

*Mariusz KRAJEWSKI, Sergiusz SIENKOWSKI*  
*Uniwersytet Zielonogórski*  
*Instytut Metrologii, Elektroniki i Informatyki*

## **ALGORYTMY DO ESTYMACJI AMPLITUDY NAPIĘCIA SINUSOIDALNEGO OPARTEJ NA WYZNACZANIU CZĘSTOTLIWOŚCI**

W pracy przedstawiono wyniki badań właściwości metrologicznych znanych i najnowszych algorytmów do wyznaczania amplitudy napięcia sinusoidalnego w oparciu o wybrany estymator częstotliwości. Analizowano algorytmy najmniejszych kwadratów (LS) i jego wersję rozszerzoną (ELS), zupełnych kwadratów błędów (TLS) oraz cztery algorytmy z dziedziny częstotliwości oparte na dyskretnej transformacji Fouriera (DFT), w tym jeden algorytm iteracyjny. Wyniki badań symulacyjnych wykazały, że amplitudę napięcia sinusoidalnego w obecności szumu gaussowskiego można estymować najdokładniej z zastosowaniem algorytmów LS, ELS i TLS.

## **ALGORITHMS FOR SINUSOIDAL VOLTAGE AMPLITUDE ESTIMATION BASED ON FREQUENCY DETERMINATION**

The paper presents results of research on the metrological properties of known and the latest algorithms for determining the amplitude of a sinusoidal voltage based on a selected frequency estimator. Least Squares algorithms (LS) and its extended version (ELS), Total Least Squares (TLS) and four frequency domain algorithms based on the Discrete Transform Fourier (DFT), including one iterative algorithm, were analyzed. The results of the simulation tests showed that the amplitude of the sinusoidal signal in the presence of Gaussian noise can be estimated most accurately with the use of LS, ELS and TLS algorithms.

### **1. WPROWADZENIE**

Algorytmy estymacji amplitudy napięcia sinusoidalnego stosowane są w pomiarach cyfrowych, do obliczania amplitudy na podstawie zbioru próbek

analizowanego napięcia. Znając amplitudę napięcia sinusoidalnego łatwo także obliczyć wartość skuteczną. Dlatego takie pomiary mogą mieć zastosowanie np. w badaniach dokładności woltomierzy napięcia skutecznego, czy w badaniach kalibratorów napięć AC, w których wymagana jest znajomość wartości skutecznej napięcia sinusoidalnego z odpowiednio dużą dokładnością [1].

W wielu przypadkach pomiarowych częstotliwość mierzonego napięcia nie jest znana lub znana jest z ograniczoną dokładnością. W konsekwencji częstotliwość próbkowania przyrzędu pomiarowego nie jest zsynchronizowana z częstotliwością analizowanego napięcia przemiennego, co prowadzi do błędów estymacji amplitudy. Minimalizacja tych błędów jest przedmiotem wielu prac, w których poszukuje się jak najdokładniejszych algorytmów. Wśród tych algorytmów wyróżnić można algorytmy działające w dziedzinie częstotliwości, które umożliwiają wyznaczenie parametrów sygnału sinusoidalnego jak amplitudy, częstotliwości i fazy, na postawie interpolowanego widma. Ogólną cechą tych algorytmów jest to, że im dokładniej znana jest częstotliwość sygnału, tym dokładniej można wyznaczyć pozostałe parametry sygnału [2-5].

W pracy przedstawiono porównanie właściwości metrologicznych znanych i najnowszych cyfrowych algorytmów do estymacji amplitudy napięcia sinusoidalnego przy współpracy z wybranym estymatorem częstotliwości. Przyjęto ideę estymacji amplitudy polegającą na tym, że w pierwszej kolejności na podstawie danych wejściowych (próbek napięcia) wyznaczana jest częstotliwość napięcia z zastosowaniem jednego wybranego, bardzo dokładnego estymatora częstotliwości, opartego o dyskretną transformatę Fouriera (DFT). W drugiej kolejności w oparciu o obliczoną częstotliwość i próbki napięcia wyznaczana jest amplituda z zastosowaniem różnych algorytmów działających w dziedzinie czasu i częstotliwości. Przyjęty do badań estymator częstotliwości przedstawiono w pracy [6]. Przeprowadzone badania własne wykazały, że cechuje się on większą dokładnością estymacji częstotliwości sygnału sinusoidalnego w porównaniu do innych estymatorów opartych o DFT np. Fan i Qi [7], Ligges, Quinn [8] oraz iteracyjnych MV-IpDFT prezentowanych w [9]. Z kolei wybrane do badań algorytmy estymacji amplitudy z dziedziny czasu, to algorytm najmniejszych kwadratów (LS – Least Squares), jego wersja rozszerzona o pomiar składowej stałej (ELS) oraz zupełnych kwadratów błędów (TLS - Total Least Squares) [10]. Z dziedziny częstotliwości to m. in. algorytmy interpolacyjne: 1-punktowy (IpDFT1p) [11], 3-punktowy (IpDFT3p) [2,12] oraz iteracyjny 2-punktowy (IpDFT2p\_i) [13]. Dodatkowo w pracy zastosowano zmodyfikowany algorytm DFT (MDFT) [14], który nie wykorzystuje interpolacji widma.

## 2. ALGORYTMY DO WYZNACZANIA AMPLITUDY

Procedura stosowania algorytmów jest następująca. W pierwszej kolejności napięcie sinusoidalne o amplitudzie  $U_m$ , częstotliwości  $f$  i fazie  $\varphi$ , próbkowane jest równomiernie z częstotliwością  $f_p$  i liczbą próbek  $M$ . Następnie na podstawie uzyskanych próbek  $u(n) = U_m \sin(2\pi f n / f_p + \varphi)$  wymnożonych przez okno Hanninga wyznaczana jest częstotliwość napięcia z zastosowaniem wybranego, popularnego i bardzo dokładnego estymatora [6]:

$$\hat{f} = \frac{f_p}{M} \sqrt{\frac{(k-H)^2 X_u(k-1) + (k+H)^2 X_u(k+1) + (2H^2 - 2H - 2k^2) X_u(k)}{X_u(k-1) + X_u(k+1) - 2X_u(k)}}, \quad (1)$$

gdzie:  $X_u(\cdot)$  to transformata Fouriera wyznaczana dla trzech prążków widma, w tym dla  $k$  - numeru najwyższego prążka w widmie amplitudowym;  $H$  to współczynnik, który w przypadku stosowanego okna Hanninga wynosi 2.

