grubości na wyboczenie cylindrycznych powłok poddanych zewnętrznemu ciśnieniu.

W analizie stateczności powłok bardzo istotne są badania doświadczalne. Wyniki badań umożliwiają weryfikację wyników obliczeń numerycznych. Aghajari i inni [3] przedstawili badania numeryczne i doświadczalne cienkościennych, cylindrycznych, stalowych powłok o różnej grubości. Powłoki obciążone zostały równomiernym ciśnieniem zewnętrznym. W celu zweryfikowania metody elementów skończonych, przeprowadzono badania doświadczalne czterech różnych powłok w zakresie do- oraz pokrytecznym. Uzyskano dużą zgodność wyników – w zależności od wielkości powłoki $7,3 \div 13\%$. Hilburger i Starnes [29] badali wpływ imperfekcji na wyboczenie nieusztynionych, kompozytowych powłok walcowych poddanych ścisłaniu. W pracy przedstawiono i porównano wyniki badań doświadczalnych i numerycznych MES. Bisagni i Cordisco [12] przeprowadzili badania doświadczalne trzech kompozytowych, podłużnie usztynionych, cylindrycznych powłok walcowych. Dwie poddano osiowemu ścisłaniu i jedną obciążono momentem skręcającym.

Przed badaniami określone zostały wstępne ugięcia oraz różnice grubości ścianki. Autorzy badali wyboczenie powłoki oraz stan pokrywczy.

Librescu i inni [40] badali stan pokrywczy laminowanych kompozytowych i warstwowych płyt i powłok. Do badań przyjęto dwa fizyczne modele badanych konstrukcji. Szczególną uwagę poświęcono na istotność spełnienia statycznych międzywarstwowych warunków ciągłości. W jednym z przyjętych modeli spełnione zostały warunki kinematyczne oraz przyczepności pomiędzy warstwami, a w drugim dodatkowo warunki równowagi statycznej na powierzchni styku warstw. Ogólny przegląd teorii laminowanych kompozytowych płyt i powłok przedstawili Wilde i Zborala [67]. Przegląd hipotez linii łamanej dla konstrukcji wielowarstwowych przedstawił Carrera [16, 17].

Badania analityczne konstrukcji porowatych w zakresie wytrzymałości i stateczności przedstawił Magnucki i inni [42, 43, 45, 46, 47, 48]. Cechą charakterystyczną tych prac jest przyjęcie nieliniowej hipotezy odkształcenia płaskiego przekroju na grubości ścianki, uwzględniającej efekt ścinania w przekroju poprzecznym. Składowe pola odkształceń określono za pomocą liniowych związków geometrycznych. Przyjęto również nieliniowy rozkład właściwości mechanicznych materiału na grubości ścianki konstrukcji. Powyższe założenia po raz pierwszy przedstawiono we współautorskich pracach Magnuckiego i Stasiewicza [45, 46]. Prace te dotyczą odpowiednio wytrzymałości oraz wyboczenia sprężystej belki porowatej. Malinowski i Magnucki badali stateczność porowatej paneli walcowej poddanej osiowemu ścisłaniu [47] oraz ciśnieniu zewnętrznemu [48]. Praca [42] dotyczy optymalnego projektowania porowatej cylindrycznej powłoki walcowej, obciążonej ciśnieniem zewnętrznym i ścisłanej osiowo. W monografii [43] przedstawiono zagadnienia wytrzymałości i stateczności płyty oraz paneli walcowej. Na wstępie omówiono podstawowe cechy i właściwości mechaniczne materiałów porowatych, zwracając uwagę na wpływ porowatości przy określaniu zastępczych parametrów materiałowych. W każdej z prac wyniki obliczeń analitycznych zweryfikowano za pomocą metody elementów skończonych.

W oparciu o analizę rzeczywistych obciążeń konstrukcji powierzchniowych, powstało wiele prac poświęconych zagadnieniom stateczności dynamicznej. Pierwsze z nich pojawiły się w latach pięćdziesiątych XX wieku w byłym ZSRR. Szczególnie można tutaj wymienić monografie Volmira [65] i Bołotina [14]. W pracy [14] przedstawiono szczegółowo teorie stateczności konstrukcji poddanych obciążeniom pulsującym. Autor badał przede wszystkim konstrukcje prętowe oraz płyty. Monografia [65] poświęcona została nieliniowym

zagadnieniom dynamicznym płyt i powłok. W pracy między innymi analizowano osiowo ściskaną, cylindryczną powłokę walcową. Sformułowane przez autora kryterium stateczności dynamicznej jest powszechnie stosowane do dnia dzisiejszego.

Z nowszych prac dotyczących stateczności dynamicznej można wyróżnić monografie Grybosia [27], Bogdanovicha [13], Awrejcewicza i Krysko [6], Doyle'a [23] oraz Qatu [53]. Monografia [23] jest obszernym zbiorem wiedzy inżynierskiej z zakresu metod obliczeniowych konstrukcji cienkościennych. Autor zwrócił szczególną uwagę na potrzebę rozwiązywania zagadnień mechaniki z uwzględnieniem nieliniowych zjawisk zachodzących w wewnętrznej strukturze materiału. W rozwiązaniach analitycznych wykorzystywał głównie metody wariacyjne z uwzględnieniem dużych odkształceń. Praca [27] dotyczy stateczności konstrukcji poddanej obciążeniom uderzeniowym. Na wstępie przedstawiono modele obciążeń konstrukcji oraz opisano typowe przebiegi obciążeń quasi-impulsowych. Następnie omówiono zastosowanie równania Mathieu, którego rozwiązanie wykorzystuje się do określenia np. obszarów stateczności konstrukcji poddanych obciążeniom pulsującym. W dalszej części pracy przedstawiono zagadnienie stateczności różnych konstrukcji, poddanych określonym obciążeniom dynamicznym. Szczególnie szeroko opisano zagadnienie stateczności dynamicznej powłoki ściskanej osiowo oraz powłoki poddanej ciśnieniu zewnętrznemu. Monografia [13] poświęcona została zagadnieniu nieliniowej stateczności dynamicznej cylindrycznych powłok kompozytowych. Na podstawie przedstawionego rozwiązania analitycznego badano szereg różnych przypadków utraty stateczności. Określono nieliniowe parametryczne drgania powłoki oraz wyznaczono obszary stateczności. Następnie badano przypadki wyboczenia powłoki poddanej liniowo wzrastającemu oraz quasi-impulsowemu obciążeniu. Analizowano zarówno osiowosymetryczne jak i niesymetryczne przypadki wyboczenia powłoki. Qatu [53] przedstawił najnowsze badania z zakresu drgań kompozytowych powłok i płyt. Tematem monografii [6] była dynamika chaotyczna belek, płyt i powłok. Na wstępie przedstawiono podstawy modelowania konstrukcji. Jako przykład przyjęto modelowanie niejednorodności powłok poprzez zmiany modułu sprężystości $E = E(x, y)$ oraz gęstości $\rho = \rho(x, y)$. Takie podejście można wykorzystać między innymi w przypadku powłok usztywnianych. Następnie szczegółowo opisano metody analityczne typu Bubnowa-Galerkina, szeroko stosowane w badaniu stateczności powłok. W dalszej części pracy przeprowadzono badania numeryczne w zakresie drgań i utraty stateczności powłok prostokątnych oraz walcowych (w ujęciu statycznym i dynamicznym). Określone zostały scenariusze przejścia od ruchów harmonicznym do chaotycznych oraz przedstawiono dynamiczne kryteria stateczności

konstrukcji. Praca zawiera również porównanie wyników otrzymanych na podstawie metody różnic skończonych oraz Bubnowa-Galerkina.

Jednym z powszechnie analizowanych zadań stateczności dynamicznej konstrukcji jest przypadek wyboczenia powłok poddanych obciążeniu rosnącemu proporcjonalnie do czasu. Zagadnienia te przykładowo opisane są w pracach [2, 4, 22, 31, 37, 39, 56, 59, 60]. Leyko i Spryszyński [39] badali cienkościenną powłokę walcową poddaną skręcaniu, Joniak i Osmólski [31] powłokę stożkową obciążoną ciśnieniem zewnętrznym. Kowal-Michalska [37] analizowała cylindryczną powłokę walcową poddaną jednoczesnemu skręcaniu i ciśnieniu zewnętrznemu. Szyc [59] rozpatrywał trójwarstwową panel walcową ściskaną w dwóch kierunkach (obwodowym i wzdłuż tworzących). Taką samą konstrukcję analizował Szyc i Twardosz [60] przy obciążeniu siłami stycznymi, rozłożonymi na swobodnie podpartych brzegach. Lee [22] rozpatrywał osiowo ściskaną ortotropową powłokę walcową. W pracy analizowano również przypadek ruchomego obciążenia hydrostatycznego. Powyższe zagadnienia rozwiązano przyjmując nieliniowe związki geometryczne. Romanów i Malinowski [56] badał trójwarstwową powłokę walcową z rdzeniem o zmiennej gęstości, poddaną osiowemu ściskaniu. Zadanie rozwiązano w ujęciu liniowym. Aksogan i Sofiyev [4] zajmowali się cylindryczną powłoką o zmiennej grubości ścianek i obciążoną ciśnieniem zewnętrznym. Grubość powłoki opisana została pewną funkcją, zmienną na długości powłoki. W zależności od wykładnika grubość może być zmienna w sposób liniowy, wykładniczy lub paraboliczny. W odróżnieniu od modelu przyjętego w pracy [6] zmiana grubości jest tutaj ciągła na długości i symetryczna względem powierzchni środkowej powłoki.

Szczególne miejsce w analizie stateczności dynamicznej konstrukcji poddanej okresowo zmiennemu obciążeniu, zajmuje równanie Mathieu. Teoria tego równania, jego rozwiązania oraz zastosowanie szczegółowo zostały opisane w literaturze [23, 27, 65]. Twardosz i Zielnica [64] badali stateczność dynamiczną powłoki stożkowej, obciążonej okresowo zmiennymi siłami podłużnymi oraz ciśnieniem zewnętrznym. Zagadnienie sprowadzono do postaci równania różniczkowego Mathieu. Następnie wyznaczono obszary rezonansowe. Na podstawie otrzymanych zależności analizowano wpływ parametrów geometrycznych powłoki oraz wartość obciążenia na obszary niestateczności. W pracy przeprowadzono również analizę drgań parametrycznych powłoki. Ng i inni [51] badali stateczność dynamiczną laminowanych kompozytowych powłok walcowych. Powłokę poddano połączonemu statycznemu i okresowo zmiennemu obciążeniu osiowemu. Autorzy, bazując na klasycznej teorii Love'a, otrzymali układ równań w postaci Mathieu-Hill'a.

Następnie wyznaczono obszary stateczności wykorzystując metodę Bolotin'a. Badano wpływ różnych schematów laminowania i wielkości obciążenia. Tematem pracy [10] była stateczność dynamiczna porowatej powłoki walcowej. Powłokę obciążono siłami ściskającymi o charakterze pulsującym. Przyjęto nieliniową hipotezę przemieszczeń oraz liniowe związki geometryczne. Wychodząc z zasady Hamiltona wyprowadzono układ równań, który następnie zredukowano do postaci równania Mathieu. Następnie, w zależności od parametrów porowatości i obciążenia określono granice niestatecznych obszarów.

Bardziej złożonym zagadnieniem jest analiza drgań oraz stateczności dynamicznej konstrukcji w ujęciu nieliniowym. Punktem wyjścia większości prac jest w tym przypadku nieliniowe równanie Donnell'a. Catellani i inni [18] badali cylindryczne, osiowo ściskane powłoki walcowe z geometrycznymi imperfekcjami. W pierwszej części pracy przedstawiono analizę statyczną. Następnie badano wpływ imperfekcji na krytyczne wartości obciążenia dynamicznego. Przyjęto tutaj sinusoidalnie zmienne obciążenie powodujące parametryczne wzbudzenie drgań powłoki. Wyniki obliczeń na podstawie nieliniowej teorii Donnell'a porównano z teorią powłok Sandersa. Kubenko i Koval'chuk [38] badali wpływ imperfekcji na drgania i stateczność dynamiczną sprężystych powłok walcowych. Określone zagadnienia rozwiązano zarówno w ujęciu liniowym jak i nieliniowym. W pracy badano wpływ początkowego osiowo i nie osiowo symetrycznego ugięcia na naturalne, wymuszone oraz parametrycznie wzbudzone drgania konstrukcji. W dalszej części pracy analizowano dynamiczne wyboczenie powłok poddanych krótkotrwałemu impulsowemu obciążeniu. Omówiono również kilka aspektów z badań doświadczalnych drgań powłok z uwzględnieniem geometrycznie małych imperfekcji. Praca stanowi bardzo obszerny zbiór wiedzy z tego zagadnienia. Przegląd prac poświęconych stateczności dynamicznej płyt i powłok w latach 1987-2005 przedstawili Sahu i Datta [57].

Abdullah i inni [1] analizowali ortotropową cylindryczną powłokę walcową poddaną skręcaniu. Autorzy korzystając z wariacyjnej metody Ritza wyznaczyli analitycznie dynamiczne i statyczne obciążenia krytyczne, odpowiadającą im ilość fal, dynamiczne współczynniki oraz czas i impuls krytyczny. Na podstawie uzyskanych wyników przeprowadzono analizę numeryczną. Przedmiotem pracy Matemilola i Stronge'a [49] były podparte przegubowo anizotropowe, kompozytowe powłoki cylindryczne. Autorzy przeprowadzili badania analityczne reakcji powłok poddanych obciążeniu uderzeniowemu. Bisagi [11] przeprowadził badania numeryczne MES cienkościennych, cylindrycznych powłok kompozytowych. Autor badał dynamiczne wyboczenie powłok poddanych impulsowemu osiowemu ściskaniu. W badaniach numerycznych uwzględnione

zostały wstępne imperfekcje zmierzone eksperymentalnie na rzeczywistych powłokach. Bugajny [15] analizował sprężystą powłokę trójwarstwową o niesymetrycznej budowie warstw. Autor wyprowadził nieliniowe równania ruchu z uwzględnieniem efektu inercji obrotu elementu powłoki oraz początkowych imperfekcji. W pracy przedstawiono wyniki badań dla przypadku otwartej powłoki walcowej, ściskanej osiowo siłami zmieniającymi się w czasie wg funkcji wykładniczej.

Przedmiotem rozprawy jest cylindryczna powłoka walcowa o strukturze porowatej. Przyjęto zmienny, ciągły i symetryczny względem powierzchni środkowej, rozkład właściwości mechanicznych i fizycznych na grubości ścianki powłoki.

W oparciu o literaturę i przytaczane w niej przykłady obiektów rzeczywistych (naturalnych) można stwierdzić, iż stosowane powszechnie materiały prawie zawsze charakteryzują się nieuporządkowaną strukturą. Efekt ten ma ogromne znaczenie przy podejmowaniu decyzji o prawidłowym doborze modelu obliczeniowego dla badanej konstrukcji. W zależności od postaci struktury materiału, przyjmuje się różne hipotezy wewnętrznych przemieszczeń geometrycznych. W przypadku struktur jednowarstwowych najczęściej wykorzystuje się hipotezę Kirchhoffa-Love'a, natomiast dla struktur wielowarstwowych, odpowiednie modyfikacje hipotezy linii łamanej. Należy zwrócić uwagę na fakt, iż istnieją w tych teoriach pewne wewnętrzne sprzeczności.

Teza rozprawy. Istnieje możliwość sformułowania pola przemieszczeń – deformacji przekroju poprzecznego ścianki, na podstawie której zdefiniowane siły i momenty wewnętrzne nie będą zawierały sprzeczności (brak wewnętrznej sprzeczności teorii).

Celem rozprawy doktorskiej jest zbadanie równowagi dynamicznej powłoki walcowej, poddanej obciążeniom zmiennym w czasie.

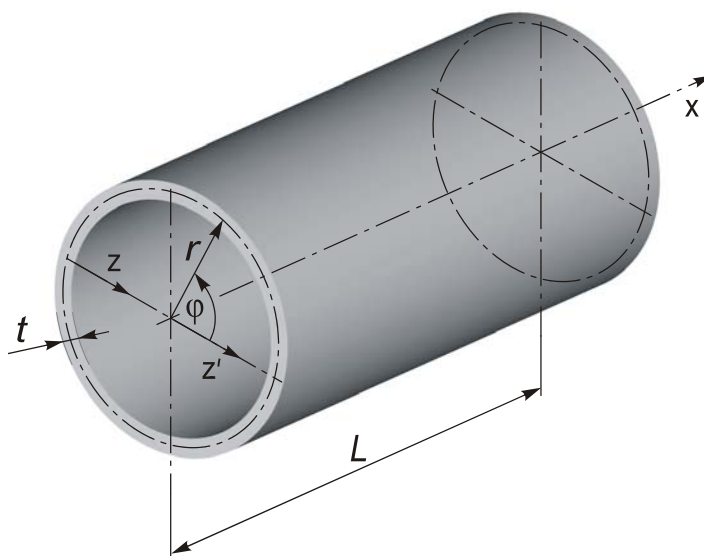
Postawiony w pracy problem został rozwiązany w następującej kolejności:

- przyjęcie modelu stanu przemieszczeń w przekroju poprzecznym ścianki powłoki,
- wyprowadzenie różniczkowych równań ruchu za pomocą wariacyjnej zasady Hamiltona,
- rozwiązanie równań za pomocą ortogonalizacyjnej metody Bubnowa-Galerkina,
- badania analityczne i numeryczne stateczności konstrukcji,
- badania porównawcze wybranych przypadków metodą elementów skończonych.

2. Założenia i podstawowe zależności

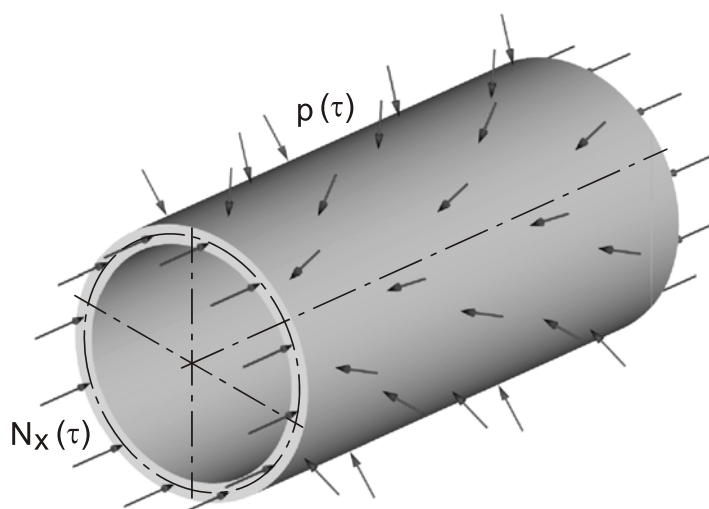
2.1. Przedmiot badań

Przedmiotem badań jest cylindryczna powłoka walcowa o strukturze porowatej. Powłoka o długości L , promieniu r i grubości t , zorientowana jest w walcowym układzie współrzędnych $x \varphi z'$, (Rys. 2.1).



Rys. 2.1. Model cylindrycznej powłoki walcowej

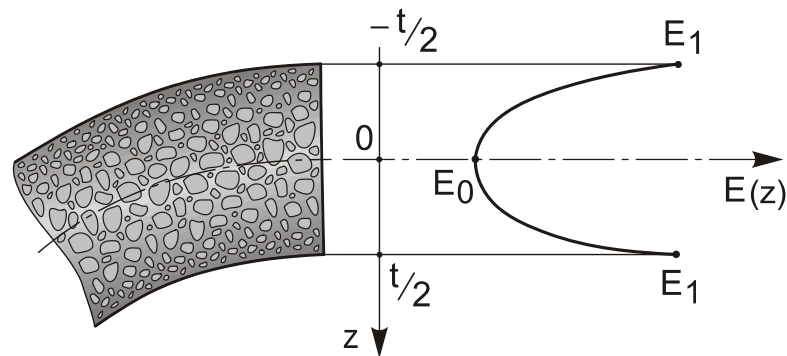
Powłoka obciążona jest ciśnieniem zewnętrznym i ściskana wzdłuż tworzących siłami rozłożonymi równomiernie na brzegach krzywoliniowych (Rys. 2.2). Obciążenie zewnętrzne jest zmienne w czasie i nie zależy od współrzędnych $x \varphi z'$.



Rys. 2.2. Obciążenie zewnętrzne powłoki

2.2. Model fizyczny materiału porowatego

Porowatość materiału jest zmienna po grubości powłoki, przy czym powierzchnie zewnętrzne mają strukturę jednorodną. Właściwości mechaniczne i fizyczne powłoki są zmienne i zależą od porowatości materiału. Zmiana modułów sprężystości i gęstości jest ciągła i symetryczna względem powierzchni środkowej powłoki (Rys. 2.3). Minimalna wartość modułu Younga występuje na powierzchni środkowej ($z=0$; $z'=r$), natomiast maksymalna na powierzchniach zewnętrznych powłoki.



Rys. 2.3. Schemat zmiany właściwości powłoki na grubości

Funkcje opisujące zmianę modułów sprężystości tak zdefiniowanego materiału porowatego przedstawił Magnucki i Stasiewicz [45, 46] oraz dla powłoki walcowej Malinowski i Magnucki [47, 48].

$$E(\zeta) = E_1 [1 - e_0 \cos(\pi \zeta)], \quad (2.1)$$

$$G(\zeta) = G_1 [1 - e_0 \cos(\pi \zeta)], \quad (2.2)$$

gdzie:

$$e_0 = 1 - \frac{E_0}{E_1} = 1 - \frac{G_0}{G_1} \quad \text{– bezwymiarowy parametr porowatości, } 0 \leq e_0 < 1,$$

$$E_0, G_0, E_1, G_1 \quad \text{– moduły sprężystości odpowiednio dla } \zeta = 0 \text{ i } \zeta = \pm 1/2,$$

$$G_i = \frac{E_i}{2(1+\nu)} \quad \text{– moduł sprężystości postaciowej, } i = 0, 1$$

$$\zeta = \frac{z}{t} \quad \text{– bezwymiarowa współrzędna,}$$

$$\nu \quad \text{– liczba Poissona.}$$

W przypadku, kiedy parametr porowatości $e_0 = 0$ występuje struktura jednorodna natomiast dla $0 < e_0 < 1$ struktura porowata.

Zależność pomiędzy modułem Younga i gęstością materiału porowatego przedstawił Gibson i Ashby [25] w postaci: $E_0/E_1 = (\rho_0/\rho_1)^2$. Własności mechaniczne materiałów porowatych były również przedmiotem pracy Choi i Lakes'a [19]. Uwzględniając wyniki tych prac, model gęstości materiału został zapisany w postaci:

$$\rho(\zeta) = \rho_1 [1 - e_m \cos(\pi\zeta)], \quad (2.3)$$

gdzie:

ρ_0, ρ_1 – gęstość materiału odpowiednio dla $\zeta = 0$ i $\zeta = \pm 1/2$,

$e_m = 1 - \sqrt{1 - e_0}$ – bezwymiarowy parametr gęstości.

Przyjęto, że po utracie stateczności powłoka odkształca się w zakresie sprężystym. W związku z tym naprężenia normalne i styczne określić można za pomocą liniowych zależności, zgodnie z prawem Hooke'a:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E(\zeta)}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \cdot \varepsilon_\varphi), \\ \sigma_\varphi &= \frac{E(\zeta)}{1-\nu^2} (\varepsilon_\varphi + \nu \cdot \varepsilon_x), \\ \tau_{x\varphi} &= G(\zeta) \gamma_{x\varphi} = \frac{E(\zeta)}{2(1+\nu)} \gamma_{x\varphi}, \\ \tau_{xz} &= G(\zeta) \gamma_{xz} = \frac{E(\zeta)}{2(1+\nu)} \gamma_{xz}, \\ \tau_{\varphi z} &= G(\zeta) \gamma_{\varphi z} = \frac{E(\zeta)}{2(1+\nu)} \gamma_{\varphi z}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

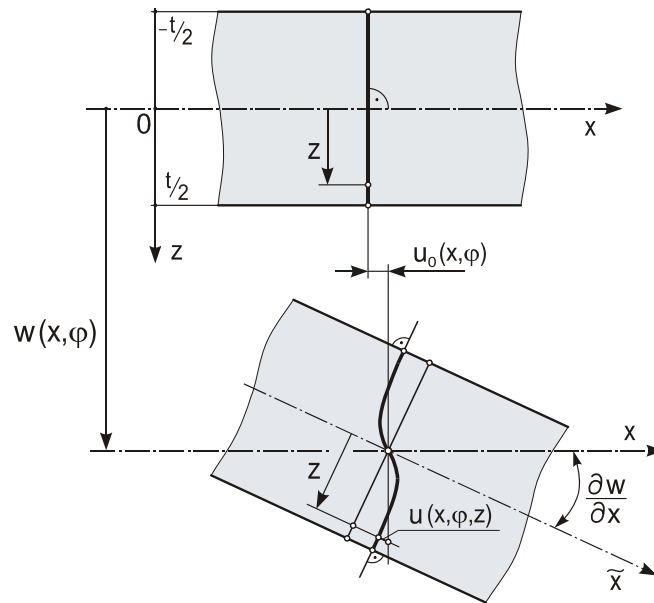
gdzie:

E – moduł sprężystości podłużnej, moduł Younga,

G – moduł sprężystości postaciowej.

2.3. Model geometryczny powłoki

Pole przemieszczeń w klasycznej teorii płyt i powłok (teoria Kirchhoffa-Love'a) definiowane jest na podstawie hipotezy płaskich przekrojów mówiącej, że przekrój płaski przed odkształceniem pozostaje także płaski po odkształceniu. W pracy, do opisu pola przemieszczeń, przyjęto nieliniową hipotezę odkształcenia płaskiego przekroju poprzecznego powłoki [43, 46, 47]. Uwzględnia ona efekt ścinania w przekroju poprzecznym. Graficzną ilustrację przemieszczeń przedstawiono na rysunku 2.4.



Rys. 2.4. Schemat przemieszczeń w przekroju poprzecznym ścianki powłoki

Hipoteza ta jest uogólnieniem znanej hipotezy płaskich przekrojów (Kirchhoffa-Love'a), a także udoskonaleniem hipotezy linii łamanej dla konstrukcji wielowarstwowej (*zig-zag hypotheses*), szczegółowo opisanej przez Carrera [16, 17].

Składowe przemieszczenia wyrażone zostały za pomocą związków:

$$u(x, \varphi, z) = u_0(x, \varphi) - t \left[\zeta \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{1}{\pi} \psi(x, \varphi) \sin(\pi \zeta) \right], \quad (2.5)$$

$$v(x, \varphi, z) = v_0(x, \varphi) - t \left[\zeta \frac{\partial w}{r \partial \varphi} - \frac{1}{\pi} \phi(x, \varphi) \sin(\pi \zeta) \right], \quad (2.6)$$

$$w(x, \varphi, z) = w(x, \varphi, 0) = w(x, \varphi), \quad (2.7)$$

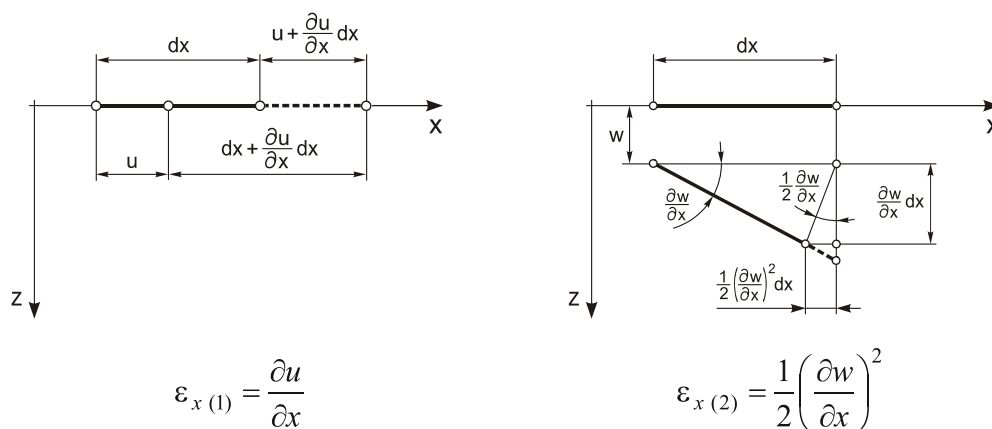
gdzie:

- $u_0(x, \varphi), v_0(x, \varphi)$ – przemieszczenia styczne dowolnego punktu powierzchni środkowej,
 $\psi(x, \varphi), \phi(x, \varphi)$ – bezwymiarowe funkcje przemieszczeń,
 $w(x, \varphi)$ – ugięcie powłoki.

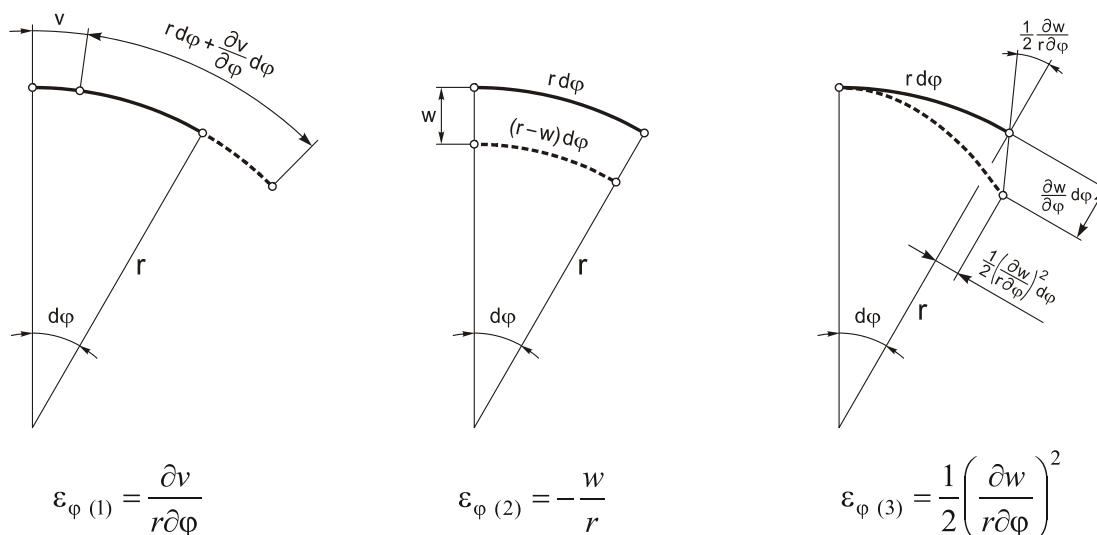
Należy zwrócić uwagę na to, że w zagadnieniu dynamicznym powyższe związki są również zależne od czasu – są funkcjami czasu.

Badając stateczność powłoki, przyjmuje się geometrycznie liniowe lub nieliniowe związki pomiędzy przemieszczeniem i odkształceniem. Przyjmując liniowe związki bada się stateczność powłoki w zakresie dokrytycznym. Wyznaczyć tutaj można tzw. górne obciążenie krytyczne powłoki. Bardziej złożonym zagadnieniem jest nieliniowa analiza stateczności powłok, uwzględniająca skończone przemieszczenia. Możliwe jest tutaj badanie zależności pomiędzy obciążeniem i ugięciem powłoki, a tym samym wyznaczenie ścieżek równowagi oraz dolnego obciążenia krytycznego. W zakresie dynamicznym można badać odpowiedź układu w zależności od charakteru i prędkości obciążenia zewnętrznego.

