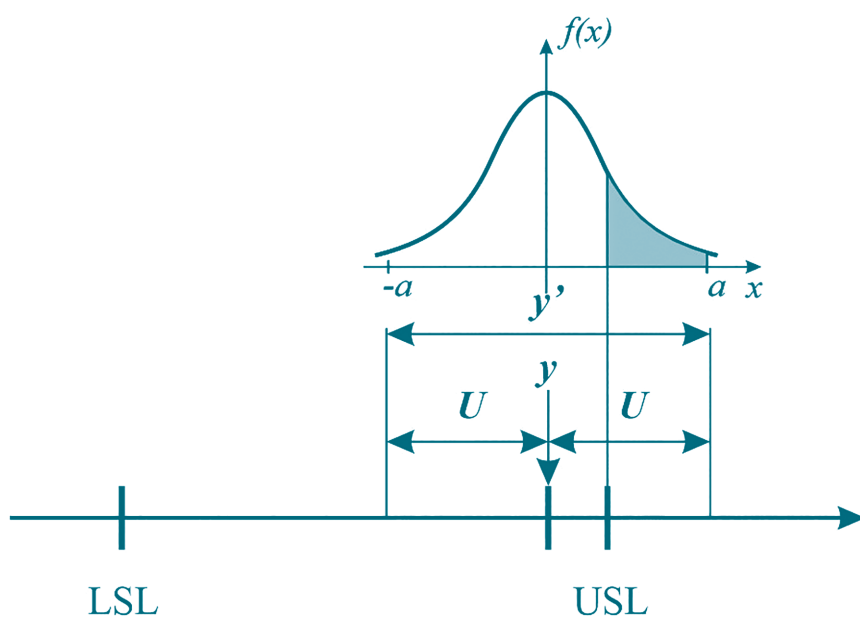


Mariusz Jenek

Błąd i niepewność pomiaru



*Wszystkim Tym, którzy nie przeszkadzali,
i Tym, którzy przeszkadzali, ale w porę przestali,
oraz Tym, którzy przeszkadzają nadal...*

UNIwersytet Zielonogórski

Mariusz Jenek

**BŁĄD I NIEPEWNOŚĆ
POMIARU**

Zielona Góra 2024

RADA WYDAWNICZA

Andrzej Pieczyński (przewodniczący),
Bogumiła Burda, Tatiana Rongińska, Andrzej Bisztyga,
Magdalena Gibas-Dorna, Beata Gabryś,
Eugene Feldshtein, Jacek Korentz
Franciszek Runiec (sekretarz)



RECENZENT

Prof. dr hab. inż. Tadeusz Zaborowski, dr h.c.
dr hab. inż. Michał Sąsiadek, prof. UZ

Pracę wydrukowano na podstawie materiałów dostarczonych i przygotowanych przez
Autora w formie gotowej do reprodukcji bez dokonywania zmian redakcyjnych.

© Copyright by Uniwersytet Zielonogórski
Zielona Góra 2024

ISBN 978-83-7842-549-6

DOI <https://doi.org/10.59444/2024MONaJen>

OFICyna WYDAWNICZA UNIWERSYTETU ZIELONOGÓRSKIEGO

65-246 Zielona Góra; ul. Podgórna 50
tel. (68) 328 78 64 sekretariat@ow.uz.zgora.pl,
www.ow.uz.zgora.pl

Przedmowa

Każdy pomiar wielkości fizycznej obarczony jest błędem, co oznacza, że może zostać dokonany ze skończoną dokładnością – jest pewnym przybliżeniem wartości rzeczywistej. Przybliżenie to określa niepewność pomiarowa. Fakt ten związany jest nie tylko z niedoskonałością działań człowieka, lecz także z niedoskonałością wykonania przyrządów pomiarowych, przypadkowym stanem materii w chwili dokonywania pomiaru, wpływem procesu pomiarowego na wielkość mierzoną oraz przybliżonym charakterem modeli rzeczywistości opisywanych w postaci praw fizyki. Zasady obliczania i szacowania niepewności pomiarowych, a także oceny wyników pomiarów zostały opracowane przez Międzynarodową Organizację Normalizacyjną (ISO) i zawarte są w normie opublikowanej w 1995 roku "Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement" stanowiącej wspólne dzieło siedmiu organizacji międzynarodowych. Polska zgodnie z umowami międzynarodowymi zadeklarowała się do zastosowania normy ISO, która dotyczy zapisu oraz obliczania niepewności pomiarów, a także do obowiązku użytkowania jednostek układu SI. Wersja polska wydana w roku 1999 przez Główny Urząd Miar nosi nazwę „Wyrażanie niepewności pomiaru. Przewodnik”.

Wszelkie wyniki pomiarów pozbawione oceny ich dokładności są w istocie tylko wskazaniem, a podawanie niepewności razem z wynikiem nie świadczy o braku kompetencji laboratorium. Wręcz przeciwnie – umiejętność jej liczbowego wyrażenia stanowi podstawę podwyższonego zaufania do laboratorium. Wyniki pomiarów wielkości fizycznych i chemicznych wraz z informacją ilościową o jakości pomiarów pozwalają na porównanie ich z wartościami odniesienia podanymi w specyfikacjach lub normach, a także do oszacowania ich wiarygodności w porównaniu z wynikami uzyskanymi przez inne laboratoria. W ostatnich latach zaczęto przywiązywać znaczącą uwagę do niepewności pomiarów – zarówno w odniesieniu do typowych pomiarów laboratoryjnych i przemysłowych, jak też przy analizach innych wyników (np. kontroli jakości dostaw detali do produkcji).

Dla laboratoriów i ich klientów oraz wszystkich pozostałych instytucji, które wykorzystują wyniki badań w swojej działalności znajomość niepewności pomiarów, może się okazać niezwykle kluczowym elementem. Rodzaj użytych metod, sprzęt, a także jednostki wykonujące pomiar są elementami, które wnoszą pewną niepewność do wyniku.

Niniejsze opracowanie omawia wytyczne dotyczące niepewności pomiarowych i różnicę między niepewnością a błędem. Wskazuje, że pomiar zawsze jest obarczony pewną niepewnością, która wynika z ograniczeń przyrządów, metody pomiarowej i innych czynników. Opisuje metody obliczania niepewności w zależności od rodzaju pomiaru. Przedstawiono również podstawowe zagadnienia dotyczące podejmowania decyzji o zgodności wyrobu ze specyfikacją oraz podstawowe informacje związane z rozkładami statystycznymi wykorzystywanymi w metrologii. Wszystkie przedstawione zagadnienia zilustrowano licznymi przykładami, które w sposób praktyczny mają wyjaśnić przedstawiane w pracy zagadnienia.

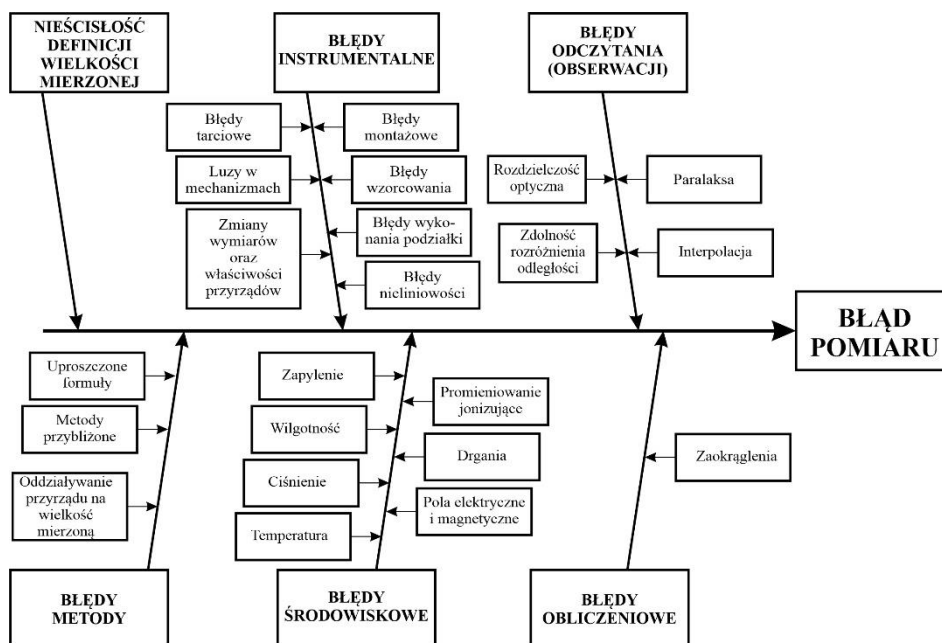
1. BŁĄD POMIARU

1.1. Przyczyny powstawania błędów

Należy przyjąć zasadę (zgodnie z podstawowym aksjomatem metrologii), że każdy wynik pomiaru obarczony jest błędem pomiaru. Przyczyną tego są pewne cechy charakterystyczne dla procesu pomiaru, a w szczególności:

1. Nieścisłość definicji jednostki miary i sposobu jej odtwarzania.
2. Błędy instrumentalne (narzędzia pomiarowego).
3. Błędy wynikające z metody pomiaru.
4. Błędy środowiskowe wynikające z warunków zewnętrznych pomiaru.
5. Błędy obserwacji i odczytania.
6. Błędy obliczeniowe.

Podstawowe źródła błędów występujące w pomiarach przedstawiono na rys. 1.1.



Rys. 1.1. Struktura źródeł błędów w pomiarach

1.1.1. Nieścisłość definicji wielkości mierzonej

Fizyczny charakter jednostki miary nie może zapewnić jej niezmienności przy odtwarzaniu. Choć jednostka długości, jaką jest metr, który zastąpił stosowane wcześniej jednostki miary wyrażane najczęściej w długościach kończyn, jest zdefiniowany od kilku wieków, zawsze istniał problem z jego odtworzeniem. Prototyp metra, wytworzony jako wzorec kreskowy ze stopu platyny i irydu, nie utrzymywał stałej długości w czasie. Postęp w technice sprawił, że w roku 1960 stary wzorec fizyczny został ostatecznie zastąpiony definicją metra w kategorii długości fali promieniowania kryptonu 86, która następnie została zastąpiona

definicją opartą na wartości długości światła oznaczanej na podstawie długości fali lasera helowo-neonowego. Obecnie podstawą definicji jednostki długości metra jest prędkość światła (naturalna wielkość stała). Definiuje się go jako długość drogi przebytej przez światło w próżni w czasie $1/299\,792\,458$ sekundy. Wynika stąd, że wzorzec długości jest zależny od definicji i pomiaru czasu. Stąd dokładność odtworzenia jednostki długości jest uzależniona od uzyskania stabilnej długości fali lasera (He-Ne) oraz pomiaru czasu, opartego na stabilności długości fali promieniowania atomu cezu 133, emitowanego w odpowiednich warunkach. Wszystko to sprawia, że wprawdzie z coraz większą precyzją jesteśmy w stanie odtworzyć jednostkę długości, ale nigdy nie będzie ona odtworzona bezbłędnie.

1.1.2. Błędy instrumentalne

Błędem instrumentalnym nazywa się błąd pochodzący od narzędzia użytego do pomiaru. Można tu wyróżnić:

- błąd wskazania wzorca miary (będący różnicą wartości nominalnej wzorca i wartością poprawną odtworzoną przez ten wzorzec);
- błąd wskazania przyrządu pomiarowego (będący różnicą między wartością wskazaną przez przyrząd a poprawną wartością wielkości mierzonej).

Wśród błędów wskazania przyrządu pomiarowego można wyróżnić:

- błąd zera (błąd wskazania dla wartości zerowej wielkości mierzonej);
- rozrzut wskazań narzędzia pomiarowego (będący odchyleniem średnim kwadratowym pojedynczego wskazania w danej serii wskazań narzędzia pomiarowego).

Nawet najlepszej klasy przyrząd pomiarowy nie jest wykonany „idealnie”. Jego powierzchnie, oczywiście w dopuszczalnym zakresie, mogą posiadać odchyłki płaskości, równoległości czy prostokątności względem siebie. Wymiary poszczególnych elementów przyrządu również osiągnąć można z jakąś dokładnością. To samo dotyczy wykonania podziałki na skali przyrządu. Dla zapewnienia możliwości przesuwu części składowych przyrządu wymagane jest zachowanie luzu. W mechanizmach przyrządów pomiędzy współpracującymi powierzchniami występuje zjawisko tarcia. Materiał, z którego wykonany jest przyrząd pomiarowy, zawsze charakteryzuje się rozszerzalnością cieplną. W najczęstszym przypadku materiał ten jest inny niż materiał elementu mierzonego, co powoduje inne zmiany wymiarów przyrządu pomiarowego i mierzonego elementu.

Na błędy własne przyrządu może mieć istotny wpływ usytuowanie wzorców, przedmiotów sprawdzanych, układów wskazujących narzędzia pomiarowego i sposób ich wzajemnego przemieszczania w czasie pomiaru.

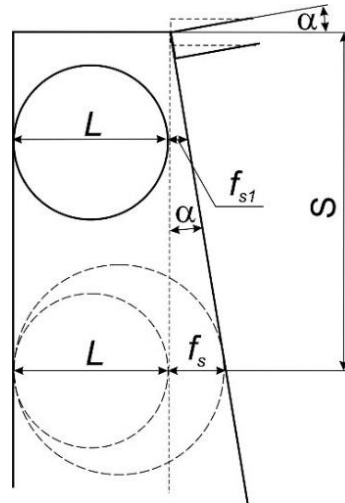
Wzorzec i przedmiot sprawdzany powinny być usytuowane nie równolegle obok siebie, lecz jeden za drugim tak, aby oś główna wzorca tworzyła jedną linię prostą z kierunkiem, na którym leży mierzony wymiar (postulat Abbe).