W kolejnym kroku, znając częstotliwość sygnału można wyznaczyć amplitudę napięcia z zastosowaniem odpowiedniego algorytmu. Pierwszy badany algorytm najmniejszych kwadratów (LS) stosowany jest tylko do estymacji amplitudy sygnału sinusoidalnego. Dla tego algorytmu amplituda wyznaczana jest ze wzoru

$$\hat{U}_{m(\text{LS})} = \left| (\mathbf{A}_{(\text{LS})}^T \cdot \mathbf{A}_{(\text{LS})})^{-1} \mathbf{A}_{(\text{LS})}^T \cdot \mathbf{b}_{(\text{LS})} \right|, \quad (2)$$

gdzie

$$\mathbf{A}_{(\text{LS})} = \begin{bmatrix} \sin(2\pi\hat{f}0/f_p) & \cos(2\pi\hat{f}0/f_p) \\ \sin(2\pi\hat{f}1/f_p) & \cos(2\pi\hat{f}1/f_p) \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \sin(2\pi\hat{f}(M-1)/f_p) & \cos(2\pi\hat{f}(M-1)/f_p) \end{bmatrix} \quad (3)$$

jest to macierz danych,  $\mathbf{b}_{(\text{LS})}$  jest to wektor próbek (obserwacji)  $u(n)$ .

Istnieją także inne rozszerzone algorytmy LS, stosowane dodatkowo do estymacji np. fazy, częstotliwości. Ogólnie są one jednak bardziej wrażliwe na wpływ zakłóceń losowych [15]. Niemniej w badaniach uwzględniono rozszerzony algorytm LS, który ma możliwość estymacji składowej stałej napięcia. Składowa ta w praktyce może występować, jako wielkość niepożądana, razem z napięciem sinusoidalnym. Algorytm ten, nazywany dalej

ELS, jest powszechnie znany jako 3-parametrowy dopasowania do sinusa [16] i przedstawiony w normie IEEE-1057 [17]. Umożliwia estymację amplitudy napięcia sinusoidalnego w oparciu o wzór:

$$\hat{U}_{m(\text{ELS})} = \sqrt{\mathbf{c}_{(\text{ELS})_1}^2 + \mathbf{c}_{(\text{ELS})_2}^2} \quad (4)$$

na podstawie wartości wektora  $\mathbf{c}_{(\text{ELS})}$  obliczanego z zależności:

$$\mathbf{c}_{(\text{ELS})} = (\mathbf{A}_{(\text{ELS})}^T \cdot \mathbf{A}_{(\text{ELS})})^{-1} \mathbf{A}_{(\text{ELS})}^T \cdot \mathbf{b}_{(\text{ELS})} \quad (5)$$

oraz:

$$\mathbf{A}_{(\text{ELS})} = \begin{bmatrix} \sin(2\pi\hat{f}0/f_p) & \cos(2\pi\hat{f}0/f_p) & 1 \\ \sin(2\pi\hat{f}1/f_p) & \cos(2\pi\hat{f}1/f_p) & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \sin(2\pi\hat{f}(M-1)/f_p) & \cos(2\pi\hat{f}(M-1)/f_p) & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

i wektora  $\mathbf{b}_{(\text{ELS})}$  zawierającego próbki  $u(n)$ .

Trzeci algorytm zupełnych kwadratów (TLS), minimalizuje zakłócenia  $\boldsymbol{\varepsilon}$  wektora obserwacji  $\mathbf{b}_{(\text{TLS})}$ , podobnie jak w metodzie najmniejszych kwadratów, oraz dodatkowo zakłócenia  $\mathbf{E}$  macierzy danych  $\mathbf{A}_{(\text{TLS})}$ . Punktem wyjścia algorytmu jest model pomiaru, który opisać można wzorem:

$$(\mathbf{A}_{(\text{TLS})} + \mathbf{E}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b}_{(\text{TLS})} + \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (7)$$

Wektor  $\mathbf{c}$  jest wynikiem algorytmu TLS. Na podstawie jego elementów obliczany jest wynik estymacji określonej wielkości. W pomiarze amplitudy estymator ma postać:

$$\hat{U}_{m(\text{TLS})} = \sqrt{\mathbf{c}_1^2 + \mathbf{c}_2^2}, \quad (8)$$

przy czym, macierz  $\mathbf{A}_{(\text{TLS})}$  definiowana jest identycznie jak dla LS:

$$\mathbf{A}_{(\text{TLS})} = \begin{bmatrix} \sin(2\pi\hat{f}0/f_p) & \sin(2\pi\hat{f}1/f_p) & \dots & \sin(2\pi\hat{f}(M-1)/f_p) \\ \cos(2\pi\hat{f}0/f_p) & \cos(2\pi\hat{f}1/f_p) & \dots & \cos(2\pi\hat{f}(M-1)/f_p) \end{bmatrix}^T, \quad (9)$$

a wektor  $\mathbf{b}_{(TLS)}$  zawiera próbki napięcia  $u(n)$ . Szukany wektor  $\mathbf{c}$  uzyskuje się dokonując w pierwszej kolejności rozkładu sumy macierzy względem wartości szczególnych (SVD z ang. Singular Value Decomposition) [10]:

$$\left( \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{(TLS)} & \mathbf{b}_{(TLS)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \boldsymbol{\varepsilon} \end{bmatrix} \right) = \mathbf{U} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{V}^T, \quad (10)$$

następnie na podstawie uzyskanej macierzy  $\mathbf{V}$  oblicza się wektor  $\mathbf{c}$ :

$$\mathbf{c} = -\frac{1}{V_{33}} \begin{bmatrix} V_{31} \\ V_{32} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Kolejne algorytmy IpDFT1p, IpDFT3p, MDFT, IpDFT2p\_i, działają w oparciu o dyskretną transformatę Fouriera (DFT). Algorytmy te stosowane są z odpowiednim oknem czasowym zwiększającym dokładność wyznaczania amplitudy napięcia sinusoidalnego. Dla porównania właściwości algorytmów w prezentowanym opracowaniu stosowano popularne okno Hanninga.