W pracy uwzględnia się odkształcenie powłoki przy skończonych przemieszczeniach. Na poniższych rysunkach przedstawiono schematycznie przemieszczenia elementarnego wycinka powłoki. Na rysunku 2.5 przedstawiono odkształcenia ε_x elementu o długości dx , powstałe w wyniku jego przemieszczenia wzdłuż osi x oraz obrotu o kąt $\partial w / \partial x$. Analogicznie, na rysunku 2.6 przedstawiono odkształcenia ε_φ elementu o długości $rd\varphi$ przy czym, uwzględniony jest tutaj jeszcze jeden składnik wynikający z ugięcia powłoki o wielkość w . Podobnie określić można kąt odkształcenia postaciowego.



Rys. 2.5. Odkształcenie ε_x elementu o długości dx

Rys. 2.6. Odkształcenie ε_{φ} elementu o długości $rd\varphi$

Należy zwrócić uwagę, że odkształcenia wynikające z obrotu elementu powłoki są określone w sposób przybliżony. Ich dokładność będzie malała wraz ze wzrostem kąta obrotu, wynikającego z ugięcia powłoki.

Składowe pola odkształceń przedstawić można w następującej postaci:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2,$$

$$\varepsilon_{\varphi} = \frac{\partial v}{r \partial \varphi} - \frac{w}{r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{r \partial \varphi} \right)^2,$$

$$\gamma_{x\varphi} = \frac{\partial u}{r \partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{r \partial \varphi}, \quad (2.8)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\gamma_{\varphi z} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{r \partial \varphi},$$

gdzie:

$\varepsilon_x, \varepsilon_{\varphi}$ – wydłużenia względne w odpowiednich kierunkach,
 $\gamma_{x\varphi}, \gamma_{xz}, \gamma_{z\varphi}$ – kąty odkształcenia postaciowego w odpowiednich płaszczyznach.

W pracy przyjęto także następujące założenia:

- powłoka jest cienkościenna i spełnia warunek $(r/t) \geq 20 \div 30$,
- materiał powłoki jest izotropowy,
- powłoka jest podparta przegubowo - przesuwnie na obu brzegach krzywoliniowych,
- kształt powłoki jest idealny.

3. Równania dynamiczne stateczności

Równania różniczkowe ruchu powłoki walcowej o strukturze porowatej wyprowadzone zostaną z zasady wariacyjnej Hamiltona [6, 27, 53]. Zgodnie z tą zasadą rzeczywisty ruch układu punktów materialnych następuje w ten sposób, że dla każdego przedziału czasowego (τ_0, τ_1) wariacja całki działania jest równa zeru przy dowolnych wariacjach δq_i spełniających warunek: $\delta q_i(\tau_0) = \delta q_i(\tau_1) = 0$.

$$\delta \int_{\tau_0}^{\tau_1} (T_k - U_\varepsilon + W) d\tau = 0, \quad (3.1)$$

gdzie:

T_k – energia kinetyczna,

U_ε – energia potencjalna odkształcenia sprężystego,

W – praca obciążenia zewnętrznego,

q_i – niezależne od siebie składowe stanu przemieszczenia.

W pierwszej kolejności wyznaczona zostanie energia potencjalna odkształcenia sprężystego

$$U_\varepsilon = \frac{t}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-1/2}^{1/2} [\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_\varphi \varepsilon_\varphi + \tau_{x\varphi} \gamma_{x\varphi} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{\varphi z} \gamma_{\varphi z}] r dx d\varphi d\zeta. \quad (3.2)$$

Po wprowadzeniu związków (2.5 – 2.7) do (2.8) składowe pola odkształceń przyjmą postać

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_0}{\partial x} - t \left[\zeta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{\pi} \frac{\partial \psi}{\partial x} \sin(\pi \zeta) \right] + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{\partial v_0}{r \partial \varphi} - t \left[\zeta \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \varphi^2} - \frac{1}{\pi} \frac{\partial \phi}{r \partial \varphi} \sin(\pi \zeta) \right] - \frac{w}{r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{r \partial \varphi} \right)^2, \\ \gamma_{x\varphi} &= \frac{\partial u_0}{r \partial \varphi} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - t \left[2\zeta \frac{\partial^2 w}{r \partial x \partial \varphi} - \frac{1}{\pi} \left(\frac{\partial \psi}{r \partial \varphi} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \sin(\pi \zeta) \right] + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{r \partial \varphi}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\gamma_{xz} = \psi \cos(\pi \zeta),$$

$$\gamma_{\varphi z} = \phi \cos(\pi \zeta).$$

Otrzymane równanie zostało scałkowane po grubości powłoki w granicach $-1/2 \leq \zeta \leq 1/2$, (Załącznik 1). Wyrażenie określające energię odkształcenia sprężystego przyjmie postać

$$\begin{aligned}
U_\varepsilon = & \frac{E_1 t}{2(1-\nu^2)} \int_0^L \int_0^{2\pi} \left\{ C_0 \left\{ \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{r \partial \varphi} \right)^2 \right]^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_0}{r \partial \varphi} \right] + \left(\frac{\partial w}{r \partial \varphi} \right)^2 \left[\frac{\partial v_0}{r \partial \varphi} + \right. \right. \right. \\
& + \nu \left. \left. \frac{\partial u_0}{\partial x} \right] + \frac{w}{r} \left[\frac{w}{r} - \nu \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial w}{r \partial \varphi} \right)^2 - 2\nu \frac{\partial u_0}{\partial x} - 2 \frac{\partial v_0}{r \partial \varphi} \right] + (1-\nu) \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{r \partial \varphi} \left[\frac{\partial u_0}{r \partial \varphi} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right] + \right. \\
& + 2\nu \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{r \partial \varphi} + \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{r \partial \varphi} \right)^2 + \frac{(1-\nu)}{2} \left[\frac{\partial u_0}{r \partial \varphi} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right]^2 \left. \right\} + C_1 t^2 \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \varphi^2} \right)^2 + \right. \\
& + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \varphi^2} + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{r \partial x \partial \varphi} \right)^2 \left. \right\} - 2 C_2 t^2 \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left[\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \nu \frac{\partial \phi_1}{r \partial \varphi} \right] + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \varphi^2} \left[\nu \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{\partial \phi_1}{r \partial \varphi} \right] + (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{r \partial x \partial \varphi} \left[\frac{\partial \psi_1}{r \partial \varphi} + \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right] \right\} + C_3 t^2 \left\{ \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_1}{r \partial \varphi} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial \phi_1}{r \partial \varphi} + \right. \\
& + \left. \frac{1}{2} (1-\nu) \left[\frac{\partial \psi_1}{r \partial \varphi} + \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right]^2 \right\} + C_4 \left\{ \frac{1}{2} (1-\nu) [\psi_1^2 + \phi_1^2] \right\} \left. \right\} r dx d\varphi, \quad (3.6)
\end{aligned}$$

gdzie:

$$C_0 = 1 - \frac{2}{\pi} e_0, \quad C_1 = \frac{1}{12} - \frac{\pi^2 - 8}{2\pi^3} e_0, \quad C_2 = \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{e_0}{4} \right), \quad C_3 = \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{2e_0}{3\pi} \right), \quad C_4 = \frac{1}{2} - \frac{4e_0}{3\pi}.$$

Równanie (3.6) zostanie przekształcone zgodnie z zasadami rachunku wariacyjnego. W pierwszej kolejności wyznaczono wariację energii odkształcenia sprężystego a następnie scałkowano przez części względem odpowiednich zmiennych. Powyższe przekształcenia po uporządkowaniu zamieszczono w załączniku 2.

Praca sił zewnętrznych definiowana jest w zależności od obciążenia powłoki. W przypadku powłoki obciążonej ciśnieniem zewnętrznym p , równomiernie rozłożonym na powierzchni bocznej, praca obciążenia zewnętrznego wynosi

$$W = \int_0^L \int_0^{2\pi} p w r dx d\varphi. \quad (3.7)$$

Obciążenie brzegów powłoki siłami ściskającymi wprowadza się przez uwzględnienie warunków brzegowych.

Wariacja pracy obciążenia zewnętrznego

$$\delta W = \int_0^L \int_0^{2\pi} p \delta w r dx d\varphi. \quad (3.8)$$

Energię kinetyczną powłoki przedstawia się w następującej postaci

$$T_k = \frac{t}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-1/2}^{1/2} \rho(\zeta) \left[\left(\frac{du}{d\tau} \right)^2 + \left(\frac{dv}{d\tau} \right)^2 + \left(\frac{dw}{d\tau} \right)^2 \right] r d\varphi dx d\zeta. \quad (3.9)$$

gdzie:

u, v, w – składowe przemieszczenia punktu powłoki w kierunkach osi $x \varphi z$,
 $\rho(\zeta)$ – gęstość materiału.

W zagadnieniu stateczności siły bezwładności w kierunku normalnym do powierzchni powłoki są znacznie większe od pozostałych składowych. Przyjmując powyższe założenie, energię kinetyczną rozważanej powłoki zapiszemy w postaci uproszczonej

$$T_k = \frac{t}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-1/2}^{1/2} \rho(\zeta) \left(\frac{dw}{d\tau} \right)^2 r d\varphi dx d\zeta. \quad (3.10)$$

Powyższe równanie, z uwzględnieniem zależności (2.3), scałkowano po grubości powłoki

$$T_k = \frac{1}{2} C_5 \rho_1 t \int_0^L \int_0^{2\pi} \left(\frac{dw}{d\tau} \right)^2 r d\varphi dx, \quad (3.11)$$

gdzie: $C_5 = 1 - \frac{2}{\pi} e_m$.

Po obliczeniu wariacji oraz całkowaniu przez części otrzymanego wyrażenia, wariacja energii kinetycznej ostatecznie przyjmie postać

$$\delta T_k = -C_5 \rho_1 t \int_0^L \int_0^{2\pi} \frac{d^2 w}{d\tau^2} (\delta w) r dx d\varphi. \quad (3.12)$$

Otrzymane wyrażenia wariacji: energii odkształcenia sprężystego (Załącznik 2), pracy sił zewnętrznych (3.8) oraz energii kinetycznej (3.12), wprowadzono do równania (3.1), wynikającego z zasady Hamiltona. Następnie, wykorzystując podstawową zasadę rachunku wariacyjnego, wyznaczono zespół równań różniczkowych ruchu oraz warunków brzegowych powłoki. Równania ruchu otrzymano, po przyrównaniu do zera wyrażen wariacji tej samej funkcji (δu_0 , δv_0 , δw , $\delta \psi$, $\delta \phi$) i obowiązujących na całej powierzchni powłoki (występujących pod znakiem całki powierzchniowej). Zespół warunków brzegowych można otrzymać po przyrównaniu do zera wariacji δu_0 , δv_0 , δw , $\delta \psi$, $\delta \phi$, $\delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)$, $\delta \left(\frac{\partial w}{r \partial \varphi} \right)$ dotyczących brzegu powłoki (występujących pod znakiem całki pojedynczej).

Zgodnie z powyższym, równania dynamiczne stateczności mają postać:

δu_0)

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u_0}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{1+\nu}{2} \left[\frac{\partial w}{r \partial \varphi} \frac{\partial^2 w}{r \partial x \partial \varphi} + \frac{\partial^2 v_0}{r \partial x \partial \varphi} \right] + \frac{\partial w}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \varphi^2} - \frac{\nu}{r} \right] = 0, \quad (3.13)$$

δv_0)

$$\frac{\partial^2 v_0}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \left[\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{r \partial x \partial \varphi} + \frac{\partial^2 u_0}{r \partial x \partial \varphi} \right] + \frac{\partial w}{r \partial \varphi} \left[\frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{r} \right] = 0, \quad (3.14)$$

$\delta \psi$)

$$C_2 \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) - C_3 \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \phi}{r \partial x \partial \varphi} \right] + C_4 \frac{1-\nu}{2t^2} \psi = 0, \quad (3.15)$$

$\delta \phi$)

$$C_2 \frac{\partial}{r \partial \varphi} (\nabla^2 w) - C_3 \left[\frac{\partial^2 \phi}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi}{r \partial x \partial \varphi} \right] + C_4 \frac{1-\nu}{2t^2} \phi = 0, \quad (3.16)$$

δw)

$$\begin{aligned}
& \frac{E_1 t}{(1-\nu^2)} \left\{ C_0 \left\{ -\frac{\partial w}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 u_0}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 v_0}{r \partial x \partial \varphi} \right] - \frac{\partial w}{r \partial \varphi} \left[\frac{\partial^2 v_0}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 u_0}{r \partial x \partial \varphi} \right] - \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \left[\frac{3}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \varphi^2} - \frac{1}{2} \frac{\nu}{r} \right] - \left(\frac{\partial w}{r \partial \varphi} \right)^2 \left[\frac{3}{2} \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{r} \right] + \right. \\
& \left. + \frac{1}{r} w \left[\frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \varphi^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \right] - 2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{r \partial x \partial \varphi} \frac{\partial w}{r \partial \varphi} - \frac{\partial u_0}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{\nu}{r} \right] - \right. \\
& \left. - \frac{\partial v_0}{r \partial \varphi} \left[\frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \varphi^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \right] - (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{r \partial x \partial \varphi} \left[\frac{\partial u_0}{r \partial \varphi} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right] \right\} + C_1 t^2 \{ \nabla^4 w \} - \\
& - C_2 t^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \psi) + \frac{\partial}{r \partial \varphi} (\nabla^2 \phi) \right\} = p - C_5 \rho_1 t \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}, \tag{3.17}
\end{aligned}$$

gdzie: $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{r \partial \varphi^2}$, $\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{r^2 \partial x^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^4}{r^4 \partial \varphi^4}$.

Z równania (3.13) oraz (3.14) wyznaczono

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u_0}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v_0}{r \partial x \partial \varphi} = \frac{\partial w}{\partial x} \left[\frac{\nu}{r} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \varphi^2} \right] - \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial w}{r \partial \varphi} \frac{\partial^2 w}{r \partial x \partial \varphi}, \tag{3.18}$$

$$\frac{\partial^2 v_0}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u_0}{r \partial x \partial \varphi} = \frac{\partial w}{r \partial \varphi} \left[\frac{1}{r} - \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \varphi^2} - \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] - \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{r \partial x \partial \varphi}. \tag{3.19}$$

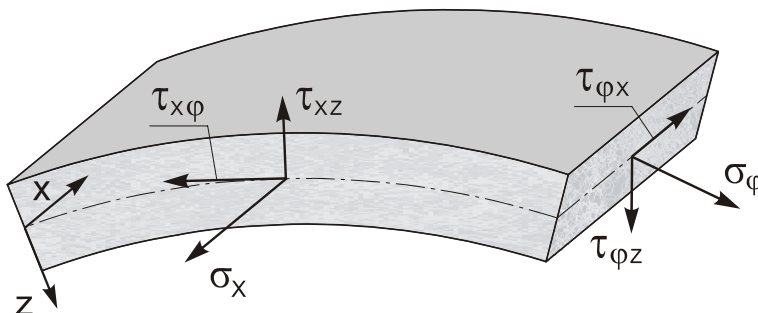
Podstawiając powyższe wyrażenia do równania (3.17), po przekształceniach otrzymano

$$\begin{aligned}
& \frac{E_1 t}{(1-\nu^2)} \left\{ C_0 \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{\nu}{r} \right] - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{r \partial \varphi} \right)^2 \left[\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \right] + \right. \\
& \left. + \frac{w}{r} \left[\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \varphi^2} \right] - (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{r \partial x \partial \varphi} \left[\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{r \partial \varphi} + \frac{\partial u_0}{r \partial \varphi} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right] - \frac{\partial u_0}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \varphi^2} \right] - \right. \\
& \left. - \frac{\partial v_0}{r \partial \varphi} \left[\frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \varphi^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] + \frac{1}{r} \left[\frac{w}{r} - \frac{\partial v_0}{r \partial \varphi} - \nu \frac{\partial u_0}{\partial x} \right] \right\} + C_1 t^2 \{ \nabla^4 w \} - \\
& - C_2 t^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \psi) + \frac{\partial}{r \partial \varphi} (\nabla^2 \phi) \right\} = p - C_5 \rho_1 t \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}. \tag{3.20}
\end{aligned}$$

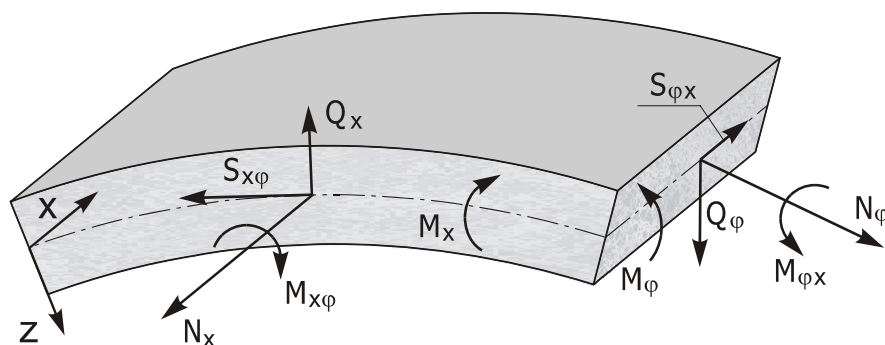
Równania (3.13) i (3.14) odpowiadają równaniom rzutów sił na kierunki osi x i φ . Równania (3.15) oraz (3.16) wynikają z przyjętych założeń modelu powłoki. Równanie (3.20) jest równaniem rzutu sił na oś z .

4. Siły i momenty wewnętrzne

Otrzymane równania ruchu zostaną odpowiednio przekształcone do układu trzech równań różniczkowych, zwanych równaniami podstawowymi. W tym celu zdefiniowano naprężenia oraz siły wewnętrzne występujące w powłoce.



Rys. 4.1. Rozkład naprężeń w powłoce walcowej



Rys. 4.2. Siły wewnętrzne w powłoce walcowej

Siły normalne N_x , N_φ oraz styczne $S_{x\varphi}$, działające w przekrojach $x = const$ i $\varphi = const$ rozważanej powłoki, przedstawiają następujące wyrażenia

$$N_x = t \int_{-1/2}^{1/2} \sigma_x d\zeta = t \int_{-1/2}^{1/2} \frac{E(\zeta)}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_\varphi) d\zeta ,$$

$$N_\varphi = t \int_{-1/2}^{1/2} \sigma_\varphi d\zeta = t \int_{-1/2}^{1/2} \frac{E(\zeta)}{1-\nu^2} (\varepsilon_\varphi + \nu \varepsilon_x) d\zeta , \quad (4.1)$$

$$S_{x\varphi} = t \int_{-1/2}^{1/2} \tau_{x\varphi} d\zeta = t \int_{-1/2}^{1/2} \frac{E(\zeta)}{2(1+\nu)} \gamma_{x\varphi} d\zeta .$$

Podstawiając składowe pola odkształceń (3.3) oraz funkcje (1.1) i (1.2) do zależności (4.1), oraz wykonaniu całkowania po grubości powłoki, otrzymano:

$$\begin{aligned}
 N_x &= \frac{C_0 E_1 t}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_0}{r \partial \varphi} - \nu \frac{w}{r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial w}{r \partial \varphi} \right)^2 \right], \\
 N_\varphi &= \frac{C_0 E_1 t}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial v_0}{r \partial \varphi} + \nu \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{w}{r} + \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{r \partial \varphi} \right)^2 \right], \\
 S_{x\varphi} &= \frac{C_0 E_1 t}{2(1+\nu)} \left[\frac{\partial u_0}{r \partial \varphi} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{r \partial \varphi} \right].
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Analogicznie wyznaczono momenty gnące M_x i M_φ oraz moment skręcający $M_{x\varphi}$, działające w przekrojach $x = const$ i $\varphi = const$ powłoki, (Załącznik 3).

W pierwszej kolejności przekształcono równanie (3.20). W tym celu wprowadzono do równania wyrażenia (4.2). Po przekształceniach otrzymano

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} N_x - \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \varphi^2} N_\varphi - 2 \frac{\partial^2 w}{r \partial x \partial \varphi} S_{x\varphi} - \frac{1}{r} N_\varphi + \frac{C_1 E_1 t^3}{1-\nu^2} \{ \nabla^4 w \} - \\
 & - \frac{C_2 E_1 t^2}{1-\nu^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \psi) + \frac{\partial}{r \partial \varphi} (\nabla^2 \phi) \right\} = p - C_5 \rho_1 t \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}.
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Następnie wprowadzono funkcję sił oraz funkcję przemieszczeń. Siły normalne oraz styczne wyrażone za pomocą funkcji sił przyjmą postać

$$N_x = \frac{\partial^2 F}{r^2 \partial \varphi^2}, \quad N_\varphi = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad S_{x\varphi} = -\frac{\partial^2 F}{r \partial x \partial \varphi}. \tag{4.4}$$

Funkcja przemieszczeń $\Phi(x, \varphi)$ jest określona następującymi związkami

$$\psi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \phi = \frac{\partial \Phi}{r \partial \varphi}. \tag{4.5}$$

Po odpowiednich przekształceniach z wykorzystaniem powyższych związków równanie (4.3) przyjmie postać:

$$-L(w, F) - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{E_1 t^3}{(1-\nu^2)} [C_1 (\nabla^4 w) - C_2 (\nabla^4 \Phi)] = p - C_5 \rho_1 t \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}. \quad (4.6)$$

gdzie:

$$L(w, F) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F}{r^2 \partial \varphi^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{r \partial x \partial \varphi} \frac{\partial^2 F}{r \partial x \partial \varphi} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \varphi^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \text{operator nieliniowy}$$

Równania (3.15) i (3.16) zostaną po przekształceniu sprowadzone do jednego równania różniczkowego. Wprowadzając do tych równań funkcję przemieszczeń $\Phi(x, \varphi)$ otrzymano:

$$C_2 \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) - C_3 \left[\frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \Phi}{r^2 \partial x \partial \varphi^2} \right] + C_4 \frac{1-\nu}{2t^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \quad (4.7)$$

$$C_2 \frac{\partial}{r \partial \varphi} (\nabla^2 w) - C_3 \left[\frac{\partial^3 \Phi}{r^3 \partial \varphi^3} + \frac{\partial^3 \Phi}{r \partial x^2 \partial \varphi} \right] + C_4 \frac{1-\nu}{2t^2} \frac{\partial \Phi}{r \partial \varphi} = 0. \quad (4.8)$$

Jeżeli zależność (4.7) zróżniczkujemy względem φ oraz (4.8) względem x otrzymamy dwa identyczne równania. Różniczkując równanie (4.7) względem x oraz równanie (4.8) względem φ otrzymano:

$$C_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\nabla^2 w) - C_3 \left[\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \Phi}{r^2 \partial x^2 \partial \varphi^2} \right] + C_4 \frac{1-\nu}{2t^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0, \quad (4.9)$$

$$C_2 \frac{\partial^2}{r^2 \partial \varphi^2} (\nabla^2 w) - C_3 \left[\frac{\partial^4 \Phi}{r^4 \partial \varphi^4} + \frac{\partial^4 \Phi}{r^2 \partial x^2 \partial \varphi^2} \right] + C_4 \frac{1-\nu}{2t^2} \frac{\partial^2 \Phi}{r^2 \partial \varphi^2} = 0. \quad (4.10)$$

Po przyrównaniu powyższych równań ostatecznie otrzymano jedno równanie różniczkowe

$$C_2 \nabla^4 w - C_3 \nabla^4 \Phi + C_4 \frac{1-\nu}{2t^2} \nabla^2 \Phi = 0. \quad (4.11)$$

Wyrażenia (4.2), po zróżniczkowaniu względem x oraz φ , wprowadzono w miejsce takich samych składowych do równań (3.13) i (3.14). Przedstawiając siły normalne oraz styczne za pomocą funkcji sił, otrzymano:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial S_{x\varphi}}{r\partial\varphi} = \frac{\partial^3 F}{r^2\partial x\partial\varphi^2} - \frac{\partial^3 F}{r^2\partial x\partial\varphi^2} = 0, \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial N_\varphi}{r\partial\varphi} + \frac{\partial S_{x\varphi}}{\partial x} = \frac{\partial^3 F}{r\partial x^2\partial\varphi} - \frac{\partial^3 F}{r\partial x^2\partial\varphi} = 0. \quad (4.13)$$

Wprowadzenie funkcji sił spowodowało że równania (3.13) i (3.14) są spełnione tożsamościowo.

Wprowadzenie funkcji przemieszczeń umożliwiło sprowadzenie dwóch równań (3.15) i (3.16) do jednego równania różniczkowego. Wprowadzenie funkcji sił wyeliminowało dwa równania (3.13) i (3.14) oraz dwie niewiadome u_0 i v_0 . Z układu pięciu równań ruchu otrzymano dwa równania z trzema niewiadomymi: F , Φ oraz w . W związku z tym, uzyskany układ równań musi być uzupełniony o jeszcze jedno – znane w teorii sprężystości równanie ciągłości odkształceń

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{r^2\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_\varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{x\varphi}}{r\partial x\partial\varphi} = \left(\frac{\partial^2 w}{r\partial x\partial\varphi} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(\frac{1}{r} + \frac{\partial^2 w}{r^2\partial\varphi^2} \right). \quad (4.14)$$

Składowe odkształceń wyrażone przez odpowiednie kombinacje sił wewnętrznych

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_\varphi) = \frac{1}{C_0 E_1 t} (N_x - \nu N_\varphi), \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{E} (\sigma_\varphi - \nu \sigma_x) = \frac{1}{C_0 E_1 t} (N_\varphi - \nu N_x), \\ \gamma_{x\varphi} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{x\varphi} = \frac{2(1+\nu)}{C_0 E_1 t} S_{x\varphi}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Wprowadzając powyższe związki do równania (4.14) z uwzględnieniem wyrażen (4.4), otrzymano po przekształceniach równanie ciągłości odkształceń w postaci

$$\frac{1}{C_0 E_1 t} \nabla^4(F) = -\frac{1}{2} L(w, w) - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (4.16)$$

gdzie: $L(w, w) = 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{r^2\partial\varphi^2} - 2 \left(\frac{\partial^2 w}{r\partial x\partial\varphi} \right)^2$.

Podsumowując powyższe działania, otrzymano układ trzech różniczkowych równań ruchu (równania podstawowe) porowatej powłoki walcowej. Równania te można zapisać w następującej kolejności:

- równanie ruchu

$$\frac{E_1 t^3}{(1-\nu^2)} \left[C_1 (\nabla^4 w) - C_2 (\nabla^4 \Phi) \right] = L(w, F) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + p - C_5 \rho_1 t \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}, \quad (4.6)$$

- równanie zgodności przemieszczeń

$$C_2 \nabla^4 w - C_3 \nabla^4 \Phi + C_4 \frac{1-\nu}{2t^2} \nabla^2 \Phi = 0, \quad (4.11)$$

- równanie ciągłości odkształceń:

$$\frac{1}{C_0 E_1 t} \nabla^4 (F) = -\frac{1}{2} L(w, w) - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (4.16)$$

Zgodnie z zasadą Hamiltona, oprócz przedstawionych powyżej równań różniczkowych ruchu, otrzymano również wszystkie możliwe warunki brzegowe. Warunki te zależą od sposobu podparcia oraz obciążenia brzegów powłoki. Zgodnie z przyjętymi założeniami, dla powłoki swobodnie podpartej na krawędziach zewnętrznych ($x=0$ oraz $x=L$), warunki brzegowe mają postać

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 F}{r^2 \partial \varphi^2} \right)_{x=0; x=L} &= N_x^0, \\ (M_x)_{x=0; x=L} &= 0, \\ (w)_{x=0; x=L} &= 0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Obciążenie brzegów powłoki siłami ściskającymi N_x^0 wprowadza się uwzględniając powyższe warunki brzegowe.

5. Rozwiązanie układu równań

Podczas utraty stateczności powierzchnia powłoki ulega pofalowaniu. Ponieważ otrzymany układ geometrycznie nieliniowych równań różniczkowych jest niefalowy, należy założyć jakąś postać wybożenia powłoki z nieokreślonymi parametrami, zależnymi od czasu. Tym samym układ równań różniczkowych cząstkowych zostanie sprowadzony do układu równań różniczkowych zwyczajnych.

W celu rozwiązania otrzymanego układu trzech różniczkowych równań ruchu porowatej powłoki walcowej, przyjęto funkcje aproksymujące ugięcie i przemieszczenie w następującej postaci

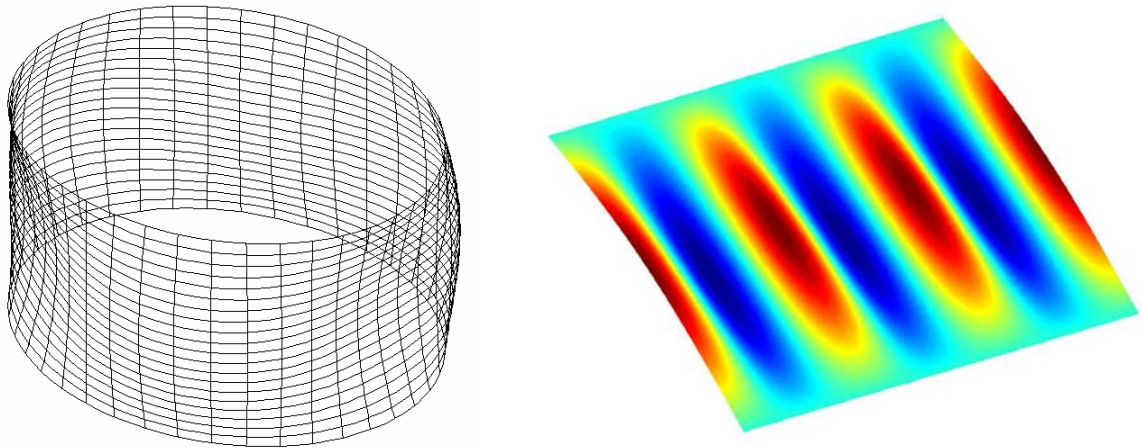
$$w(x, \varphi, \tau) = w_1(\tau) \sin \frac{m\pi x}{L} \cos n\varphi + 2w_2(\tau) \sin^2 \frac{m\pi x}{L}, \quad (5.1)$$

$$\Phi(x, \varphi, \tau) = w_1(\tau) \alpha_{\varphi_1} \sin \frac{m\pi x}{L} \cos n\varphi + 2w_2(\tau) \alpha_{\varphi_2} \sin^2 \frac{m\pi x}{L}, \quad (5.2)$$

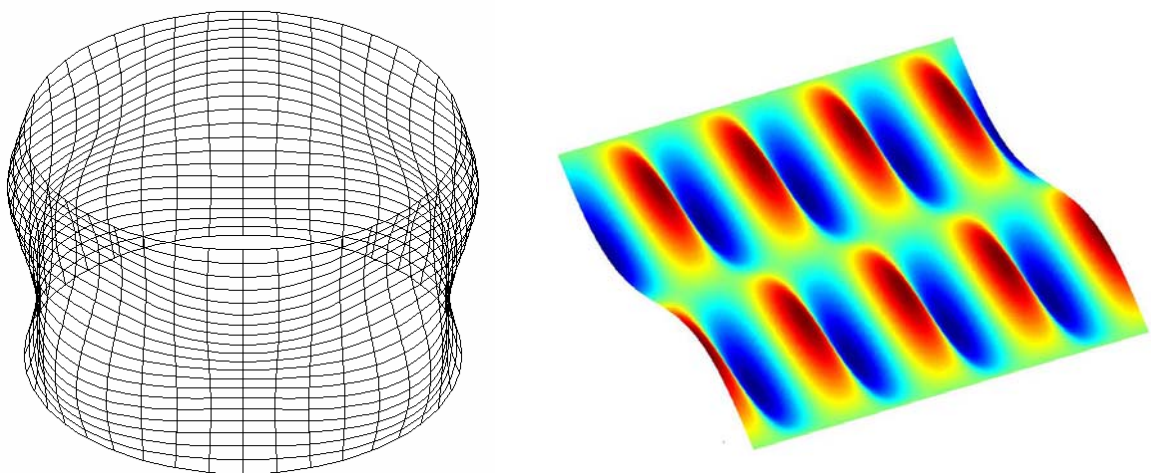
gdzie:

- $w_1(\tau), w_2(\tau)$ – nieznanne parametry funkcji ugięcia,
- m – liczba półfal wzdłuż tworzącej powłoki,
- n – liczba fal po obwodzie powłoki.