Typowym konstrukcyjnym odstępstwem od postulatu Abbego jest suwmiarka. Wychylenie szczęki ruchomej o kąt α spowodowane luzami prowadnicy prowadzi do tym większego błędu f_s , im płycej jest wprowadzony

przedmiot mierzony między szczęki (rys. 1.2). Dlatego prawidłowy pomiar suwmiarką wymaga wprowadzenia przedmiotu możliwie głęboko między szczęki suwmiarki. Zależność tę, przedstawia poniższe równanie:

$$f_s = S \cdot \sin \alpha \quad (1.1)$$

gdzie: S – odległość przedmiotu od prowadnicy suwmiarki; α – kąt ugięcia szczęki ruchomej suwmiarki.



Rys. 1.2. Wpływ usytuowania przedmiotu mierzonego na wielkość błędu przy pomiarze suwmiarką

Reasumując, stwierdzić można, że błędy własne narzędzia pomiarowego są spowodowane:

- jego niedoskonałością konstrukcyjną;
- tolerancjami wykonawczymi elementów przyrządu;
- wadami montażu i regulacji;
- niedoskonałością materiału elementów przyrządu.

1.1.3. Błędy metody

Zastosowana metoda pomiaru zawsze powoduje pewne charakterystyczne dla niej błędy. Wpływ sił i nacisków pomiarowych powoduje odkształcenia w elementach przyrządów pomiarowych. Do właściwości przedmiotu, które wpływają na błędy pomiaru, zalicza się przede wszystkim rodzaj materiału i nierówność powierzchni. Materiał przedmiotu decyduje o jego ugięciu pod własnym ciężarem i odkształceniu wywołanym naciskiem pomiarowym. Nierówność powierzchni powoduje błędy pomiaru, zwłaszcza przy pomiarach pneumatycznych i metodach stykowych.

Ciężar własny i nacisk pomiarowy mogą powodować odkształcenia sprężyste całych przedmiotów lub ich części (tabela 1.1) oraz miejscowe odkształcenia powierzchni elementów (tabela 1.2).

Tabela 1.1. Odkształcenia elementów pod wpływem nacisków pomiarowych

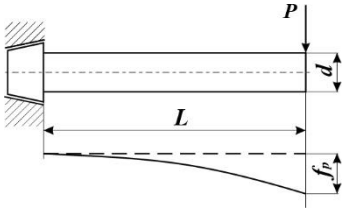
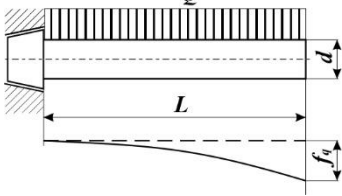
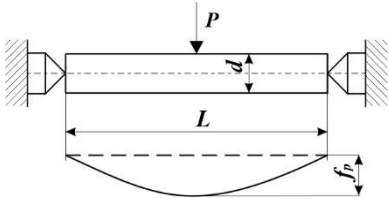
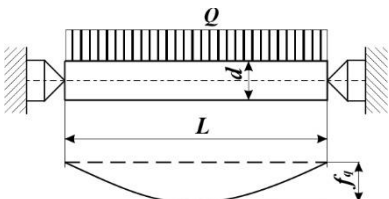
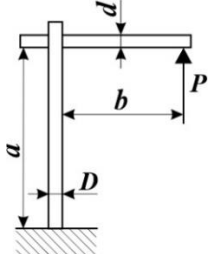
Szkic wyjaśniający wzór obliczeniowy	Wzór obliczeniowy
	Trzpień kontrolny jednostronnie zamocowany, uginający się pod wpływem siły nacisku pomiarowego P. $f_P = \frac{1}{3} \cdot \frac{P \cdot L^3}{E \cdot I} = \frac{64}{3} \cdot \frac{P \cdot L^3}{\pi \cdot E \cdot d^4}$ I – moment bezwładności przekroju E – moduł sprężystości
	Trzpień kontrolny jednostronnie zamocowany, uginający się pod wpływem ciężaru własnego Q. $f_Q = \frac{1}{8} \cdot \frac{Q \cdot L^4}{E \cdot I} = 2 \cdot \frac{\gamma \cdot L^4}{E \cdot d^2}$ γ – ciężar właściwy [g/cm^3]
	Trzpień kontrolny dwustronnie zamocowany, w kłach uginający się pod wpływem siły nacisku pomiarowego P. $f_P = \frac{1}{48} \cdot \frac{P \cdot L^3}{E \cdot I} = \frac{4}{3} \cdot \frac{P \cdot L^3}{\pi \cdot E \cdot d^4}$ I – moment bezwładności przekroju E – moduł sprężystości
	Trzpień kontrolny dwustronnie zamocowany w kłach, uginający się pod wpływem ciężaru własnego Q. $f_Q = \frac{5}{384} \cdot \frac{Q \cdot L^4}{E \cdot I} = \frac{5}{24} \cdot \frac{\gamma \cdot L^4}{E \cdot d^2}$ γ – ciężar właściwy [g/cm^3]
	Statyw czujnika wykonany z prętów okrągłych o różnych średnicach, obciążony siłą nacisku pomiarowego P. $f_P = \frac{64 \cdot P \cdot b^2}{\pi \cdot E} \cdot \left(\frac{a}{D^4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{b}{d^4} \right)$ E – moduł sprężystości

Tabela 1.2. Miejscowe odkształcenie sprężyste powierzchni elementów wywołane naciskiem pomiarowym

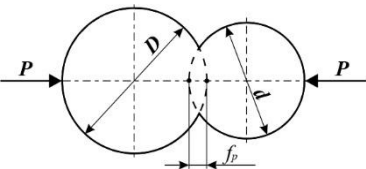
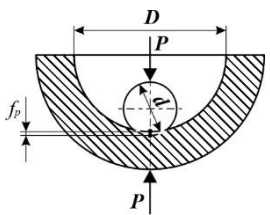
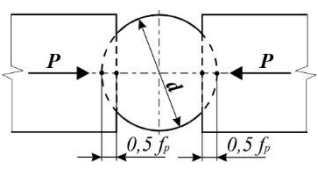
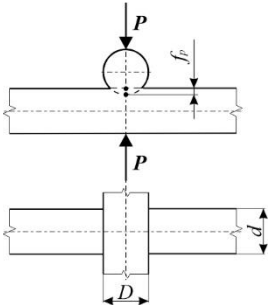
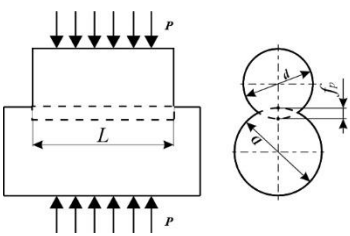
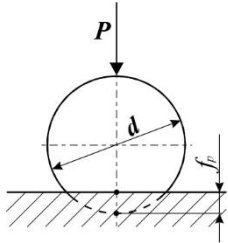
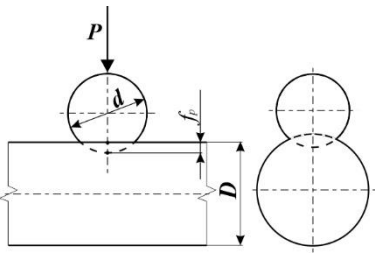
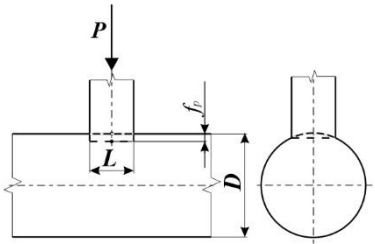
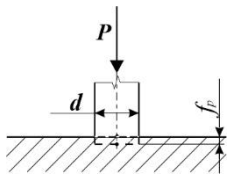
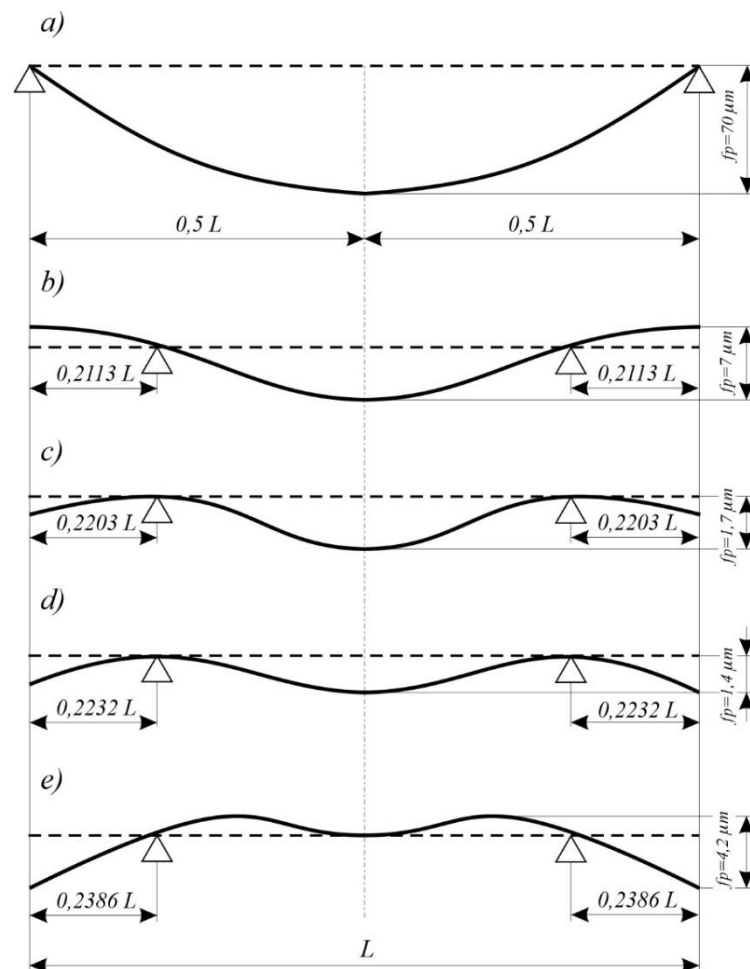
Szkic wyjaśniający wzór obliczeniowy	Wzór obliczeniowy i objaśnienie
	Splaszczanie występujące przy zetknięciu się dwóch kul stalowych pod działaniem siły P. $f_p = 0,019 \cdot \sqrt[3]{P^2 \cdot \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{D}\right)}$
	Splaszczanie występujące przy zetknięciu się kuli stalowej z wewnętrzną powierzchnią czaszy kulistej pod działaniem siły P. $f_p = 0,019 \cdot \sqrt[3]{P^2 \cdot \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{D}\right)}$
	Splaszczanie występujące przy zetknięciu się kuli stalowej z obejmującymi ją przy pomiarze dwoma płaskimi końcówkami mierniczymi przy działaniu nacisku pomiarowego P. $f_p = 0,038 \cdot \sqrt[3]{\frac{P^2}{d}}$
	Splaszczanie występujące przy zetknięciu się dwóch stalowych walców, usytuowanych względem siebie prostopadle, przy działaniu siły P. $f_p = 0,022 \cdot \frac{\sqrt[3]{P^2}}{\sqrt{d \cdot D \cdot (d + D)^2}}$
	Splaszczanie występujące przy zetknięciu się dwóch walców stalowych, usytuowanych względem siebie równolegle, przy działaniu siły P. $f_p = 0,00046 \cdot \frac{P}{L} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{D} + \frac{1}{d}}$

Tabela 1.2. Miejscowe odkształcenie sprężyste powierzchni elementów wywołane naciskiem pomiarowym

	Splaszczanie występujące przy zetknięciu się stalowych: kuli i płaskiej powierzchni przy działaniu siły P. $f_P = 0,0415 \cdot \sqrt[3]{\frac{P^2}{d}}$
	Splaszczanie występujące przy zetknięciu się stalowych: kuli i walca przy działaniu siły P. $f_P = 0,048 \cdot \sqrt[3]{P^2} \cdot \frac{\sqrt[4]{\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{D}\right) \cdot \frac{1}{d}}}{\sqrt[6]{\frac{2}{d} + \frac{1}{D}}}$
	Splaszczanie występujące przy zetknięciu się stalowych: walca z powierzchnią płaską przy działaniu siły P. $f_P = 4,69 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{P}{L} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{D}}$
	Splaszczanie występujące przy zetknięciu się stalowych: walca i powierzchni płaskiej przy działaniu siły P. $f_P = 4,59 \cdot \frac{P}{d}$
Jeżeli wymiary D, d, L w powyższych zależnościach podstawimy w m, a siłę (nacisk pomiarowy) P w N, to wynik splaszczania f_p otrzymamy w μm.	

W przypadku prętów o stałym przekroju, dla których dokładność pomiaru długości zależy może od ugięć, jakim pręty podlegają pod wpływem własnego ciężaru, ważna jest umiejętność doboru prawidłowych punktów podparcia (rys. 1.3), w zależności od określanej wielkości mierzonej.



Rys. 1.3. Wpływ podparcia na wielkość strzałki ugięcia pręta: a) podparcie na końcach pręta – największe ugięcie; b) podparcie w pkt. Airy'ego – powierzchnie czołowe są względem siebie równoległe; c) podparcie w pkt. Bessela – najmniejsze skrócenie rzutu warstwy obojętnej na płaszczyznę podstawy; d) podparcie w pkt. Granta – najmniejsze ogólne ugięcie pręta; e) podparcie zapewniające położenie środka pręta i punktów podparcia na tej samej wysokości

Typowe przypadki metrologicznie negatywnego oddziaływania sił i nacisków pomiarowych można sprowadzić do następujących:

- działanie ciężaru własnego mierzonego przedmiotu i nacisku pomiarowego powodujące wydłużenie lub skrócenie przedmiotu;
- działanie ciężaru własnego i nacisku pomiarowego powodujące sprężyste odkształcenie szczęk lub kabłąka, obarczając błędem wskazania przyrządu;
- ciężar własny łącznie z naciskiem pomiarowym może powodować ugięcie smukłych elementów zamocowania (statywów, trzpieni kontrolno-pomiarowych, podpartych wzorców).