Algorytm IpDFT1p, działający dla najwyższego prążka widma  $|X_u(k)|$  napięcia  $u(n)$  z zastosowanym oknem Hanninga, bazuje na zależności:

$$\hat{U}_{m(\text{IpDFT1p})} = \frac{4\pi\delta \cdot (1 - \delta^2) \cdot |X_u(k)|}{M \sin(\pi\delta)}, \quad (12)$$

gdzie: 
$$\delta = \hat{f} \frac{M}{f_p} - k. \quad (13)$$

IpDFT3p działa na trzech najwyższych prążkach widma. Dla okna Hanninga używany jest wzór:

$$\hat{U}_{m(\text{IpDFT3p})} = \frac{\pi\delta \cdot (1 - \delta^2) (4 - \delta^2) (|X_u(k-1)| + 2|X_u(k)| + |X_u(k+1)|)}{3M \sin(\pi\delta)}. \quad (14)$$

Jednym z prostszych algorytmów jest także algorytm MDFT, w którym stosowana jest modyfikacja transformaty Fouriera i okna czasowego poprzez wyznaczenie zmiennej  $M' = f_p k / \hat{f}$  i zastąpienie nią zmiennej  $M$  (liczby próbek) we wzorze na okno Hanninga oraz w funkcji Eulera transformaty Fouriera. Amplituda  $\hat{U}_{m(\text{MDFT})}$  wyznaczana jest jako moduł ze zmodyfikowanej

transformaty Fouriera, dla prążka o numerze  $k$  oraz próbek napięcia  $u(n)$  wymnożonych przez zmodyfikowane okno Hanninga  $w'(n)$ :

$$\hat{U}_{m(\text{MDFT})} = \frac{1}{M'} \left| \sum_{n=0}^{M'-1} u(n) \cdot w'(n) \cdot e^{-j2\pi nk \frac{1}{M'}} \right|, \quad (15)$$

$$w'(n) = 0,5 - 0,5 \cos(2\pi n / M'). \quad (16)$$

Ostatni algorytm IpDFT2p\_i jest najbardziej złożony spośród prezentowanych. Szczegółowy opis algorytmu przedstawiono w tabeli 1. Jest to algorytm, który w sposób iteracyjny, w oparciu o dwa najwyższe prążki widma (2 punkty), wyznacza w pierwszej kolejności parametr  $\delta$ , który związany jest z częstotliwością sygnału mierzonego, a następnie amplitudę sygnału oraz fazę początkową sygnału mierzonego  $\varphi$ . Do celów niniejszej pracy algorytm ten został nieznacznie zmodyfikowany. W warunkach początkowych algorytmu prezentowanego w pracy [13] (Table 1, Step 2) wzór na  $\delta$ , został zastąpiony wzorem (13) (Tabela 1, Krok 1). Badania własne wykazały, że taka zmiana jest korzystna, ponieważ pozwalała na osiągnięcie tej samej dokładności estymacji częstotliwości przy mniejszej liczbie iteracji. W kolejnym rozdziale przedstawiono wyniki działania tego algorytmu dla przyjętych dwóch iteracji. Przeprowadzone badania wykazały, że większa liczba iteracji nie powoduje istotnej poprawy dokładności algorytmu.

### 3. BADANIA SYMULACYJNE

#### 3.1. Błędy estymacji amplitudy w funkcji liczby okresów

Badania symulacyjne algorytmów przeprowadzono analizując ich względne błędy średniokwadratowe  $\delta_{U_m}$  estymacji amplitudy napięcia sinusoidalnego dla wybranych wielkości wpływowych wykonując tysiąckrotne powtórzenia eksperymentów.

Pierwsze badania dotyczyły analizy wpływu liczby okresów  $N$  napięcia sinusoidalnego przypadających na okno pomiarowe, na błędy estymacji. Oczywistym jest, że im mniejsza liczba  $N$  tym szybszy może być pomiar amplitudy napięcia. Przykładowe wyniki badań dla wąskiego zakresu  $N$  od 0,5 do 6 przedstawiono na rys. 1a i 1b. Jak wskazują prezentowane wyniki, liczba  $N$

jest dla wielu algorytmów bardzo istotna. Najwyższe dokładności większość algorytmów uzyskuje w pobliżu pełnej liczby okresów.

Tabela 1.