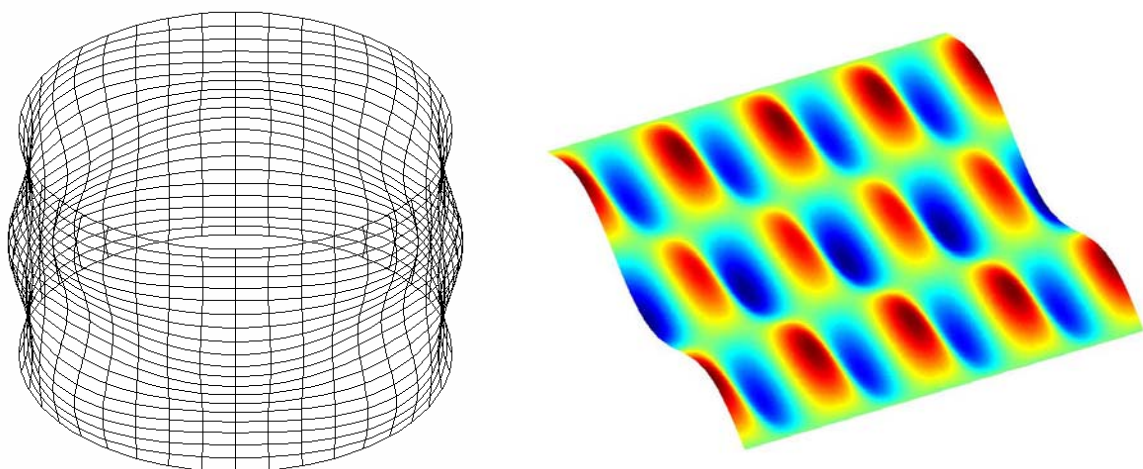
Pierwszy człon funkcji aproksymującej ugięcie określa powstawanie fal wzdłuż tworzącej oraz po obwodzie powłoki, natomiast drugi odpowiada za zmniejszenie promienia powierzchni środkowej powłoki w wyniku jej odkształcenia. Przyjęte funkcje spełniają warunek okresowości oraz zerowania się ugięć na krawędziach zewnętrznych powłoki. Analogiczną postać funkcji aproksymujących przyjął przykładowo Ostwald [44, 52] i Volmir [66]. Na rysunkach 5.1 - 5.3 przedstawiono przykładowe postacie odkształcenia powłoki w zależności od liczby m i n . Ilustrację graficzną ugięcia powłoki wykonano na podstawie funkcji (5.1).



Rys. 5.1. Powierzchnia powłoki przed i po rozwinięciu przy $m=1$ i $n=3$



Rys. 5.2. Powierzchnia powłoki przed i po rozwinięciu przy $m=2$ i $n=4$



Rys. 5.3. Powierzchnia powłoki przed i po rozwinięciu przy $m=3$ i $n=4$

W pierwszej kolejności, z równania nierozdzielności odkształceń, wyznaczono funkcje sił.

Po wprowadzeniu zależności (5.1) do równania (4.16) i przekształceniu otrzymano:

$$\begin{aligned} \nabla^4(F) = C_0 E_1 t \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left\{ \frac{1}{2} w_1^2 \left(\frac{n}{r} \right)^2 \left[\cos \frac{2m\pi x}{L} - \cos 2n\varphi \right] + 2 w_1 w_2 \left(\frac{n}{r} \right)^2 \left[\sin \frac{3m\pi x}{L} \cos n\varphi - \right. \right. \\ \left. \left. - \sin \frac{m\pi x}{L} \cos n\varphi \right] - \frac{4}{r} w_2 \cos \frac{2m\pi x}{L} + \frac{1}{r} w_1 \sin \frac{m\pi x}{L} \cos n\varphi \right\}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Równanie (5.3) jest równaniem różniczkowym cząstkowym liniowym czwartego rzędu. Rozwiązaniem tego równania jest funkcja sił, zależna od parametrów geometrycznych i właściwości sprężystych powłoki, w postaci:

$$\begin{aligned} F = C_0 E_1 t \left\{ w_1^2 \left[\alpha_{f_1} \cos \frac{2m\pi x}{L} - \alpha_{f_2} \cos 2n\varphi \right] + w_1 w_2 \left[\alpha_{f_3} \sin \frac{3m\pi x}{L} - \alpha_{f_4} \sin \frac{m\pi x}{L} \right] \cos n\varphi - \right. \\ \left. - w_2 r \alpha_{f_5} \cos \frac{2m\pi x}{L} + w_1 r \alpha_{f_6} \sin \frac{m\pi x}{L} \cos n\varphi \right\} - \frac{1}{2} N_x^0 r^2 \varphi^2 - \frac{1}{2} N_\varphi^0 x^2, \end{aligned} \quad (5.4)$$

Dwa ostatnie składniki funkcji uwzględniają naprężenia stanu błonowego powłoki, pochodzące od obciążenia zewnętrznego. W równaniu tym poszczególne parametry wynoszą:

$$\begin{aligned} \alpha_{f_1} = \frac{k_1^2}{32}, \quad \alpha_{f_2} = \frac{1}{32k_1^2}, \quad \alpha_{f_3} = \frac{2k_1^2}{(9+k_1^2)^2}, \quad \alpha_{f_4} = \frac{2k_1^2}{(1+k_1^2)^2}, \quad \alpha_{f_5} = \left(\frac{k_1}{2n} \right)^2, \\ \alpha_{f_6} = \frac{\alpha_{f_4}}{2n^2}, \quad k_1 = \frac{n}{m} \frac{L}{\pi r}, \quad N_\varphi^0 = p \cdot r \end{aligned}$$

Z równania zgodności przemieszczeń (4.11) wyznaczone zostaną parametry α_{Φ_1} i α_{Φ_2} .

Wprowadzając do równania zależności (5.1) oraz (5.2) otrzymano po przekształceniu:

$$\begin{aligned} w_1 \left\{ (C_2 - C_3 \alpha_{\Phi_1}) \left[\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{n}{r} \right)^2 \right]^2 - \frac{1-\nu}{2t^2} C_4 \alpha_{\Phi_1} \left[\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{n}{r} \right)^2 \right] \right\} \sin \frac{m\pi x}{L} \cos n\varphi + \\ + w_2 \left\{ (C_2 - C_3 \alpha_{\Phi_2}) \left(\frac{2m\pi}{L} \right)^4 - \frac{1-\nu}{2t^2} C_4 \alpha_{\Phi_2} \left(\frac{2m\pi}{L} \right)^2 \right\} \left(\sin^2 \frac{m\pi x}{L} - \cos^2 \frac{m\pi x}{L} \right) = 0. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Otrzymane równanie rozwiązane zostanie metodą ortogonalizacyjną Bubnowa-Galerkina.

Obliczenia przeprowadzono na podstawie następujących warunków:

$$\int_0^L \int_0^{2\pi} \mathfrak{R}_1 \sin \frac{m\pi x}{L} \cos n\varphi \, r dx d\varphi = 0,$$

$$\int_0^L \int_0^{2\pi} \mathfrak{R}_1 \sin^2 \frac{m\pi x}{L} \, r dx d\varphi = 0, \quad (5.6)$$

gdzie:

\mathfrak{R}_1 – lewa strona równania (5.5).

Po wykonaniu całkowania według powyższych zależności (Załącznik 4) oraz przekształceniu, otrzymano układ dwóch równań algebraicznych

$$C_2 - C_3 \alpha_{\Phi_1} - \frac{1-\nu}{2t^2} C_4 \alpha_{\Phi_1} \frac{1}{\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n}{r}\right)^2} = 0, \quad (5.7)$$

$$4\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 (C_2 - C_3 \alpha_{\Phi_2}) - \frac{1-\nu}{2t^2} C_4 \alpha_{\Phi_2} = 0. \quad (5.8)$$

Z równania (5.7) wyznaczono parametr α_{Φ_1} , natomiast z równania (5.2) parametr α_{Φ_2}

$$\alpha_{\Phi_1} = \frac{C_2}{C_3 + C_4 k_{\Phi_1}}, \quad (5.9)$$

$$\alpha_{\Phi_2} = \frac{C_2}{C_3 + C_4 k_{\Phi_2}}, \quad (5.10)$$

gdzie:

$$k_{\Phi_1} = \frac{1}{2}(1-\nu) \left(\frac{L}{m\pi t}\right)^2 \frac{1}{1+k_1^2}, \quad k_{\Phi_2} = \frac{1}{8}(1-\nu) \left(\frac{L}{m\pi t}\right)^2.$$

W kolejnym kroku rozwiązuje się równanie ruchu. Do równania (4.6) wprowadzono zależności (5.1), (5.2) oraz (5.4). W celu skrócenia zapisu przyjęto tutaj oznaczenia:

$$X = \frac{m\pi x}{L}, \quad Y = n\varphi.$$

$$\begin{aligned}
& \frac{E_1 t^3}{1-\nu^2} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4 \left\{ w_1 (1+k_1^2)^2 (C_1 - C_2 \alpha_{\phi_1}) \sin X \cos Y + 16 w_2 (C_1 - C_2 \alpha_{\phi_2}) (\sin^2 X - \cos^2 X) \right\} + \\
& + \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left[w_1 \sin X \cos Y + 4 w_2 (\sin^2 X - \cos^2 X) \right] \cdot \left\{ C_0 E_1 t \left(\frac{n}{r} \right)^2 \left\{ 4 w_1^2 \alpha_{f_2} (\cos^2 Y - \sin^2 Y) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left[w_1 w_2 (4 \alpha_{f_3} \sin^2 X - 3 \alpha_{f_3} + \alpha_{f_4}) - w_1 r \alpha_{f_6} \right] \sin X \cos Y \right\} + N_x \right\} - \\
& - 2 C_0 E_1 t \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left(\frac{n}{r} \right)^2 \left[w_1^2 w_2 (9 \alpha_{f_3} - 12 \alpha_{f_3} \cos^2 X + \alpha_{f_4}) - w_1^2 r \alpha_{f_6} \right] \cos^2 X \sin^2 Y + \\
& + C_0 E_1 t \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left(\frac{n}{r} \right)^2 \left\{ \left(4 w_1^3 \alpha_{f_1} - 4 w_1 w_2 r \alpha_{f_5} \right) (\sin^3 X \cos Y - \sin X \cos^2 X \cos Y) + \right. \\
& \left. + \left[w_1^2 w_2 (36 \alpha_{f_3} \sin^2 X - 27 \alpha_{f_3} + \alpha_{f_4}) - w_1^2 r \alpha_{f_6} \right] \sin^2 X \cos^2 Y \right\} + w_1 N_\varphi \left(\frac{n}{r} \right)^2 \sin X \cos Y - \\
& - \frac{C_0 E_1 t}{r} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left\{ \left[w_1 w_2 (36 \alpha_{f_3} \sin^2 X - 27 \alpha_{f_3} + \alpha_{f_4}) - w_1 r \alpha_{f_6} \right] \sin X \cos Y + \right. \\
& \quad \left. + \left(4 w_1^2 \alpha_{f_1} - 4 w_2 r \alpha_{f_5} \right) (\sin^2 X - \cos^2 X) \right\} + \\
& + C_5 \rho_1 t \left(\frac{d^2 w_1}{d\tau^2} \sin X \cos Y + 2 \frac{d^2 w_2}{d\tau^2} \sin^2 X \right) = 0, \tag{5.11}
\end{aligned}$$

Otrzymane równanie, analogicznie jak poprzednie, rozwiązane zostanie metodą ortogonalizacyjną Bubnowa-Galerkina. Żądano tutaj spełnienia następujących warunków

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \int_0^{2\pi} \mathfrak{R}_2 \sin \frac{m\pi x}{L} \cos n\varphi \, r dx d\varphi = 0, \\
& \int_0^L \int_0^{2\pi} \mathfrak{R}_2 \sin^2 \frac{m\pi x}{L} \, r dx d\varphi = 0, \tag{5.12}
\end{aligned}$$

gdzie:

\mathfrak{R}_2 – lewa strona równania (5.11).

Po uwzględnieniu wyników całkowania (Załącznik 4) oraz przekształceniu, otrzymano układ dwóch równań

$$C_5 \rho_1 t \left(\frac{L}{m\pi} \right)^2 \frac{d^2 w_1}{d\tau^2} + \left\{ E_1 t \left[C_0 \alpha_{f_6} + \frac{t^2}{1-\nu^2} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 (1+k_1^2)^2 (C_1 - C_2 \alpha_{\Phi_1}) \right] - (N_x + k_1^2 N_\varphi) \right\} w_1 +$$

$$+ 2C_0 E_1 t \left(\frac{n}{r} \right)^2 \left[(\alpha_{f_1} + \alpha_{f_2}) w_1^3 + (\alpha_{f_3} + \alpha_{f_4}) w_1 w_2^2 - r (\alpha_{f_5} + 2\alpha_{f_6}) w_1 w_2 \right] = 0, \quad (5.13)$$

$$C_5 \rho_1 t \left(\frac{L}{m\pi} \right)^2 \frac{d^2 w_2}{d\tau^2} + \frac{4}{3} \left\{ E_1 t \left[C_0 \alpha_{f_5} + 4 \frac{t^2}{1-\nu^2} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 (C_1 - C_2 \alpha_{\Phi_2}) \right] - N_x \right\} w_2 +$$

$$+ \frac{1}{3} C_0 E_1 t \left(\frac{n}{r} \right)^2 \left[(\alpha_{f_3} + \alpha_{f_4}) w_1^2 w_2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} \right)^2 r (8\alpha_{f_1} + \alpha_{f_4}) w_1^2 \right] = 0. \quad (5.14)$$

W pracy przeprowadzona zostanie analiza stateczności powłoki przy obciążeniu złożonym. Występuje tutaj jednoczesne działanie dwóch rodzajów obciążeń: ciśnienie zewnętrzne oraz ściskanie osiowe. Wprowadzono parametr k_0 określający udział poszczególnych obciążeń

$$N_x = k_0 N_0, \quad N_\varphi = (1 - k_0) N_0, \quad (5.15)$$

gdzie:

N_0 – obciążenie powłoki,

k_0 – parametr obciążenia powłoki ($0 \leq k_0 \leq 1$), określający proporcje pomiędzy siłami osiowymi oraz siłami obwodowymi.

W przypadku, gdy parametr $k_0 = 1$ występuje tylko ściskanie osiowe powłoki ($N_0 = N_x$).

Jeżeli $k_0 = 0$ powłoka jest ściskana tylko siłami obwodowymi ($N_0 = N_\varphi = p \cdot r$).

Jednoczesne działanie dwóch rodzajów obciążeń występuje dla $0 < k_0 < 1$.

Przyjęto również, że parametry ugięcia powłoki w_1 i w_2 będą odniesione do jej grubości.

$$\tilde{w}_1 = w_1/t, \quad \tilde{w}_2 = w_2/t. \quad (5.16)$$

Po uwzględnieniu tych założeń układ równań (5.13) i (5.14) przyjmie postać:

$$\frac{C_5 \rho_1}{E_1} \left(\frac{L}{m\pi} \right)^2 \frac{d^2 \tilde{w}_1}{d\tau^2} + \left\{ C_0 \alpha_{f_6} + \frac{t^2}{1-\nu^2} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 (1+k_1^2)^2 (C_1 - C_2 \alpha_{\Phi_1}) - \frac{N_0(\tau)}{E_1 t} [k_0 + k_1^2(1-k_0)] \right\} \tilde{w}_1 + 2C_0 \left(\frac{nt}{r} \right)^2 \left[(\alpha_{f_1} + \alpha_{f_2}) \tilde{w}_1^3 + (\alpha_{f_3} + \alpha_{f_4}) \tilde{w}_1 \tilde{w}_2^2 - \frac{r}{t} (\alpha_{f_5} + 2\alpha_{f_6}) \tilde{w}_1 \tilde{w}_2 \right] = 0, \quad (5.17)$$

$$\frac{C_5 \rho_1}{E_1} \left(\frac{L}{m\pi} \right)^2 \frac{d^2 \tilde{w}_2}{d\tau^2} + \frac{4}{3} \left[C_0 \alpha_{f_5} + 4 \frac{t^2}{1-\nu^2} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 (C_1 - C_2 \alpha_{\Phi_2}) - \frac{k_0 N_0(\tau)}{E_1 t} \right] \tilde{w}_2 + \frac{1}{3} C_0 \left(\frac{nt}{r} \right)^2 \left[(\alpha_{f_3} + \alpha_{f_4}) \tilde{w}_1^2 \tilde{w}_2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} \right)^2 \frac{r}{t} (8\alpha_{f_1} + \alpha_{f_4}) \tilde{w}_1^2 \right] = 0. \quad (5.18)$$

Po wprowadzeniu dodatkowych parametrów, otrzymany układ równań zapisano w postaci

$$\frac{d^2 \tilde{w}_1}{d\tau^2} = \alpha_{w_0} \left\{ \frac{N_0(\tau)}{E_1 t} [k_0 + k_1^2(1-k_0)] \tilde{w}_1 - \alpha_{w_1} \tilde{w}_1 - \alpha_{w_3} \tilde{w}_1^3 - \alpha_{w_4} \tilde{w}_1 \tilde{w}_2^2 + \alpha_{w_5} \tilde{w}_1 \tilde{w}_2 \right\}, \quad (5.19)$$

$$\frac{d^2 \tilde{w}_2}{d\tau^2} = \frac{1}{6} \alpha_{w_0} \left\{ 8 \frac{k_0 N_0(\tau)}{E_1 t} \tilde{w}_2 - 8\alpha_{w_2} \tilde{w}_2 - \alpha_{w_4} \tilde{w}_1^2 \tilde{w}_2 + \alpha_{w_6} \tilde{w}_1^2 \right\}. \quad (5.20)$$

Poszczególne parametry zamieszczono w załączniku 5. Otrzymany układ równań (5.19) i (5.20) opisuje równowagę dynamiczną porowatej powłoki walcowej, poddanej działaniu zmiennego w czasie obciążenia zewnętrznego.

Szczególne przypadki otrzymanego układu równań można opisać następująco:

- **Obciążenie statyczne – opis liniowy**

Wyrażenia zawarte w nawiasie klamrowym, w równaniu (5.17), wynikają z geometrycznie liniowych związków pomiędzy przemieszczeniem i odkształceniem. Przyjmując tylko te zależności można określić górne krytyczne obciążenie powłoki.

$$N_{0g} = \min_{m,n} \left\{ \frac{E_1 t}{k_0 + k_1^2(1-k_0)} \left[C_0 \alpha_{f_6} + \frac{t^2}{1-\nu^2} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 (1+k_1^2)^2 [C_1 - C_2 \alpha_{\Phi_1}] \right] \right\} \quad (5.21)$$

- **Obciążenie statyczne – opis nieliniowy**

Pomijając składniki dynamiczne w równaniach (5.19) i (5.20), otrzymano układ dwóch nieliniowych równań algebraicznych.

$$N_0 = \frac{E_1 t}{k_0 + k_1^2(1 - k_0)} \left[\alpha_{w_1} + \alpha_{w_3} \tilde{w}_1^2 + \alpha_{w_4} \tilde{w}_2^2 - \alpha_{w_5} \tilde{w}_2 \right], \quad (5.22)$$

$$8 \left[\alpha_{w_2} - \frac{N_0 k_0}{E_1 t} \right] \tilde{w}_2 + \alpha_{w_4} \tilde{w}_1^2 \tilde{w}_2 - \alpha_{w_6} \tilde{w}_1^2 = 0. \quad (5.23)$$

Po wyznaczeniu z równania (5.23) parametru \tilde{w}_2 i podstawieniu do równania (5.22) otrzymano układ dwóch, współzależnych od siebie, nieliniowych równań algebraicznych

$$N_0 = \frac{E_1 t}{k_0 + k_1^2(1 - k_0)} \left[\alpha_{w_1} + (\alpha_{w_3} - \alpha_{w_5} \alpha_{w_7}) \tilde{w}_1^2 + \alpha_{w_4} \alpha_{w_7}^2 \tilde{w}_1^4 \right],$$

$$\alpha_{w_7} = \frac{\alpha_{w_6}}{8\alpha_{w_2} + \alpha_{w_4} \tilde{w}_1^2 - 8 \frac{N_0 k_0}{E_1 t}}. \quad (5.24)$$

Powyższe równania umożliwiają analizę przebiegu utraty stateczności statycznej badanej powłoki. W szczególnym przypadku, dla powłoki obciążonej tylko ciśnieniem zewnętrznym, przedstawiony układ równań można sprowadzić do jednego równania.

6. Przykład obliczeń

Obliczenia numeryczne przeprowadzono dla powłoki walcowej wykonanej ze stopu aluminium o następujących danych materiałowych: $E_1 = 7,06 \cdot 10^4 \text{ MPa}$, $\nu = 0,33$, $\rho_1 = 2,8 \cdot 10^{-6} \text{ kg/mm}^3$, $\sigma_{all} = 90 \text{ MPa}$.

W pracy przyjęto założenie, że utrata stateczności powłoki występuje w zakresie sprężystym. W związku z tym musi być spełniony następujący warunek wytrzymałościowy:

$$\sigma_{eq,max} \leq \sigma_{all}, \quad (6.1)$$

gdzie:

$\sigma_{eq,max}$ – największe naprężenia zredukowane (naprężenia Hubera-Misesa),

σ_{all} – dopuszczalne naprężenia dla danego materiału.

Określając obszar rozwiązań dopuszczalnych, naprężenia zredukowane zdefiniowano przy założeniu płaskiego stanu naprężeń:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_\varphi + \sigma_\varphi^2}. \quad (6.2)$$

Wprowadzając do powyższego równania związki (2.1), (2.2), (4.1), (5.15) otrzymano:

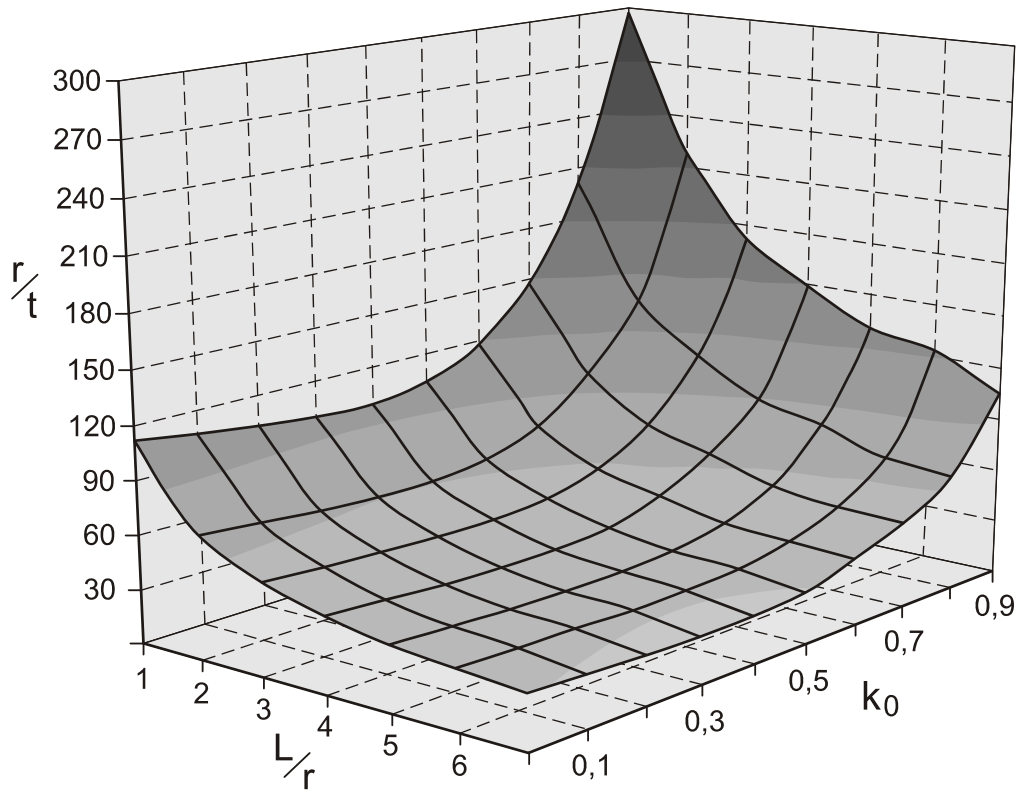
$$\sigma_{eq} = \frac{N_{0kr}}{C_0 t} [1 - e_0 \cos(\pi \zeta)] \sqrt{1 - 3k_0(1 - k_0)}. \quad (6.3)$$

Ponieważ maksymalne naprężenia występują na powierzchniach zewnętrznych powłoki

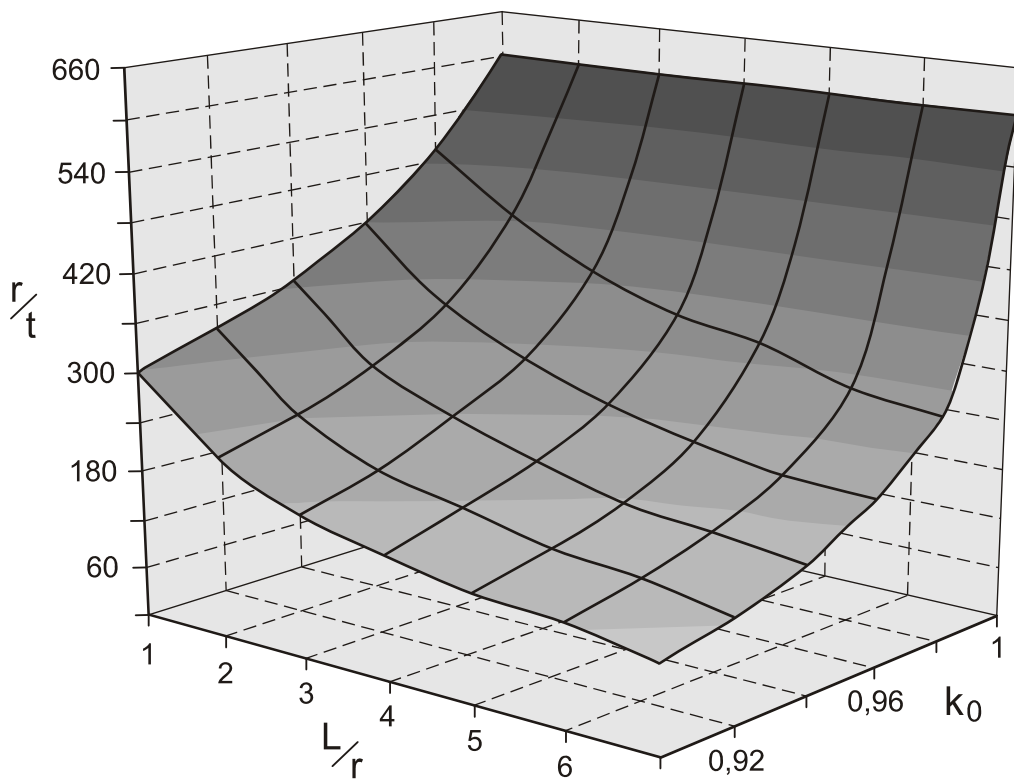
$\sigma_{eq,max} = \sigma_{eq} \Big|_{\zeta=\pm 1/2}$, stąd:

$$\sigma_{eq,max} = \frac{N_{0kr}}{C_0 t} \sqrt{1 - 3k_0(1 - k_0)}. \quad (6.4)$$

Zgodnie z kryterium wytrzymałościowym (6.1) określono obszar dopuszczalnych rozwiązań dla badanej rodziny powłok walcowych. Wyniki obliczeń w zależności od parametru k_0 oraz stosunków: długości do promienia L/r i promienia do grubości r/t przy ustalonej wartości parametru $e_0 = 0.9$, zamieszczono na poniższych rysunkach. Zbiór dopuszczalnych rozwiązań znajduje się nad przedstawioną powierzchnią.