Nacisk pomiarowy jest jednak niezbędny w metodach stykowych z następujących przyczyn:

- dla zapewnienia styku końcówki pomiarowej z rzeczywistą powierzchnią mierzonego przedmiotu musi być „przebita” lub odsunięta warstwa tłuszczów i smarów, a czasem drobin zanieczyszczeń;
- między powierzchniami styku nie może powstawać szczelina powietrzna;
- w celu pokonania oporów w elementach ruchomych przyrządów;
- w celu skasowania luzów;
- siła nacisku musi równoważyć ciężar własny ruchomych elementów tak, aby przyrząd mógł być używany w różnych położeniach.

Najczęściej w przyrządach pomiarowych naciski statyczne nie przekraczają wartości 2,5 N, a wyjątkowo dochodzą do 10 N. Naciski dynamiczne występujące przy szybkim opadaniu trzpienia pomiarowego na mierzoną powierzchnię mogą dochodzić do 70 N.

Przykład 1.1

Obliczyć błąd systematyczny spowodowany odkształceniem powierzchniowym pochodzącym od nacisku pomiarowego, powstały w wyniku pomiaru kulki łożyskowej o średnicy $d = 12,5$ mm za pomocą mikrometru o nacisku pomiarowym $P = 5$ N.

Rozwiązanie

Odkształcenie sprężyste dla przypadku kula – płaszczyzna, zgodnie z tabelą 1.2, przyjmuje postać:

$$f_P = 0,038 \cdot \sqrt[3]{\frac{P^2}{d}}$$

Stąd po podstawieniu danych:

$$f_P = 0,038 \cdot \sqrt[3]{\frac{5^2}{0,0125}} = 0,48 \text{ } \mu\text{m}$$

Poprawka eliminująca błąd systematyczny spowodowany odkształceniem powierzchniowym jest równa $c_s = 0,48 \text{ } \mu\text{m}$.

Przykład 1.2

Obliczyć błąd systematyczny wynikający z ugięcia swobodnego końca ramienia statywu czujnika pod działaniem siły jego reakcji wynoszącej $P = 3$ N. Wymiary statywu wynoszą: $D = 14$ mm, $d = 12$ mm, $a = 120$ mm, $b = 150$ mm.

Rozwiązanie

Ugięcie swobodnego końca ramienia statywu pod działaniem siły reakcji P nacisku pomiarowego, zgodnie z tabelą 1.1, określa zależność:

$$f_p = \frac{64 \cdot P \cdot b^2}{\pi \cdot E} \cdot \left(\frac{a}{D^4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{b}{d^4} \right)$$

Stąd po podstawieniu danych:

$$f_p = \frac{64 \cdot 3 \cdot 0,150^2}{\pi \cdot 2 \cdot 10^5} \cdot \left(\frac{0,120}{0,014^4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{0,150}{0,012^4} \right) = 38 \mu\text{m}$$

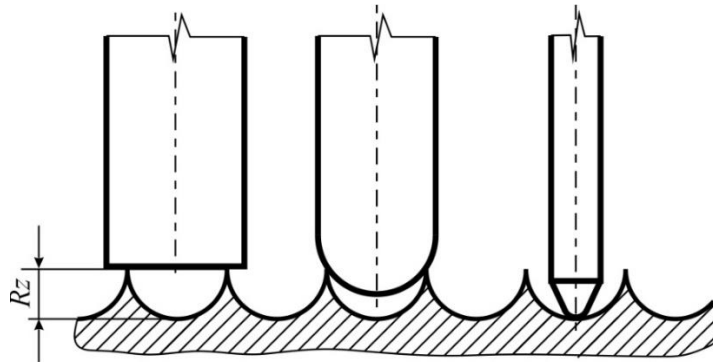
Poprawka eliminująca błąd systematyczny spowodowany odkształceniem powierzchniowym jest równa $c_k = 38 \mu\text{m}$.

Mówiąc o wpływie nierówności powierzchni na błąd pomiaru, należy mieć na uwadze tylko nierówność powierzchni przedmiotu mierzonego, gdyż wymagania w tym względzie stawiane końcówkom narzędzi pomiarowych są tak duże, że nie trzeba uwzględniać ich wpływu.

Przy pomiarach metodami stykowymi uwzględnia się wpływ nacisku pomiarowego powodującego odkształcenia sprężyste i plastyczne wierzchołków nierówności oraz wpływ zaokrąglenia i kształtu końcówki pomiarowej.

Jak wynika z przeprowadzonych badań, wartości znaczące błędów systematycznych spowodowanych chropowatością występują wtedy, gdy wysokość chropowatości R_z mierzonej powierzchni jest większa niż $10 \mu\text{m}$.

Wpływ kształtu i wymiarów końcówki pomiarowej na błąd długości, spowodowany chropowatością R_z , przedstawiono na rys. 1.4.



Rys. 1.4. Wpływ chropowatości powierzchni na błąd pomiaru

Przy bezstykowych pomiarach czujnikami pneumatycznymi zmiana przekroju wylotu dyszy, przez który na zewnątrz wypływa z dyszy strumień sprężonego powietrza, powoduje zmianę natężenia tegoż strumienia.

Chropowatość powierzchni może być również źródłem błędów pomiaru przy pomiarach optycznych. Powoduje ona uginanie, wielokrotne załamывanie i odbijanie promieni świetlnych, a w rezultacie rozproszenie światła i pogorszenie ostrości obserwowanego obrazu. Błędy te wynoszą szacunkowo około $0,5 R_z$.

1.1.4. Błędy środowiskowe

Warunki zewnętrzne pomiaru są określone w pierwszym rzędzie przez tzw. warunki normalne, do których należą:

- stała temperatura odniesienia 293,15 K (20°C);
- ciśnienie atmosferyczne 101324,72 Pa (760 mmHg);
- wilgotność określona ciśnieniem 1333,22 Pa (10 mmHg).

Ponadto należy dodać brak wstrząsów, wibracji, pyłu, kurzu, pól elektrycznych i magnetycznych etc.

W pomiarach przyjmuje się temperaturę odniesienia 293,15 K (20°C) i wszelkie wyniki uzyskane w innej temperaturze traktuje się jako obarczone błędem spowodowanym rozszerzalnością przedmiotów mierzonych lub elementów narzędzia pomiarowego.

Jeżeli ciało stałe o współczynniku rozszerzalności liniowej α ma w temperaturze odniesienia ϑ długość L , to w temperaturze ϑ_1 jego długość L_1 wynosi:

$$L_1 = L + \alpha \cdot L \cdot (\vartheta_1 - \vartheta) \quad (1.2)$$

Zmianę wymiaru pod wpływem temperatury określa zależność:

$$\Delta L = L \cdot [\alpha_p \cdot (\vartheta_p - 20) - \alpha_n (\vartheta_n - 20)] \quad (1.3)$$

gdzie: L – nominalna wartość wielkości mierzonej zaokrąglona do pełnych milimetrów;
 α_n i α_p – współczynniki rozszerzalności liniowej materiałów narzędzia i przedmiotu mierzonego; ϑ_n i ϑ_p – temperatury narzędzia pomiarowego i przedmiotu mierzonego.

Bezwładność cieplna powoduje, że wyrównanie temperatur wymaga pewnego czasu, który dla przedmiotów stalowych można wyliczyć z empirycznej zależności:

$$\tau = 0,5 \frac{M}{F} \lg \frac{\vartheta_0 - \vartheta_1}{\vartheta - \vartheta_1} \quad [h] \quad (1.4)$$

gdzie: M – masa przedmiotu w kg; F – powierzchnia przedmiotu w m²; ϑ_0 – temperatura początkowa przedmiotu; ϑ_1 – temperatura końcowa przedmiotu; ϑ – temperatura otoczenia.

Przykład 1.3

W wyniku wielokrotnego pomiaru wałka uzyskano średnią arytmetyczną wyników pomiaru $d = 45,87$ mm. Obliczyć poprawkę temperaturową średnicy wałka przy założeniu, że współczynniki rozszerzalności materiałów narzędzia i przedmiotu mierzonego wynoszą odpowiednio $\alpha_n = (11,5 \pm 1,0) \cdot 10^{-6}$ 1/°C, $\alpha_p = (18,5 \pm 1,0) \cdot 10^{-6}$ 1/°C, oraz temperatury narzędzia i przedmiotu mierzonego $\vartheta_n = 19,5^\circ\text{C}$, $\vartheta_p = 24^\circ\text{C}$.

Rozwiązanie

$$\Delta L = L \cdot [\alpha_p \cdot (\vartheta_p - 20) - \alpha_n (\vartheta_n - 20)]$$

Skąd po podstawieniu danych:

$$\Delta L = 45,87 \cdot [18,5 \cdot 10^{-6} \cdot (24 - 20) - 11,5 \cdot 10^{-6} (19 - 20)] = 0,00137 \text{ mm}$$

Stąd poprawka temperaturowa wynosi:

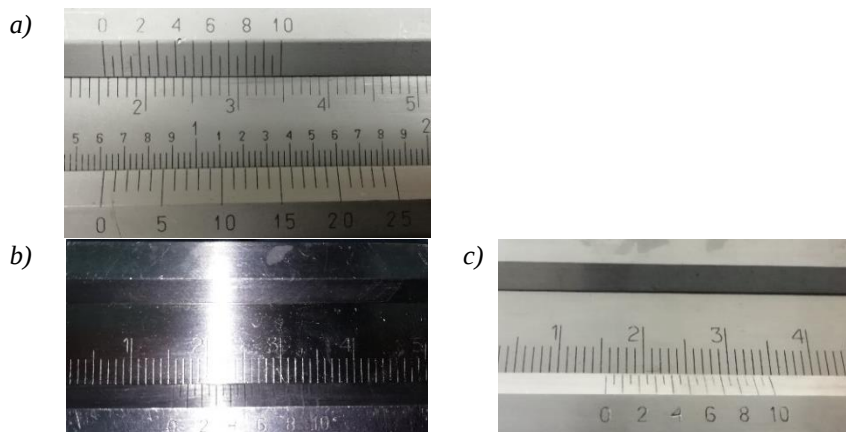
$$c_t = -1,4 \text{ } \mu\text{m}$$

1.1.5. Błędy obserwacji

Błędy te występują w przyrządach wyposażonych w analogowe urządzenia odczytowe lub optyczne układy do nastawiania na mierzone obiekty.

Na doskonałość obserwacji i odczytania wpływają właściwe rozwiązanie elementów wskazujących, dokładność zmysłów ludzkich oraz oświetlenie.

Wśród czynników dotyczących elementów wskazujących należy wskazać wielkość i grubość kresy wzorca oraz odległości pomiędzy poszczególnymi kresami. Nie bez znaczenia jest również w przypadku przyrządów analogowych odpowiedni kolor zarówno wskazzu, jak i tarczy oraz barwa i intensywność oświetlenia wykorzystywanego w pomiarach. Na rys. 1.5 przedstawiono wskazanie dwóch suwmiarek – z matowymi (rys. 1.5a) oraz błyszczącymi (rys. 1.5b) noniuszem i prowadnicą – przy różnym oświetleniu (rys. 1.5b, c).



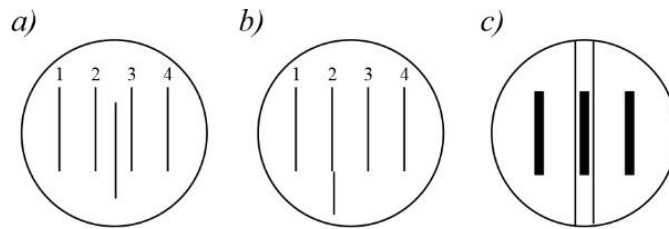
Rys. 1.5. Wpływ wykonania skali i oświetlenia na dokładność obserwacji

Wśród grupy błędów, określanых wspólnie nazwą błędów obserwacji, najważniejsze znaczenie można przypisać zespołowi błędów osobowych. Spowodowane są one niedoskonałością zmysłów ludzkich oraz brakiem umiejętności lub niezręcznością osoby mierzącej. Wpływ na nie mają:

- zdolność rozdzielcza oka;
- właściwe oświetlenie;

- aktualna dyspozycja mierzącego;
- warunki zewnętrzne;
- błąd nastawienia optycznego;
- błąd odczytania.

Organem, od którego percepcji zależą w dużym stopniu błędy obserwacji, jest ludzkie oko. Wskutek jego niedoskonałości dwóch obserwatorów inaczej oceni koincydencję czy położenie znacznika pomiędzy dwoma kresami wzorca. Błędy te wynikają z różnej oceny koincydencji czy interpolacji przez obserwatorów (rys. 1.6).