Algorytm iteracyjny IpDFT2p\_i do estymacji amplitudy

<p>Krok 1: <math>\delta = \hat{f} \frac{M}{f_p} - k</math></p>
<p>Krok 2: <math>\hat{U}_m = \frac{2 X(k) }{ W(\delta) }</math>, <math>\hat{\phi} = \arg(X(k)) - \pi \frac{M-1}{M} \delta - \frac{\pi}{2} \text{sign}(\delta) - \arg(W_0(-\delta))</math></p>
<p>Krok 3: <math>\beta = \frac{\left  X(k+s) + \frac{\hat{U}_m}{j2} W(2k+s+\delta) e^{-j\hat{\phi}} \right }{\left  X(k+s-1) + \frac{\hat{U}_m}{j2} W(2k+s-1+\delta) e^{-j\hat{\phi}} \right }</math>,</p> <p>gdzie <math>s = 0</math> jeśli <math> X(k-1)  &gt;  X(k+1) </math>, inaczej <math>s = 1</math></p>
<p>Krok 4: <math>\delta = \frac{(H-1+s)\beta - H + s}{\beta + 1}</math></p>
<p>Krok 5: <math>\hat{U}_m = 2 \frac{\left  X(k) + \frac{\hat{U}_m}{j2} W(2k+s+\delta) e^{-j\hat{\phi}} \right }{ W(\delta) }</math></p>
<p>Krok 6: <math>\hat{\phi} = \arg(X(k) + \frac{\hat{U}_m}{j2} W(2k+s+\delta) e^{-j\hat{\phi}}) - \pi \frac{M-1}{M} \delta - \frac{\pi}{2} \text{sign}(\delta) - \arg(W_0(-\delta))</math></p>
<p>Krok 7: Wykonaj ponownie kroki 3÷6, a następnie przejdź do kroku 8</p>
<p>Krok 8: <math>\hat{U}_{m(\text{IpDFT2p}_i)} = \hat{U}_m</math>.</p>
<p>Gdzie:</p> $W_0(\lambda) = \sum_{h=0}^{H-1} \left[ (-1)^h 0,5a(h) \left[ \frac{e^{-j\pi \frac{h}{M}}}{\sin \left[ \frac{\pi(\lambda-h)}{M} \right]} + \frac{e^{j\pi \frac{h}{M}}}{\sin \left[ \frac{\pi(\lambda+h)}{M} \right]} \right] \right],$ $W(\lambda) = \sin(\pi\lambda) e^{-j\pi\lambda} e^{j\pi \frac{\lambda}{M}} W_0(\lambda),$ $a(h) = C_{2H-2}^{H-h-1} / 2^{2H-3}, h=1, 2, \dots, H-1, C_b^a = b! / [(b-a)! a!].$

Dlatego najczęściej w pomiarach cyfrowych ze źródłami napięć jak generator czy kalibrator dobiera się tak częstotliwość sygnału i próbkowania, aby liczba okresów napięcia sinusoidalnego była całkowita. W rzeczywistości ze względu na występujące błędy nastaw stosunku tych dwóch wielkości rzędu 0,02%,  $N$  może zawierać się w przedziale np. 4,999..5,001 (rys. 1c, 1d) dla  $ff_p = 1/20$  i  $M = 100$ . Prezentowane na rys. 1 wyniki badań dotyczą przypadków pomiarowych, kiedy próbki napięcia sinusoidalnego zakłócone są szumem gaussowskim o stosunku sygnału do szumu  $SNR = 60$  dB ( $SNR$  - Signal to Noise Ratio) oraz  $SNR = 100$  dB. Pierwszy poziom zakłóceń może wystąpić np. w napięciu z komercyjnych generatorów, a drugi w napięciu z kalibratorów. Analizując wyniki z rysunku 1 można zauważyć, że:

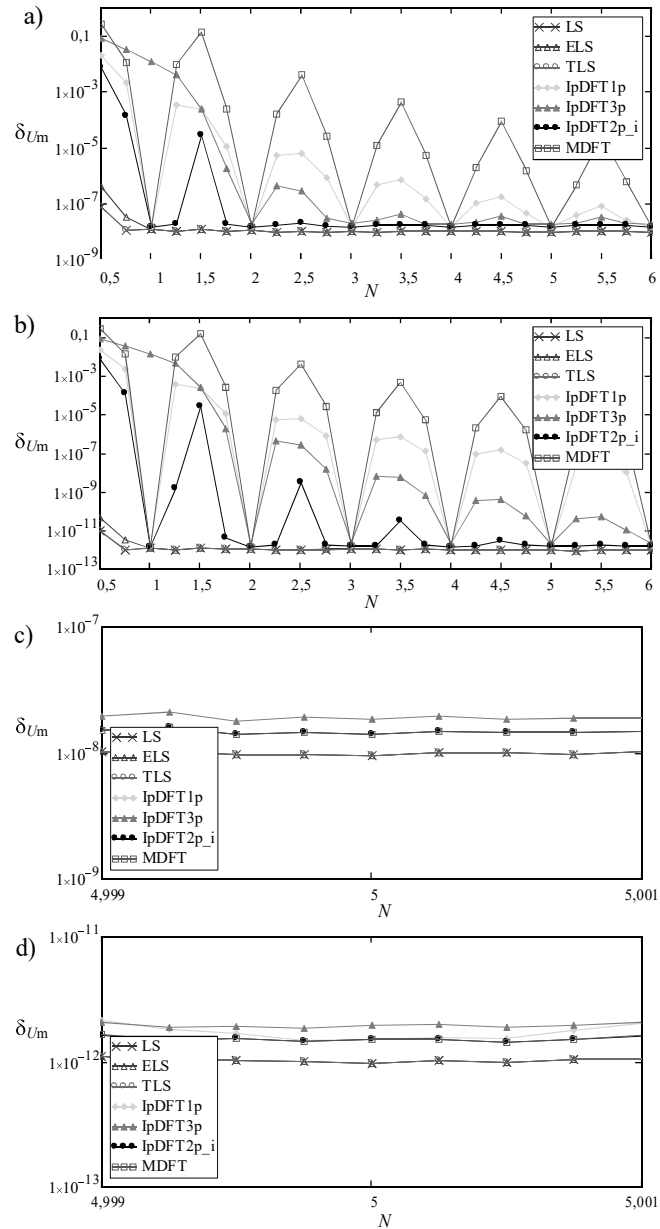
- algorytmy czasowe LS, ELS i TLS są najmniej podatne na wpływ liczby okresów  $N$ ;
- największe dokładności estymacji amplitudy uzyskuje się dla algorytmów LS, ELS, TLS, a różnice między wynikami są pomijalnie małe dla  $N \geq 1$ . Dla  $N < 1$  algorytm ELS jest mniej dokładny od LS i TLS;
- algorytmy częstotliwościowe ogólnie mają większą dokładności, przy większej liczbie  $N$ . Jednak najmniejsze błędy występują dla liczb  $N$  całkowitych;
- wśród algorytmów częstotliwościowych najdokładniejszym algorytmem jest IpDFT<sub>i</sub>.