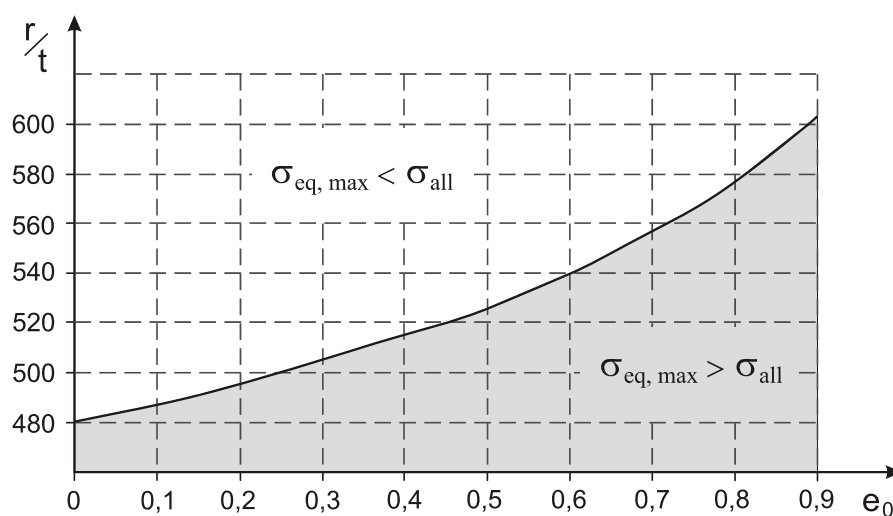


Rys. 6.1. Obszar rozwiązań dopuszczalnych dla $e_0 = 0,9$ oraz $0 \leq k_0 \leq 0,9$

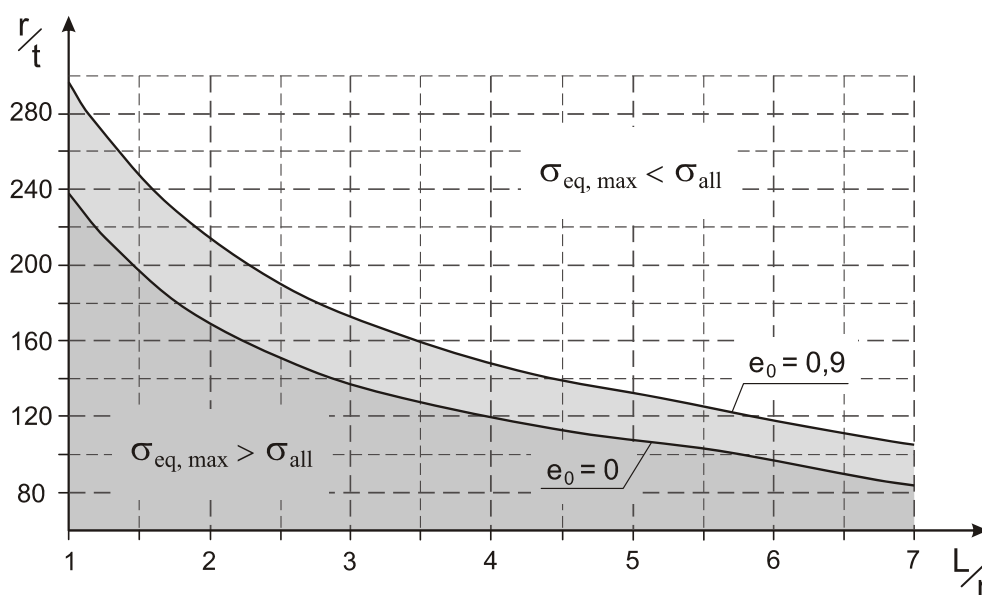


Rys. 6.2. Obszar rozwiązań dopuszczalnych dla $e_0 = 0,9$ oraz $0,9 \leq k_0 \leq 1$

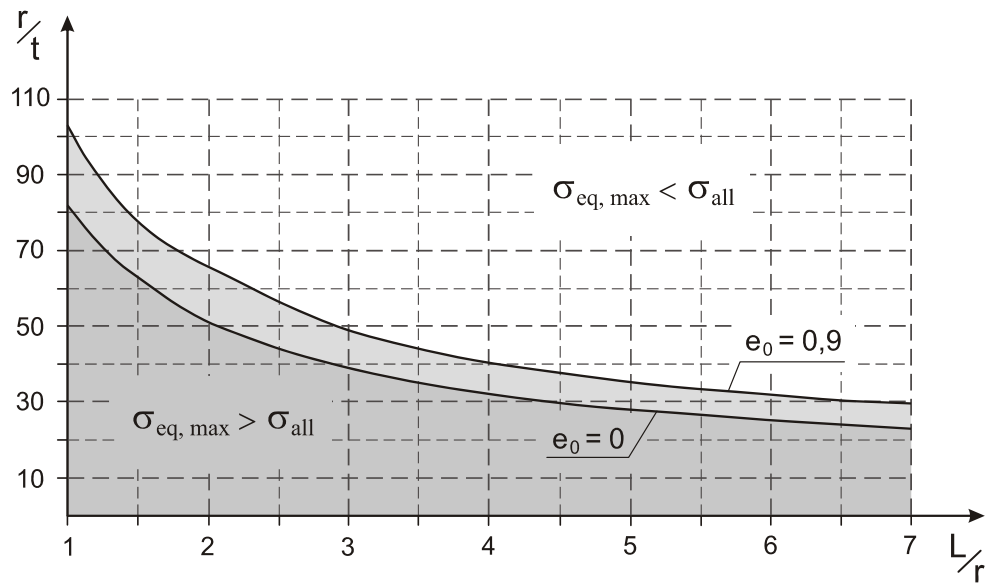
Wzrost proporcji powłoki, zarówno L/r jak i r/t , powoduje zwiększenie badanego obszaru rozwiązań dopuszczalnych. Wzrost udziału osiowych sił ściskających (wzrost parametru k_0) powoduje zmniejszenie badanego obszaru. Jest to szczególnie widoczne w przypadku dominującego ściskania osiowego (Rys. 6.2) gdzie niewielki przyrost parametru k_0 powoduje gwałtowny wzrost minimalnej wartości stosunku promienia do grubości powłoki. W szczególnym przypadku, kiedy występuje tylko osiowe ściskanie powłoki ($k_0 = 1$), stosunek L/r nie wpływa na wielkość badanego obszaru. Wpływ porowatości materiału (współczynnika e_0), przy ustalonych wartościach parametru k_0 , na badany obszar przedstawiono na rysunkach 6.3, 6.4 oraz 6.5.



Rys. 6.3. Obszar rozwiązań dopuszczalnych dla $k_0 = 1$



Rys. 6.4. Obszar rozwiązań dopuszczalnych dla $k_0 = 0,9$ oraz $e_0 = 0$ i $e_0 = 0,9$

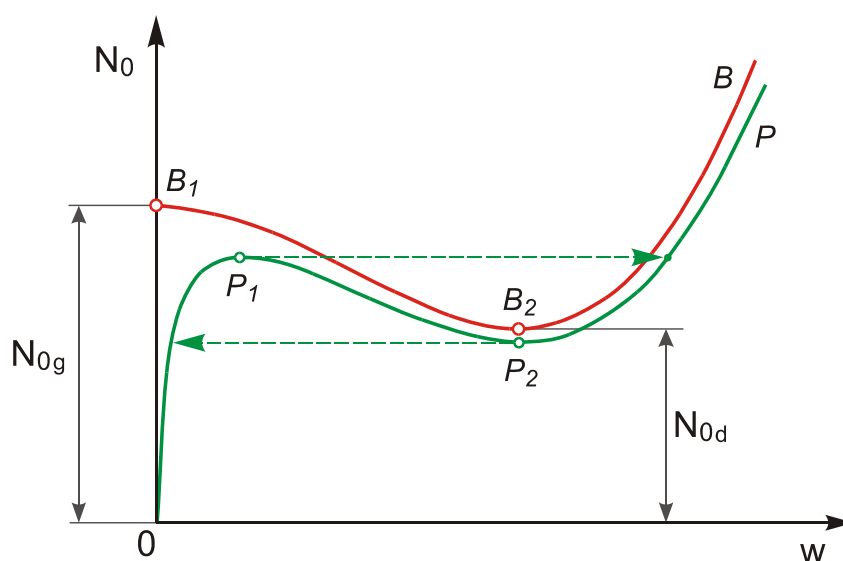


Rys. 6.5. Obszar rozwiązań dopuszczalnych dla $k_0 = 0,5$ oraz $e_0 = 0$ i $e_0 = 0,9$

W każdym przypadku wzrost porowatości materiału powoduje zmniejszenie badanego zakresu rozwiązań.

6.1. Zagadnienie stateczności statycznej powłoki walcowej

Zagadnienie statyczne powłoki stanowi wstęp do analizy stateczności powłoki przy obciążeniach dynamicznych. Na podstawie rozwiązania geometrycznie liniowego określić można tzw. górne obciążenie krytyczne powłoki. Geometrycznie nieliniowy opis zagadnienia umożliwia badanie zależności pomiędzy obciążeniem i ugięciem powłoki, a tym samym wyznaczenie ścieżek równowagi oraz dolnego obciążenia krytycznego. Na rysunku 6.6 zamieszczono przykładowe ścieżki równowagi powłoki idealnej (krzywa B) oraz rzeczywistej (krzywa P). Przez powłokę idealną rozumie się tutaj powłokę nie posiadającą początkowych imperfekcji – odchyłeń od początkowego, geometrycznie idealnego kształtu.



Rys. 6.6. Ścieżki równowagi i punkty krytyczne powłoki

Utrata stateczności powłoki idealnej następuje poprzez bifurkację (punkt B_1 odpowiadający wartości górnego obciążenia krytycznego). Początkowo wzrost obciążenia nie powoduje ugięć w kierunku promieniowym (odcinek $0 B_1$), odpowiadających zjawisku wyboczenia. Powłoka znajduje się tutaj w stanie równowagi. Po osiągnięciu wartości górnego obciążenia krytycznego, następuje wyboczenie powłoki i jej gwałtowne przejście do nowego stanu równowagi (element krzywej $B_2 B$). Punkt B_2 na krzywej określa się jako dolne obciążenie krytyczne powłoki.

Utrata stateczności powłoki rzeczywistej następuje poprzez przeskok – osiągnięcie lokalnego maksymalnego obciążenia. Należy zauważyć, że każda powłoka rzeczywista posiada początkowe imperfekcje. Wzrost obciążenia, w wyniku niedoskonałości kształtu powłoki, już na wstępie powoduje przyrost obciążeń promieniowych. Po osiągnięciu lokalnego

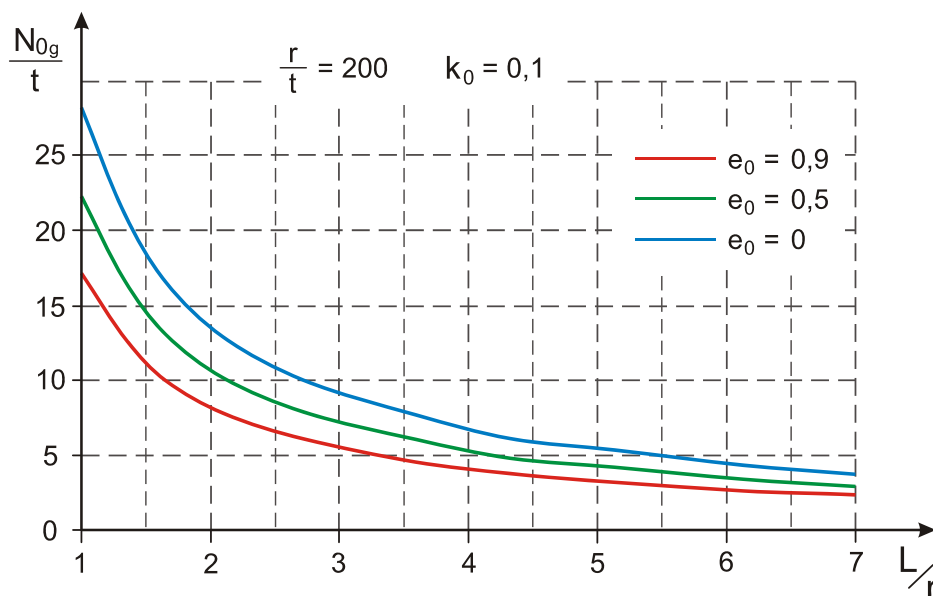
maksimum (punkt P_1) powłoka w wyniku wyboczenia przechodzi do nowego stanu równowagi (element krzywej $P_2 P$). Punkt P_1 określa rzeczywiste obciążenie krytyczne powłoki. W zakresie odkształceń sprężystych, zmniejszenie obciążenia powoduje przejście powłoki do początkowego stanu równowagi. Szerzej powyższe zagadnienie opisane jest przykładowo w pracach [6, 27, 44].

Wstępne ugięcia powłoki nie są analizowane w tej pracy. Należy jednak zwrócić uwagę, że w przypadku małych imperfekcji, wartość rzeczywistego obciążenia krytycznego znajduje się pomiędzy górnym a dolnym obciążeniem krytycznym powłoki idealnej. Ponieważ zasadniczym celem pracy jest zagadnienie stateczności powłoki przy obciążeniach dynamicznych, przedstawione zostaną tutaj tylko wybrane wyniki badań.

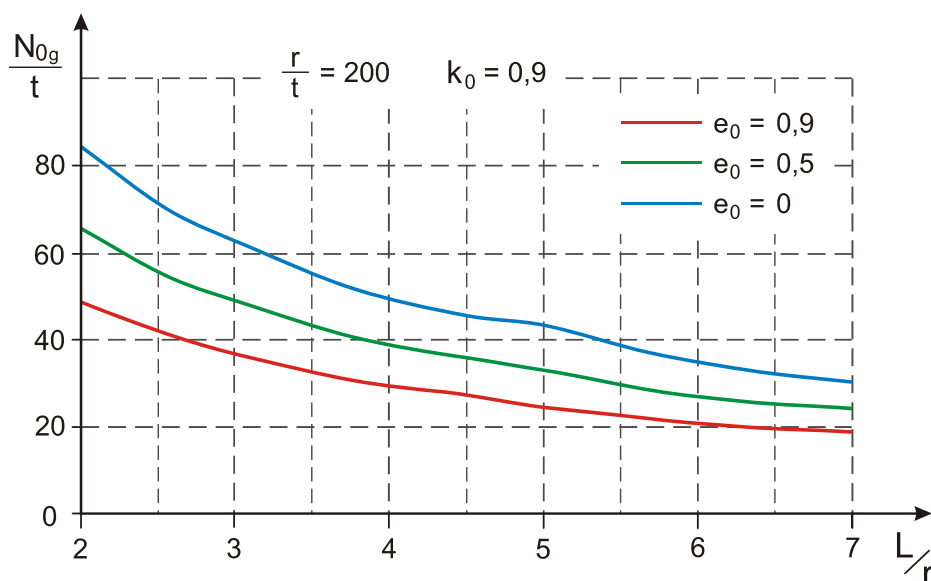
6.1.1. Rozwiązanie geometrycznie liniowe

Obliczenia przeprowadzone zostały na podstawie zależności (5.21). Górne obciążenie krytyczne powłoki wyznaczono przyjmując najmniejszą wartość obciążenia przy różnych kombinacjach parametrów m i n . Na wykresach przedstawiono wyniki obliczeń dla różnych parametrów porowatości e_0 i obciążenia k_0 , w odniesieniu do proporcji geometrycznych powłoki.

Na rysunkach 6.6 i 6.7 przedstawiono wpływ długości powłoki na górne obciążenie krytyczne, przy ustalonej wartości stosunku promienia do grubości.

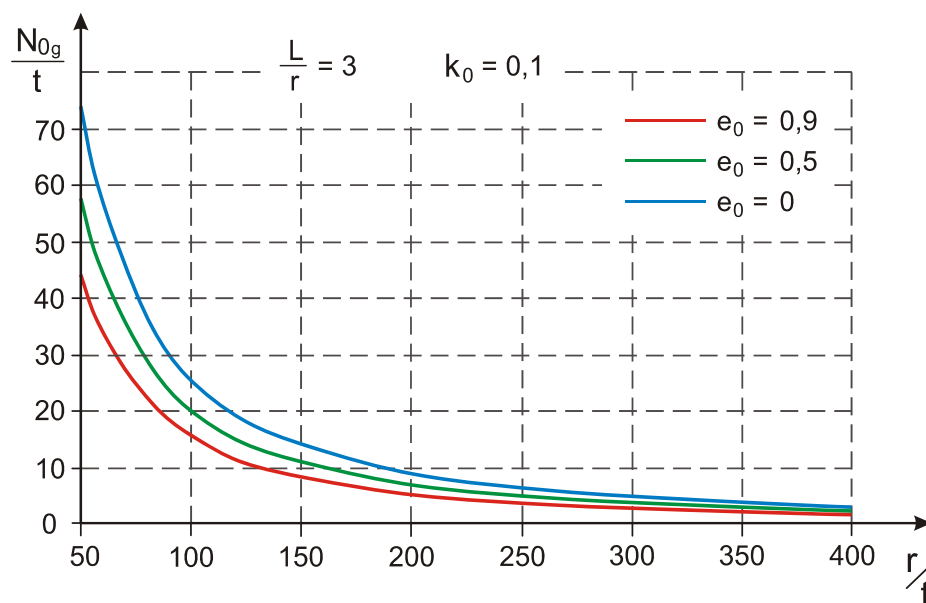


Rys. 6.6. Górne obciążenie krytyczne powłoki w zależności od proporcji L/r dla $k_0 = 0,1$

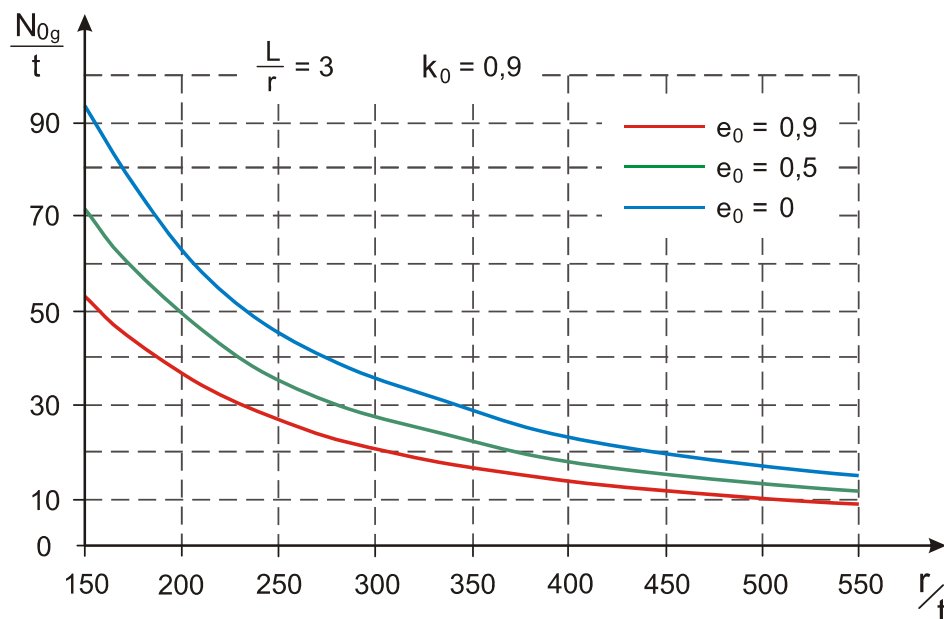


Rys. 6.7. Górne obciążenie krytyczne powłoki w zależności od proporcji L/r dla $k_0 = 0,9$

Rysunek 6.6 przedstawia wyniki obliczeń w przypadku dominującego ciśnienia zewnętrznego $k_0 = 0,1$, natomiast rysunek 6.7 dla przypadku dominującego ściskania osiowego powłoki $k_0 = 0,9$. Wzrost długości powłoki powoduje zmniejszenie wartości górnego obciążenia krytycznego, niezależnie od analizowanych parametrów. Analogiczna sytuacja przedstawia się w przypadku wzrostu wartości promienia do grubości powłoki (Rys. 6.6, 6.9).

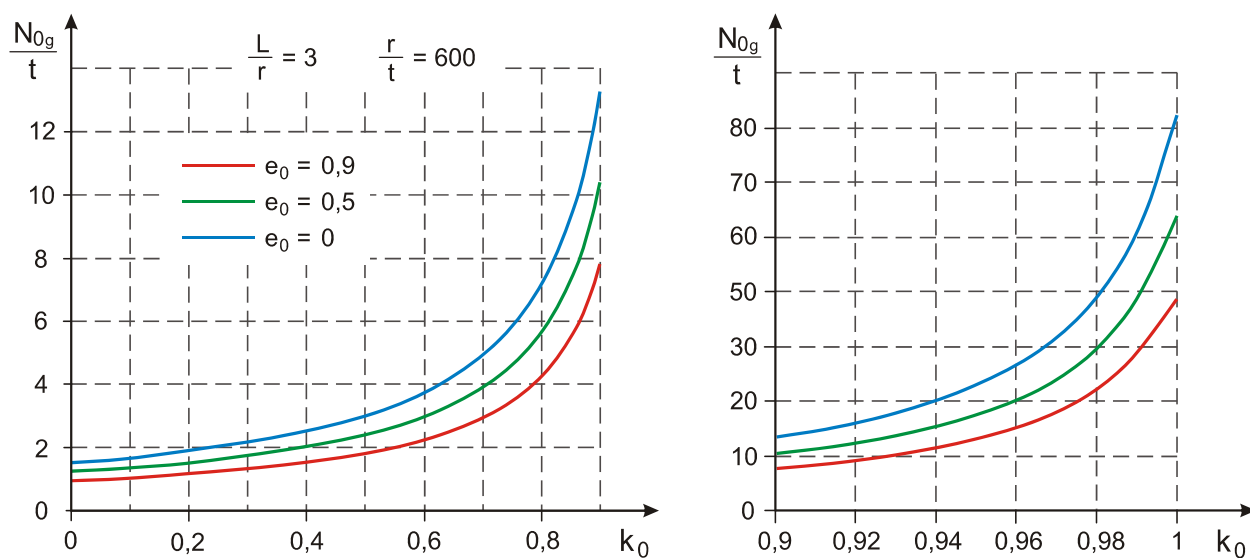


Rys. 6.8. Górne obciążenie krytyczne powłoki w zależności od proporcji r/t dla $k_0 = 0,1$



Rys. 6.9. Górne obciążenie krytyczne powłoki w zależności od proporcji r/t dla $k_0 = 0,9$

Na rysunku 6.10 przedstawiono wpływ parametru k_0 na wartość górnego obciążenia krytycznego przy ustalonej geometrii powłoki. Obciążenie to jest znacznie większe w przypadku ściskania osiowego. Można zauważyć, że już niewielki udział ciśnienia zewnętrznego powoduje znaczne zmniejszenie nośności powłoki.

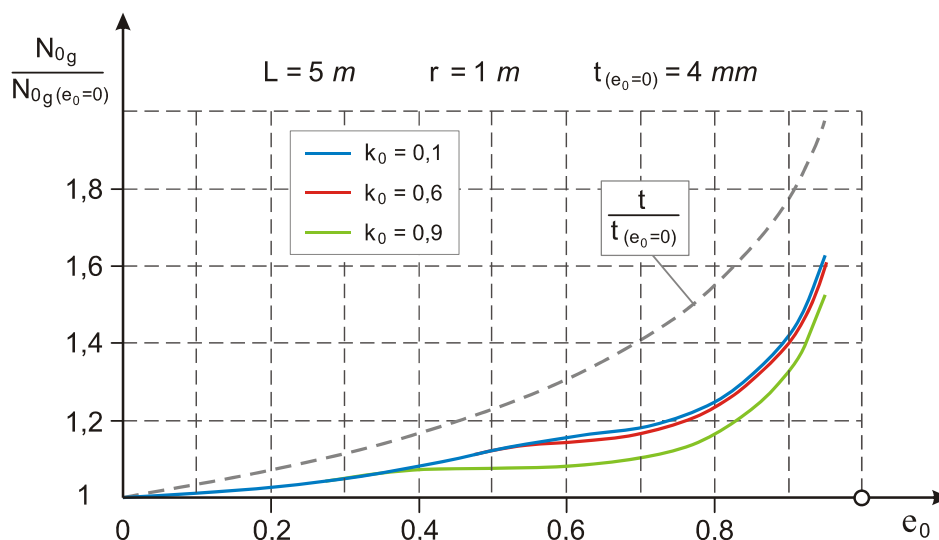


Rys. 6.10. Górne obciążenie krytyczne powłoki w zależności od parametru k_0

W każdym z analizowanych przypadków wzrost porowatości powłoki powodował spadek obciążeń krytycznych. Należy jednak zwrócić uwagę, że wraz ze wzrostem parametru e_0 maleje również masa powłoki.

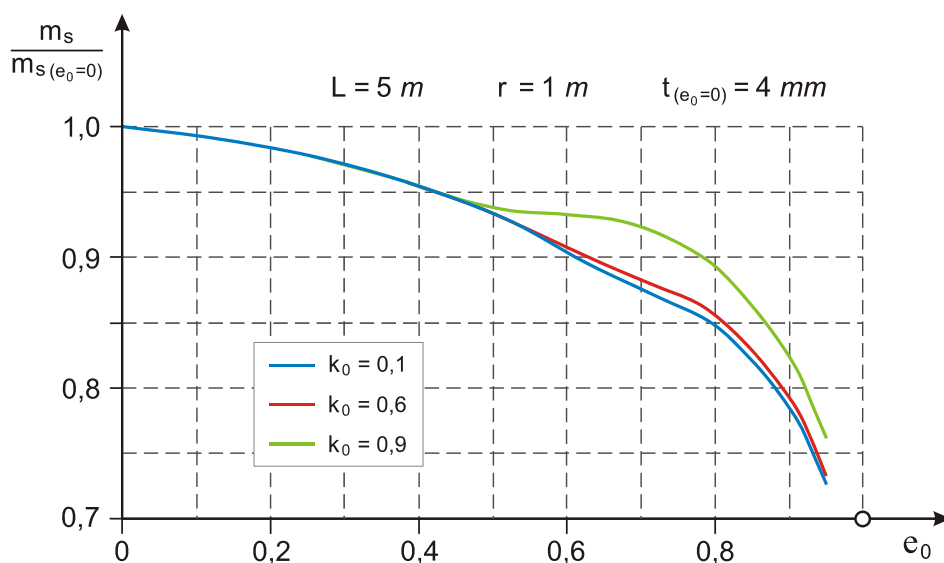
Kolejny wykres przedstawia wpływ porowatości materiału na wartość górnego obciążenia krytycznego przy założeniu stałej masy powłoki. Zmienna w tym przypadku jest grubość. Na podstawie powyższego założenia rośnie ona wraz ze wzrostem parametru e_0 według zależności:

$$t = \frac{t_{(e_0=0)}}{C_5}. \quad (6.5)$$



Rys. 6.11. Górne obciążenie krytyczne w zależności od parametru e_0 przy stałej masie powłoki

Zakładając stałą wartość górnego obciążenia krytycznego, wyznaczyć można zmniejszenie masy powłoki wynikające ze wzrostu porowatości materiału (Rys. 6.12).



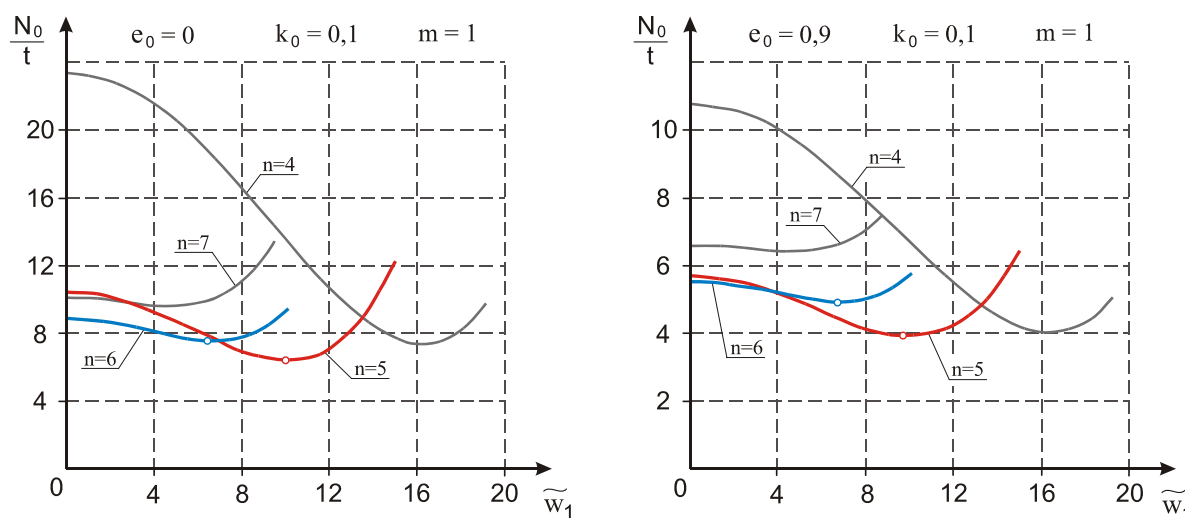
Rys. 6.12. Masa powłoki w zależności od parametru e_0 przy ustalonym obciążeniu krytycznym

Powyższe wykresy w najlepszy sposób odzwierciedlają korzyści płynące z zastosowania materiałów porowatych. Początkowo, wraz ze wzrostem porowatości materiału ($0 < e_0 < 0,4$), masa powłoki maleje tak samo, niezależnie od parametru obciążenia. Dalszy wzrost porowatości powoduje większy spadek masy powłoki w przypadku dominującego ciśnienia zewnętrznego.

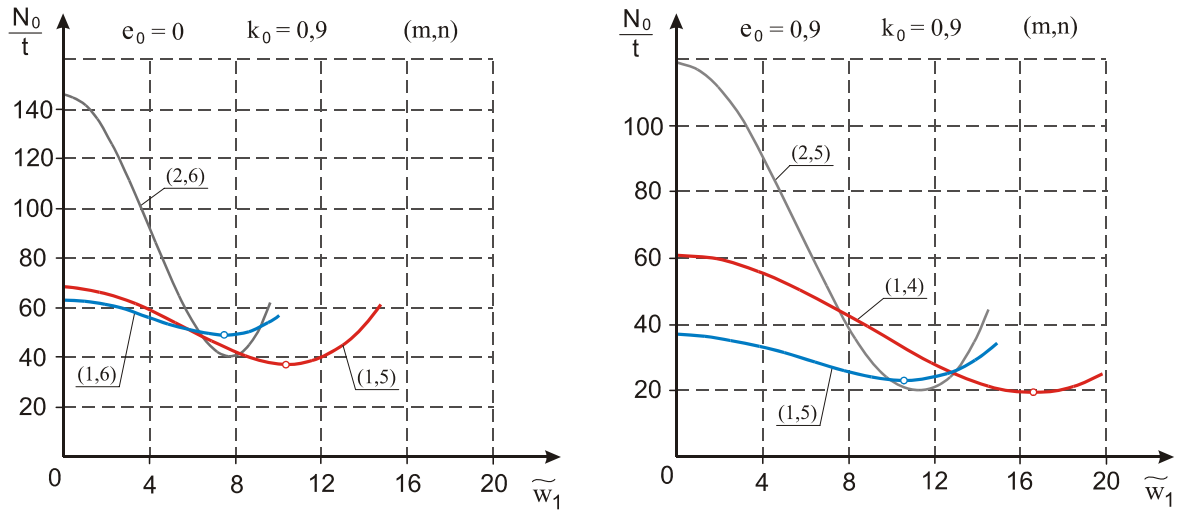
6.1.2. Rozwiązanie geometrycznie nieliniowe

Układ równań (5.24) został rozwiązany w sposób iteracyjny, przy założeniu maksymalnego błędu 0,01%. Liczba iteracji potrzebna do uzyskania rozwiązania przy powyższym założeniu rośnie wraz ze wzrostem parametru k_0 oraz ugięcia \tilde{w}_1 . Jako pierwsze przybliżenie przyjęto wartość parametru α_{w_7} bez czynnika $8k_0 N_0/E_1 t$. Rozwiązanie równania polegało na określeniu bieżącej wartości obciążenia zewnętrznego dla kolejnych wartości ugięcia \tilde{w}_1 .

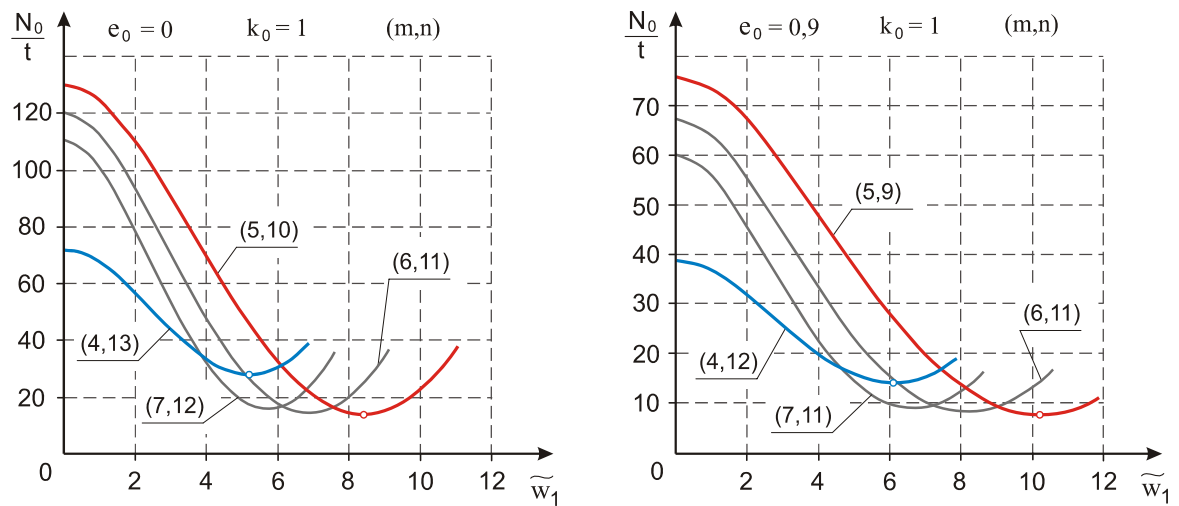
Na wykresach przedstawiono zależność obciążenia od ugięcia powłok o następujących danych geometrycznych: $r/t = 200$ i $L/r = 3$ w przypadku obciążenia złożonego (Rys. 6.13, 6.14) oraz $r/t = 600$ i $L/r = 3$ w przypadku ściskania osiowego (Rys. 6.15). Ścieżki równowagi przedstawione zostały w zależności od postaci odkształcenia powłoki. Jak wspomniano na wstępie, na rzeczywiste obciążenie krytyczne powłoki bardzo duży wpływ mają wstępne imperfekcje. Podobnie sytuacja wygląda w przypadku postaci odkształcenia powłoki. Dlatego dolne obciążenie krytyczne $N_{0,d}$ wyznaczono przyjmując najmniejszą wartość N_0 dla danej powłoki przy różnych kombinacjach m i n .