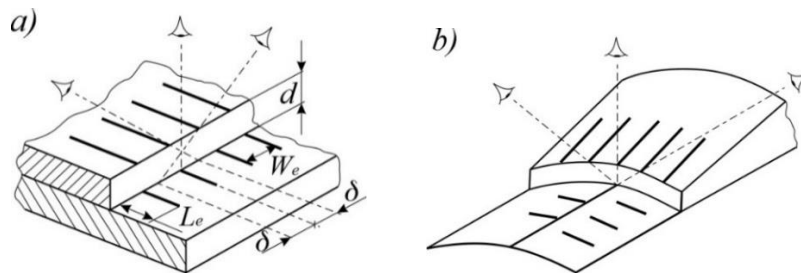


Rys. 1.6. Powstawanie błędów odczytania: a) interpolacji, b) koincydencji, c) położenia środkowego kresy w bisektorze

Dla wartości działki elementarnej W_e błędy odczytania wynoszą odpowiednio:

- błąd interpolacji $e_{int} = 0,1 W_e$;
- błąd koincydencji $e_k = 0,02 W_e$;
- błąd położenia środkowego kresy w bisektorze $e_{bis} = 0,006 W_e$.

Do błędów odczytania zalicza się również błąd paralaksy. Występuje on, kiedy pomiędzy wskazówką a podzielną występuje pewien odstęp, a kierunek odczytywania wskazań nie jest prostopadły do podzielni. Przykładowe błędy paralaksy przedstawiono na rys. 1.7.



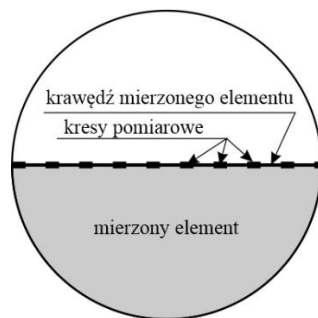
Rys. 1.7. Przykład błędów paralaksy przy pomiarze: a) suwmiarką, b) mikrometrem

Błąd paralaksy oblicza się ze wzoru:

$$e_{par} = \pm \frac{0,2 \cdot d \cdot W_e}{L_e} \quad (1.5)$$

gdzie: d – odległość kres wskazu od podzielni; W_e – wartość działki elementarnej;
 L_e – długość działki elementarnej

Wśród błędów obserwacji wyszczególnić należy także błąd nastawienia optycznego. Powstaje on, kiedy istotnym czynnikiem wpływającym na poprawność nastawienia przyrządu pomiarowego na mierzony wymiar jest obserwacja optyczna. W celu wyeliminowania czy ograniczenia tego błędu należy przerywaną kresę okularu głowicy pomiarowej nastawiać symetrycznie na mierzonej krawędzi, tak, aby połową swej grubości była ona na przedmiocie mierzonym (rys. 1.8).



Rys. 1.8. Prawidłowe nastawienie kresy pomiarowej na krawędzi mierzonego elementu

Wpływ na prawidłowy odczyt ma również barwa i intensywność oświetlenia, a także zmęczenie czy też znużenie osoby przeprowadzającej pomiary. Nie bez znaczenia na odczyt wyniku pomiaru mają również warunki zewnętrzne w postaci chociażby temperatury, wilgotności, hałasu czy wibracji, które mogą zmniejszać predyspozycje osoby przeprowadzającej pomiar.

1.1.6. Błędy obliczeniowe

Błędy obliczeniowe powstają w wyniku zaokrąglania liczb do wymaganej ilości miejsc znaczących. W czasie obliczeń pomiarowych wyniki pomiarów przedstawia się liczbami dziesiętnymi zaokrąglonymi do określonego miejsca dziesiętnego. Przy działaniu na takich liczbach należy stosować się do następujących zasad:

1. Przybliżenia dziesiętne zaokrągla się, odrzucając zbędne lub niepewne liczby końcowe. Jeżeli pierwsza z odrzucanych cyfr jest większa niż 5, to do ostatniej z pozostałych dodaje się 1, jeżeli mniej, to od ostatniej pozostałej liczby odejmuje się 1. W przypadku, gdy odrzucana cyfra wynosi 5, to wynik zaokrąglamy w górę do wartości parzystej.
2. Przy dodawaniu i odejmowaniu przybliżeń dziesiętnych należy zachować w wyniku tyle cyfr po przecinku dziesiętnym, ile ich jest w liczbie przybliżonej, która ma najmniejszą liczbę cyfr po przecinku.
3. Przy mnożeniu i dzieleniu przybliżeń należy zachować tyle cyfr wartościowych, ile ich jest w tym przybliżeniu, które ma mniejszą liczbę cyfr wartościowych.
4. Przy podnoszeniu do potęgi wynik powinien mieć tyle cyfr wartościowych, ile ma ich potęgowana liczba przybliżona.
5. We wszystkich obliczeniach pośrednich należy zachować o jedną cyfrę więcej, niż wynika to z podanych wyżej zasad.

1.2. Rodzaje błędów pomiaru i metody ich eliminacji

Przy dokonywaniu pomiaru wielkości mierzonej na wstępie otrzymuje się tzw. *surowy wynik pomiaru*, który nie został jeszcze poprawiony poprzez wprowadzenie do niego *poprawek* i wyznaczenie *niepewności pomiaru*.

Surowy wynik pomiaru wymaga opracowania przez eliminację błędów systematycznych i podania niepewności pomiaru. Tak opracowany wynik pomiaru nazywa się *poprawionym wynikiem pomiaru*.

W ogólnym ujęciu błąd *ER* wyznacza się jako różnicę między wartością pomiaru *MR* a wartością prawdziwą *TV*, co w odniesieniu do pomiaru definiuje błąd jako niezgodność pomiaru z wartością wielkości mierzonej:

$$ER = MR - TV \quad (1.6)$$

Za wartość prawdziwą można przyjmować:

- rzeczywistą wartość wielkości mierzonej (zazwyczaj nieznana);
- wartość poprawną wielkości mierzonej, którą uważa się w takim stopniu przybliżoną do wartości rzeczywistej, że różnica między tymi wartościami może być pominięta z punktu widzenia celu, dla którego wartość przybliżona jest potrzebna;
- średnią arytmetyczną wyników serii pomiarów.

Ze względu na sposób określania błędu pomiaru rozróżnia się:

- *błąd bezwzględny pomiaru*, będący różnicą algebraiczną między wynikiem pomiaru a wartością wielkości mierzonej;
- *błąd względny pomiaru*, będący ilorazem błędu bezwzględnego przez wartość wielkości mierzonej.

Ponieważ wartość wielkości mierzonej można określać w różny sposób, istnieje podział błędu bezwzględnego pomiaru na:

- *błąd bezwzględny rzeczywisty*, jako różnicą algebraiczną między wynikiem pomiaru a wartością rzeczywistą – niedający się określić;
- *błąd bezwzględny poprawny*, jako różnicą algebraiczną między wynikiem pomiaru a wartością poprawną wielkości mierzonej;
- *błąd bezwzględny pozorny* jest różnicą algebraiczną między jednym z wyników w danej serii pomiarów a średnią arytmetyczną ze wszystkich wyników pomiarów tej serii.

Przykład 1.4

Przeprowadzono pomiar średnicy wałka za pomocą mikrometru i otrzymano wynik $x_z = 10,105$ mm, który jest surowym wynikiem pomiaru. Następnie tę samą średnicę zmierzono za pomocą optimetru i odpowiedniego stosu płytek wzorcowych kl. 0, uzyskując wynik $x_p = 10,107$ mm. Wyznaczyć błąd bezwzględny poprawny.

Rozwiązanie

Traktując wynik pomiaru na optymetrze jako poprawną wartość wielkości mierzonej, błąd bezwzględny poprawny wyniesie:

$$\delta = x_z - x_p = 10,105 - 10,107 = -0,002 \text{ [mm]}$$

Przykład 1.5

Przeprowadzono 5 pomiarów średnic wałka w normalnych warunkach wpływowych, tym samym narzędziem i przez tego samego pomiarowca. Otrzymano następujące wyniki surowe:

$$x_1 = 10,105 \text{ [mm]}$$

$$x_2 = 10,107 \text{ [mm]}$$

$$x_3 = 10,107 \text{ [mm]}$$

$$x_4 = 10,106 \text{ [mm]}$$

$$x_5 = 10,104 \text{ [mm]}$$

Wyznaczyć błędy bezwzględne pozorne.

Rozwiązanie

Średnia arytmetyczna wyników serii pomiarów wynosi: $x_{sr} = 10,106 \text{ mm}$
Błędy bezwzględne pozorne pomiarów wynoszą:

$$v_1 = x_1 - x_{sr} = 10,105 - 10,106 = -0,001 \text{ mm}$$

$$v_2 = x_2 - x_{sr} = 10,107 - 10,106 = -0,001 \text{ mm}$$

itd.

Błąd względny jest ilorazem błędu bezwzględnego przez wartość wielkości mierzonej, zastosowanej do obliczenia tego błędu bezwzględnego. Ze względu na zastosowaną wartość wielkości mierzonej może to być błąd względny poprawny i błąd względny pozorny. Wartości błędów względnych podaje się zazwyczaj w procentach.

Przykład 1.6

Wyznaczyć błędy względne dla danych z poprzedniego przykładu.

Rozwiązanie

Błędy względne dla poprzednich przykładów wynoszą:

- błąd względny poprawny

$$\omega_{pop} = \frac{\delta}{x_p} = -\frac{0,002}{10,007} = -0,00019 = -0,02\%$$

- błąd względny pozorny (dla $i = 2$)

$$\omega_{poz} = \frac{v_2}{x_{sr}} = \frac{0,001}{10,006} = 0,00009 = +0,01\%$$

Norma EN-ISO 14253-2 podaje, że w wynikach pomiaru pojawiają się błędy różnego typu:

- błędy systematyczne;
- błędy przypadkowe;
- dryf;
- wyniki izolowane.

W zasadzie wszystkie błędy są systematyczne. Jeśli traktuje się je inaczej to dlatego, że nie szuka się ich przyczyny lub rozdzielczość jest niewystarczająca. Trudno przy pomiarze w warunkach przemysłowych uwzględnić np. błąd systematyczny powstały w wyniku odkształcenia powierzchni pod naciskiem pomiarowym podczas pomiaru mikrometrem. Łatwiej i szybciej jest uwzględnić mniej istotne czynniki w postaci błędu przypadkowego, charakteryzując go odchyleniem standardowym.

Dryf spowodowany jest przez systematyczny wpływ niekontrolowanych wielkości wpływających (np. starzenia czy zużycia). Może on być scharakteryzowany za pomocą zmiany w jednostce czasu lub zmiany uzależnionej od intensywności zużycia.

Wyniki izolowane są spowodowane niepowtarzalnymi zdarzeniami podczas pomiaru. Ich przyczyną mogą być omyłki osoby wykonującej pomiar czy niewłaściwe posługiwanie się wyposażeniem pomiarowym.

Takie wyjaśnienie informacji zawartych w normie pozwala na klasyczne podejście do klasyfikacji błędów, które jest bardziej praktyczne.

Klasyczny podział błędów dzieli je na:

- *błędy systematyczne*, które pozostają stałe zarówno co do wartości bezwzględnej, jak i co do znaku, lub zmieniają się wraz ze zmianą warunków, wg określonego prawa;
- *błędy przypadkowe*, zmieniające się w sposób nieprzewidywany zarówno co do wartości bezwzględnej, jak i znaku;
- *błędy nadmierne (grube)*, wynikające z nieprawidłowego wykonania pomiaru.

1.2.1. Błędy systematyczne

Błędy systematyczne na ogół dają się obliczyć lub wyznaczyć doświadczalnie. Uwolnienie surowego wyniku pomiaru od błędu systematycznego polega na dodaniu do tego wyniku poprawki, która jest równa błędowi bezwzględnemu surowego wyniku pomiaru, wziętego ze znakiem przeciwnym.

Jeżeli więc obliczymy błąd bezwzględny δ z zależności:

$$\delta = x_z - x_p \quad (1.7)$$

gdzie: x_z – surowy wynik pomiaru; x_p – poprawna wartość wielkości mierzonej,

to poprawka:

$$c = -\delta \quad (1.8)$$

Do błędów systematycznych stałych zalicza się błędy, których wartość i znak nie zmienia się podczas pomiarów dokonywanych danym narzędziem pomiarowym. Na przykład, jeżeli suwmiarka ma zużyte płaskie powierzchnie pomiarowe szczęk, na skutek czego po ich dosunięciu noniusz daje wskazanie $-0,1$ mm, to błąd systematyczny wynosi wtedy $-0,1$ mm.

Błędy systematyczne zmienne mogą w czasie pomiarów zmieniać nie tylko wartość bezwzględną, lecz i znak. Na przykład, jeżeli dokonuje się szeregu pomiarów tej samej wartości w warunkach kontrolowanych zmian temperatury, to wyniki tych pomiarów będą obciążone błędami systematycznymi, które będą funkcją temperatury. Gdyby zmiany temperatury nie były kontrolowane, to błędy te będą błędami przypadkowymi.

1.2.2. Błędy przypadkowe

Błędów przypadkowych nie da się uwzględnić jako poprawki w surowym wyniku pomiaru. Powstają one w sposób niekontrolowany przez mierzącego, jako wynik sumowania się bardzo wielu drobnych błędów o zmieniających się wartościach i znakach w poszczególnych pomiarach. Można tylko na podstawie serii pomiarów określić, z określonym prawdopodobieństwem, granice, w których znajduje się ten błąd (błąd graniczny). Przy dużej liczbie pomiarów rozkład ich wyników uwolniony od błędów systematycznych, ujęty graficznie, przyjmuje zazwyczaj kształt krzywej dzwonowej zwanej *krzywą Gaussa* lub *krzywą rozkładu normalnego*.