### 3.2. Błędy estymacji amplitudy w funkcji SNR

Wpływ szumu gaussowskiego dodawanego do próbek napięcia sinusoidalnego, wyrażonego w SNR w szerokim zakresie został przedstawiony na rys. 2a i 2b, odpowiednio dla przypadku  $N = 5,4$  i  $N = 5,001$ . Najważniejsze wnioski wypływające z tego eksperymentu to:

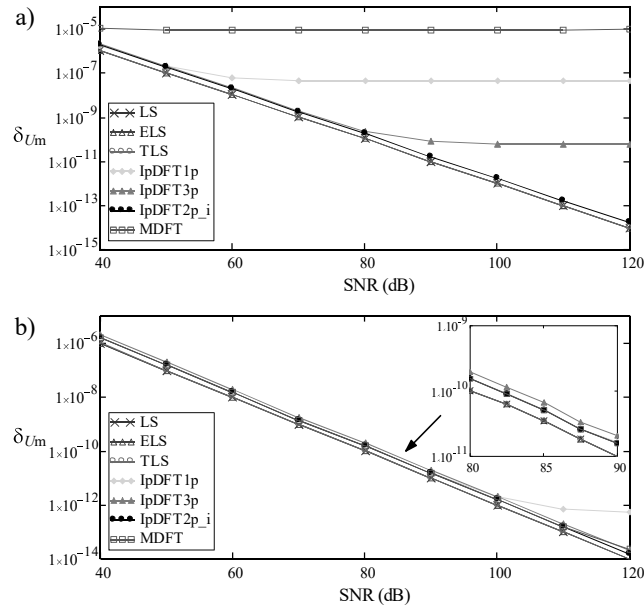
- algorytmy czasowe LS, ELS i TLS są najdokładniejsze spośród badanych, a ich dokładności wzrastają wraz ze wzrostem SNR;
- algorytm IpDFT<sub>i</sub> jest mniej dokładny od algorytmów czasowych, ale ogólnie jest najdokładniejszy spośród algorytmów częstotliwościowych w całym zakresie badanego SNR, bez względu na wartość  $N$ ;
- błędy średniokwadratowe algorytmów IpDFT<sub>1p</sub>, IpDFT<sub>3p</sub>, MDFT zależą sposób istotny od przyjętej liczby okresów  $N$  w oknie pomiarowym. Dla  $N$  bliskiego lub równego wartości całkowitej algorytmy te charakteryzują się najmniejszymi błędami (rys. 1), które maleją wraz ze wzrostem SNR.





Rys. 1. Względne błędy średniokwadratowe estymacji amplitudy w funkcji: liczby okresów  $N$ , dla  $M = 100$  oraz a), c) SNR = 60 dB; b), d) SNR = 100 dB

Fig. 1. Relative mean square errors of amplitude estimation as a function of  $N$  for  $M=100$  and a), c) SNR = 60 dB; b), d) SNR = 100 dB



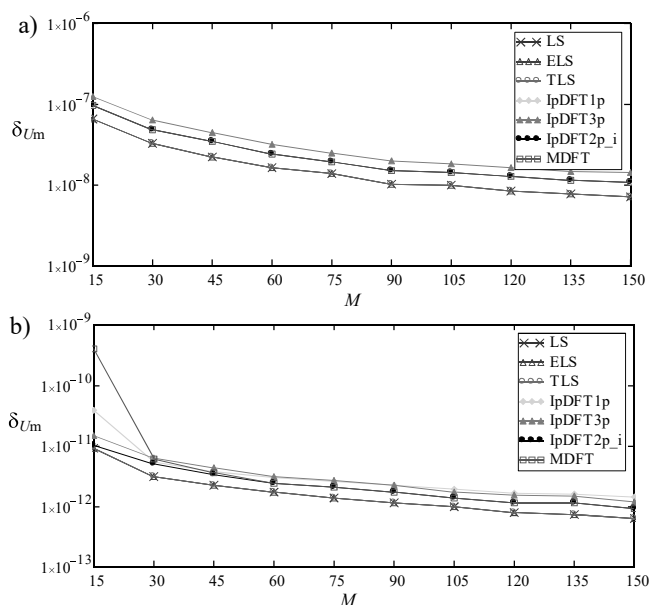
Rys. 2. Względne błędy średniokwadratowe estymacji amplitudy w funkcji SNR dla: a)  $N = 5,4$ ;  $M = 100$ ; b)  $N = 5,001$ ;  $M = 100$

Fig. 2. Relative mean square errors of amplitude estimation as a function of SNR for a)  $N = 5.4$ ,  $M = 100$ ; b)  $N = 5.001$ ,  $M = 100$

### 3.3. Błędy estymacji amplitudy w funkcji liczby próbek $M$

Powszechnie znaną metodą redukcji wpływu zakłóceń losowych na wynik pomiaru jest zwiększenie liczby próbek, na podstawie których działają estymatory. Przeprowadzone badania symulacyjne stanowią potwierdzenie powyższego faktu (rys. 3). Należy mieć na uwadze, że wzrost liczby  $M$  prowadzi zawsze do wydłużenia czasu obliczeń oraz jest ograniczony w praktyce możliwościami sprzętu pomiarowego. Przy stałej częstotliwości napięcia sinusoidalnego wzrost liczby próbek ograniczony jest maksymalną częstotliwością próbkowania układu próbkującego pamiętającego, np. na karcie akwizycji danych. Przedstawione na rys. 3 wyniki badań dotyczą przypadku, kiedy liczba okresów sygnału  $N$  jest bliska jedności co powoduje, że zakłócenia losowe są najważniejszymi źródłami zakłóceń. Dalsze badania wykazały, że dla algorytmów IpDFT1p, IpDFT3p, MDFT wrażliwych na przyjętą wartość  $N$ , nie zawsze zwiększenie liczby próbek poprawia ich dokładność (dominujące są wtedy błędy systematyczne). Natomiast analizując wyniki z rys. 3 można stwierdzić, że najdokładniejszymi algorytmami są algorytmy czasowe, bez

względę na liczbę próbek  $M$ . W dalszej kolejności, wyróżnić można IpDFT<sub>i</sub> oraz MDFT.