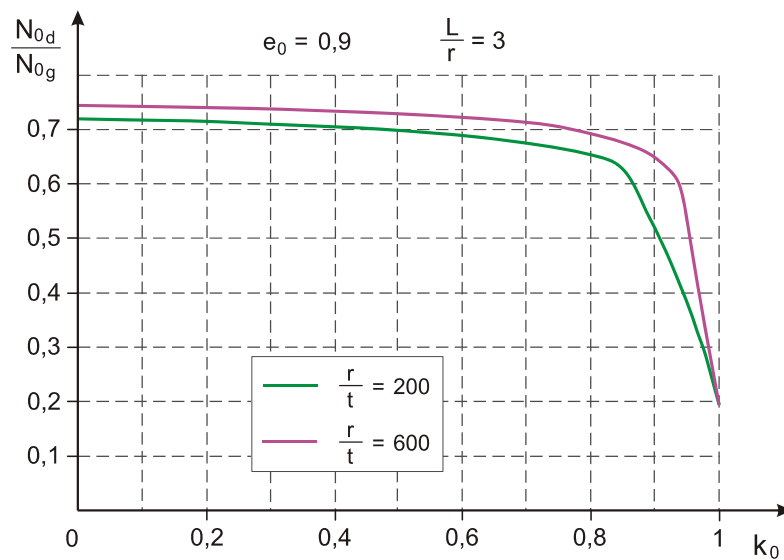
Rys. 6.13. Ścieżki równowagi powłoki przy dominującym ciśnieniu zewnętrznym



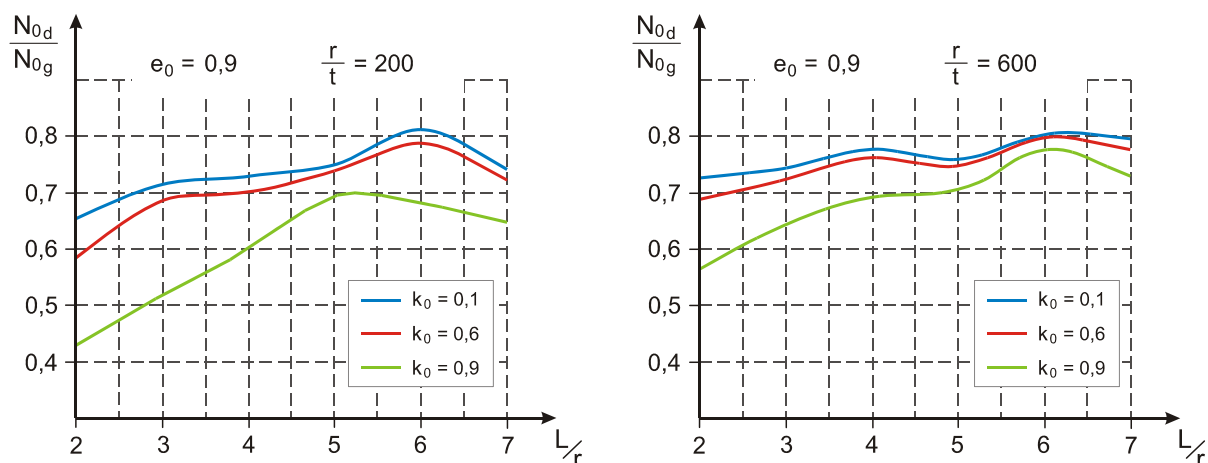
Rys. 6.14. Ścieżki równowagi powłoki przy dominującym ścisnieniu osiowym



Rys. 6.15. Ścieżki równowagi powłoki ściskanej osiowo



Rys. 6.16. Górne i dolne obciążenie krytyczne w zależności od parametru k_0



Rys. 6.17. Górne i dolne obciążenie krytyczne w zależności od parametru L/r

Analizując przedstawione wyniki można zauważyć bardzo dużą różnicę pomiędzy stosunkiem górnego i dolnego obciążenia krytycznego w przypadku powłoki ściskanej osiowo. Już niewielki udział ciśnienia powoduje duży spadek tej różnicy. Relację pomiędzy obciążeniami krytycznymi w zależności od parametru k_0 przedstawiono na rysunku 6.16. Wzrost proporcji promienia do grubości powłoki powoduje spadek różnicy pomiędzy obciążeniami. Podobna sytuacja występuje w przypadku zwiększania długości powłoki. Przy czym w tym przypadku po przekroczeniu parametru L/r pewnej wartości następuje ponowne zwiększenie różnicy pomiędzy obciążeniami (Rys. 6.17). W przypadku, gdy występuje tylko osiowe ściskanie ($k_0 = 1$) wzrost długości powłoki nie ma wpływu zarówno na górne jak i dolne obciążenie krytyczne. Zwiększa się jedynie liczba półfal na długości powłoki. Wpływ porowatości materiału na różnicę pomiędzy górnym i dolnym obciążeniem krytycznym jest praktycznie znikomy i ma charakter chaotyczny. Różnica ta (większa dla materiału porowatego) staje się widoczna dopiero w przypadku gdzie wyraźnie dominuje ściskanie osiowe.

6.2. Zagadnienie stateczności dynamicznej powłoki walcowej

Analizę stateczności powłoki poddanej obciążeniom dynamicznym przeprowadzono na podstawie numerycznego rozwiązania układu równań (5.19, 5.20). Obliczenia przeprowadzono w oparciu o algorytm metody Rungego-Kutty. Do numerycznego całkowania równań różniczkowych drugiego rzędu wykorzystano środowisko programu Matlab. Układ równań rozwiązano przy następujących warunkach początkowych.

$$\text{dla: } \tau = 0 \rightarrow \tilde{w}_1 = 1 \cdot 10^{-6}, \quad \tilde{w}_2 = \frac{d\tilde{w}_1}{d\tau} = \frac{d\tilde{w}_2}{d\tau} = 0, \quad (6.6)$$

Otrzymana postać równań różniczkowych umożliwia przyjęcie dowolnej funkcji obciążenia, zależnej od czasu. W pierwszej kolejności przyjęto, że obciążenie zewnętrzne narasta w czasie w sposób liniowy z ustaloną prędkością. W dalszej części bada się stateczność powłoki poddanej obciążeniu quasi-impulsowemu. Przyjęto tutaj impuls o przebiegu sinusoidalnym. W każdym z badanych przypadków przyjmuje się stałą w danej chwili proporcje obciążeń zewnętrznych k_0 .

Obliczenia przeprowadzono dla powłok walcowych wyróżnionych następującymi danymi geometrycznymi:

- $t = 4 \text{ mm}, r = 800 \text{ mm}, L = 2400 \text{ mm}, \rightarrow r/t = 200, L/r = 3;$
- $t = 4 \text{ mm}, r = 800 \text{ mm}, L = 4000 \text{ mm}, \rightarrow r/t = 200, L/r = 5;$
- $t = 4 \text{ mm}, r = 1600 \text{ mm}, L = 4800 \text{ mm}, \rightarrow r/t = 400, L/r = 3.$

Przyjęto parametr obciążenia powłoki $k_0 = 0,1$ oraz $k_0 = 0,9$.

6.2.1. Obciążenie rosnące proporcjonalnie do czasu

Obciążenie zewnętrzne powłoki narasta w czasie w sposób liniowy od wartości początkowej $\tau = 0$.

$$\frac{N_0(\tau)}{t} = c \cdot \tau \quad (6.7)$$

gdzie:

$$c \left[\frac{\text{MPa}}{\text{s}} \right] \text{ – prędkość narastania obciążenia zewnętrznego.}$$

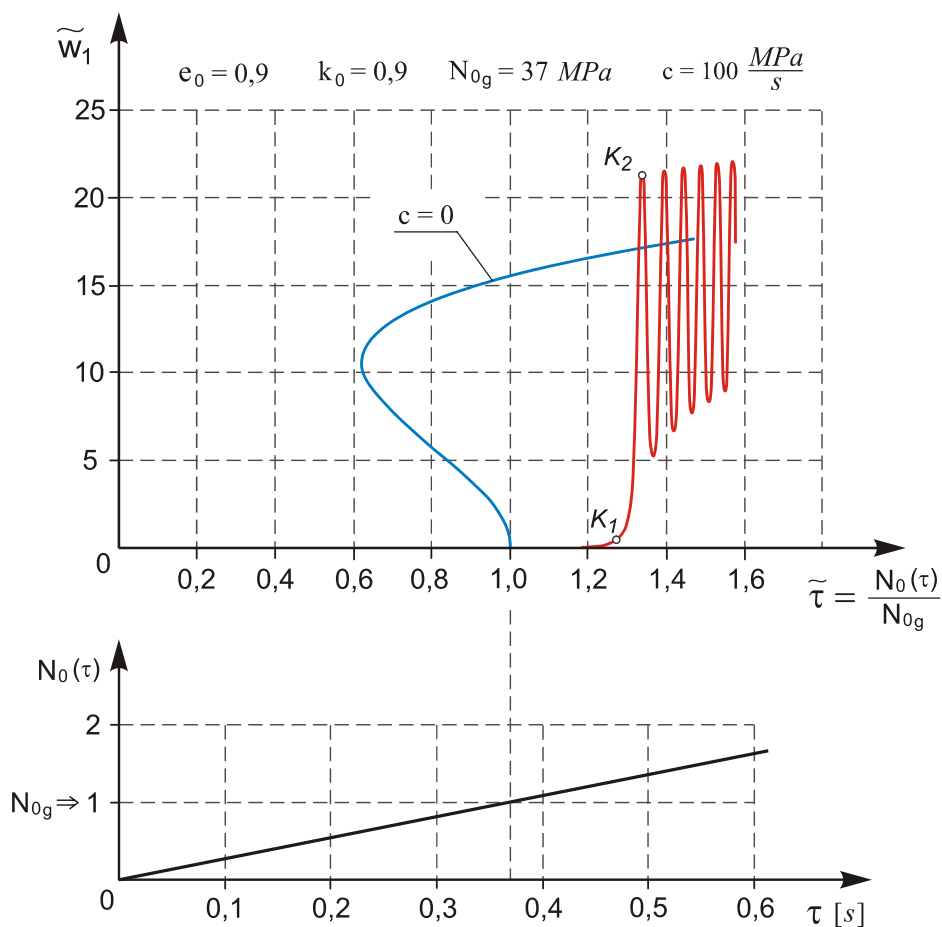
Przykładowe wyniki obliczeń dla powłoki o wymiarach $t = 4 \text{ mm}$, $r = 800 \text{ mm}$, $L = 2400 \text{ mm}$, przedstawiono na rysunkach 6.18 – 6.25. Wprowadzony został bezwymiarowy parametr czasu $\tilde{\tau}$, będący stosunkiem wartości obciążenia bieżącego do górnego obciążenia krytycznego w zagadnieniu statycznym. Parametr ten pełni jednocześnie funkcję współczynnika obciążenia dynamicznego. Górne obciążenie krytyczne jest tutaj wartością stałą, charakteryzującą daną powłokę.

$$\tilde{\tau} = \frac{\tau}{\tau_{kr}} = \frac{N_0(\tau)}{N_{0g}} \quad (6.8)$$

gdzie:

τ_{kr} – czas, po którym obciążenie $N_0(\tau)$ osiągnie wartość N_{0g} .

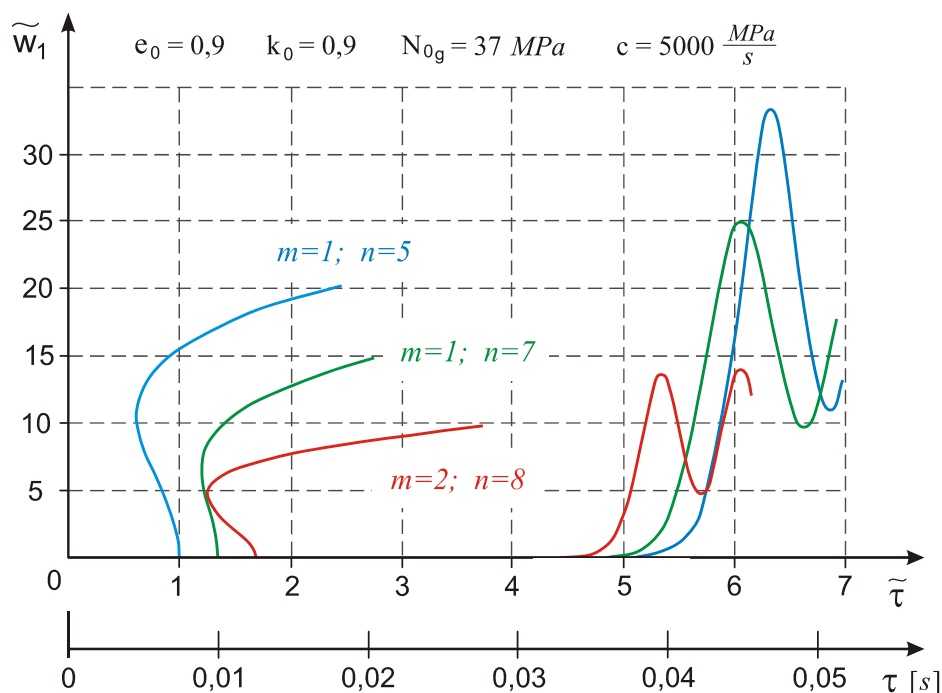
Rysunek 6.18 przedstawia przykładowy przebieg ugięcia powłoki pod wpływem wzrostu obciążenia zewnętrznego. Zaznaczono tutaj również krzywą, będącą rozwiązaniem zagadnienia statycznego, $c = 0$.



Rys. 6.18. Ugięcie powłoki w funkcji parametru $\tilde{\tau}$

Początkowy wzrost obciążenia powoduje bardzo małe ugięcia powłoki. Po przekroczeniu górnej wartości krytycznej (punkt K_1 na krzywej), następuje gwałtowny wzrost ugięcia aż do osiągnięcia lokalnej maksymalnej wartości, (punkt K_2 na krzywej). Następnie powłoka przechodzi w stan nieliniowych drgań wokół nowego położenia równowagi. Położenie to wyznacza krzywa będąca rozwiązaniem statycznym. Utrata stateczności powłoki następuje w momencie, gdzie niewielki wzrost obciążenia powoduje bardzo szybki wzrost ugięć (przebieg krzywej od punktu K_1 do K_2). Punkty te wyznaczają przedział dynamicznych obciążeń krytycznych.

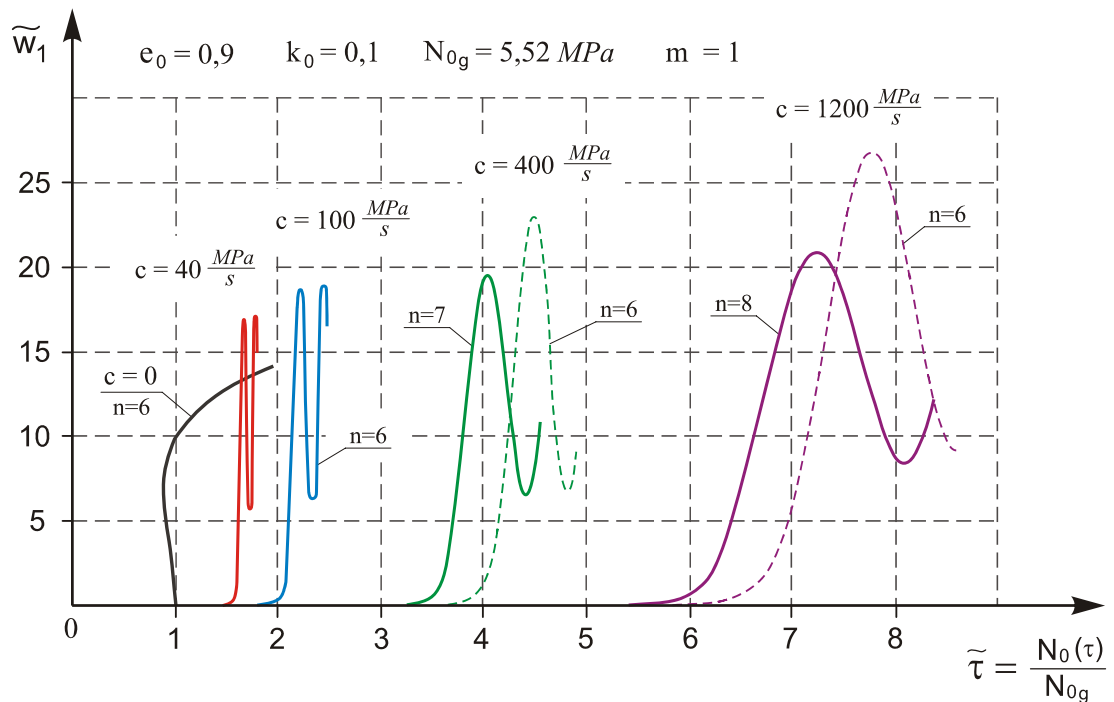
W dalszej części należy przewidzieć możliwość wystąpienia utraty stateczności przy innej niż statyczna, postaci wyboczenia powłoki. Sytuacja taka ma miejsce przy większych prędkościach narastania obciążenia zewnętrznego. Przykładowe przebiegi utraty stateczności powłoki (statycznej i dynamicznej) w zależności od liczby m i n ilustruje rysunek 6.19.



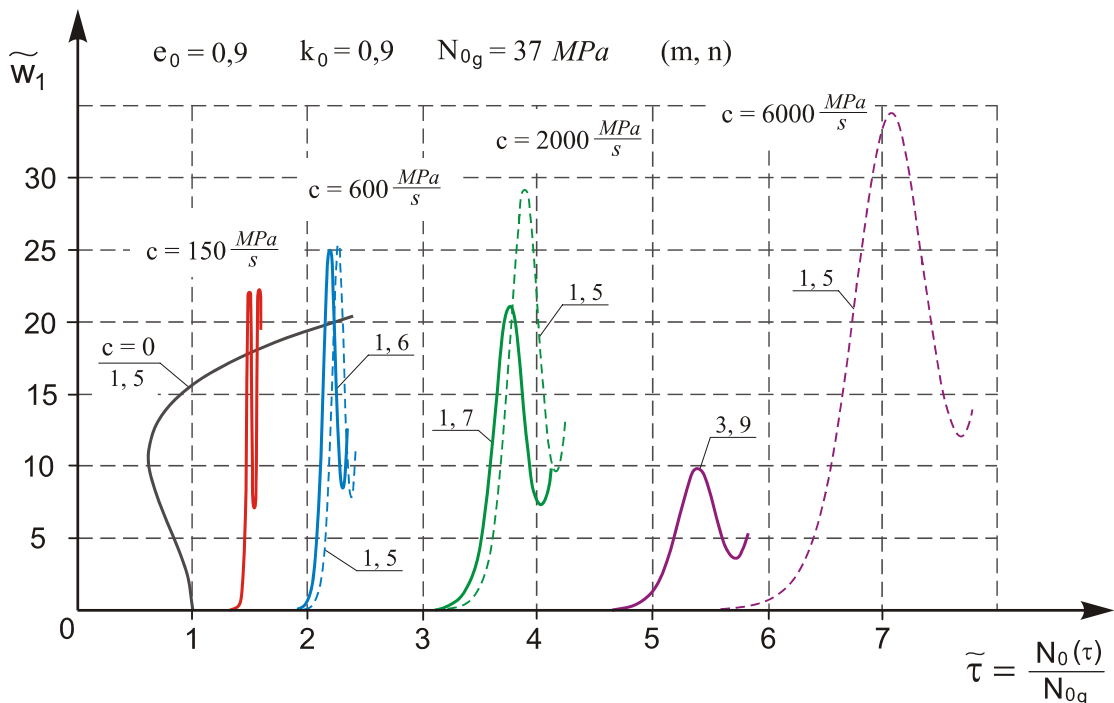
Rys. 6.19. Ugięcie powłoki w funkcji parametru $\tilde{\tau}$ w zależności od postaci wyboczenia

Utrata stateczności w zagadnieniu statycznym występuje tutaj przy jednej półfali w kierunku osiowym ($m=1$) oraz pięciu falach w kierunku obwodowym ($n=5$). W zagadnieniu dynamicznym, przy danej szybkości obciążenia, powłoka odkształci się najszybciej przy $m=2$ i $n=8$. Wraz ze wzrostem liczby fal maleje lokalne maksimum krzywej. Utrata stateczności powłoki nie ma już tak gwałtownego charakteru jak przy mniejszych prędkościach obciążenia.

Przebieg utraty stateczności oraz zmianę postaci wybożenia powłoki dla różnych prędkości obciążenia przedstawiono na rysunkach 6.20 i 6.21.



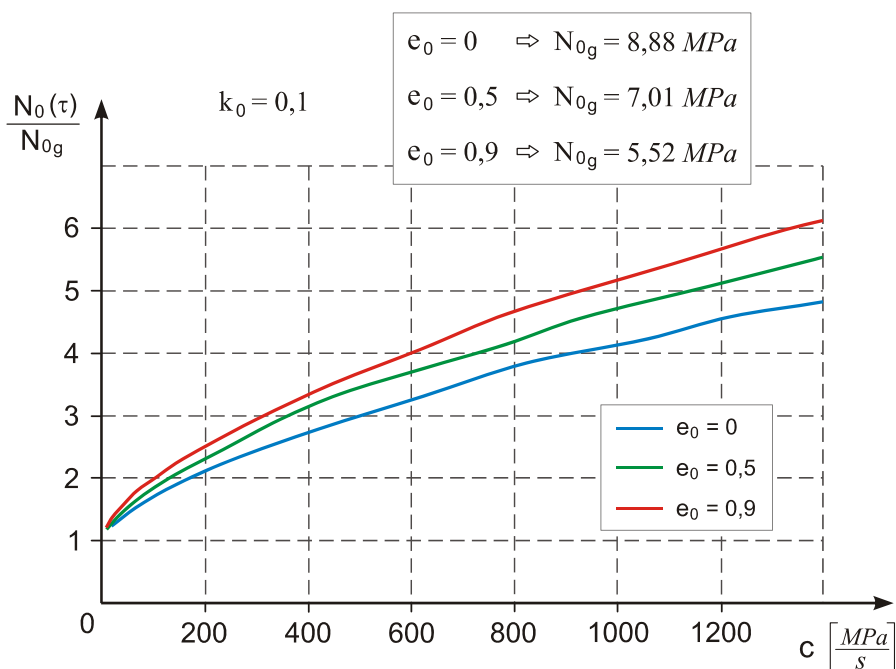
Rys. 6.20. Ugięcie powłoki w funkcji parametru $\tilde{\tau}$ przy dominującym ciśnieniu zewnętrznym



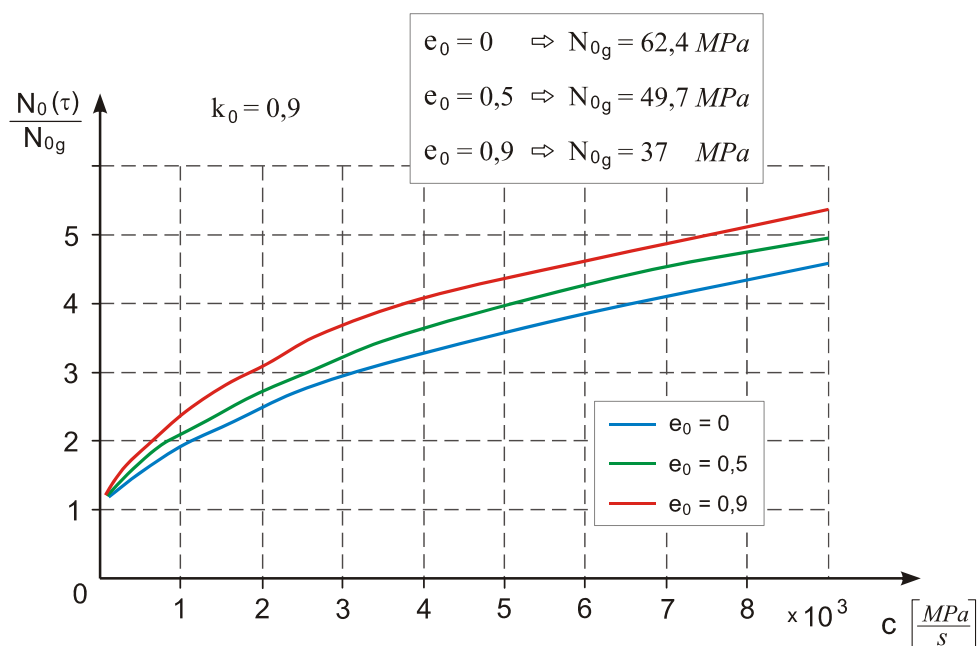
Rys. 6.21. Ugięcie powłoki w funkcji parametru $\tilde{\tau}$ przy dominującym ścisnieniu osiowym

Wraz ze wzrostem prędkości obciążenia wzrasta dynamiczna odporność powłoki na wyboczenie. Jednocześnie można zauważyć wyraźną tendencję do zmiany postaci wyboczenia powłoki. W przypadku dominującego ciśnienia (Rys. 6.20), zwiększa się tylko ilość fal obwodowych. Przy dominującym ściskaniu osiowym (Rys. 6.21), pojawiają się dodatkowo półfale wzdłuż tworzącej powłoki. Na wykresach linią przerywaną oznaczono krzywe odpowiadające statycznej postaci wyboczenia, natomiast linią ciągłą, krzywe odpowiadające dynamicznej postaci wyboczenia. Należy zwrócić uwagę, że wraz ze wzrostem prędkości obciążenia, powłoka utraci stateczność szybciej, w odniesieniu do czasu rzeczywistego, ale przy większej wartości obciążenia zewnętrznego.

W celu określenia dynamicznych obciążeń krytycznych przyjęto kryterium Volmira [65]. Zgodnie z tym kryterium, dynamiczne obciążenie krytyczne określa czas, w którym ugięcie powłoki osiąga wartość równą jej grubości $\tilde{w}=1$. Po osiągnięciu tej wartości następuje gwałtowny wzrost ugięcia, będący wynikiem utraty stateczności powłoki. Na rysunkach 6.22, 6.23 pokazano wpływ prędkości c na dynamiczne obciążenia krytyczne powłoki. Wyniki obliczeń przedstawiono dla różnych parametrów porowatości e_0 . Początkowo, wraz ze wzrostem prędkości, obserwuje się większy przyrost dynamicznych obciążeń krytycznych. Przyczyną tego jest zmiana postaci wyboczenia powłoki przy dużych prędkościach. Zależność ta jest szczególnie widoczna przy dominującym ściskaniu osiowym (Rys. 6.23).



Rys. 6.22. Wpływ prędkości c na dynamiczne obciążenia krytyczne powłoki dla $k_0 = 0,1$



Rys. 6.23. Wpływ prędkości c na dynamiczne obciążenia krytyczne powłoki dla $k_0 = 0,9$

Należy zauważyć, że przedstawiona na powyższych wykresach wyższa odporność powłoki porowatej nie wynika z rzeczywistego faktu, ale z mniejszej wartości górnej siły krytycznej.

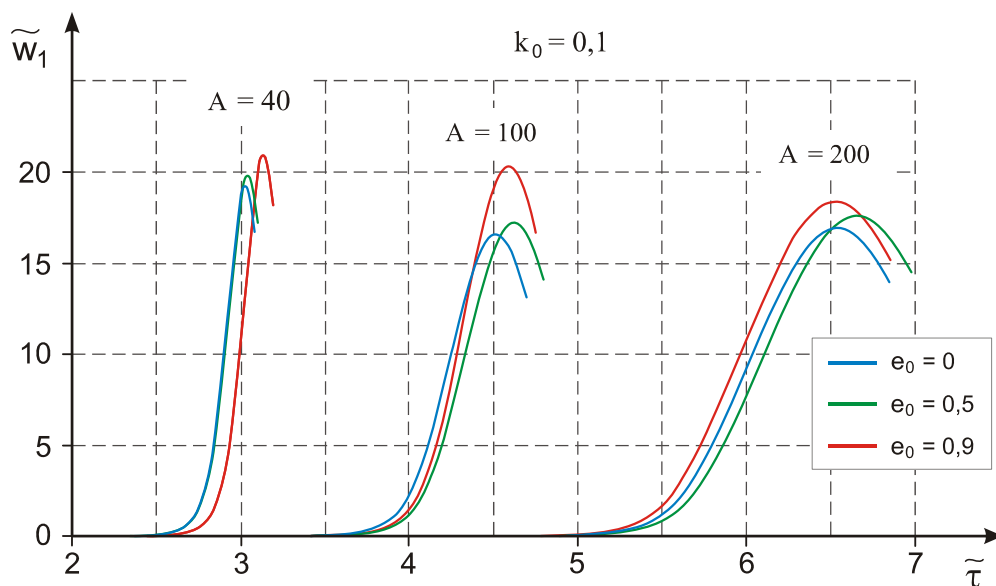
W celu określenia wpływu parametru e_0 na przebieg utraty stateczności, prędkość narastania obciążenia c odniesiono do wartości N_{0g} danej powłoki.

$$c = A \cdot N_{0g} \quad (6.9)$$

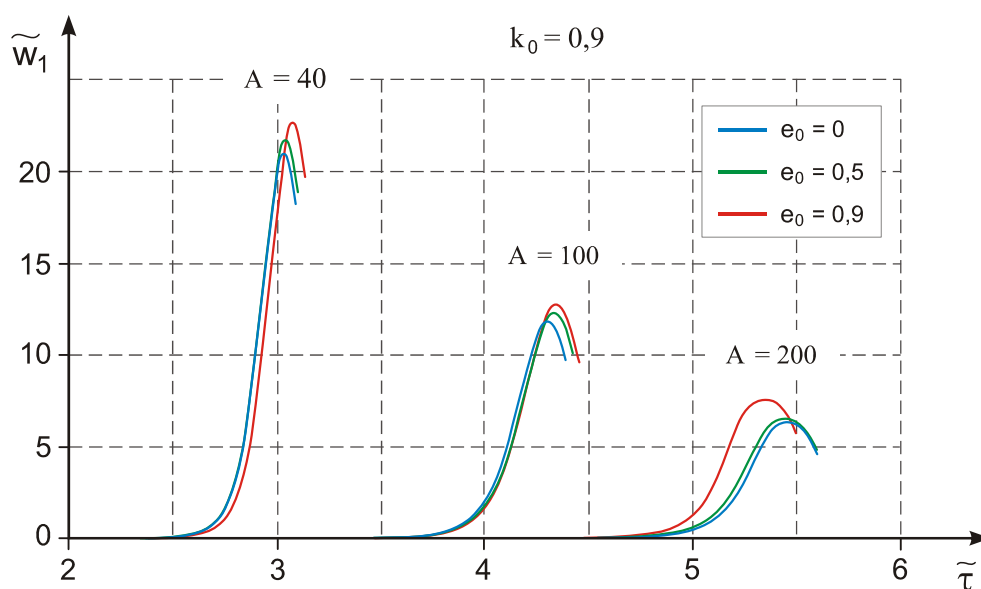
gdzie:

A – krotność górnego obciążenia krytycznego.