Jeżeli wyniki serii pomiarów zostały uwolnione od błędów systematycznych, to średnia arytmetyczna tych wyników jest najlepszym oszacowaniem szukanej miary mierzonej wielkości:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \approx \alpha \quad (1.9)$$

Stosując wzór Bessela, można obliczyć odchylenie średnie kwadratowe jednego pomiaru w danej serii pomiarów:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad (1.10)$$

Odchylenie średnie kwadratowe średniej arytmetycznej z danej serii pomiarów:

$$s_r = \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (1.11)$$

W wyniku serii pomiarów przyjmuje się wartość średnią jako najlepsze przybliżenie miary mierzonej wielkości. Wartość rzeczywista może mieć inną wartość. Prawdopodobieństwem otrzymania w wyniku n pomiarów takiej wartości średniej, że przedział ufności będzie zawierał rzeczywistą miarę wielkości mierzonej α , jest prawdopodobieństwo:

$$P(\bar{x} - \varepsilon < \alpha < \bar{x} + \varepsilon) \quad (1.12)$$

Przy mniejszej liczbie pomiarów stosuje się *rozkład Gosseta* znany jako rozkład *t-Studenta*. Prawdopodobieństwo, że rzeczywista wartość α znajdzie się w przedziale $(-t_{k,\alpha}, +t_{k,\alpha})$, określa równanie:

$$\bar{x} - t_{k,\alpha} \cdot s_r < \alpha < \bar{x} + t_{k,\alpha} \cdot s_r \quad (1.13)$$

Należy jednak podkreślić, że stosowanie rozkładu *t-Studenta* dla liczby pomiarów mniejszej niż 3-6 prowadzi do oszacowania zbyt dużych granic błędów.

Opracowując wyniki pomiarów, należy określić błędy graniczne.

Przykład 1.7

Przy seryjnym pomiarze pewnej wielkości a otrzymano 10 wyników pomiarów, które po uwolnieniu od błędów systematycznych zestawiono w tabeli.

i	a_i	$v_i = a_i - \bar{a}$	$v_i^2 = (a_i - \bar{a})^2$
1	8,375	0,010	0,000100
2	8,355	-0,010	0,000100
3	8,367	0,002	0,000004
4	8,358	-0,007	0,000049
5	8,359	-0,006	0,000036
6	8,367	0,002	0,000004
7	8,376	0,011	0,000121
8	8,371	0,006	0,000036
9	8,369	0,004	0,000016
10	8,357	-0,008	0,000064
$\bar{a} = 8,365$			$\sum v_i^2 = 0,000530$

Wyznaczyć błąd graniczny pomiaru.

Rozwiązanie

Opierając się na danych z tabeli, określono odchylenie średnie kwadratowe jednego pomiaru w serii:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{0,000530}{9}} = 0,00767$$

oraz odchylenie kwadratowe średniej arytmetycznej:

$$s_r = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{0,00767}{\sqrt{10}} = 0,00243$$

Przy zastosowaniu metody klasycznej należy przyjąć $t=3$ i wówczas błąd graniczny przy pomiarze wyniesie:

$$t \cdot s_r = 3 \cdot 0,00243 = 0,00729 \approx 0,007 \text{ mm}$$

a zapis wyniku pomiaru poprawnego będzie miał postać:

$$a = 8,365 \pm 0,007 \text{ mm}$$

Ponieważ przeprowadzono niewielką liczbę pomiarów ($n = 10$), właściwe będzie oparcie obliczeń na rozkładzie t -Studenta.

Przyjmując $P = 0,99$ dla $n = 10$, w tablicy rozkładu odczytuje się wartość $t = 3,250$.

Wówczas błąd graniczny wyniesie:

$$t \cdot s_r = 3,250 \cdot 0,00243 = 0,00790 \approx 0,008 \text{ mm}$$

a zapis poprawionego wyniku pomiaru będzie miał postać:

$$a = 8,365 \pm 0,008 \text{ mm}$$

co interpretuje się, że rzeczywista wartość mierzonej wielkości a z prawdopodobieństwem $P = 0,99$ mieści się w przedziale od 8,357 do 8,373 mm.

1.2.3. Błędy nadmierne

Błąd nadmierny określa się jako błąd wynikający z nieprawidłowego wykonania pomiaru. Przyczyną tego błędu może być:

- mylne odczytanie wskazania przyrządu pomiarowego;
- omyłkowe zapisanie wyniku pomiaru;
- użycie niewłaściwego lub uszkodzonego narzędzia pomiarowego;
- błąd w obliczeniach.

Błędy te są na ogół niewspółmiernie duże w stosunku do błędów przypadkowych i na skutek tego łatwe do wykrycia. Przy ich identyfikacji można wykorzystać przedział $\pm 3\sigma$ lub analizę statystyczną np. *test Grubbsa*.

Przykład 1.8

Przy seryjnym pomiarze pewnej wielkości otrzymano 15 wyników pomiarów.

i	1	2	3	4	5	6	7	8
b_i	0,545	0,514	0,526	0,527	0,530	0,525	0,527	0,513
i	9	10	11	12	13	14	15	
b_i	0,520	0,598	0,523	0,516	0,520	0,523	0,529	

Należy przeprowadzić analizę i wyeliminować wyniki obarczone błędem grubym.

Rozwiązanie

Przy wstępnej analizie wyników pomiarów można przypuścić, że wyniki b_{10} i b_1 są obciążone błędem nadmiernym. W związku z tym należy przeprowadzić obliczenie:

$$\bar{b} = \frac{1}{15} \sum_{i=1}^{15} b_i = 0,529$$

$$s = \sqrt{\frac{(b_i - \bar{b})^2}{n - 1}} = 0,01987$$

$$3s = 3 \cdot 0,01987 = 0,05962 \approx 0,060$$

W pierwszym kroku rozpatrujemy wynik pomiaru b_{10} jako bardziej odbiegający od serii:

$$b_{10} - \bar{b} = 0,598 - 0,529 = 0,069$$

Ponieważ $(b_{10} - b) > 3s$, wynik pomiaru b_{10} uznaje się za obciążony błędem grubym i odrzuca.

Dalsze obliczenia wykonujemy dla 14 pomiarów:

$$\bar{b} = \frac{1}{14} \sum_{i=1}^{14} b_i = 0,524$$

$$s = \sqrt{\frac{(b_i - \bar{b})^2}{n - 1}} = 0,0084$$

$$3s = 0,02411 \approx 0,024$$

$$b_1 - \bar{b} = 0,545 - 0,524 = 0,021$$

Ponieważ $(b_1 - b) < 3s$, wynik pomiaru b_1 pozostawia się do dalszych obliczeń.

Analogiczną analizę przeprowadzić można z wykorzystaniem testu Grubbsa. Przyjmując $P = 0,99$ dla $n = 15$, w tablicy rozkładu odczytuje się wartość $B_{kr} = 2,800$.

Wartość statystyki Grubbsa wyliczamy z zależności:

$$B = \left| \frac{x_j - \bar{x}}{s} \right| \quad (1.14)$$

Po podstawieniu wyniku 10 pomiaru otrzymujemy:

$$B = \left| \frac{0,598 - 0,529}{0,01987} \right| = 3,472$$

Ponieważ zachodzi zależność:

$$B > B_{kr} \quad (1.15)$$

to wynik 10 pomiaru należy odrzucić.

Następnie jak w poprzednim przypadku rozpatrujemy 1 wynik pomiaru. Przyjmując $P = 0,99$ dla $n = 14$, w tablicy rozkładu odczytuje się wartość $B_{kr} = 2,759$ i oblicza wartość statystyki Grubbsa:

$$B = \left| \frac{0,545 - 0,524}{0,0084} \right| = 2,500$$

Ponieważ zachodzi zależność:

$$B < B_{kr} \quad (1.16)$$

to wynik 1 pomiaru należy zachować do dalszej analizy.

1.3. Oszacowanie błędów przy pomiarach pośrednich

Jeżeli wielkość Y jest związana z m wielkościami zmierzonymi bezpośrednio $X_1, X_2, \dots, X_m$ zależnością:

$$Y = F(X_1, X_2, \dots, X_m) \quad (1.17)$$

to błąd wielkości Y , uwzględniający błędy przypadkowe wielkości zmierzonych w sposób bezpośredni, można określić metodą różniczki zupełnej:

$$\Delta Y = \left| \frac{\partial F}{\partial X_1} \right| \cdot \Delta X_1 + \left| \frac{\partial F}{\partial X_2} \right| \cdot \Delta X_2 + \dots + \left| \frac{\partial F}{\partial X_m} \right| \cdot \Delta X_m \quad (1.18)$$

gdzie: $\left| \frac{\partial F}{\partial X_1} \right| \cdot \Delta X_1, \left| \frac{\partial F}{\partial X_2} \right| \cdot \Delta X_2, \dots, \left| \frac{\partial F}{\partial X_m} \right| \cdot \Delta X_m$ – maksymalne błędy przypadkowe cząstkowe wielkości $X_1, X_2, \dots, X_m$; $\Delta X_1, \Delta X_2, \dots, \Delta X_m$ – maksymalny możliwy do wystąpienia błąd przypadkowy, wyznaczony doświadczalnie lub na podstawie odpowiedniej metody.

Błąd określony tą zależnością jest nazywany błędem skrajnym. Wyznaczanie tego błędu jest w metrologii stosowane coraz rzadziej. Obecnie szacuje się błąd graniczny, czyli wyznacza niepewność metodą typu B. Sprowadza się to, w przypadku wielkości Y , do obliczenia błędu granicznego ΔY ze wzoru:

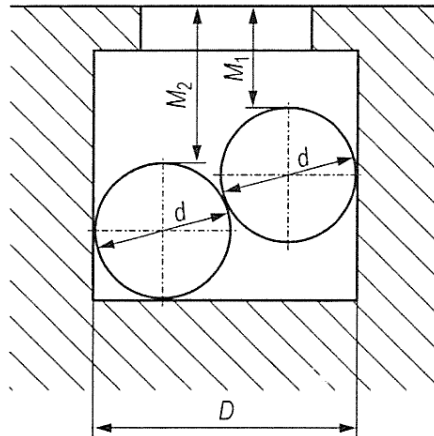
$$\Delta Y = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial X_1} \cdot \Delta X_1 \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial X_2} \cdot \Delta X_2 \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial X_m} \cdot \Delta X_m \right)^2} \quad (1.19)$$

gdzie: oznaczenia jak we wzorze powyżej.

Przykład 1.9

Pomiaru średnicy otworu D dokonano metodą pomiarową za pomocą dwóch kulek pomiarowych o jednakowych średnicach $d = 15 \text{ mm}$ (rys. 1.9). W wyniku wykonanych pomiarów odległości M_1 i M_2 otrzymano:

$$M_2 - M_1 = 12,74 \text{ mm}$$



Rys. 1.9. Pomiar średnicy otworu za pomocą dwóch kul pomiarowych

Wiedząc, że średnica mierzonego otworu określona jest zależnością:

$$D = d + \sqrt{d^2 - (M_2 - M_1)^2}$$

Obliczyć metodą pochodnych cząstkowych błąd skrajny oraz podać ostateczny wynik pomiaru: $\Delta d = \pm 0,0005$; $\Delta M_1 = \Delta M_2 = 0,01$.

Rozwiązanie

Wartość średnicy mierzonego otworu:

$$D = d + \sqrt{d^2 - (M_1 - M_2)^2} = 15 + \sqrt{15^2 - (12,74)^2} = 22,918$$

Błąd skrajny wyraża równanie:

$$\Delta D = \left| \frac{\partial D}{\partial d} \right| \Delta d + \left| \frac{\partial D}{\partial M_1} \right| \Delta M_1 + \left| \frac{\partial D}{\partial M_2} \right| \Delta M_2$$

Pochodne cząstkowe mają postać:

$$\left| \frac{\partial D}{\partial d} \right| = \left| 1 + \frac{d}{\sqrt{d^2 - (M_2 - M_1)^2}} \right|$$

$$\left| \frac{\partial D}{\partial M_1} \right| = \left| \frac{-1}{\sqrt{d^2 - (M_2 - M_1)^2}} \cdot (M_2 - M_1) \right|$$

$$\left| \frac{\partial D}{\partial M_2} \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{d^2 - (M_2 - M_1)^2}} \cdot (M_2 - M_1) \right|$$

Wartość pochodnych cząstkowych wynosi:

$$\left| \frac{\partial D}{\partial d} \right| = \left| 1 + \frac{15}{\sqrt{15^2 - (12,74)^2}} \right| = 2,8894$$

$$\left| \frac{\partial D}{\partial M_1} \right| = \left| \frac{-1}{\sqrt{15^2 - (12,74)^2}} \cdot 12,74 \right| = 1,609$$

$$\left| \frac{\partial D}{\partial M_2} \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{15^2 - (12,74)^2}} \cdot 12,74 \right| = 1,609$$

Stąd wartość błędu:

$$\Delta D = 2,8894 \cdot 0,0005 + 1,609 \cdot 0,01 + 1,609 \cdot 0,01 = 0,033128 \text{ [mm]}$$

a wynik końcowy:

$$D = 22,918 \pm 0,034 \text{ [mm]}$$

Dla tych samych danych błąd graniczny opisuje zależność:

$$\Delta Y = \sqrt{\left(\frac{\partial D}{\partial d} \cdot \Delta D \right)^2 + \left(\frac{\partial D}{\partial M_1} \cdot \Delta M_1 \right)^2 + \left(\frac{\partial D}{\partial M_2} \cdot \Delta M_2 \right)^2}$$

Stąd wartość błędu:

$$\Delta Y = \sqrt{(2,8894 \cdot 0,0005)^2 + (1,609 \cdot 0,01)^2 + (1,609 \cdot 0,01)^2} = 0,0228$$

a wynik końcowy:

$$D = 22,918 \pm 0,023 \text{ [mm]}$$

2. NIEPEWNOŚĆ POMIARU

Początki historyczne kształtowania się współczesnej myśli w dziedzinie opracowywania danych pomiarowych można wiązać z trzema osiągnięciami myśli matematycznej, których autorami byli A.M. Legendre, C.F. Gauss i P.S. Laplace. W swoich publikacjach stworzyli oni podstawy współczesnej metodyki opracowywania danych pomiarowych. Przedstawili trzy podstawowe rozwiązania, znane obecnie jako: metoda najmniejszych kwadratów, prawo propagacji błędów oraz centralne twierdzenie graniczne. Te trzy rozwiązania, które powstały wiele lat przed ich praktycznym zastosowaniem, tworzą podstawy współczesnej metrologii teoretycznej w dziedzinie opracowywania wyniku pomiaru.