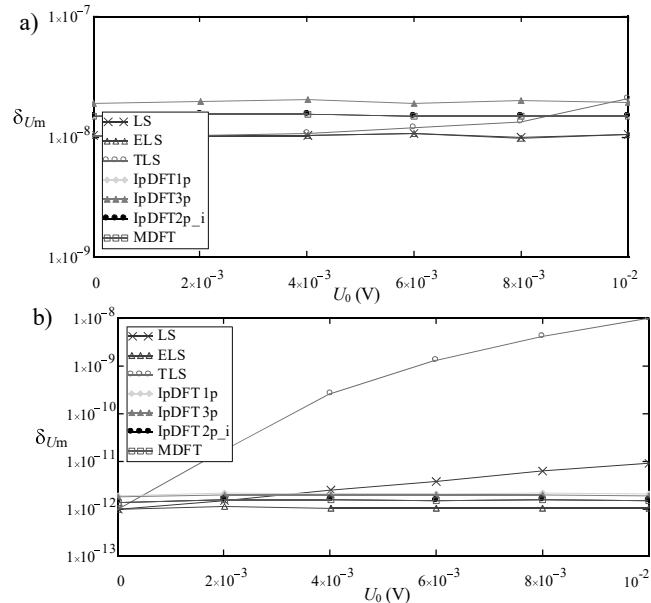
Rys. 3. Względne błędy średniokwadratowe estymacji amplitudy w funkcji  $M$  dla  $N = 5,001$  oraz: a) SNR = 60 dB; b) SNR = 100 dB

Fig. 3. Relative mean square errors of amplitude estimation as a function of  $M$  for  $N = 5,001$  and a) SNR = 60 dB; b) SNR = 100 dB

### 3.4. Błędy estymacji amplitudy w funkcji składowej stałej

Źródła napięć sinusoidalnych charakteryzują się tym, że poza sygnałem sinusoidalnym mogą wytwarzać niepożądaną, niewielką składową stałą. W przypadku komercyjnych generatorów wartość ta może wynosić nawet 10 mV. W zależności od tego jaka będzie amplituda sygnału, składowa ta może mieć wpływ na dokładność estymacji amplitudy sygnału sinusoidalnego. Na rys. 4 przedstawiono przykładowe wyniki badań błędów algorytmów w funkcji składowej stałej  $U_0$ , dla  $U_m = 1$  V. Wnioski z tych badań są następujące:

- algorytmy LS i TLS są bardzo wrażliwe na wpływ składowej stałej. Wraz ze wzrostem  $U_0$  wzrastają ich błędy estymacji. Przy czym, większymi błędami charakteryzuje się TLS;
- algorytmy LS i TLS są mniej dokładne od pozostałych algorytmów, dla dużych wartości  $U_0$  i SNR;
- składowa stała wykazuje nieistotny wpływ na błędy estymatorów ELS, IpDFT1p, IpDFT3p, IpDFT2p<sub>i</sub>, MDFT dla  $N \geq 3$ .



Rys. 4. Względne błędy średniokwadratowe estymacji amplitudy w funkcji  $U_0$  dla  $M = 100$ ,  $N = 5,001$  oraz: a) SNR = 60 dB; b) SNR = 100 dB

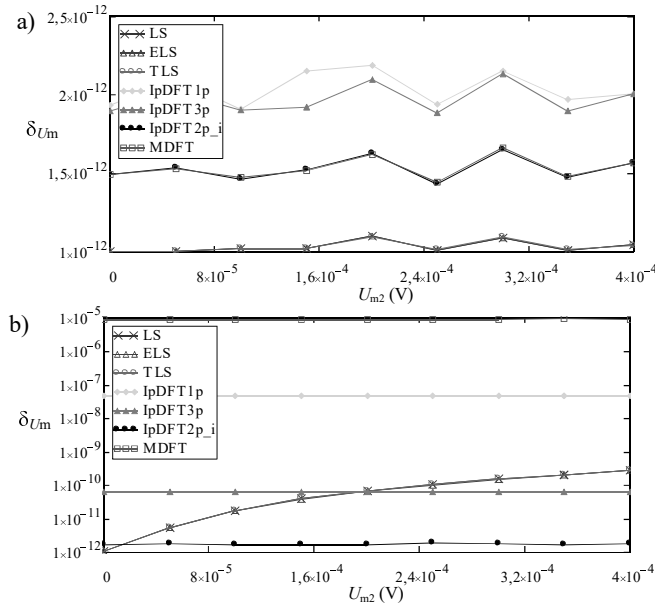
Fig. 4. Relative mean square errors of amplitude estimation as a function of  $U_0$  for  $N = 5.001$  and  $M = 100$ ,  $N = 5.001$  and: a) SNR = 60 dB; b) SNR = 100 dB

### 3.5. Błędy estymacji amplitudy w funkcji amplitudy drugiej harmonicznej

Podczas badań algorytmów rozważano także przypadek wpływu amplitudy drugiej harmonicznej  $U_{m2}$  (rys. 5), która może wystąpić w mierzonym napięciu przemiennym, na błędy estymacji. W praktyce w napięciu poza drugą harmoniczną mogą występować także inne harmoniczne, ale mają one mniejszy wpływ. Przyjęta w badaniach maksymalna wartość  $U_{m2}/U_m = 0,0004$  odpowiada współczynnikowi THD = 0,04%, który charakteryzuje np. generator Keysight 33120A. Przykładowe wyniki badań przedstawiono na rys. 5 dla  $N = 5,001$  oraz  $N = 5,4$ . Wnioski są następujące:

- algorytmy LS, ELS i TLS są wrażliwe na wpływ wyższej harmonicznej. Wraz ze wzrostem  $U_{m2}$  jednakowo wzrastają ich błędy estymacji. Przy czym, największy wpływ tej składowej widoczny jest dla  $N$  znacznie odbiegającego do liczby całkowitej, np.  $N=5,4$ ;

- składowa  $U_{m2}$  w analizowanym zakresie wykazuje nieistotny wpływ na błędy estymatorów IpDFT1p, IpDFT3p, IpDFT2p\_i, MDFT dla  $N \geq 3$ .