Wpływ parametru porowatości dla różnych prędkości obciążenia przedstawiono na rysunkach 6.24, 6.25. Wzrost porowatości materiału powoduje zwiększenie lokalnego maksymalnego ugięcia. Jednakże, początkowy przebieg utraty stateczności jest praktycznie taki sam dla różnych parametrów e_0 . Zaobserwowane maksymalne różnice pomiędzy wynikami nie przekraczały wartości $0,15 N_{0g}$ (przy $\tilde{w} = 1$). Wynikają one przede wszystkim z innej postaci odkształcenia powłoki. W pozostałych przypadkach różnice te wynosiły średnio $0,1 N_{0g}$. Przyjmując te wartości jako małe, można przedstawić dynamiczne obciążenia krytyczne niezależnie od parametru e_0 . Wielkością charakteryzującą jest tutaj wartość N_{0g} danej powłoki.

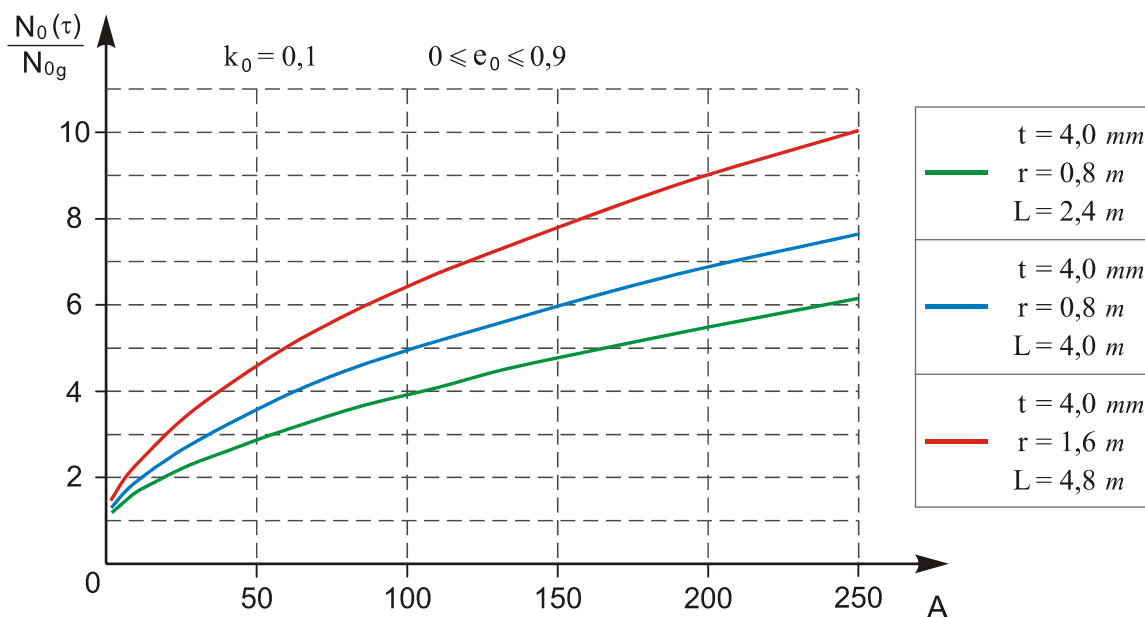


Rys. 6.24. Ugięcie powłoki w zależności od parametru e_0 dla $k_0 = 0,1$

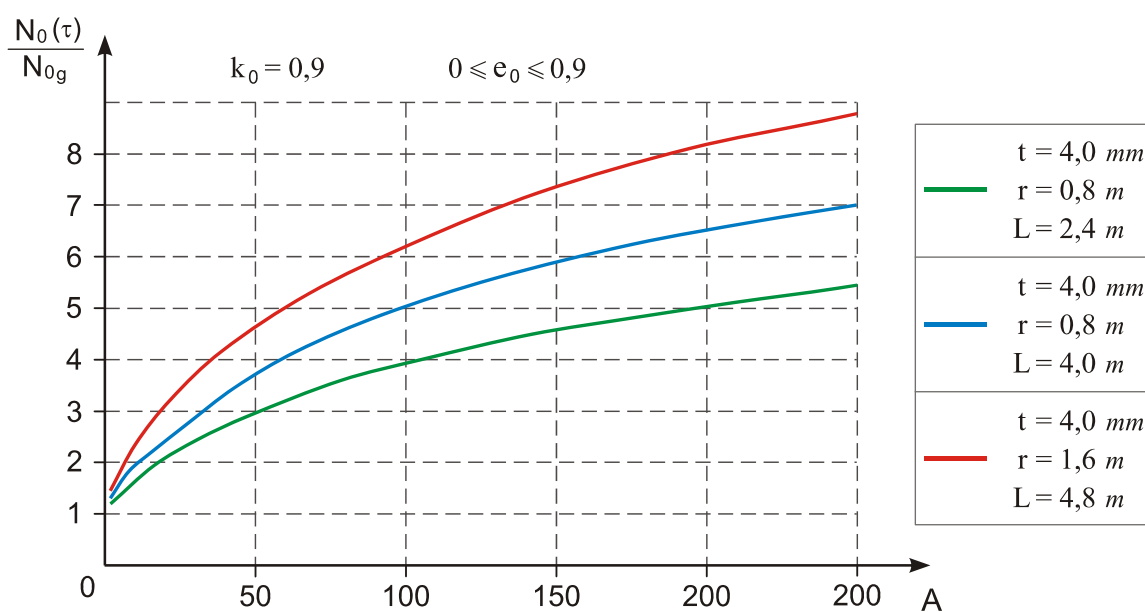


Rys. 6.25. Ugięcie powłoki w zależności od parametru e_0 dla $k_0 = 0,9$

Wpływ zmiany parametrów geometrycznych powłoki na dynamiczne obciążenia krytyczne przedstawiony został na rysunkach 6.26, 6.27. Wyniki obliczeń odniesiono do wartości N_{0g} danej powłoki. Analizując uzyskane wyniki można stwierdzić, że współczynnik obciążenia dynamicznego wzrasta w przypadku powłoki o większej proporcji promienia do grubości. Analogiczna sytuacja przedstawia się w przypadku zwiększenia proporcji długości do promienia. W każdym przypadku, przy większych prędkościach, wzrost udziału ciśnienia powoduje zwiększenie współczynnika obciążenia dynamicznego.



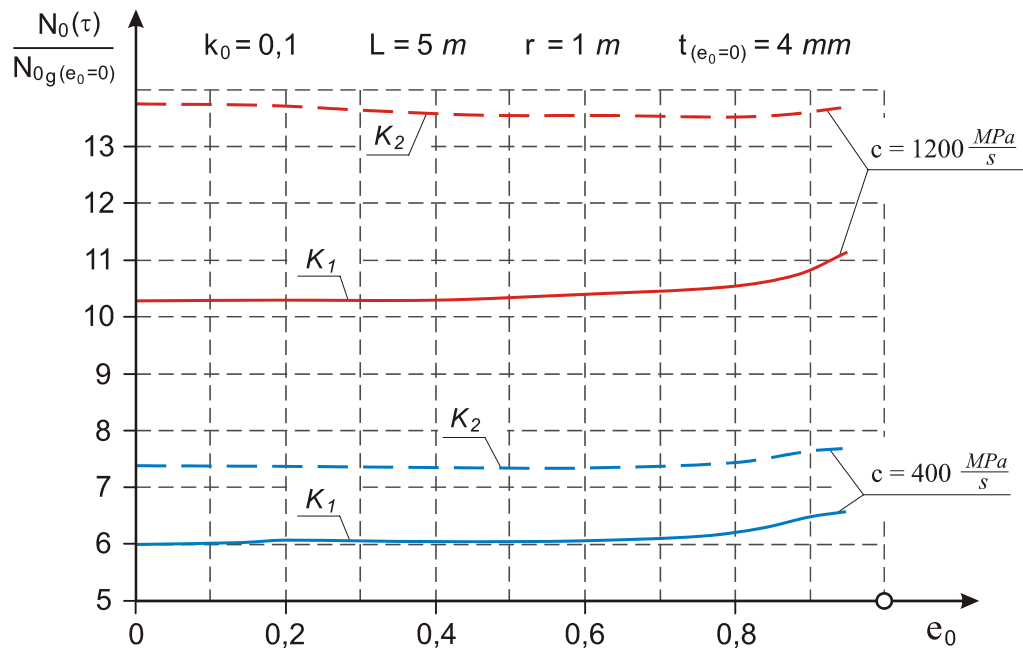
Rys. 6.26. Wpływ parametrów geometrycznych powłoki na dynamiczne obciążenia krytyczne dla $k_0 = 0,1$



Rys. 6.27. Wpływ parametrów geometrycznych powłoki na dynamiczne obciążenia krytyczne dla $k_0 = 0,9$

Kolejny rysunek przedstawia wpływ porowatości materiału na przedział dynamicznych obciążeń krytycznych przy ustalonej masie powłoki. Analogicznie jak w zagadnieniu statycznym (Rys. 6.11) zmienna w tym przypadku jest grubość powłoki. Wyniki obliczeń odniesiono do wartości górnego obciążenia krytycznego powłoki o strukturze jednorodnej.

Na rysunku 6.28, krzywa K_1 określa dynamiczne obciążenia krytyczne na podstawie kryterium Wolmira, natomiast krzywa K_2 odpowiada osiągnięciu lokalnej maksymalnej wartości (Rys. 6.18).



Rys. 6.28. Obciążenia krytyczne w zależności od parametru e_0 przy stałej masie powłoki

Wraz ze wzrostem porowatości obserwuje się nieznaczny wzrost dynamicznego obciążenia krytycznego powłoki. Jednocześnie zmniejsza się przedział dynamicznych obciążeń krytycznych (różnica $K_2 - K_1$). Podobna tendencja ma miejsce w przypadku dominującego ściskania osiowego.

6.2.2. Obciążenie o charakterze quasi-impulsowym

Obciążenie zewnętrzne powłoki o charakterze quasi-impulsowym oraz przebiegu sinusoidalnym zmienia się w czasie wg następujących warunków

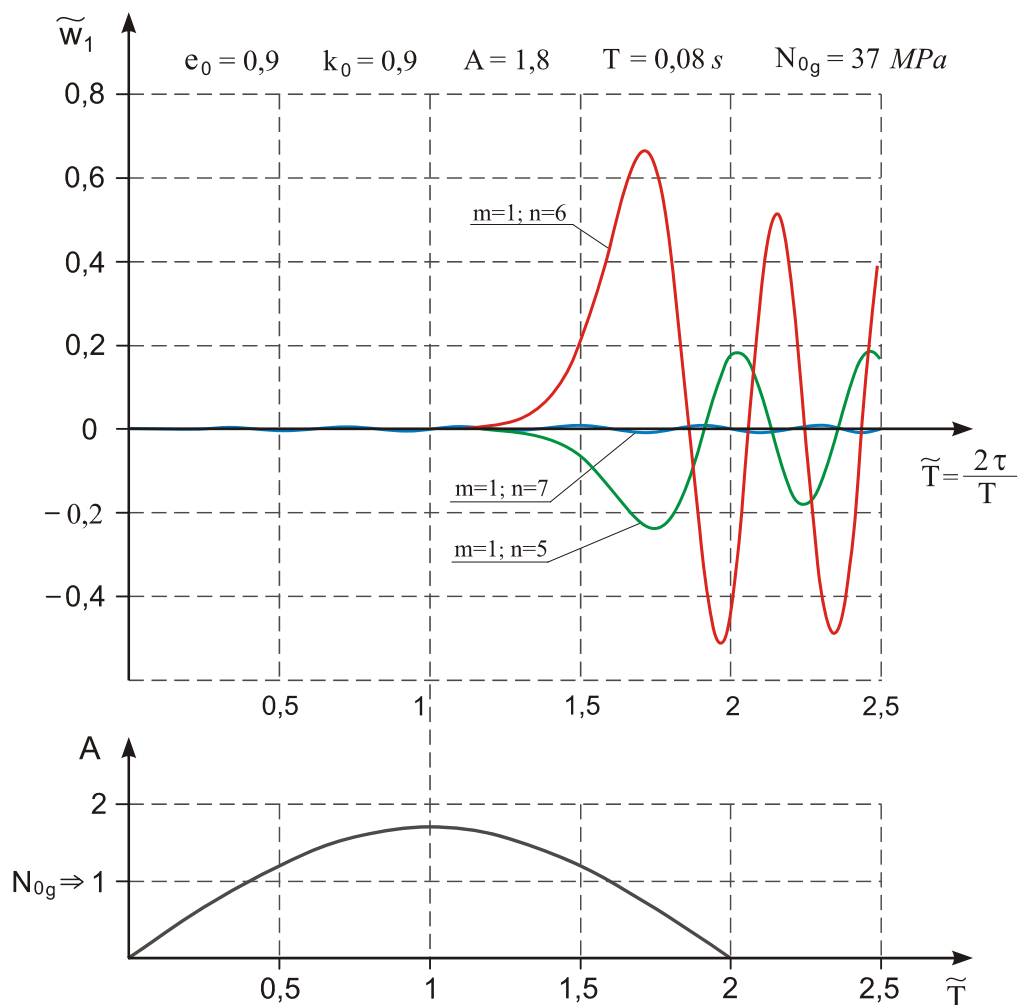
$$N_0(\tau) = A \cdot N_{0g} \sin \frac{\pi \tau}{T} \quad \text{dla} \quad 0 \leq \tau \leq T$$

$$N_0(\tau) = 0 \quad \text{dla} \quad \tau > T$$
(6.10)

gdzie:

T – czas trwania impulsu.

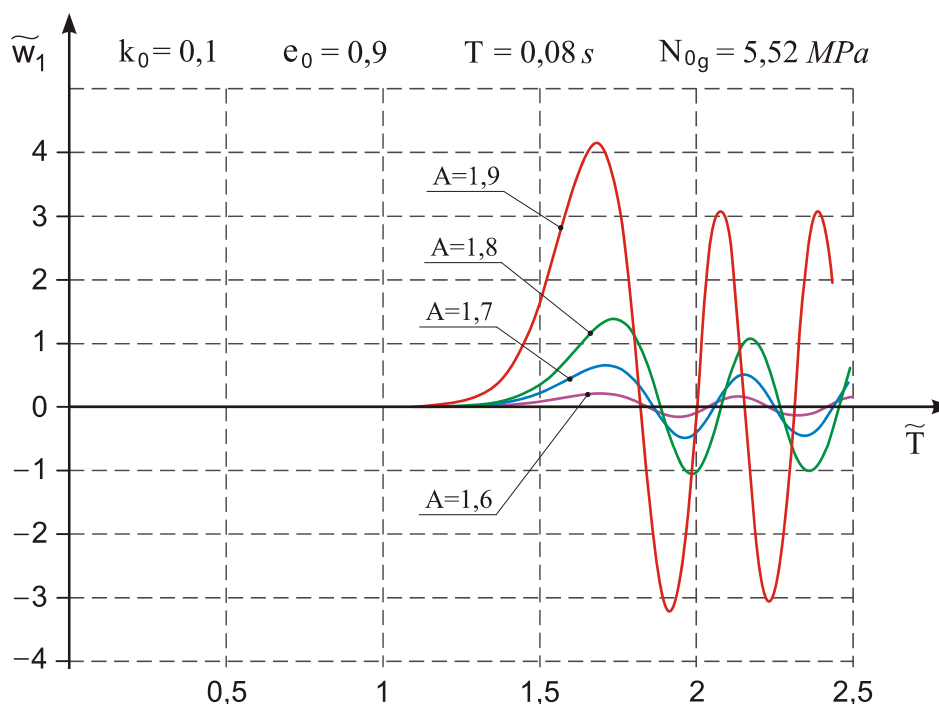
Podobnie jak w przypadku liniowego przyrostu obciążenia, wyniki obliczeń odniesiono do wartości górnej siły krytycznej danej powłoki. Wielkość impulsu jest ustalana parametrem A określającym stopień podwyższenia górnego obciążenia krytycznego.



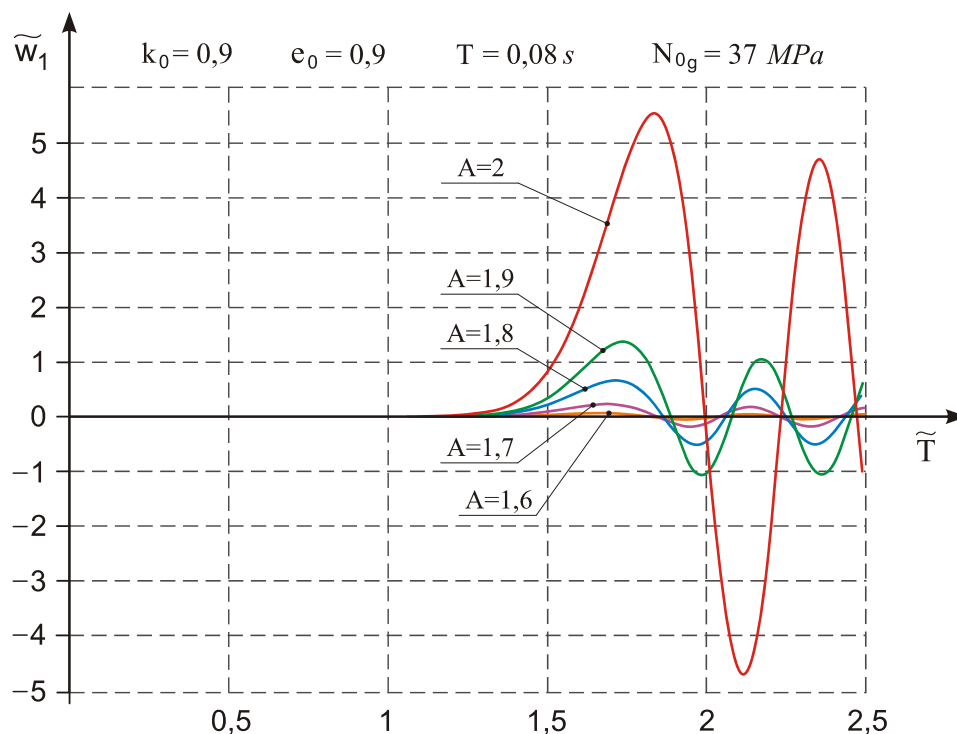
Rys. 6.29. Ugięcie powłoki w zależności od postaci wybożenia

Rysunki 6.29 – 6.31 przedstawiają wyniki obliczeń dla powłoki o wymiarach $t = 4 \text{ mm}$, $r = 800 \text{ mm}$, $L = 2400 \text{ mm}$. Przebieg obciążenia oraz ugięcie powłoki w zależności od postaci odkształcenia, przedstawiono na rysunku 6.29. Wpływ wielkości impulsu oraz parametru k_0 na postać odkształcenia powłoki jest podobny jak w przypadku liniowego przyrostu obciążenia.

Rysunki 6.30 i 6.31 przedstawiają przykładowe przebiegi ugięcia powłoki pod wpływem wzrostu obciążenia zewnętrznego. Przedstawiono tutaj wyniki obliczeń odpowiednio dla parametru $k_0 = 0,1$ oraz $k_0 = 0,9$. Początkowo, wzrost wielkości impulsu nie powoduje utraty stateczności powłoki. Powstają tylko drgania o małej amplitudzie. Należy zwrócić uwagę, że w rzeczywistych przypadkach występuje tłumienie wewnętrzne i drgania te będą miały charakter gasnący. Dalszy nieznaczny przyrost obciążenia powoduje gwałtowny wzrost ugięcia. Następuje tutaj dynamiczna utrata stateczności powłoki. Zjawisko to jest wyraźnie widoczne na rysunkach 6.32 oraz 6.33, gdzie przedstawiono maksymalne ugięcie powłoki w zależności od wielkości impulsu. Wyniki obliczeń dotyczą powłok o dwóch różnych proporcjach geometrycznych.

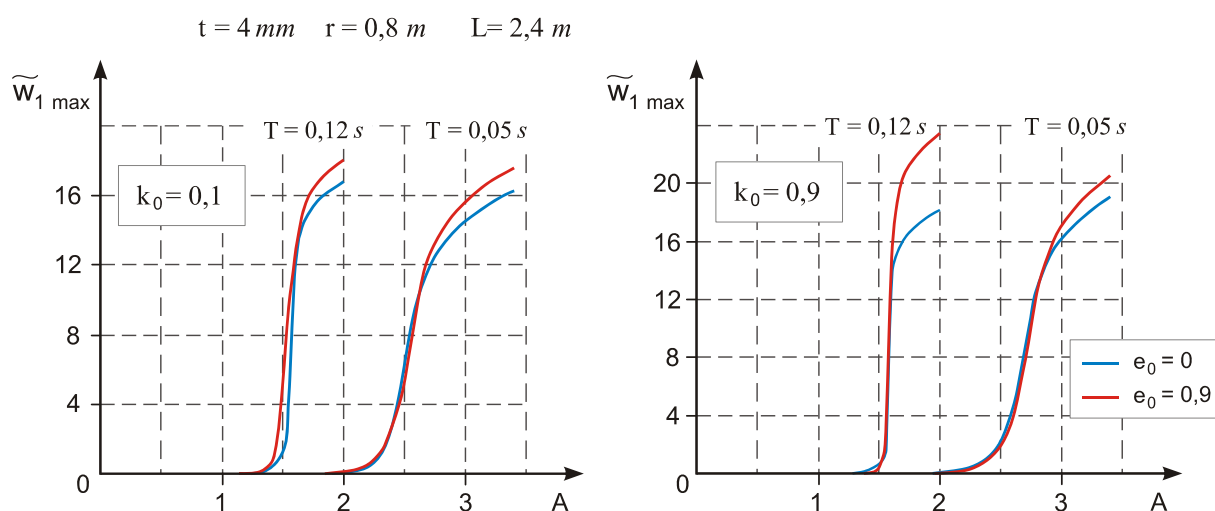


Rys. 6.30. Ugięcie powłoki w zależności od parametru A dla $k_0 = 0,1$

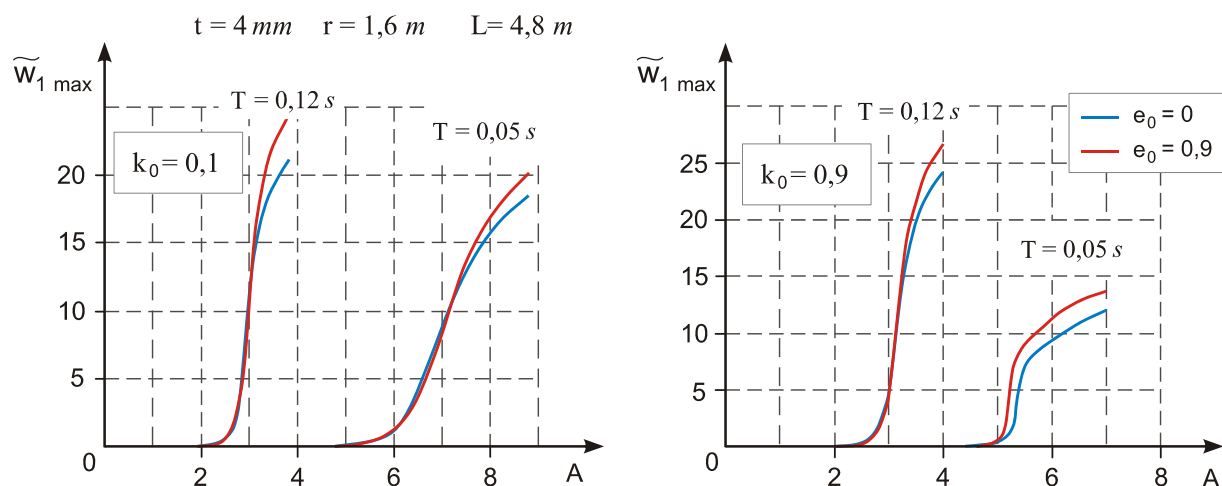


Rys. 6.31. Ugięcie powłoki w zależności od parametru A dla $k_0 = 0,9$

Wpływ parametru porowatości na utratę stateczności powłoki jest analogiczny jak w przypadku liniowego przyrostu obciążenia. Tutaj również początkowy wzrost ugięć jest praktycznie taki sam dla różnych parametrów e_0 . Natomiast przebieg utraty stateczności jest bardziej gwałtowny w przypadku materiału porowatego. Powłoka o większej proporcji promienia do grubości (Rys. 6.33) wykazuje wyższą odporność na obciążenie impulsowe.



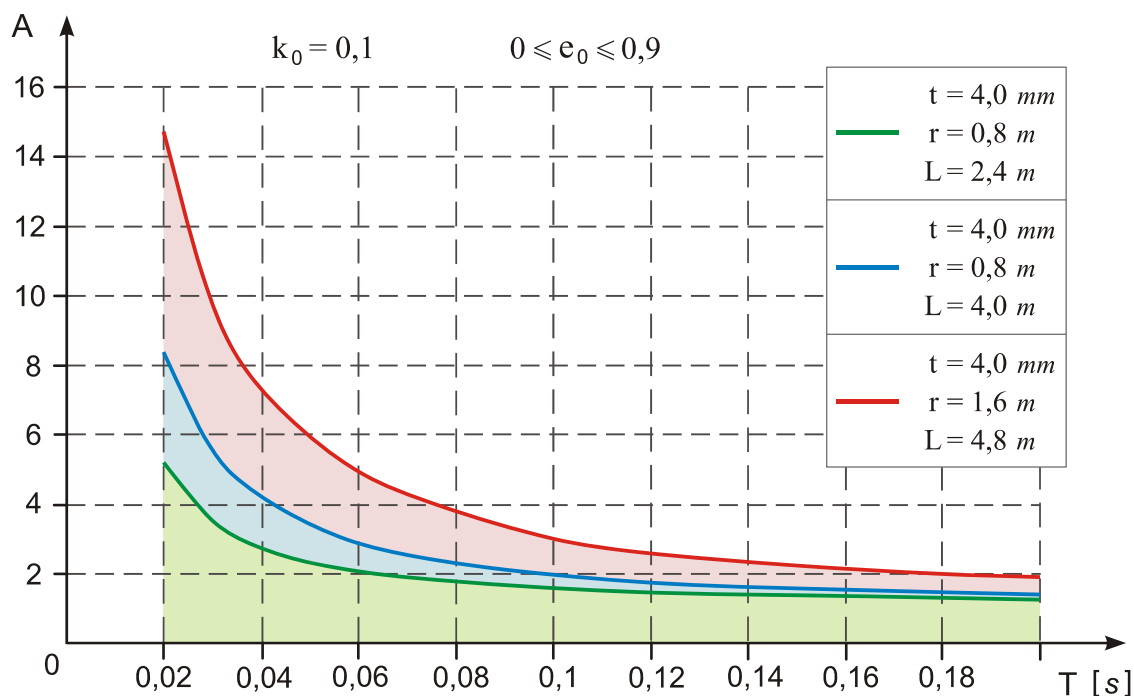
Rys. 6.32. Maksymalne ugięcie powłoki w zależności od parametru A



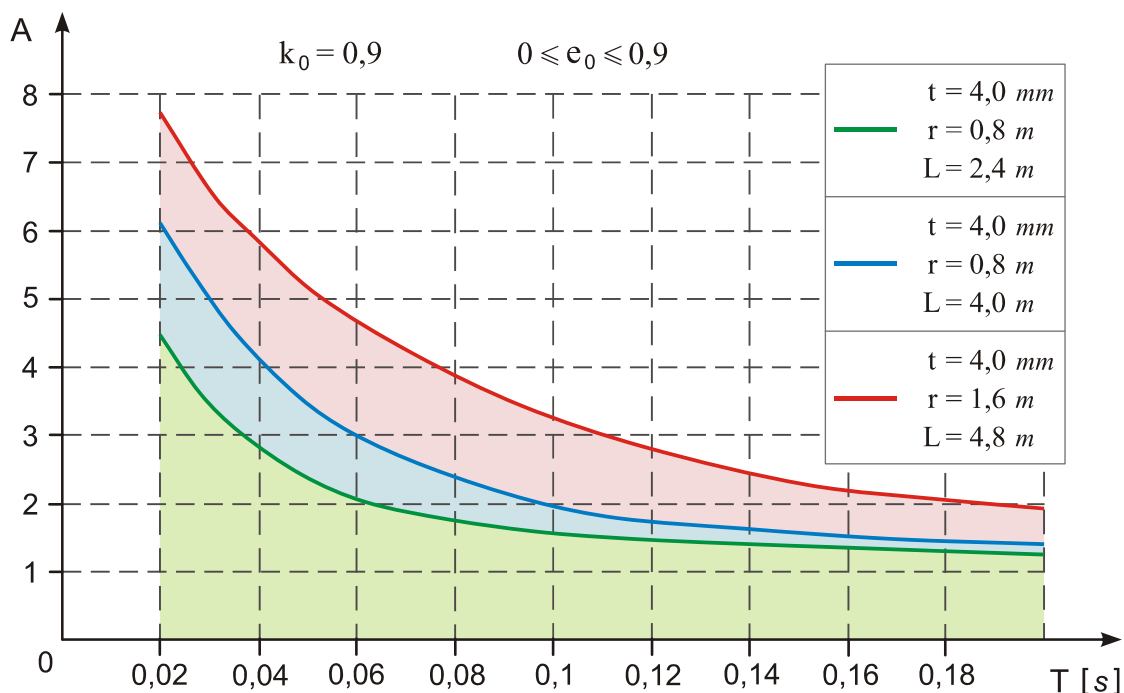
Rys. 6.33. Maksymalne ugięcie powłoki w zależności od parametru A

W każdym przypadku zmniejszenie czasu trwania impulsu powoduje wzrost odporności powłoki na utratę stateczności. Jednocześnie obserwuje się również mniej gwałtowny charakter ugięcia.

Przyjmując dodatkowe kryterium określić można dynamiczne obciążenia krytyczne powłoki. Podobnie jak poprzednio, przyjęto tutaj kryterium Wolmira. Wyniki obliczeń dla różnych czasów trwania impulsu przedstawiono na rysunkach 6.34 oraz 6.35.



Rys. 6.34. Obszary stateczności powłoki przy dominującym ciśnieniu



Rys. 6.35. Obszary stateczności powłoki przy dominującym ściskaniu osiowym

W przypadku liniowego przyrostu obciążenia zewnętrznego określano wartość obciążenia, przy której powłoka ulegnie wyboczeniu. Obciążenie zewnętrzne o charakterze quasi-impulsowym charakteryzuje się tym, że ma skończony czas działania. Tym samym, na podstawie przyjętego kryterium wyznaczyć można obszary stateczności powłoki. Innymi słowy, powłoka poddana obciążeniu impulsowemu o wartości zawartej w danym obszarze nie utraci stateczności.