Błąd pomiaru, opisany w poprzednim rozdziale, byłby idealnym wskaźnikiem stopnia zgodności wyniku pomiaru i wartości prawdziwej, gdyby był w pełni wyznaczalny. Jest to termin bardzo użyteczny w modelowym opisie wpływu zakłóceń występujących w procesie pomiarowym, lecz jego wartość jest nierozpoznawalna, a wartość prawdziwa wielkości mierzonej jest nieznana.

Teoria błędów pomiaru opiera się na wielkościach niewyznaczalnych – wartości prawdziwej wielkości mierzonej i błędzie pomiaru. Teoria niepewności pomiaru oparta jest na wielkościach wyznaczalnych – wyniku pomiaru jako estymacie wartości mierzonej i niepewności pomiaru.

Różnica pomiędzy błędem pomiaru a niepewnością pomiaru polega więc na tym, że błąd jest różnicą dwóch konkretnych wartości, natomiast niepewność jest parametrem rozrzutu wyników pomiarów. O ile błąd dla każdego wykonanego pomiaru z serii może mieć różną wartość, o tyle niepewność zawsze będzie miała stałą, różną od zera wartość, nawet, gdyby w którymś z pomiarów błąd był zerowy. Są to więc dwa różne pojęcia, których nie można używać zamiennie.

Przykład 2.1

Dla danych z przykładu 1.5 wyznaczono błędy poszczególnych pomiarów wynoszące odpowiednio:

$$v_1 = -0,001 \text{ mm}$$

$$v_2 = 0,001 \text{ mm}$$

$$v_3 = 0,001 \text{ mm}$$

$$v_4 = 0,000 \text{ mm}$$

$$v_5 = -0,002 \text{ mm}$$

Niepewność, określona dla wszystkich pomiarów odchyleniem standardowym, będzie stała i wynosi ona:

$$u_1 - u_5 = 0,0013 \text{ mm}$$

Niepewność pomiaru została zdefiniowana w wielu dokumentach opracowanych i wydanych przez instytucje funkcjonujące w obrębie i dla potrzeb

trzech głównych zastosowań tego pojęcia: metrologii naukowej, metrologii prawnej oraz akredytacji i certyfikacji.

W obszarze metrologii naukowej za obowiązującą można przyjąć definicję sformułowaną w opracowanym przez PKN Przewodniku PKN-ISO/IEC Guide 99:2010, która brzmi:

Niepewność pomiaru to nieujemny parametr charakteryzujący rozproszenie wartości wielkości przyporządkowany do mezurandu (wielkości mierzonej), obliczony na podstawie uzyskanej informacji.

W poprzedniej wersji tego przewodnika z roku 1993 niepewność pomiaru definiowana była jako:

Parametr związany z wynikiem pomiaru, charakteryzujący rozrzut wartości, które można w uzasadniony sposób przypisać wielkości mierzonej.

Można zatem uważać, że niepewność oznacza wątpliwość co do wyniku pomiaru, określoną parametrem związanym z wynikiem pomiaru, który to parametr charakteryzuje rozrzut wartości, które można w sposób uzasadniony przypisać mezurandowi.

Celem każdego pomiaru jest określenie wartości wielkości mierzonej poddanej pomiarowi. Pomiar zaczyna się więc określeniem mezurandu, metody pomiarowej i procedury pomiarowej. Na wynik pomiaru, zgodnie z rys. 1.1, wpływa wiele czynników o charakterze losowym. Można zatem przyjąć, że wynik pomiaru jest funkcją wielu zmiennych losowych składowych, których złożenie daje w rezultacie zmienną, której odchylenie standardowe jest wskaźnikiem niepewności pomiaru.

Jak już wspomniano, wynik pomiaru jest tylko przybliżeniem lub estymatą wartości wielkości mierzonej i dlatego wynik pomiaru jest określony całkowicie tylko wtedy, gdy jest podany wraz z niepewnością tej estymaty, w postaci:

$$Y \pm u_c(Y) \quad (2.1)$$

gdzie: Y – wynik poprawiony pomiaru.

Interpretacja tego zapisu jest następująca: mierzona, lecz nieznaną rzeczywistą wartość wielkości mierzonej znajduje się z prawdopodobieństwem wynoszącym najczęściej 95% w przedziale określonym niepewnością pomiaru.

Niepewność pomiaru jest więc wyrażeniem faktu, że dla danego mezurandu i danego wyniku pomiaru tej wielkości istnieje nie jedna wartość, a nieskończenie wiele wartości rozproszonych wokół wyniku, które są zgodne z obserwacjami, danymi i znajomością praw natury i które z różnym stopniem wiarygodności mogą zostać przypisane mezurandowi.

Punktem wyjścia przy wyznaczaniu niepewności pomiaru jest stwierdzenie, że parametr ten zawiera na ogół wiele składników, z których każdy można scharakteryzować odchyleniem standardowym. Stąd przez pojęcie *niepewność standardowa* rozumie się niepewność wyrażoną w postaci odchylenia standardowego.

Złożona niepewność standardowa występuje, gdy wynik otrzymywany jest z wartości pewnej liczby innych wielkości.

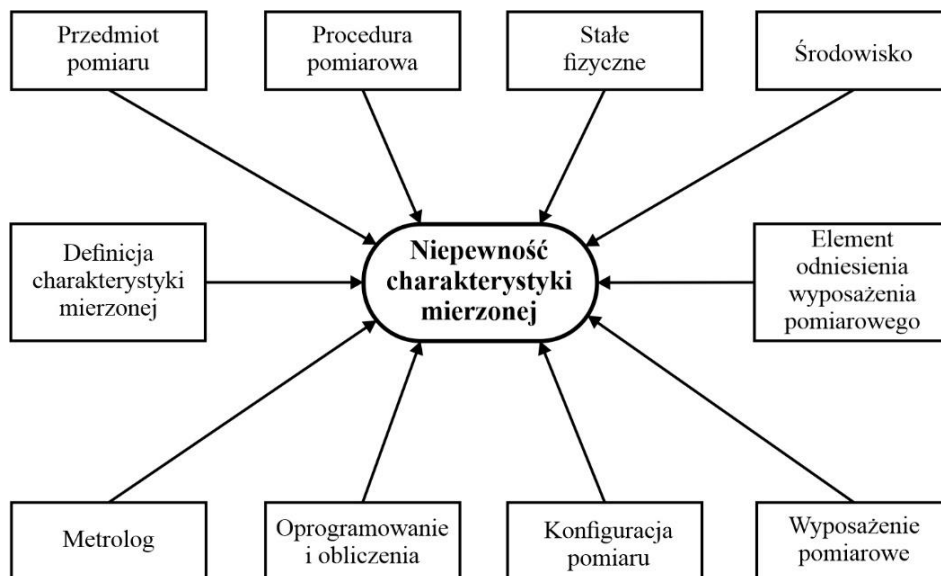
Niepewność rozszerzona – to wielkość określająca przedział wokół wyniku pomiaru, od którego oczekuje się, że obejmie dużą część rozkładu wartości, które w uzasadniony sposób można przypisać wielkości mierzonej. Jest to niepewność standardowa pomnożona przez współczynnik rozszerzenia k :

$$U = k \cdot u_c(Y) \quad (2.2)$$

gdzie: dla $k = 2$ wartość U pokrywa przedział niepewności z prawdopodobieństwem 0,95;
dla $k = 3$ wartość U pokrywa przedział niepewności z prawdopodobieństwem 0,997.

Wymaganie określania niepewności pomiarów w pomiarach wykonywanych w przemyśle występuje praktycznie we wszystkich systemach zarządzania jakością. Jej wyznaczenie nie należy jednak do zadań łatwych. Niepewność pomiaru często przypisuje się wyłącznie narzędziu pomiarowemu, zaniedbując inne składniki, np. pochodzące od warunków przeprowadzenia czynności pomiarowych, strategii pomiaru czy mierzonego przedmiotu.

Na rys. 2.1 przedstawiono składowe niepewności pomiaru, które należy stosować podczas wykonywania budżetów niepewności, do usystematyzowanego tworzenia ich koncepcji.



Rys. 2.1. Składowe niepewności pomiaru

Wśród składowych niepewności należących do środowiska wymienić należy:

- temperaturę bezwzględną, jej zmiany w czasie i gradient przestrzenny;
- drgania;
- hałas;
- wilgotność;

- zanieczyszczenia;
- oświetlenie;
- ciśnienie w otoczeniu;
- skład i przepływ powietrza;
- grawitację;
- zakłócenia elektromagnetyczne;
- zmienność zasilania energią;
- sprężone powietrze (zasilające np. łożyska powietrzne);
- promieniowanie cieplne;
- wyrób;
- podziałkę;
- równowagę cieplną przyrządu.

W grupie czynników zaliczonych do odniesienia wyposażenia pomiarowego uwzględnić należy:

- stabilność;
- jakość kresek podziałki;
- współczynnik rozszerzalności cieplnej;
- zasadę fizyczną (podziałka liniowa, cyfrowa, wrzeciono, zębatka i zębnik, interferometr);
- urządzenie CCD;
- niepewność wzorcowania;
- rozdzielczość podziałki głównej;
- czas od ostatniego wzorcowania;
- błąd długości fali.

Wyposażenie pomiarowe obejmuje następujące pozycje:

- układ interpretujący;
- powiększenie (mechaniczne, elektryczne);
- błąd długości fali;
- stabilność punktu zerowego;
- stabilność nacisku i wartość siły;
- histereza;
- prowadnice;
- głowica pomiarowa;
- niedokładności geometryczne;
- sztywność;
- układ wskazujący;
- współczynnik rozszerzalności cieplnej;
- stabilność temperatury;
- czułość temperaturowa;
- paralaksa;
- czas od ostatniego wzorcowania;
- charakterystyka odpowiedzi;
- układ interpolacji dla błędu długości fali;

- rozdzielczość interpolacji;
- dyskretyzacja.

Przy konfiguracji pomiaru, poza ustaleniem i zamocowaniem wyrobu, uwzględnić należy:

- błędy „cosinusowe” i „sinusowe”;
- zasadę Abbego;
- czułość temperaturową;
- sztywność;
- promień zaokrąglenia końcówki i jej odchyłkę kształtu;
- sztywność głowicy pomiarowej;
- aperturę układu optycznego;
- wzajemne oddziaływanie wyrobu i układu pomiarowego;
- nagrzewanie.

W wielu przypadkach konfiguracja pomiaru nie występuje, gdyż pomiar można przeprowadzić, stosując tylko samo wyposażenie pomiarowe.

Wśród składowych niepewności należących do grupy oprogramowanie i obliczenia rozważyć należy:

- zaokrąglenia;
- kwantyfikacje;
- algorytmy i ich implementację;
- próbkowanie;
- filtrację;
- korekcję i certyfikację algorytmu;
- interpolację i ekstrapolację;
- postępowanie z wynikami izolowanymi.

Należy mieć na uwadze, że osoba wykonująca pomiary (metrolog) jest istotą ludzką, która jest niestabilna i wykonywane przez nią pomiary w poszczególnych dniach czy porach dnia mogą wykazywać wyraźne różnice. W związku z powyższym w tej grupie czynników należy poddać analizie następujące czynniki:

- wykształcenie;
- doświadczenie;
- przeszkolenie;
- niesprawność fizyczną;
- wiedzę;
- uczciwość;
- zaangażowanie.

W grupie czynników zaliczanych do przedmiotu pomiaru uwzględnić należy:

- chropowatość powierzchni;
- odchyłki kształtu;
- moduł Younga E ;
- współczynnik rozszerzalności cieplnej;
- przewodność;
- ciężar;

- wymiary;
- kształt;
- właściwości magnetyczne;
- starzenie;
- czystość;
- temperaturę;
- naprężenia wewnętrzne (własne);
- charakterystykę pełzania;
- odkształcenie wyrobu wskutek mocowania.

Definicja charakterystyki wyrobu lub przyrządu pomiarowego obejmuje:

- bazę;
- układ odniesienia;
- stopnie swobody;
- element geometrycznie tolerowany;
- odległość, kąt;
- specyfikację geometryczną wyrobu.

Wśród czynników należących do grupy procedura pomiarowa rozpatrzeć należy następujące:

- klimatyzację;
- liczbę, kolejność i czas trwania pomiarów;
- wyosiowanie;
- wybór elementu odniesienia – wzorca;
- wybór aparatury;
- wybór metrologa;
- liczbę operatorów;
- strategię pomiaru;
- mocowanie i ustalenie;
- liczbę punktów pomiarowych;
- zasadę i strategię próbkowania;
- kontrolę dryfu;
- ustawienie głowicy pomiarowej;
- pomiary odwrotne;
- nadmiarowość i wydzielenie błędu.