Rys. 5. Względne błędy średniokwadratowe w funkcji  $U_{m2}$  ( $\text{THD}_{\max}=0,04\%$ ) dla  $\text{SNR} = 100\text{dB}$ ,  $U_m = 1\text{ V}$ ,  $M = 100$  oraz a)  $N = 5,001$ ; b)  $N = 5,4$

Fig. 5. Relative mean square errors of amplitude estimation as a function of  $U_{m2}$  ( $\text{THD}_{\max}=0,04\%$ ) for  $\text{SNR} = 100\text{dB}$ ,  $U_m = 1\text{ V}$ ,  $M = 100$  and a)  $N = 5.001$ , b)  $N = 5.4$

### 3.6. Błędy estymacji amplitudy dla sumarycznych wpływów

Przedstawione powyższe wyniki badań wskazują, że na dokładność estymacji amplitudy napięcia sinusoidalnego mogą oddziaływać różne wielkości wpływowe jak  $N$ ,  $M$ ,  $\text{SNR}$ ,  $U_0$ , czy  $U_{m2}$  (THD). Takie wielkości jak  $U_0$ , czy THD mogą być różne nawet dla jednego źródła napięcia sinusoidalnego, w zależności od nastawionej wartości napięcia wyjściowego, czy jego częstotliwości. Niemniej jednak podjęto w badaniach próbę oceny dokładności sumarycznego wpływu różnych wielkości na względne błędy średniokwadratowe estymacji algorytmów. Badania przeprowadzono dla dwóch przykładowych przypadków. Pierwszy przypadek dotyczył sytuacji, którą można spotkać stosując generator napięcia. Przyjęto, że wtedy może wystąpić  $\text{SNR} = 60\text{ dB}$ ,  $U_0 = 10\text{mV}$ ,  $U_m = 1\text{ V}$ ,  $U_{m2} = 0,4\text{ mV}$  ( $\text{THD} = 0,04\%$ ). Wyniki uzyskanych błędów estymacji amplitudy w funkcji liczby  $N$  przedstawiono na rys. 6.a. Drugi przypadek dotyczył sytuacji, którą można spotkać stosując kalibrator napięcia. Przyjęto, że wtedy może wystąpić  $\text{SNR} = 100\text{ dB}$ ,  $U_0 = 10\text{ }\mu\text{V}$ ,  $U_m = 1\text{ V}$ ,  $U_{m2} = 0,4\text{ mV}$  ( $\text{THD} = 0,04\%$ ). Wyniki badań przedstawiono na

rys. 6.b. Analizując wyniki symulowanego przypadku z generatorem, wyciągnięto wnioski:

- błędy algorytmów LS, TLS, IpDFT1p, IpDFT3p, MDFT silnie zależą od przyjętej liczby  $N$ . Najlepsze właściwości metrologiczne tych algorytmów występują w pobliżu wartości całkowitych, większych od 2;

- błędy algorytmów ELS i IpDFT2p\_i nie zależą istotnie od liczby  $N \geq 3$ ;

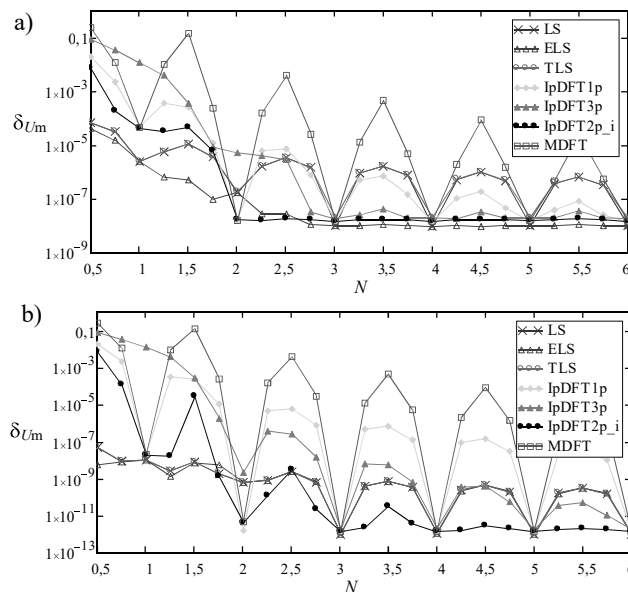
- najdokładniejszymi algorytmami w analizowanym zakresie  $N$  są LS i ELS (Tabela 2).

Analizując wyniki symulowanego przypadku z kalibratorem, wyciągnięto wnioski:

- błędy wszystkich algorytmów zależą od przyjętej liczby  $N$ , przy czym, najmniejszy wpływ  $N$  występuje w przypadku algorytmu iteracyjnego IpDFT2p\_i;

- najmniejsze błędy estymacji dla wszystkich algorytmów występują dla pełnych okresów sygnału w oknie pomiarowym oraz  $N \geq 3$ ;

- najdokładniejszymi algorytmami w analizowanym zakresie  $N$  są LS, ELS, TLS (Tabela 2).



Rys. 6. Względne błędy średniokwadratowe estymacji amplitudy w funkcji  $N$  dla  $U_m = 1$  V,  $U_{m2} = 0,0004$  V,  $M = 100$  oraz a) SNR = 60dB,  $U_0 = 0,01$  V, b) SNR = 100dB,  $U_0 = 10$   $\mu$ V  
Fig. 5. Relative mean square errors of amplitude estimation as a function of  $N$  for  $U_m = 1$  V,  $U_{m2} = 0,0004$  V,  $M = 100$  and a) SNR = 60dB,  $U_0 = 0,01$  V, b) SNR = 100dB,  $U_0 = 10$   $\mu$ V

Tabela 2.