Stopień podwyższenia górnego obciążenia krytycznego wzrasta w przypadku powłok o większych proporcjach geometrycznych r/t oraz L/r . Wpływ parametru k_0 nie jest tutaj tak jednoznaczny. W przypadku impulsów o czasie trwania $T > 0,06 \text{ s}$ nieznacznie wyższą odporność wykazuje powłoka o parametrze $k_0 = 0,9$. Dla bardzo krótkich impulsów $T < 0,06 \text{ s}$ można stwierdzić wyższą odporność powłoki na wyboczenie w przypadku dominującego ciśnienia. Spowodowane to jest zwiększeniem się liczby m w przypadku dominującego ściskania osiowego.

6.3. Badania porównawcze MES

Badania porównawcze metodą elementów skończonych przeprowadzono dla powłoki walcowej o następujących danych geometrycznych: $t = 4 \text{ mm}$, $r = 800 \text{ mm}$, $L = 2400 \text{ mm}$ oraz materiałowych $E_1 = 7,06 \cdot 10^4 \text{ MPa}$, $\nu = 0,33$, $\rho_1 = 2800 \text{ kg/m}^3$, $e_0 = 0,9$. Do obliczeń wybrano dwa przypadki obciążenia powłoki: $k_0 = 0,1$ oraz $k_0 = 0,9$.

Badania przeprowadzono w następującym zakresie

- stateczność statyczna powłoki,
- stateczność dynamiczna powłoki.

Badania porównawcze wykonano w środowisku programu ANSYS 5.7. Na podstawie wstępnych badań numerycznych przyjęto dla analizowanej powłoki element skończony SHELL181. Element ten ma cztery węzły oraz sześć stopni swobody (w każdym węźle trzy składowe przemieszczenia oraz trzy składowe obrotowe stopnie swobody). Element ten uwzględnia duże obroty oraz duże odkształcenia (w tym także plastyczne) i może być stosowany w nieliniowych zadaniach. Inne elementy skończone np. jedno lub wielowarstwowe, posiadały pewne ograniczenia w zakresie:

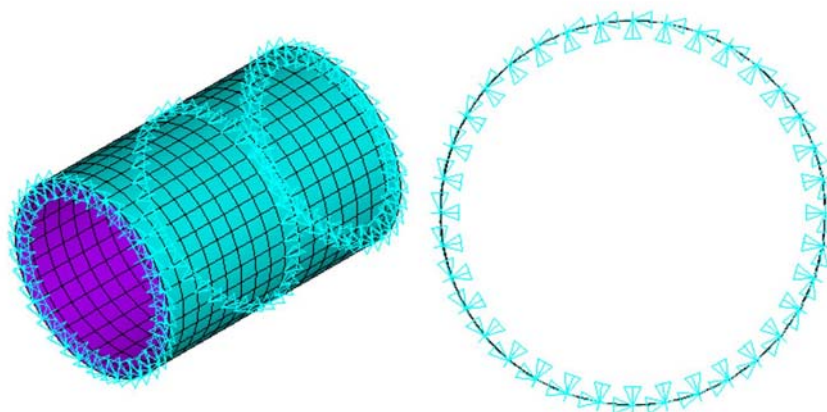
- dużych ugięć i obrotów,
- kryterium naprężeń stycznych pomiędzy warstwami, np. SHELL99.

Model powłoki zawierał w sumie 524 elementy skończone. Wartość średnią wskaźników mechanicznych na przekroju powłoki (moduł sprężystości E_s i gęstość materiału ρ_s) obliczono na podstawie zależności

$$E_s = \int_{-1/2}^{1/2} E(\zeta) = E_1 C_0, \quad (6.11)$$

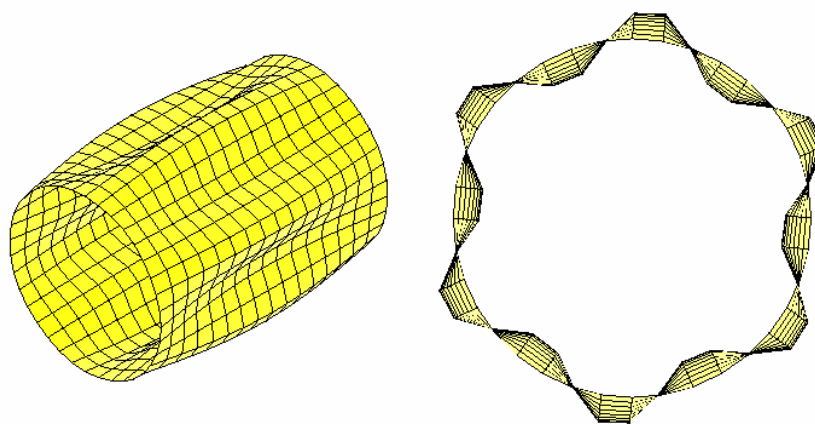
$$\rho_s = \int_{-1/2}^{1/2} \rho(\zeta) = \rho_1 C_5. \quad (6.12)$$

Warunki brzegowe powłoki przedstawiono na rysunku 6.36. Na krawędziach zewnętrznych powłoki zablokowano przemieszczenia w kierunku promieniowym i obwodowym. W połowie długości powłoki odebrano stopnie swobody w kierunku osi powłoki.



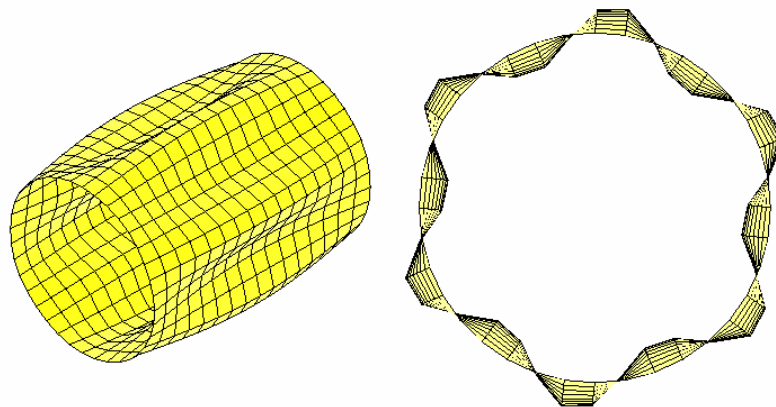
Rys. 6.36. Warunki brzegowe powłoki

W pierwszej kolejności badano stateczność powłoki w zakresie statycznym dla parametru $k_0 = 0,9$. Górne obciążenie krytyczne wyznaczone na podstawie MES wynosi $N_{0g}^{MES} = 124274,7 \text{ N/m}$. W przypadku rozwiązania analitycznego, obciążenie krytyczne wynosi $N_{0g}^{Analit.} = 147989 \text{ N/m}$ przy $m = 1$ i $n = 5$. Porównując wyniki MES z rozwiązaniem analitycznym, otrzymano wartość obciążenia krytycznego o 16 % mniejszą. Odkształcenie powłoki w wyniku utraty stateczności pokazano na rysunku 6.37.



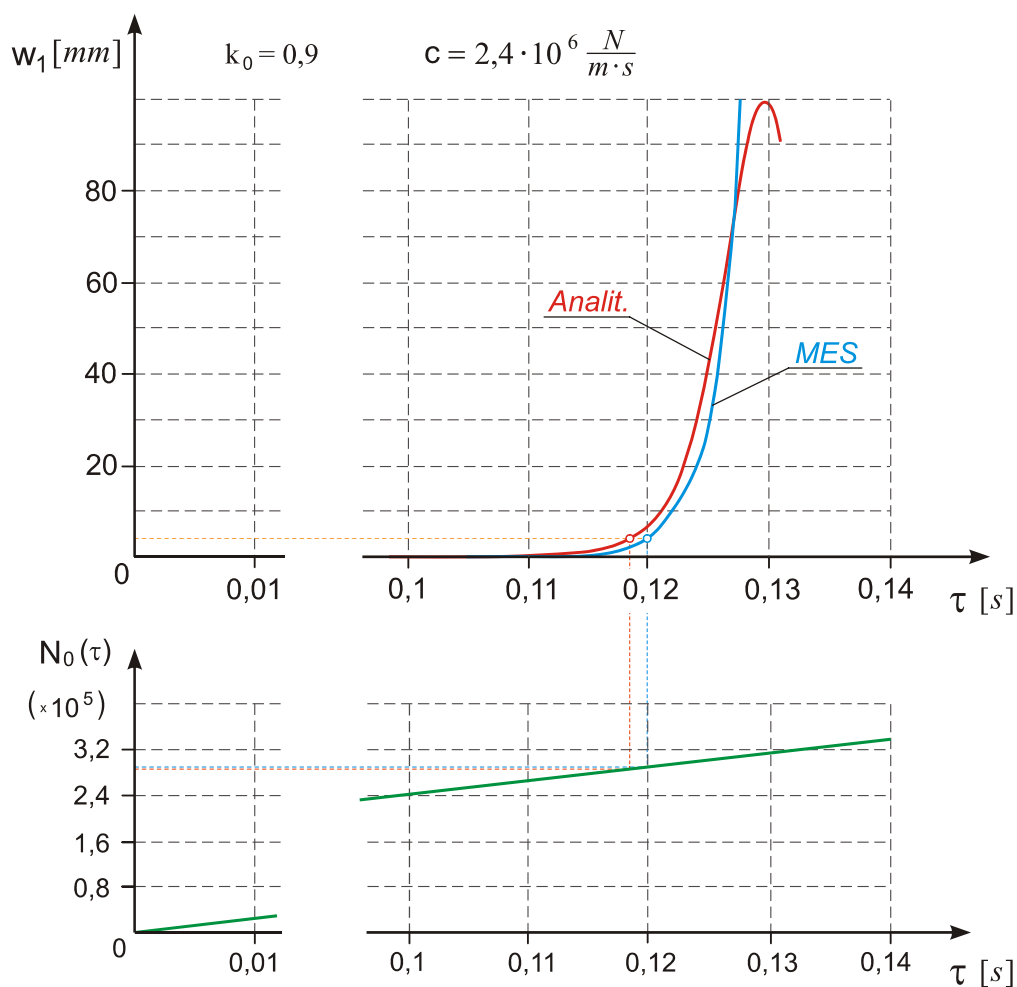
Rys. 6.37. Ugięcie powłoki w wyniku utraty stateczności, $k_0 = 0,9$

W przypadku parametru $k_0 = 0,1$, górne obciążenie krytyczne na podstawie MES wynosi $N_{0g}^{MES} = 17106,2 \text{ N/m}$, natomiast na podstawie obliczeń analitycznych uzyskano $N_{0g}^{Analit.} = 22076 \text{ N/m}$. Postać wybożenia była w obu przypadkach taka sama $m = 1$, $n = 6$. Porównując wyniki obliczeń, w przypadku MES otrzymano wartość obciążenia krytycznego mniejszą o 22,5 %. Postać odkształcenia powłoki przedstawia rysunek 6.38.



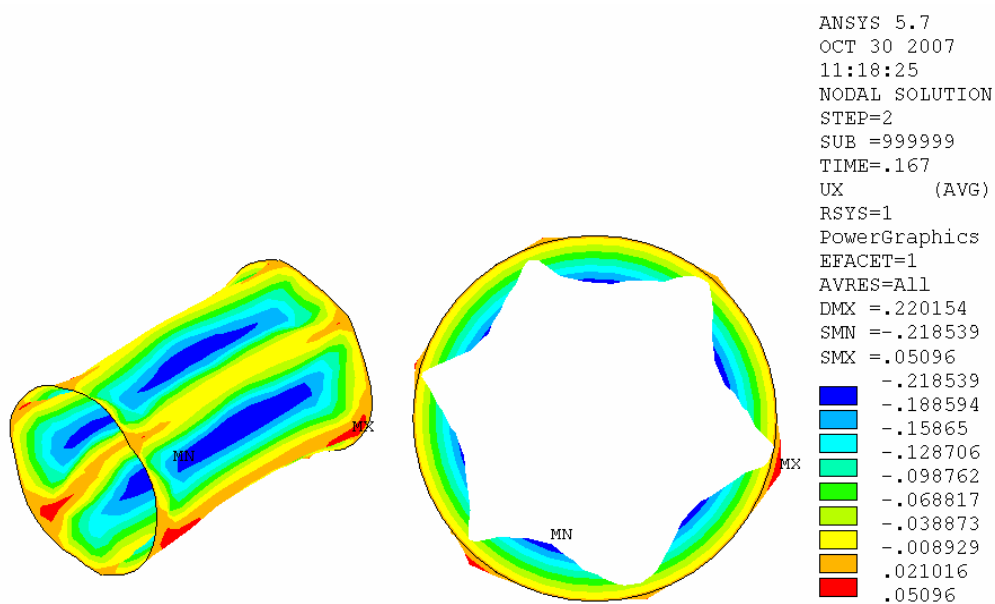
Rys. 6.38. Ugięcie powłoki w wyniku utraty stateczności, $k_0 = 0,1$

Badania porównawcze w zakresie stateczności dynamicznej powłoki wykonano dla przypadku liniowego przyrostu obciążenia w czasie. W celu porównania otrzymanych wyników przyjęto kryterium Wolmira. Wyniki obliczeń numerycznych dla parametru $k_0 = 0,9$ przedstawiono na rysunku 6.39.



Rys. 6.39. Ugięcie powłoki w funkcji czasu dla parametru $k_0 = 0,9$

Przyjęto prędkość narastania obciążenia $c = 2,4 \cdot 10^6 \text{ N/m} \cdot \text{s}$. W przypadku rozwiązania analitycznego, powłoka utraci stateczność po upływie $\tau^{analit.} = 0,119 \text{ s}$, co odpowiada obciążeniu $N_0^{analit.} = 286030 \text{ N/m}$. W przypadku MES, wartości te wynoszą odpowiednio $\tau^{MES} = 0,12 \text{ s}$, $N_0^{MES} = 288000 \text{ N/m}$. Różnica pomiędzy wynikami wynosi 0,7 %. Postać wyboczenia powłoki była w obu przypadkach taka sama ($m = 1$, $n = 6$). Deformację powłoki po czasie $\tau = 0,167 \text{ s}$ przedstawiono na rysunku 6.40.

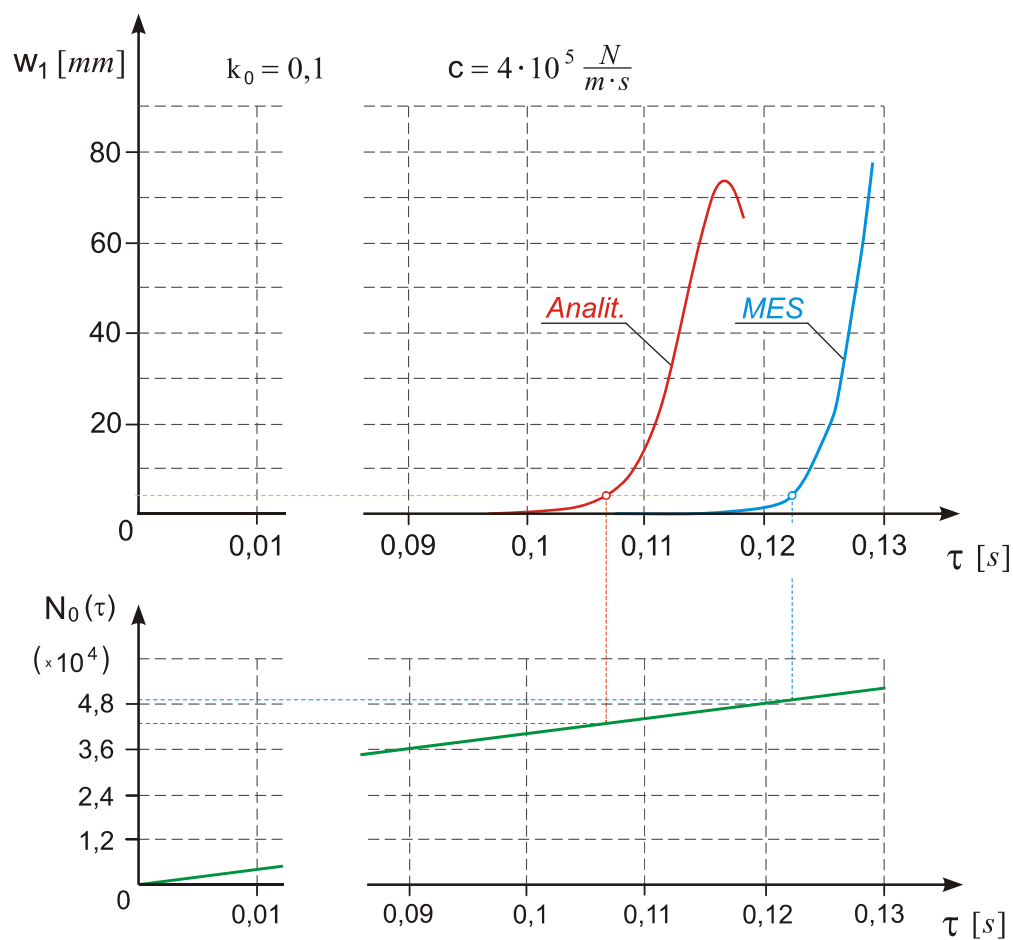
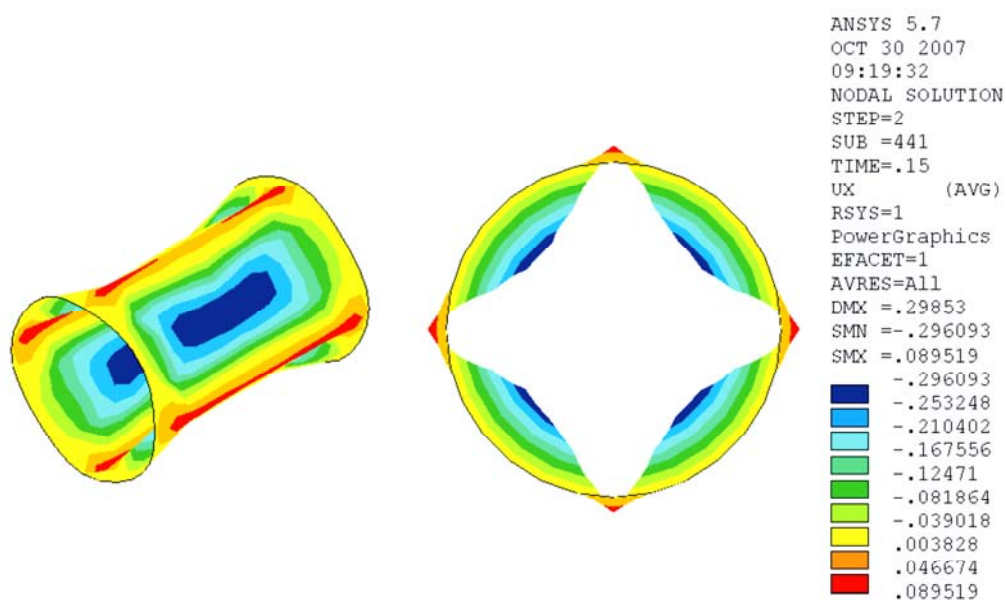


Rys. 6.40. Postać deformacji powłoki po czasie $\tau = 0,167 \text{ s}$ dla $k_0 = 0,9$

Wyniki analizy dla parametru $k_0 = 0,1$ przy prędkości narastania obciążenia $c = 4 \cdot 10^5 \text{ N/m} \cdot \text{s}$ przedstawiono na rysunku 6.41. Wyniki obliczeń wynoszą odpowiednio:

- rozwiązanie analityczne $\tau^{analit.} = 0,107 \text{ s}$, $N_0^{analit.} = 42680 \text{ N/m}$, $m = 1$, $n = 6$,
- rozwiązanie MES $\tau^{MES} = 0,122 \text{ s}$, $N_0^{MES} = 48800 \text{ N/m}$, $m = 1$, $n = 4$.

Różnica pomiędzy wynikami wynosi w tym przypadku 12,5 %. Deformację powłoki po czasie $\tau = 0,15 \text{ s}$ przedstawiono na rysunku 6.42.

Rys. 6.41. Ugięcie powłoki w funkcji czasu dla parametru $k_0 = 0,1$ Rys. 6.42. Postać deformacji powłoki po czasie $\tau = 0,15$ s dla $k_0 = 0,1$

7. Zakończenie

Rozważania zamieszczone w pracy dotyczyły zagadnienia stateczności statycznej oraz dynamicznej cylindrycznych powłok walcowych, poddanych obciążeniu złożonemu. Na podstawie nieliniowego opisu deformacji przekroju poprzecznego ścianki powłoki, uzyskano zależności pomiędzy parametrami ugięcia i obciążenia z uwzględnieniem efektu ścinania w przekroju poprzecznym. Jednocześnie spełniony jest tutaj warunek niewystępowania efektu ścinania na powierzchniach zewnętrznych powłoki (powierzchnie zewnętrzne są swobodne). Wyprowadzone w pracy równania mają pewien uniwersalny charakter zarówno w zakresie zmiany właściwości fizycznych powłoki (parametr e_0) jak i kombinacji obciążenia zewnętrznego (parametr k_0). Odpowiedni dobór parametru e_0 umożliwia badanie powłok o strukturze jednorodnej jak również porowatej. Z pewnym przybliżeniem możliwe jest również badanie konstrukcji wielowarstwowych. Warunkiem jest tutaj odpowiedni rozkład właściwości fizycznych poszczególnych warstw na grubości powłoki oraz liczba warstw. Z kolei zmiana parametru k_0 umożliwia analizowanie powłok poddanych obciążeniu złożonemu jak również prostemu: ciśnieniu zewnętrznemu lub ścisłaniu osiowemu.

Na podstawie uzyskanych wyników można wysunąć następujące wnioski:

- Wzrost prędkości narastania obciążenia oraz skrócenie czasu trwania impulsu powoduje zwiększenie dynamicznej odporności powłoki na wyboczenie. Jednocześnie podczas utraty stateczności obserwuje się inną niż statyczna postać wyboczenia powłoki.
- Wzrost proporcji geometrycznych powłoki L/r oraz r/t , w odniesieniu do rzeczywistych wartości, powoduje zmniejszenie dynamicznego obciążenia krytycznego. Spadek ten jest mniejszy niż w zagadnieniu statycznym.
- Wzrost porowatości materiału przy ustalonych wymiarach powłoki powoduje zmniejszenie obciążeń krytycznych. Zwiększenie grubości powłoki, przy zachowaniu stałej masy (zmienny parametr e_0), powoduje znaczne zwiększenie wartości statycznych obciążeń krytycznych. W zagadnieniu dynamicznym, odporność powłoki na wyboczenie wzrasta tutaj nieznacznie.
- Wzrost udziału ciśnienia zewnętrznego w całkowitym obciążeniu powoduje zmniejszenie obciążeń krytycznych.

Dalsze rozważania przeprowadzone zostaną w następujących kierunkach:

- uwzględnienie w modelu analitycznym wstępnych imperfekcji,
- uwzględnienie w energii kinetycznej składowych przemieszczeń w płaszczyźnie powłoki,
- uszczegółowienie nieliniowych składników pola odkształceń,
- uwzględnienie wpływu tłumienia wewnętrznego i zewnętrznego na drgania poprzeczne powłoki,
- interakcja stateczności lokalnej i globalnej,
- badanie wpływu przebiegu obciążenia na dynamiczną utratę stateczności,
- badania powłok o zmiennej sztywności poprzecznej.

Rozprawa doktorska została zrealizowana w ramach grantu promotorskiego nr N501 054 31/3650.

Literatura

- [1] Abdullah S., Zeki A., Ali S.: The dynamic buckling of an orthotropic cylindrical thin shell under torsion varying as a power function of time. *Acta Mechanica Solida Sinica*, Vol. 16, Nr 1, str. 81-87, 2003.
- [2] Agamirow W.L., Volmir A.S.: Powiedzenie cilindriczeskich obołoczek pri dynamiczeskom nagruženii wsjestoronnjego dawljenija i osjewogo szatija. *Izw. Akad. Nauk SSSR, OTN, Mech. i Maszinostr.* Nr 3, str. 78-83, 1959.
- [3] Aghajari S., Abedi K., Showkati H.: Buckling and post-buckling behavior of thin-walled cylindrical steel shells with varying thickness subjected to uniform external pressure. *Thin-Walled Structures*, Vol. 44, str. 904-909, 2006.
- [4] Aksogan O., Sofiyev A.H.: Dynamic buckling of a cylindrical shell with variable thickness subject to a time-dependent external pressure varying as a power function of time. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 254, Nr 4, str. 693-702, 2002.
- [5] Awrejcewicz J., Andrianov I.V.: *Płyty i powłoki w przyrodzie, mechanice i biomechanice*. Wyd. WNT, Warszawa, 2001.
- [6] Awrejcewicz J., Vadim A. Krysko: *Dynamika chaotyczna belek, płyt i powłok*. Wyd. WNT, Warszawa, 2005.
- [7] Banhart J.: *Manufacture, characterisation and application of cellular metals and metal foams*. *Progress in Materials Science*, Vol. 46, str. 559-632, 2001.
- [8] Bart-Smith H., Hutchinson J.W., Evans A.G.: Measurement and analysis of the structural performance of cellular metal sandwich construction. *Intern. Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 43, str. 1945-1963, 2001.
- [9] Bažan Z.P., Cedolin L., *Stability of structures*, Oxford University Press, New York, Oxford, 1991.
- [10] Belica T., Magnucki K.: Dynamic stability of a porous cylindrical shell. *PAMM Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 6, str. 207-208, 2006.
- [11] Bisagni Ch., Dynamic buckling of fiber composite shells under impulsive axial compression, *Thin-Walled Structures*, Vol. 43, str. 499-514, 2005.
- [12] Bisagni Ch., Cordisco P.: Post-buckling and collapse experiments of stiffened composite cylindrical shells subjected to axial loading and torque. *Composite Structures*, Vol. 73, str. 138-149, 2006.
- [13] Bogdanovich A.E.: *Nielinjejnije zadači dinamiki cilindričjeckich kompozitnych obołoczek*, *Izw. Einatne*, Riga, 1987.
- [14] Bołotin W.W.: *Dinamiczeskaja ustoicziwost uprugich sistem*. Gostechizdat, Moskwa, 1956.

- [15] Bugajny D.: Nieliniowe równania ruchu małowyniosłej sprężystej trójwarstwowej powłoki. *Rozprawy Inżynierskie*, Vol. 24, Nr 1, str. 15-31, 1976.
- [16] Carrera E.: Developments, ideas and evaluations based upon Reissner's Mixed Variational Theorem in the modeling of multilayered plates and shells. *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 54, Nr 4, str. 301-329, 2001.
- [17] Carrera E.: Historical review of Zig-Zag theories for multilayered plates and shells. *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 56, Nr 3 str. 287-308, 2003.
- [18] Catellani G., Pellicano F., Dall_Asta D., Amabili M.: Parametric instability of a circular cylindrical shell with geometric imperfections. *Computers and Structures*, Vol. 82, str. 2635-2645, 2004.
- [19] Choi J.B., Lakes R.S.: Analysis of elastic modulus of conventional foams and of re-entrant foam materials with a negative poisson's ratio. *Intern. Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 37, Nr 1, str. 51-59, 1995.
- [20] Choong K.K., Ramm E.: Simulation of buckling process of shells by using the finite element method. *Thin-Walled Structures*, Vol. 31, str. 39-72, 1998.
- [21] Donnell L.H.: *Beams, plates and shells*, McGraw-Hill Book Comp., 1976.
- [22] Doo-Sung Lee, *Nonlinear dynamic buckling of orthotropic cylindrical shells subjected to rapidly applied loads*, Kluwer Academic Publishers, *Journal of Engineering Mathematics*, Vol. 38, str. 141-154, 2000.
- [23] Doyle J.F.: *Nonlinear Analysis of Thin-Walled Structures. Static, Dynamics, and Stability*, Springer-Verlag, New York, 2001.
- [24] Filin A.P.: *Elementy teorii obolocek*. Strojizdat, Leningrad, 1975.
- [25] Gibson L. J., Ashby M. F.: *The Mechanics of Three-Dimensional Cellular Materials*. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, Vol. 382, Nr 1782, str. 43-59, 1982.
- [26] Girkmann K., *Dźwigary powierzchniowe*. Wyd. Arkady, Warszawa, 1957.
- [27] Gryboś R.: *Stateczność konstrukcji pod obciążeniem uderzeniowym*. Wyd. PWN, Warszawa 1980.
- [28] Gusic G., Combescure A., Jullien J.F.: The influence of circumferential thickness variations on the buckling of cylindrical shells under external pressure. *Computers and Structures*, Vol. 74, str. 461-477, 2000.
- [29] Hilburger M.W., Starnes J.H. Jr.: Effects of imperfections of the buckling response of composite shells. *Thin-Walled Structures*, Vol. 42, str. 369-397, 2004.
- [30] Huber M.T.: *Teoria sprężystości – część 1 i 2*. Wyd. PWN, Warszawa 1954.
- [31] Joniak S., Osmólski W.: Dynamiczne zagadnienie stateczności powłoki stożkowej w ujęciu nieliniowym. *Rozprawy Inżynierskie*, Vol. 21, Nr 3, str. 413-420, 1973.

- [32] Kaczmarek M., Goueygou M.: Dependence of Elastic Properties of Materials on Their Porosity: Review of Models. *Journal of Porous Media*, Vol. 9, str. 335-355, 2006.
- [33] Kheyrkhan M., Peek R.: Postbuckling analysis and imperfection sensitivity of general shells by the finite element method. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 36, str. 2641-2681, 1999.
- [34] Kovacik, J.: Correlation between shear modulus and porosity in porous materials. *Journal of Materials Science Letters*, Vol. 20, str. 1953-1955, 2001.
- [35] Kovacik, J.: Correlation between Young's modulus and porosity in porous materials. *Journal of Materials Science Letters*, Vol. 18, str. 1007-1010, 1999.
- [36] Koval'chenko M.S.: Elasticity and viscosity of isotropic porous materials. *Powder Metallurgy and Metal Ceramics*, Vol. 42, str. 81-87, 2003.
- [37] Kowal-Michalska K.: Stateczność dynamiczna powłoki walcowej poddanej jednoczesnemu skręcaniu i ciśnieniu zewnętrznemu. *Archiwum Budowy Maszyn*, Vol. 24, Nr 4, str. 609-624, 1977.
- [38] Kubenko V. D., Koval'chuk P. S.: Influence of initial geometric imperfections on the vibrations and dynamic stability of elastic shells. *International Applied Mechanics*, Vol. 40, Nr 8, 2004.
- [39] Leyko J., Spryszyński S.: Energy method of analysis of dynamic stability of a cylindrical shell subjected to torsion. *Archives of Mechanics*, Vol. 26, Nr 1, str. 13-24, 1974.
- [40] Librescu L., Lin W., DiSciuva M., Icardi U.: Postbuckling of laminated composite and sandwich plates and shells: On the significance of the fulfillment of static interlayer continuity conditions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 148, str. 165-186, 1997.
- [41] Magnucki K.: Stateczność sprężysta konstrukcji prętowych i powłokowych w ujęciu energetycznym. *Rozprawy*, nr 246, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań, 1991.
- [42] Magnucki K., Malinowski M., Lewiński J., Optimal Design of an isotropic porous-cellular cylindrical shell, *Proc. of ICPVT-11, Int. Conference on Pressure Vessel Technology*, Vancouver, Canada, 2006.
- [43] Magnucki K., Mielniczuk J., Ostwald M.: Wybrane zagadnienia projektowania porowatych konstrukcji powierzchniowych. *Wyd. Instytut Pojazdów Szynowych „TABOR”*, Poznań, 2007.
- [44] Magnucki K., Ostwald M., Stateczność i optymalizacja konstrukcji trójwarstwowych, *Wyd. ITE*, Radom, 2001.
- [45] Magnucki K., Stasiewicz P.: Elastic bending of an isotropic porous beam. *Int. Journal of Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 9, Nr 2, str. 351-360, 2004.