Ważna jest również znajomość prawidłowych wartości stałych fizycznych, określających właściwości materiałowe wyrobu, przyrządu pomiarowego czy otaczającego powietrza.

2.1. Metody szacowania niepewności pomiaru

Obliczanie niepewności nie jest rutynowym, czysto matematycznym zadaniem. Prawidłowo określona procedura wyznaczania niepewności pomiaru powinna zapewnić porównywalność i wiarygodność uzyskanych wyników pomiaru. Musi ona określać szczegółowy tok postępowania w czynnościach związanych z wyznaczaniem niepewności. W ogólnej postaci można ją ująć w następujących po sobie etapach:

1. Zdefiniowanie wielkości mierzonej (mezurandu).
2. Określenie akceptowalnej niepewności pomiaru.
3. Analiza źródeł niepewności.
4. Wybór metody pomiaru i przyrządów pomiarowych.
5. Sformułowanie wzoru pomiarowego.
6. Wykonanie pomiaru.
7. Wyznaczenie poprawek.
8. Wyznaczenie niepewności standardowych wszystkich składowych.
9. Wyznaczenie standardowej niepewności złożonej.
10. Wyznaczenie niepewności rozszerzonej.
11. Analiza wpływu poszczególnych składowych.
12. Wykonanie dodatkowych pomiarów.
13. Sformułowanie ostatecznej postaci wyników.

Wyznaczenie niepewności pomiaru można przeprowadzić dwoma różnymi sposobami: metodą typu A i metodą typu B.

2.1.1. Wyznaczanie składowych niepewności pomiaru metodą A

Wyznaczenie niepewności metodą A oparte jest na wyznaczeniu składowych niepewności metodami statystycznymi. Analizę taką należy rozpocząć od obliczenia wartości średniej. Jeżeli wyniki serii pomiarów zostały uwolnione od błędów systematycznych, to średnia arytmetyczna tych wyników jest najlepszym oszacowaniem szukanej miary mierzonej wielkości:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (2.3)$$

Następnie należy dokonać oszacowania odchylenia standardowego rozkładu próbki, opartego na n wartościach zmierzonych, korzystając z zależności:

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad (2.4)$$

Odchylenie to nazywane jest niekiedy *średnim błędem kwadratowym* i można je traktować jako wartość *niepewności standardowej pojedynczego pomiaru*.

Błąd średni kwadratowy średniej arytmetycznej z danej serii pomiarów, stanowiący wartość niepewności standardowej, wyznacza się z zależności:

$$s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}} \quad (2.5)$$

Po wyliczeniu niepewności standardowej można przystąpić do wyznaczania niepewności rozszerzonej:

- pojedynczego pomiaru $U = k \cdot s_x$ (2.6)

- wartości średniej $U = k \cdot s_{\bar{x}}$ (2.7)

gdzie: k – jest współczynnikiem rozszerzenia przyjmującym wartości [2, 3]. Przyjęcie wartości $k = 2$ odpowiada prawdopodobieństwu $P = 95\%$ występowania wyniku

w przedziale niepewności, wartość $k = 3$ – prawdopodobieństwu $P = 99\%$. W przypadku małej liczby pomiarów ($n < 30$) za współczynnik rozszerzenia przyjmujemy współczynnik bezpieczeństwa t obliczony lub dobrany z tablic rozkładu t -Studenta.

Ostateczny wynik pojedynczego pomiaru z serii, uwzględniający niepewność rozszerzoną, wynosi:

$$x = x_i \pm k \cdot s_x \quad (2.8)$$

Ostateczny wynik serii pomiarów, uwzględniający niepewność rozszerzoną, wynosi:

$$x = \bar{x} \pm k \cdot s_{\bar{x}} \quad (2.9)$$

2.1.2. Wyznaczanie składowych niepewności pomiaru metodą B

W metodzie B niepewność pomiaru wyznacza się metodami innymi niż statystyczne, na podstawie informacji o możliwym zakresie zmienności wielkości wejściowych, biorąc pod uwagę przesłanki takie jak:

- wcześniejsze wyniki pomiarów;
- zachowanie i właściwości stosowanych materiałów i przyrządów;
- specyfikacje producentów;
- dane wynikające z wzorcowania i innych certyfikatów;
- dane z tablic fizycznych.

Dane wejściowe do metody B stanowi założenie, że wpływ danego czynnika w granicach jego obszaru zmienności a ma znany rozkład. Dla wszystkich skończonych rozkładów odchylenie standardowe można wyliczyć jako stosunek wartości granicznej a i współczynnika k charakterystycznego dla danego rozkładu. Wartości te przedstawiono w tabeli 2.1.

Do wyznaczenia metodą B składowej niepewności potrzebna jest więc znajomość lub założenie wartości granicznej a oraz typy rozkładu ją charakteryzującego. Jeżeli rozkład ten nie jest znany lub oczywisty, przyjmuje się ostrożne założenie zgodnie z zaleceniami:

- jeżeli nie wiadomo, czy rozkład jest normalny, przyjmuje się rozkład równomierny lub antymodalny U;
- jeżeli nie wiadomo, czy rozkład jest równomierny, przyjmuje się rozkład antymodalny U jako najostrożniejsze założenie.

Zestawienie danych do obliczania niepewności standardowej złożonej nazywane jest budżetem lub bilansem niepewności i przedstawiane jest w postaci tabeli. Ułatwia to szacowanie niepewności, zwłaszcza gdy poszczególne wielkości wejściowe są skorelowane. Przykład ogólny budżetu niepewności przedstawiono w tabeli 2.2.

Tabela 2.1. Postaci rozkładów i wartości współczynników charakteryzujących

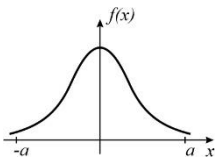
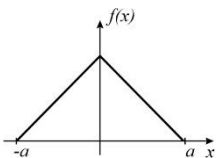
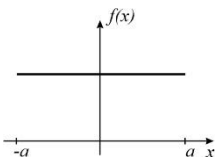
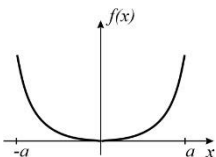
Typ rozkładu	Postać rozkładu	k	$b = \frac{1}{k}$	Niepewność standardowa u_{xx}
Normalny		2	0,5	$u_{xx} = \frac{a}{k} = b \cdot a = \frac{a}{2} = 0,5 \cdot a$
Trójkątny (Simpsona)		$\sqrt{6}$	0,4	$u_{xx} = \frac{a}{k} = b \cdot a = \frac{a}{\sqrt{6}} = 0,4 \cdot a$
Równomierny (prostokątny)		$\sqrt{3}$	0,6	$u_{xx} = \frac{a}{k} = b \cdot a = \frac{a}{\sqrt{3}} = 0,6 \cdot a$
Antymodalny U		$\sqrt{2}$	0,7	$u_{xx} = \frac{a}{k} = b \cdot a = \frac{a}{\sqrt{2}} = 0,7 \cdot a$

Tabela 2.2. Zestawienie danych do obliczania niepewności złożonej (budżet niepewności)

Wielkość	Oszacowanie	Szerokość połówkowa	Wsp. transformacji	Niepewność standardowa	Wsp. wpływu	Składowe niepewności złożonej
1	2	3	4	5	6	7
X_i	Y_i	$0,5 R_i$	k_i	$u(X_i)$	c_i	$u_{xi}(Y_i)$
X_1	Y_1	$0,5 R_1$	k_1	$u_B(X_1)$	c_1	$u_{x1}(Y_1)$
X_2	Y_2	-	-	$u_A(X_2)$	c_2	$u_{x2}(Y_2)$
X_3	Y_3	-	-	$u_A(X_3)$	c_3	$u_{x3}(Y_3)$
...	...	...	...	...	...	...
X_m	Y_m	$0,5 R_m$	k_m	$u_B(X_m)$	c_m	$u_{xm}(Y_m)$
Y	-	-	-	-	-	$u(Y)$

W kolumnie 1 wpisujemy wszystkie składowe niepewności, natomiast w kolumnie 2 ich oszacowaną wartość poprawną wielkości (Y_i). Jeżeli niepewność standardowa wielkości wejściowej została wyznaczona metodą A poprzez oszacowanie średniej, to wartość tę przyjmujemy za oszacowanie i wpisujemy w kolumnę 2, a odpowiadające mu odchylenie standardowe w kolumnę 5 jako niepewność standardową. W tym przypadku w kolumnie 3 i 4 nie wpisuje się żadnych wartości. Jeżeli natomiast niepewność standardowa została oszacowana metodą B, to wartość tego oszacowania wpisujemy w kolumnę 2. W kolumnie 3 wpisujemy wartość obszaru zmienności a (będący połową rozstępu R_i wielkości wejściowej), a w kolumnę 4 współczynnik rozrzutu k_i (zależny od przyjętego rozkładu wielkości).

Oszacowaną na podstawie tabeli 2.1 niepewność standardową wpisujemy w kolumnę 5. Umieszczony w kolumnie 6 współczynnik wpływu jest wartością pochodnej cząstkowej $c_i = \frac{\partial Y}{\partial x_i}$, który charakteryzuje wpływ (wrażliwość) wielkości wyjściowej Y na zmiany wielkości wejściowych X_i . Kolumna 7 jest iloczynem kolumn 6 i 7 i stanowi składowe niepewności standardowej złożonej $u(Y)$.

Jeżeli składowe niepewności nie są ze sobą skorelowane, to niepewność standardową złożoną oblicza się, korzystając ze wzoru:

$$u(Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^m u_i^2(Y)} \quad (2.10)$$

Niepewność rozszerzoną dla przyjętego poziomu ufności i rozkładu normalnego wyznacza się ze wzoru:

$$U(Y) = k \cdot u(Y) \quad (2.11)$$

Jeżeli wszystkie składowe niepewności mają rozkłady normalne, to dla $P = 1 - \alpha$ przyjmuje się $k = 2$. Dla rozkładu t -Studenta, współczynnik rozszerzenia przyjmuje się z tablic dla $\alpha = 0,05$ i $k = n - 1$ stopni swobody ($t_{k,\alpha}$). Dla rozkładu prostokątnego o rozstępie $2a$, $k = 1,65 u(X)$. Dla rozkładu Simpsona o rozstępie $2a$, $k = 1,90 u(X)$.

Jeżeli zmienne losowe charakteryzują się różnymi rozkładami, to do obliczenia niepewności standardowej i współczynnika rozszerzenia, w wątpliwych przypadkach można posłużyć się metodą Monte Carlo. Z wyjątkiem przypadków, gdy wielkości wejściowe mają rozkład t -Studenta, przyjęcie współczynnika $k = 2$, dla $P = 0,95$, powoduje uzyskanie poprawnej lub zawyżonej wartości niepewności rozszerzonej. Jeżeli wyznaczona w ten sposób wartość niepewności rozszerzonej jest satysfakcjonująca z punktu widzenia metrologicznego, to nie ma konieczności dokładniejszej jej estymacji.

Również w przypadku, kiedy zmienne składowe są niezależne, ich rozkłady znacznie odbiegają od rozkładu normalnego, a ich rozstępy są zbliżone co do wartości, to już przy czterech składowych można przyjąć zasadność zastosowania centralnego twierdzenia granicznego. Mówi ono, że wypadkowa wielu niezależnych równorzędnych zmiennych losowych, niezależnie od rozkładów tych zmiennych, ma rozkład zbliżony do rozkładu normalnego.

W pomiarach przemysłowych często wyniki powtarzalnych pomiarów praktycznie nie różnią się między sobą i wówczas można zaniechać wielokrotnego ich powtarzania. Brak istotnych różnic wyników pomiaru świadczy o pomijalnie małej wartości niepewności typu A. Wówczas do obliczeń niepewności rozszerzonej można przyjąć tylko niepewności typu B.

W czułych pomiarach laboratoryjnych, w przypadku gdy uzyskujemy bardzo duży rozrzut wyników pomiaru, pomiary te należy wielokrotnie powtarzać na tym samym obiekcie, a za wynik pomiaru przyjąć wartość średnią. Oszacowana wartość niepewności metodą A jest wtedy znacznie większa

od wartości niepewności oszacowanej metodą B, która jest pomijalnie mała, a za całkowitą niepewnością pomiaru można przyjąć niepewność typu A.

2.2. Wyznaczenie niepewności pomiaru przy pomiarach bezpośrednich

Bez względu na metodę pomiaru jego wynik Y w postaci ogólnej składa się z wyniku surowego X , korekcji C (poprawki) oraz niepewności rozszerzonej pomiaru U :

$$Y = (X + C) \pm U(Y) \quad (2.12)$$

Niepewność pomiaru $U(Y)$ jest wypadkową niepewności cząstkowych $U(X)$ oraz $U(C)$, pochodzących od składników X i C . Korekcji C nie wolno pominąć. Jeżeli ma ona nieznaną wartość lub wynosi ona $C = 0$, to niepewność wyznaczenia poprawki określa się na podstawie błędów granicznych używanego przyrządu.

Niepewność rozszerzoną $U(C)$ wyznaczamy przez pomnożenie niepewności standardowej złożonej pomiaru u_c przez współczynnik rozszerzenia k . Niepewność standardową złożoną pomiaru wyraża równanie:

$$u_c = \sqrt{u_r^2 + \sum_{i=1}^p u_i^2} \quad (2.13)$$

Jest więc ona pierwiastkiem sumy arytmetycznej silnie skorelowanych składowych niepewności u_r i sumy geometrycznej składowych nieskorelowanych u_i .