Wyniki błędów średniokwadratowych dla symulowanych przypadków pomiarowych

Przypadek pomiarowy	$\delta_{U_m}$						
	LS	ELS	TLS	IpDFT1p	IpDFT3p	IpDFT2p_i	MDFT
$U_m=1$ V, $U_{m2}=0,4$ mV, SNR=60 dB, $U_0=0,01$ V, $M=100$ , $N=5,001$	$9,5 \cdot 10^{-9}$	$9,5 \cdot 10^{-9}$	$2,0 \cdot 10^{-8}$	$1,5 \cdot 10^{-8}$	$2,0 \cdot 10^{-8}$	$1,5 \cdot 10^{-8}$	$1,5 \cdot 10^{-8}$
$U_m=1$ V, $U_{m2}=0,4$ mV, SNR=100 dB, $U_0=10$ $\mu$ V, $M=100$ , $N=5,001$	$1,0 \cdot 10^{-12}$	$1,0 \cdot 10^{-12}$	$1,0 \cdot 10^{-12}$	$2,0 \cdot 10^{-12}$	$2,0 \cdot 10^{-12}$	$1,5 \cdot 10^{-12}$	$1,5 \cdot 10^{-12}$

#### 4. PODSUMOWANIE

Wyniki przeprowadzonych badań symulacyjnych wskazują, że najdokładniejszymi algorytmami do estymacji amplitudy napięcia sinusoidalnego w obecności szumu gaussowskiego są LS, ELS i TLS. Zbliżone dokładności estymacji amplitudy można uzyskać z zastosowaniem DFT2p\_i. Algorytm ten, podobnie jak pozostałe z dziedziny częstotliwości, najlepsze właściwości wykazuje przy większej liczbie okresów mierzonego sygnału. W przypadku pozostałych algorytmów, gdy liczba okresów  $N$  jest zbliżona do całkowitej i większa od 1, to najdokładniejszym z nich jest algorytm MDFT, a najmniej dokładny IpDFT1p. Z kolei przy niepełnych okresach sygnału (np.  $N=5,4$ ) dobrymi właściwościami charakteryzuje się IpDFT3p, a najgorszymi MDFT.

Składowa stała oraz wyższe harmoniczne pogarszają dokładność estymacji amplitudy napięcia sinusoidalnego przede wszystkim algorytmów LS i TLS. Powoduje to, że jeżeli  $N$  będzie wystarczająco duże i najlepiej całkowite (np.  $N=3$ ), to w pomiarach napięć z małym szumem (np. SNR = 100 dB), można spodziewać się, że algorytmy częstotliwościowe oraz ELS będą dokładniejsze od algorytmów LS i TLS.

Rozpatrywane w pracy przypadki pomiarów amplitudy napięcia sinusoidalnego z generatorem i kalibratorem wskazują, że najlepszymi do takich zastosowań są algorytmy LS i ELS. Najwyższe dokładności estymacji amplitudy, uzyskiwane przez LS i ELS można otrzymać także za pomocą TLS, jednak składowa stała w napięciu mierzonym musi być bardzo mała, co występuje w pomiarach ze źródłami napięć przemiennych z automatyczną korekcją składowej stałej (np. kalibratorach).

## LITERATURA

1. Krajewski M., Sienkowski S., Zawadzki P.: Oprogramowanie komputerowe do automatyzacji wzorcowania multimetrów i kalibratorów. *Przegląd Elektrotechniczny*, nr 1b, 2012.
2. Lušin T., Agrež D.: Estimation of the amplitude square using the interpolated Discrete Fourier Transform. *Metrology and Measurement Systems*, vol. XVIII, No. 4, 2011.
3. Agrež D.: Non-parametric frequency estimation from DFT coefficients at the same bin using different windows, *IEEE International Instrumentation and Measurement Technology Conference (I2MTC)*, 2018.
4. Belega D., Petri D.: Multifrequency signal analysis by Interpolated DFT method with maximum sidelobe decay windows. *Measurement* 42, 2009.
5. Domańska A., Grząślewicz P.: Efektywność estymacji parametrów sygnału harmonicznego metodą wielopunktowej interpolowanej DFT. *Pomiary Automatyka Kontrola*, vol. 59, nr 5, 2013.
6. Borkowski J., Kania D., Mroczka J.: Interpolated-DFT-based fast and accurate frequency estimation for the control of power, *IEEE Trans. on Indus. Electronics*, vol. 61, No. 12, 2014.
7. Fan L., Qi G.: Frequency estimator of sinusoid based on interpolation of three DFT spectral lines. *Signal Processing* 144, 2018.
8. Bischl B., Ligges U., Weihs C.: Frequency estimation by DFT interpolation: a comparison of methods. *Technical Reports*, 2009.
9. Belega D., Petri D.: Frequency estimation by two- or three-point interpolated Fourier algorithms based on cosine windows. *Signal Processing*, 117, 2015.
10. Zhang J. Q., Xinmin Z., Xiao H., Jinwei S.: Sinewave fit algorithms based on Total Least-Squares Method with application to ADC effective bits measurement, *IEEE Trans. on Instr. and Meas.*, vol. 46, No 4, 1997.
11. Wang Y., Wei W., Xiang J.: Multipoint interpolated DFT for sine waves in short records with DC components, *Signal Processing* 131, 2017.
12. Agrež D.: Estimation of the signal component from random equivalent and non-coherent sampling measurements. *ACTA IMEKO*, vol. 6, No. 4, 2017.
13. Belega D., Petri D. Effect of noise and harmonics on sine-wave frequency estimation by interpolated DFT algorithms based on few observed cycles, *Signal Processing* 140, 2017.
14. Kłosiński R.: Synchronizacja okien czasowych przy wyznaczaniu widma za pomocą MDFT. *Pomiary Automatyka Kontrola*, vol. 60, nr 11, 2014.
15. Gajda J. Sroka R.: *Pomiary kąta fazowego*. AGH, Kraków 2000.



- 
16. Renczes B., Kollár I., Dabóczy T.: Efficient Implementation of Least Squares Sine Fitting Algorithms, IEEE Trans. Instrum. Meas., vol. 65, No. 12, 2016.
  17. IEEE trial-use standard for digitizing wave-form recorders, IEEE Std.1057, 1989.