- [46] Magnucki K., Stasiewicz P.: Elastic buckling of a porous beam. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, Vol. 42, Nr 4, str. 859-868, 2004.
- [47] Malinowski M., Magnucki K.: Buckling of an isotropic porous cylindrical shell. *Proc. of the 10th Int. Conference on Civil, Structural and Environmental Engineering Computing*, Civil-Comp. Press, Stirling, Scotland 2005, (paper 53), str. 1-10.
- [48] Malinowski M., Magnucki K.: Deflection of an isotropic porous cylindrical shell. *Shell Structures: Theory and Applications*, Proc. of the 8th SSTA Conference, Jurata, Poland, str. 143-147, 2005.
- [49] Matemilola S.A., Stronge W.J.: Impact response of composite cylinders. *Int. J. Solids Structures*, Vol. 34, Nr 21, str. 2669-2684, 1997.
- [50] Mielniczuk J.: Plasticity of porous materials. Theory and the limit load capacity, *Wyd. Politechniki Poznańskiej*, 2000.
- [51] Ng T.Y., Lam K.Y., Reddy J.N.: Dynamic stability of cross-ply laminated composite cylindrical shells. *Intern. Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 40, Nr 8 str. 805-823, 1998.
- [52] Ostwald M.: Stateczność trójwarstwowej powłoki walcowej z ugięciami początkowymi przy obciążeniach złożonych. *Archiwum Budowy Maszyn*, Vol. 32, Nr 1-2, str. 67-76, 1985.
- [53] Qatu M.S.: *Vibration of Laminated Shells and Plates*. Elsevier Science and Technology, 2004.
- [54] Romanów F.: Binieliniowa teoria obliczania konstrukcji warstwowych. *Archiwum motoryzacji*, Vol. 4, str. 163-176, 2001.
- [55] Romanów F., *Wytrzymałość konstrukcji warstwowych*, Wyd. WSI, Zielona Góra 1995.
- [56] Romanów F., Malinowski M.: Dynamic stability of sandwich cylindrical shell. *Archives of Civil Engineering*, Vol. 45, Nr 3, 453-464, 1999.
- [57] Sahu S. K., Datta P. K.: *Research Advances in the Dynamic Stability Behavior of Plates and Shells: 1987–2005. Part I: Conservative Systems*. *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 60, str. 65-75, 2007.
- [58] Simone A.E., Gibson L.J.: Efficient structural components using porous metals. *Materials Science and Engineering*, Vol. A229, str. 55-62, 1997.
- [59] Szyc W., Stateczność otwartej trójwarstwowej powłoki walcowej dynamicznie ściskanej. *Rozprawy Inżynierskie*, Vol. 20, Nr 4, str. 539-553, 1972.
- [60] Szyc W., Twardosz F.: Dynamiczna stateczność trójwarstwowej otwartej powłoki walcowej poddanej ścinaniu. *Archiwum Budowy Maszyn*, Vol. 24, Nr 1, str. 57-67, 1977.
- [61] Timoszenko S., Gere J.M.: *Teoria stateczności sprężystej*. Wyd. Arkady, Warszawa 1963.

- [62] Timoszenko S., Goodier J.N.: Teoria sprężystości. Wyd. Arkady, Warszawa 1962.
- [63] Timoszenko S., Woinowsky-Krieger S.: Teoria płyt i powłok. Wyd. Arkady, Warszawa 1962.
- [64] Twardosz F., Zielnica J.: Analiza stateczności dynamicznej powłoki stożkowej obciążonej siłami podłużnymi i wszechstronnym ciśnieniem. *Archiwum Budowy Maszyn*, Vol. 25, Nr 2, 1978.
- [65] Volmir A.S., *Nielinijnaja dinamika płastinok i obołoczek*, Nauka, Moskwa 1972.
- [66] Volmir A.S., *Ustojčivost deformirujemnych sistem*, Wyd. Nauka, Moskwa 1967.
- [67] Wilde R., Zborala P.: Review of different theories of laminated composite plates and shells for pressure vessels. 4th Conference Thin-walled Vessels and Beams, Kołobrzeg, Polska, str. 187-198, 2007.
- [68] Włodarczyk J., Niezgoda T., Barnat W., Dziewulski P.: Validation of numerical models of metallic foams from the aspect of energy absorption. *Journal of KONES Powertrain and Transport*, Vol. 14, Nr 2, str 561-569, 2007.
- [69] Woźniak Cz.: *Mechanika sprężystych płyt i powłok*, Praca zbiorowa pod red. Czesława Woźniaka, Wyd. PWN, Warszawa 2001.
- [70] Zielnica J., *Stateczność powłok sprężysto-plastycznych*, Wyd. Politechniki Poznańskiej, Poznań 2001.

ZAŁĄCZNIK 1

Stałe całkowania po grubości powłoki w granicach $-1/2 \leq \zeta \leq 1/2$:

$$C_{00} = \int_{-1/2}^{1/2} [1 - e_0 \cos(\pi \zeta)] d\zeta = 1 - \frac{2}{\pi} e_0$$

$$C_{01} = \int_{-1/2}^{1/2} [1 - e_0 \cos(\pi \zeta)] \zeta d\zeta = 0$$

$$C_{02} = \int_{-1/2}^{1/2} [1 - e_0 \cos(\pi \zeta)] \sin(\pi \zeta) d\zeta = 0$$

$$C_{03} = \int_{-1/2}^{1/2} [1 - e_0 \cos(\pi \zeta)] \zeta^2 d\zeta = \frac{1}{12} - \frac{\pi^2 - 8}{2\pi^3} e_0$$

$$C_{04} = \int_{-1/2}^{1/2} [1 - e_0 \cos(\pi \zeta)] \zeta \sin(\pi \zeta) d\zeta = \frac{2}{\pi^2} - \frac{e_0}{4\pi}$$

$$C_{05} = \int_{-1/2}^{1/2} [1 - e_0 \cos(\pi \zeta)] \sin^2(\pi \zeta) d\zeta = \frac{1}{2} - \frac{2e_0}{3\pi}$$

$$C_{06} = \int_{-1/2}^{1/2} [1 - e_0 \cos(\pi \zeta)] \cos^2(\pi \zeta) d\zeta = \frac{1}{2} - \frac{4e_0}{3\pi}$$

Przyjęto: $C_0 = C_{00}$, $C_1 = C_{03}$, $C_2 = \frac{1}{\pi} C_{04}$, $C_3 = \frac{1}{\pi^2} C_{05}$, $C_4 = C_{06}$

ZAŁĄCZNIK 2

Wariacja energii odkształcenia sprężystego:

$$\begin{aligned}
 \delta U_\varepsilon = & \frac{E_1 t}{2(1-\nu^2)} \int_0^L \int_0^{2\pi} \left\{ C_0 \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial w}{r \partial \varphi} \frac{\partial}{r \partial \varphi} (\delta w) + \left(\frac{\partial w}{r \partial \varphi} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) + \right. \right. \\
 & + \left. \left(\frac{\partial w}{r \partial \varphi} \right)^3 \frac{\partial}{r \partial \varphi} (\delta w) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial}{\partial x} (\delta u_0) + 2 \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) + \nu \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial}{r \partial \varphi} (\delta v_0) + \right. \\
 & + 2\nu \frac{\partial v_0}{r \partial \varphi} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) + \left(\frac{\partial w}{r \partial \varphi} \right)^2 \frac{\partial}{r \partial \varphi} (\delta v_0) + 2 \frac{\partial w}{r \partial \varphi} \frac{\partial v_0}{r \partial \varphi} \frac{\partial}{r \partial \varphi} (\delta w) + 2\nu \frac{\partial w}{r \partial \varphi} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial}{r \partial \varphi} (\delta w) + \\
 & + \nu \left(\frac{\partial w}{r \partial \varphi} \right)^2 \frac{\partial}{\partial x} (\delta u_0) + 2 \frac{w}{r} \frac{1}{r} (\delta w) - 2\nu \frac{w}{r} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) - \frac{\nu}{r} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 (\delta w) - 2 \frac{w}{r} \frac{\partial w}{r \partial \varphi} \frac{\partial}{r \partial \varphi} (\delta w) - \\
 & - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial w}{r \partial \varphi} \right)^2 (\delta w) - 2 \frac{\nu}{r} \frac{\partial u_0}{\partial x} (\delta w) - 2\nu \frac{w}{r} \frac{\partial}{\partial x} (\delta u_0) - \frac{2}{r} \frac{\partial v_0}{r \partial \varphi} (\delta w) - 2 \frac{w}{r} \frac{\partial}{r \partial \varphi} (\delta v_0) + 2\nu \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial}{r \partial \varphi} (\delta v_0) + \\
 & + 2\nu \frac{\partial v_0}{r \partial \varphi} \frac{\partial}{\partial x} (\delta u_0) + (1-\nu) \left[\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{r \partial \varphi} \frac{\partial}{r \partial \varphi} (\delta u_0) + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u_0}{r \partial \varphi} \frac{\partial}{r \partial \varphi} (\delta w) + \frac{\partial w}{r \partial \varphi} \frac{\partial u_0}{r \partial \varphi} \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) + \right. \\
 & + \left. \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{r \partial \varphi} \frac{\partial}{\partial x} (\delta v_0) + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial}{r \partial \varphi} (\delta w) + \frac{\partial w}{r \partial \varphi} \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) + \frac{\partial u_0}{r \partial \varphi} \frac{\partial}{r \partial \varphi} (\delta u_0) + \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta v_0) + \right. \\
 & + \left. \frac{\partial u_0}{r \partial \varphi} \frac{\partial}{\partial x} (\delta v_0) + \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial}{r \partial \varphi} (\delta u_0) \right] + 2 \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta u_0) + 2 \frac{\partial v_0}{r \partial \varphi} \frac{\partial}{r \partial \varphi} (\delta v_0) \left. \right\} + 2C_1 t^2 \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\delta w) + \right. \\
 & + \left. \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \varphi^2} \frac{\partial^2}{r^2 \partial \varphi^2} (\delta w) + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{r^2 \partial \varphi^2} (\delta w) + \nu \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\delta w) + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{r \partial x \partial \varphi} \frac{\partial^2}{r \partial x \partial \varphi} (\delta w) \right\} - \\
 & - 2C_2 t^2 \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x} (\delta \psi) + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\delta w) + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial}{r \partial \varphi} (\delta \phi) + \nu \frac{\partial \phi}{r \partial \varphi} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\delta w) + \nu \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \varphi^2} \frac{\partial}{\partial x} (\delta \psi) + \right. \\
 & + \nu \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2}{r^2 \partial \varphi^2} (\delta w) + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \varphi^2} \frac{\partial}{r \partial \varphi} (\delta \phi) + \frac{\partial \phi}{r \partial \varphi} \frac{\partial^2}{r^2 \partial \varphi^2} (\delta w) + (1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{r \partial x \partial \varphi} \frac{\partial}{r \partial \varphi} (\delta \psi) + \right. \\
 & + \left. \frac{\partial \psi}{r \partial \varphi} \frac{\partial^2}{r \partial x \partial \varphi} (\delta w) + \frac{\partial^2 w}{r \partial x \partial \varphi} \frac{\partial}{\partial x} (\delta \phi) + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2}{r \partial x \partial \varphi} (\delta w) \right] \left. \right\} + 2C_3 t^2 \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta \psi) + \frac{\partial \phi}{r \partial \varphi} \frac{\partial}{r \partial \varphi} (\delta \phi) + \right. \\
 & + \nu \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{r \partial \varphi} (\delta \phi) + \nu \frac{\partial \phi}{r \partial \varphi} \frac{\partial}{\partial x} (\delta \psi) + \frac{1}{2} (1-\nu) \left[\frac{\partial \psi}{r \partial \varphi} \frac{\partial}{r \partial \varphi} (\delta \psi) + \frac{\partial \psi}{r \partial \varphi} \frac{\partial}{\partial x} (\delta \phi) + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{r \partial \varphi} (\delta \psi) + \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta \phi) \right] + C_4 \left\{ (1-\nu) [\psi (\delta \psi) + \phi (\delta \phi)] \right\} \right\} rd\varphi dx
 \end{aligned}$$

Po wykonaniu całkowania przez części względem zmiennych x i φ otrzymano:

$$\begin{aligned}
\delta U_\varepsilon = & \frac{E_1 t}{2(1-\nu^2)} \int_0^L \int_0^{2\pi} \left\{ C_0 \left\{ \left\{ -3 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 3 \left(\frac{\partial w}{r \partial \varphi} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \varphi^2} - \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \varphi^2} - \left(\frac{\partial w}{r \partial \varphi} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \right. \right. \\
& - 4 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{r \partial x \partial \varphi} \frac{\partial w}{r \partial \varphi} + \frac{1}{r} \left[\left(\frac{\partial w}{r \partial \varphi} \right)^2 + 2w \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{2}{r} w - 2 \frac{\partial v_0}{r \partial \varphi} \right] + \frac{\nu}{r} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2w \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial u_0}{\partial x} \right] - \\
& - 2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial x} - 2 \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 v_0}{r^2 \partial \varphi^2} \frac{\partial w}{r \partial \varphi} - 2 \frac{\partial v_0}{r \partial \varphi} \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \varphi^2} - 2\nu \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial v_0}{r \partial \varphi} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] - \\
& - (1-\nu) \left[\frac{\partial^2 u_0}{r^2 \partial \varphi^2} \frac{\partial w}{\partial x} + 2 \frac{\partial u_0}{r \partial \varphi} \frac{\partial^2 w}{r \partial x \partial \varphi} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \frac{\partial w}{r \partial \varphi} + 2 \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{r \partial x \partial \varphi} \right] - (1+\nu) \left[\frac{\partial^2 u_0}{r \partial x \partial \varphi} \frac{\partial w}{r \partial \varphi} + \right. \\
& \left. + \frac{\partial^2 v_0}{r \partial x \partial \varphi} \frac{\partial w}{\partial x} \right] \left\} \delta w + \left\{ -2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial x} + 2 \frac{\nu}{r} \frac{\partial w}{\partial x} - (1+\nu) \left[\frac{\partial^2 v_0}{r \partial x \partial \varphi} + \frac{\partial w}{r \partial \varphi} \frac{\partial^2 w}{r \partial x \partial \varphi} \right] - \right. \\
& - (1-\nu) \left[\frac{\partial^2 u_0}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \varphi^2} \frac{\partial w}{\partial x} \right] \left\} \delta u_0 + \left\{ -2 \frac{\partial^2 v_0}{r^2 \partial \varphi^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \varphi^2} \frac{\partial w}{r \partial \varphi} + \frac{2}{r} \frac{\partial w}{r \partial \varphi} - (1+\nu) \left[\frac{\partial^2 u_0}{r \partial x \partial \varphi} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial^2 w}{r \partial x \partial \varphi} \frac{\partial w}{\partial x} \right] - (1-\nu) \left[\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial w}{r \partial \varphi} \right] \right\} \delta v_0 \left\} + 2C_1 t^2 \left\{ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{r^2 \partial x^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^4 w}{r^4 \partial \varphi^4} \right\} \delta w - \\
& - 2C_2 t^2 \left\{ \left\{ \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \psi}{r^2 \partial x \partial \varphi^2} + \frac{\partial^3 \phi}{r^3 \partial \varphi^3} + \frac{\partial^3 \phi}{r \partial x^2 \partial \varphi} \right\} \delta w - \left\{ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{r^2 \partial x \partial \varphi^2} \right\} \delta \psi - \right. \\
& - \left\{ \frac{\partial^3 w}{r^3 \partial \varphi^3} + \frac{\partial^3 w}{r \partial x^2 \partial \varphi} \right\} \delta \phi \left\} - C_3 t^2 \left\{ \left\{ 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + (1+\nu) \frac{\partial^2 \phi}{r \partial x \partial \varphi} + (1-\nu) \frac{\partial^2 \psi}{r^2 \partial \varphi^2} \right\} \delta \psi + \right. \\
& \left. + \left\{ 2 \frac{\partial^2 \phi}{r^2 \partial \varphi^2} + (1+\nu) \frac{\partial^2 \psi}{r \partial x \partial \varphi} + (1-\nu) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right\} \delta \phi \right\} + (1-\nu) C_4 \left\{ \psi \delta \psi + \phi \delta \phi \right\} \left\} r dx d\varphi + \\
& + \frac{E_1 t}{2(1-\nu^2)} \left| \int_0^L \left\{ C_0 \left\{ \left\{ \left(\frac{\partial w}{r \partial \varphi} \right)^3 + 2 \frac{\partial w}{r \partial \varphi} \left[\frac{\partial v_0}{r \partial \varphi} + \nu \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{1}{r} w \right] + (1-\nu) \left[\frac{\partial u_0}{r \partial \varphi} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right] \frac{\partial w}{\partial x} + \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial w}{r \partial \varphi} \right\} \delta w + (1-\nu) \left[\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{r \partial \varphi} + \frac{\partial u_0}{r \partial \varphi} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right] \delta u_0 + \left[\nu \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{r \partial \varphi} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial u_0}{\partial x} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{2}{r} w + 2 \frac{\partial v_0}{r \partial \varphi} \right] \delta v_0 \right\} + 2C_1 t^2 \left\{ - \left[\frac{\partial^3 w}{r^3 \partial \varphi^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{r \partial x^2 \partial \varphi} \right] \delta w + \left[\frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \varphi^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \delta \left(\frac{\partial w}{r \partial \varphi} \right) \right\} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2C_2 t^2 \left\{ - \left[\frac{\partial^2 \phi}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{1}{2}(1-\nu) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{1}{2}(1+\nu) \frac{\partial^2 \psi}{r \partial x \partial \varphi} \right] \delta w + \left[\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \varphi^2} \right] \delta \phi + \right. \\
& \left. + (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{r \partial x \partial \varphi} \delta \psi + \left[\nu \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{r \partial \varphi} \right] \delta \left(\frac{\partial w}{r \partial \varphi} \right) \right\} + 2C_3 t^2 \left\{ \frac{(1-\nu)}{2} \left[\frac{\partial \psi}{r \partial \varphi} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] \delta \psi + \right. \\
& \left. + \left[\frac{\partial \phi}{r \partial \varphi} + \nu \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] \delta \phi \right\} dx \Bigg|_0^{2\pi} + \frac{E_1 t}{2(1-\nu^2)} \Bigg|_0^{2\pi} \left\{ C_0 \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 + 2 \frac{\partial w}{\partial x} \left[\nu \frac{\partial v_0}{r \partial \varphi} + \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\nu}{r} w \right] \right. \right. \\
& \left. \left. + (1-\nu) \left[\frac{\partial u_0}{r \partial \varphi} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right] \frac{\partial w}{r \partial \varphi} + \left(\frac{\partial w}{r \partial \varphi} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial x} \right\} \delta w + (1-\nu) \left[\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{r \partial \varphi} + \frac{\partial u_0}{r \partial \varphi} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right] \delta v_0 + \right. \\
& \left. + \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \nu \left(\frac{\partial w}{r \partial \varphi} \right)^2 + 2 \frac{\partial u_0}{\partial x} - 2 \frac{\nu}{r} w + 2\nu \frac{\partial v_0}{r \partial \varphi} \right] \delta u_0 \right\} + 2C_1 t^2 \left\{ - \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{r^2 \partial x \partial \varphi^2} \right] \delta w + \right. \\
& \left. + \left[\nu \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right\} - 2C_2 t^2 \left\{ - \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{2}(1-\nu) \frac{\partial^2 \psi}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{1}{2}(1+\nu) \frac{\partial^2 \phi}{r \partial x \partial \varphi} \right] \delta w + \right. \\
& \left. + \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \varphi^2} \right] \delta \psi + (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{r \partial x \partial \varphi} \delta \phi + \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} + \nu \frac{\partial \phi}{r \partial \varphi} \right] \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right\} + \\
& + 2C_3 t^2 \left\{ \left[\nu \frac{\partial \phi}{r \partial \varphi} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] \delta \psi + \frac{(1-\nu)}{2} \left[\frac{\partial \psi}{r \partial \varphi} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] \delta \phi \right\} \Bigg|_0^L + \\
& + \left\{ 2t^2(1-\nu) \left[2C_1 \frac{\partial^2 w}{r \partial x \partial \varphi} - C_2 \left[\frac{\partial \psi}{r \partial \varphi} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] \right] \delta w \right\} \Bigg|_0^L \Bigg|_0^{2\pi}
\end{aligned}$$

ZAŁĄCZNIK 3

Momenty gnące M_x i M_φ oraz moment skręcający $M_{x\varphi}$, działające w przekrojach $x = const$ i $\varphi = const$ rozważanej powłoki.

$$M_x = t^2 \int_{-1/2}^{1/2} \zeta \sigma_x d\zeta = t^2 \int_{-1/2}^{1/2} \frac{E(\zeta)}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_\varphi) \zeta d\zeta,$$

$$M_\varphi = t^2 \int_{-1/2}^{1/2} \zeta \sigma_\varphi d\zeta = t^2 \int_{-1/2}^{1/2} \frac{E(\zeta)}{1-\nu^2} (\varepsilon_\varphi + \nu \varepsilon_x) \zeta d\zeta,$$

$$M_{x\varphi} = t^2 \int_{-1/2}^{1/2} \zeta \tau_{x\varphi} d\zeta = t^2 \int_{-1/2}^{1/2} \frac{E(\zeta)}{2(1+\nu)} \gamma_{x\varphi} \zeta d\zeta$$

Podstawiając do powyższych zależności związki (3.3) oraz funkcje (2.1) i (2.2), po wykonaniu całkowania po grubości powłoki, otrzymano:

$$M_x = -\frac{E_1 t^3}{1-\nu^2} \left[C_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \varphi^2} \right) - C_2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \nu \frac{\partial \phi}{r \partial \varphi} \right) \right],$$

$$M_\varphi = -\frac{E_1 t^3}{1-\nu^2} \left[C_1 \left(\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \varphi^2} \right) - C_2 \left(\nu \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{r \partial \varphi} \right) \right],$$

$$M_{x\varphi} = -\frac{E_1 t^3}{2(1+\nu)} \left[2C_1 \frac{\partial^2 w}{r \partial x \partial \varphi} - C_2 \left(\frac{\partial \psi}{r \partial \varphi} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right].$$

Siły poprzeczne Q_x i Q_φ , działające w przekrojach $x = const$ i $\varphi = const$ rozważanej powłoki, przedstawiają następujące wyrażenia:

$$Q_x = t \int_{-1/2}^{1/2} \tau_{xz} d\zeta = t \int_{-1/2}^{1/2} \frac{E(\zeta)}{2(1+\nu)} \gamma_{xz} d\zeta = \frac{E_1 t}{2(1+\nu)} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{e_0}{2} \right) \psi,$$

$$Q_\varphi = t \int_{-1/2}^{1/2} \tau_{\varphi z} d\zeta = t \int_{-1/2}^{1/2} \frac{E(\zeta)}{2(1+\nu)} \gamma_{\varphi z} d\zeta = \frac{E_1 t}{2(1+\nu)} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{e_0}{2} \right) \phi.$$

ZAŁĄCZNIK 4

Wartości wynikające z całkowania po powierzchni powłoki. W drugiej tabeli pominięto powtarzające się wyrażenia (całki).

$\mathfrak{R}_{1,2}(x, \varphi)$	$\int_0^L \int_0^{2\pi} \mathfrak{R}_{1,2}(x, \varphi) \sin \frac{m\pi x}{L} \cos n\varphi \, r dx d\varphi = 0$
$\sin \frac{m\pi x}{L} \cos n\varphi$	$\int_0^L \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{m\pi x}{L} \cos^2 n\varphi \, r dx d\varphi = \frac{1}{2} L\pi r$
$\sin^2 \frac{m\pi x}{L}$	$\int_0^L \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{m\pi x}{L} \cos n\varphi \, r dx d\varphi = 0$
$\cos^2 \frac{m\pi x}{L}$	$\int_0^L \int_0^{2\pi} \sin \frac{m\pi x}{L} \cos^2 \frac{m\pi x}{L} \cos n\varphi \, r dx d\varphi = 0$
$\cos^2 \frac{m\pi x}{L} \sin^2 n\varphi$	$\int_0^L \int_0^{2\pi} \sin \frac{m\pi x}{L} \cos^2 \frac{m\pi x}{L} \sin^2 n\varphi \cos n\varphi \, r dx d\varphi = 0$
$\sin^2 \frac{m\pi x}{L} \cos^2 n\varphi$	$\int_0^L \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{m\pi x}{L} \cos^3 n\varphi \, r dx d\varphi = 0$
$\sin^3 \frac{m\pi x}{L} \cos n\varphi$	$\int_0^L \int_0^{2\pi} \sin^4 \frac{m\pi x}{L} \cos^2 n\varphi \, r dx d\varphi = \frac{3}{8} L\pi r$
$\sin \frac{m\pi x}{L} \cos^2 \frac{m\pi x}{L} \cos n\varphi$	$\int_0^L \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{m\pi x}{L} \cos^2 \frac{m\pi x}{L} \cos^2 n\varphi \, r dx d\varphi = \frac{1}{8} L\pi r$
$\cos^4 \frac{m\pi x}{L} \sin^2 n\varphi$	$\int_0^L \int_0^{2\pi} \sin \frac{m\pi x}{L} \cos^4 \frac{m\pi x}{L} \sin^2 n\varphi \cos n\varphi \, r dx d\varphi = 0$
$\sin^4 \frac{m\pi x}{L} \cos^2 n\varphi$	$\int_0^L \int_0^{2\pi} \sin^5 \frac{m\pi x}{L} \cos^3 n\varphi \, r dx d\varphi = 0$
$\sin \frac{m\pi x}{L} \cos^3 n\varphi$	$\int_0^L \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{m\pi x}{L} \cos^4 n\varphi \, r dx d\varphi = \frac{3}{8} L\pi r$
$\sin \frac{m\pi x}{L} \sin^2 n\varphi \cos n\varphi$	$\int_0^L \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{m\pi x}{L} \sin^2 n\varphi \cos^2 n\varphi \, r dx d\varphi = \frac{1}{8} L\pi r$
$\sin^2 \frac{m\pi x}{L} \sin^2 n\varphi$	$\int_0^L \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{m\pi x}{L} \sin^2 n\varphi \cos n\varphi \, r dx d\varphi = 0$

$\cos^2 \frac{m\pi x}{L} \cos^2 n\varphi$	$\int_0^L \int_0^{2\pi} \sin \frac{m\pi x}{L} \cos^2 \frac{m\pi x}{L} \cos^3 n\varphi \, r dx d\varphi = 0$
$\sin^5 \frac{m\pi x}{L} \cos n\varphi$	$\int_0^L \int_0^{2\pi} \sin^6 \frac{m\pi x}{L} \cos^2 n\varphi \, r dx d\varphi = \frac{5}{16} L\pi r$
$\sin^3 \frac{m\pi x}{L} \cos^2 \frac{m\pi x}{L} \cos n\varphi$	$\int_0^L \int_0^{2\pi} \sin^4 \frac{m\pi x}{L} \cos^2 \frac{m\pi x}{L} \cos^2 n\varphi \, r dx d\varphi = \frac{1}{16} L\pi r$

$\mathfrak{R}_{1,2}(x, \varphi)$	$\int_0^L \int_0^{2\pi} \mathfrak{R}_{1,2} \sin^2 \frac{m\pi x}{L} \, r dx d\varphi = 0$
$\sin^2 \frac{m\pi x}{L}$	$\int_0^L \int_0^{2\pi} \sin^4 \frac{m\pi x}{L} \, r dx d\varphi = \frac{3}{4} L\pi r$
$\cos^2 \frac{m\pi x}{L}$	$\int_0^L \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{m\pi x}{L} \cos^2 \frac{m\pi x}{L} \, r dx d\varphi = \frac{1}{4} L\pi r$
$\sin^3 \frac{m\pi x}{L} \cos n\varphi$	$\int_0^L \int_0^{2\pi} \sin^5 \frac{m\pi x}{L} \cos n\varphi \, r dx d\varphi = 0$
$\sin \frac{m\pi x}{L} \cos^2 \frac{m\pi x}{L} \cos n\varphi$	$\int_0^L \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{m\pi x}{L} \cos^2 \frac{m\pi x}{L} \cos n\varphi \, r dx d\varphi = 0$
$\cos^4 \frac{m\pi x}{L} \sin^2 n\varphi$	$\int_0^L \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{m\pi x}{L} \cos^4 \frac{m\pi x}{L} \sin^2 n\varphi \, r dx d\varphi = \frac{1}{16} L\pi r$
$\sin^2 \frac{m\pi x}{L} \sin^2 n\varphi$	$\int_0^L \int_0^{2\pi} \sin^4 \frac{m\pi x}{L} \sin^2 n\varphi \, r dx d\varphi = \frac{3}{8} L\pi r$
$\sin^5 \frac{m\pi x}{L} \cos n\varphi$	$\int_0^L \int_0^{2\pi} \sin^7 \frac{m\pi x}{L} \cos n\varphi \, r dx d\varphi = 0$
$\sin^3 \frac{m\pi x}{L} \cos^2 \frac{m\pi x}{L} \cos n\varphi$	$\int_0^L \int_0^{2\pi} \sin^5 \frac{m\pi x}{L} \cos^2 \frac{m\pi x}{L} \cos n\varphi \, r dx d\varphi = 0$

ZAŁĄCZNIK 5

Parametry układu równań ruchu (5.19) i (5.20) oraz obciążenia statycznego (5.24):

$$\alpha_{w_0} = \frac{E_1}{C_5 \rho_1} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2,$$

$$\alpha_{w_1} = C_0 \alpha_{f_6} + \frac{t^2}{1-\nu^2} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 (1+k_1^2)^2 (C_1 - C_2 \alpha_{\Phi_1}),$$

$$\alpha_{w_2} = C_0 \alpha_{f_5} + \frac{4t^2}{1-\nu^2} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 (C_1 - C_2 \alpha_{\Phi_2}),$$

$$\alpha_{w_3} = 2C_0 \left(\frac{nt}{r} \right)^2 (\alpha_{f_1} + \alpha_{f_2}),$$

$$\alpha_{w_4} = 2C_0 \left(\frac{nt}{r} \right)^2 (\alpha_{f_3} + \alpha_{f_4}),$$

$$\alpha_{w_5} = \frac{1}{2} C_0 \frac{t}{r} (k_1^2 + 4\alpha_{f_4}),$$

$$\alpha_{w_6} = C_0 \frac{t}{r} (8\alpha_{f_1} + \alpha_{f_4}).$$

Wszystkie związki, z wyjątkiem $\alpha_{w_0} \left[\frac{1}{s^2} \right]$, są parametrami bezwymiarowymi.