Pomiar bezpośredni to pomiar, w którym wartość wielkości mierzonej otrzymuje się bezpośrednio z przyrządu pomiarowego, bez potrzeby wykonywania dodatkowych obliczeń opartych na zależnościach funkcyjnych wielkości mierzonej od innych wielkości. Przykładem może być pomiar suwmiarką, mikrometrem, czujnikiem czy mikroskopem pomiarowym.

Równanie pomiaru bezpośredniego, uwzględniające istotne źródła niepewności, ma postać:

$$Y = X + C_w + C_{rw} + C_{ws} \quad (2.14)$$

gdzie: X – wskazanie przyrządu; C_w – korekcja kompensująca wskazania przyrządu; C_{rw} – korekcja kompensująca błąd rozdzielczości przyrządu; C_{ws} – korekcja związana z warunkami środowiskowymi.

Korekcje i niepewności korekcji wyznacza się według następujących reguł:

- korekcja C_w – w tym przypadku można przyjąć tablicę szczegółowych poprawek lub krzywą kalibracji i niepewność kalibracji lub błędy wskazania i niepewność wzorcowania (przy założeniu, że błędy wskazania nie przekraczają granic błędów dopuszczalnych);

- C_{rw} – przyjmuje się, że $C_{rw} = (0 \pm d/2)$, a jej niepewność standardową oblicza się z zależności (zakładając rozkład równomierny):

$$u(C_{rw}) = \frac{d}{2\sqrt{3}} \quad (2.15)$$

- poprawka środowiskowa jest zazwyczaj poprawką temperaturową, którą wyznacza się z zależności:

$$C_{ws} = X \cdot \alpha \cdot \delta \cdot t \quad (2.16)$$

gdzie: X – wskazanie przyrządu; α – współczynnik rozszerzalności cieplej materiałów przyrządu i mierzonego elementu; δt – różnica temperatury przyrządu i mierzonego elementu.

Równanie niepewności standardowej złożonej ma postać ogólną:

$$u(Y) = \sqrt{u^2(X) + u^2(C_w) + u^2(C_{rw}) + u^2(C_{ws})} \quad (2.17)$$

Przykład 2.2

Wymiar 5,2 mm złożono z dwóch płytek wzorcowych klasy 1 o wymiarach 4 mm i 1,2 mm, dla których odchyłki graniczne długości wynoszą $\pm t_e = 0,20 \mu m$. Obliczyć całkowitą niepewność standardową wymiaru płytek wzorcowych.

Rozwiązanie

Złożony wymiar można zapisać w postaci ogólnej:

$$l_n = (l_{n1} + C_1 + l_{n2} + C_2 + \dots + l_{nn} + C_n)$$

gdzie: l_{n1} i l_{n2} , l_{nn} – wymiary nominalne płytek wzorcowych; C_1 , C_2 , C_n – korekcje wynikające z dokładności wykonania płytek wzorcowych (ich odchyłek)

Niepewność standardową oblicza się ze wzoru:

$$u(l_n) = \sqrt{u^2(C_1) + u^2(C_2) + \dots + u^2(C_n)}$$

gdzie, przy założeniu rozkładu jednostajnego ($b = 0,6$):

$$u(C_i) = \frac{t_{ei}}{\sqrt{3}} = t_{ei} \cdot 0,6$$

Stąd:

$$\begin{aligned} u(C_4) &= 0,20 \cdot 0,6 = 0,12 \mu m \\ u(C_{1,2}) &= 0,20 \cdot 0,6 = 0,12 \mu m \end{aligned}$$

A całkowita niepewność standardowa wymiaru płytek wzorcowych:

$$u(C_l) = \sqrt{0,12^2 + 0,12^2} = 0,17 \mu m$$

Przykład 2.3

Wykonać pomiar lokalny (dwupunktowy) średnicy w partii wałków stalowych, toczonych wykończeniowo o wymiarach nominalnych $D = 20$ mm, $L = 80$ mm. Zasada pomiaru – pomiar długości poprzez porównanie ze znaną długością. Niepewność docelowa pomiaru $9 \mu\text{m}$. Pomiary należy przeprowadzić mikrometrem zewnętrznym analogowym o zakresie pomiarowym 0-25 mm z działką elementarną 0,01 mm. Średnicę należy zmierzyć, gdy wałek jest zamocowany na tokarce, przed pomiarem wałek należy przetrzeć szmatką. Podczas pomiaru nie należy stosować zacisku wrzeciona, a pomiar wykonać należy korzystając ze sprzęgła mikrometru. Dopuszcza się wykonanie jednego pomiaru. W pomiarach przyjęto następujące warunki:

- temperatura mikrometru i wałków zmienia się w czasie, a największe odchylenie od temperatury odniesienia 20°C wynosi 16°C ;
- największa różnica temperatury wałków i mikrometru wynosi 12°C ;
- podczas produkcji jeden operator obsługuje obrabiarkę i używa mikrometru;
- stwierdzono, że odchyłka walcowości wałków jest mniejsza niż $2 \mu\text{m}$.

Rozwiązanie

W celu opracowania budżetu niepewności niezbędne jest przeprowadzenie analizy czynników wpływających na niepewność.

Zgodnie z normą PN-EN ISO 3611:2010 dla mikrometrów kabłąkowych o zakresie pomiarowym 0-25 mm przyjmuje się:

- tolerancja płaskości powierzchni pomiarowych wrzeciona i kowadełka $T_p = 0,9 \mu\text{m}$;
- tolerancja równoległości powierzchni pomiarowych wrzeciona i kowadełka $T_r = 2 \mu\text{m}$;
- dopuszczalny błąd mikrometru $\text{MPE}_{\text{ML}} = \pm 4 \mu\text{m}$.

Wzór pomiaru można przedstawić w postaci:

$$Y = X + C_{ML} + C_{MF} + C_{MF} + C_{MP} + C_{RR} + C_{NP} + C_{TD} + C_{TA} + C_{WE}$$

gdzie: X – wynik pomiaru, C – korekcje (poprawki): C_{ML} – błędu wskazań mikrometru, C_{MF} – płaskości wrzeciona i kowadełka mikrometru, C_{MP} – równoległości powierzchni pomiarowych, C_{RR} – rozdzielczości/powtarzalności, C_{NP} – zmienności punktu zerowego, $C_{TD} = \Delta T \cdot \alpha \cdot X$ – poprawka różnicy temperatury narzędzia pomiarowego i przedmiotu mierzonego, $C_{TA} = 0,1 \cdot \Delta T_{20} \cdot \alpha \cdot X$ – poprawka temperaturowa, C_{WE} – odchyłka kształtu wyrobu.

Równanie niepewności pomiaru ma postać:

$$u(Y) = \sqrt{c_1^2 u^2(X) + c_2^2 u^2(C_{ML}) + c_3^2 u^2(C_{MF}) + c_4^2 u^2(C_{MF}) + c_5^2 u^2(C_{MP}) + c_6^2 u^2(C_{RR}) + c_7^2 u^2(C_{NP}) + c_8^2 u^2(\alpha \cdot X) + c_9^2 u^2(0,1 \cdot \alpha \cdot X) + c_{10}^2 u^2(C_{WE})}$$

Współczynniki wpływu określone pochodnymi wynoszą odpowiednio:

$$c_1 = \frac{\partial Y}{\partial X} = 1, \quad c_2 = \frac{\partial Y}{\partial C_{ML}} = 1, \quad c_3 = \frac{\partial Y}{\partial C_{MF}} = 1, \quad c_4 = \frac{\partial Y}{\partial C_{MF}} = 1,$$

$$c_5 = \frac{\partial Y}{\partial C_{MP}} = 1, \quad c_6 = \frac{\partial Y}{\partial C_{RR}} = 1, \quad c_7 = \frac{\partial Y}{\partial C_{NP}} = 1, \quad c_{10} = \frac{\partial Y}{\partial C_{WE}} = 1$$

$$c_8 = \frac{\partial Y}{\partial C_{ML}} = \alpha \cdot X = 11,5 \cdot 10^{-6} \cdot 20 = 0,23 \cdot 10^{-3} \text{ mm},$$

$$c_9 = \frac{\partial Y}{\partial C_{TA}} = 0,1 \cdot \alpha \cdot X = 0,1 \cdot 11,5 \cdot 10^{-6} \cdot 20 = 0,023 \cdot 10^{-3} \text{ mm},$$

1. Mikrometr, błąd wskazania

Błąd wskazania mikrometru MPE_{ML} dla charakterystyki metrologicznej definiuje się zwykle jako największy przedział błędów krzywej wskazań, a nie odnosi się do wskazania zerowego. Położenie błędów krzywej wskazań względem błędów zerowych jest inną (niezależną) charakterystyką metrologiczną. W rozpatrywanym przypadku założono, że błąd krzywej wskazań został podczas procedury wzorcowania ustalony symetrycznie, to znaczy największe błędy wskazań dodatni i ujemny mają tę samą wartość bezwzględną. Uwzględniając błąd graniczny mikrometru przyjęto wartość graniczną:

$$a_{ML} = 4 \mu m$$

Zakładając równomierny rozkład błędów (zasada nadszacowania, ponieważ nie można na podstawie dostępnych danych przyjąć rozkładu normalnego), otrzymujemy wartość składowej niepewności ($b = 0,6$):

$$u_{ML} = 0,6 \cdot a_{ML} = 0,6 \cdot 4 \mu m = 2,4 \mu m$$

2. Mikrometr, płaskość powierzchni pomiarowych

Odchyłka płaskości ma istotne znaczenie, ponieważ wzorcowanie błędów wskazań przeprowadza się za pomocą płytek wzorcowych o płaskich i równoległych powierzchniach. Odchyłka ta wpływa na budżet niepewności dwukrotnie – jeden raz dla każdej z powierzchni mierniczych. Uwzględniając maksymalną dopuszczalną odchyłkę, przyjęto wartość graniczną:

$$a_{MF} = 0,9 \mu m$$

Zakładając normalny rozkład błędów, otrzymujemy wartość składowej niepewności ($b = 0,5$):

$$u_{MF} = 0,5 \cdot a_{MF} = 0,5 \cdot 0,9 \mu m = 0,45 \mu m$$

3. Mikrometr, równoległość powierzchni pomiarowych

Odchyłka równoległości ma istotne znaczenie, ponieważ wzorcowanie błędu wskazania przeprowadza się za pomocą płytek wzorcowych o płaskich i równoległych powierzchniach. Uwzględniając maksymalną dopuszczalną odchyłkę, przyjęto wartość graniczną:

$$a_{MP} = 2,0 \mu m$$

Zakładając normalny rozkład błędu, otrzymujemy wartość składowej niepewności ($b = 0,5$):

$$u_{MP} = 0,5 \cdot a_{MP} = 0,5 \cdot 2,0 \mu m = 1,0 \mu m$$

4. Powtarzalność/rozdzielczość

W celu określenia powtarzalności operator kontrolnie wykonał 15 pomiarów sprawdzianu tłoczkowego. Odchylenie standardowe tych pomiarów wyniosło:

$$u_{RE} = 1,4 \mu m$$

Rozdzielczość zakładają rozkład jednostajny ($b = 0,6$), przy wartości działki elementarnej $0,01 \text{ mm}$ ($10 \mu m$) i odczycie wykorzystującym interpolację:

$$u_{RA} = \frac{0,1 \cdot W_e}{2} \cdot 0,6 = \frac{0,1 \cdot 10}{2} \cdot 0,6 = 0,3 \mu m$$

Ponieważ składowa wynikająca z powtarzalności jest większa od składowej pochodzącej od rozdzielczości $u_{RE} > u_{RA}$, do budżetu przyjęto wartość większą:

$$u_{RR} = u_{RE} = 1,4 \mu m$$

5. Zmienność punktu zerowego

W tych samych badaniach co w pkt. 4 wyznaczono różnice punktu zerowego dla operatora i personelu wykonującego wzorcowanie:

$$u_{NP} = 1 \mu m$$

6. Różnica temperatur

Największa zaobserwowana różnica temperatur pomiędzy mikrometrem a mierzonym wałkiem wynosiła 12°C . Zakładając dla mikrometru i wałka jednakowy współczynnik rozszerzalności liniowej $\alpha = 11,5 \cdot 10^{-6} 1/^\circ\text{C}$.

Wartość graniczna wyniesie zatem:

$$a_{TD} = \Delta T \cdot \alpha \cdot D = 12^\circ\text{C} \cdot 11,5 \cdot 10^{-6} \cdot 0,020 \text{ m} = 2,76 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

$$a_{TD} = 2,76 \mu m$$

Zakładając rozkład antymodalny ($b = 0,7$), składowa niepewności równa będzie:

$$u_{TD} = 0,7 \cdot 2,76 \mu m = 1,93 \mu m$$

7. Temperatura

Największa odchyłka od normalnej temperatury odniesienia (20°C) wynosiła 16°C . Założono, że współczynniki liniowej rozszerzalności cieplnej mikrometru i wyrobu nie różnią się więcej niż 10%.

Wartość graniczna wyniesie zatem:

$$a_{TA} = 0,1 \cdot \Delta T_{20} \cdot \alpha \cdot D = 0,1 \cdot 16^{\circ}\text{C} \cdot 11,5 \cdot 10^{-6} \cdot 0,020 m = 0,37 \cdot 10^{-6} m$$

$$a_{TA} = 0,37 \mu m$$

Zakładając rozkład antymodalny ($b = 0,7$), składowa niepewności równa będzie:

$$u_{TD} = 0,7 \cdot 0,37 \mu m = 0,26 \mu m$$

8. Odchyłka kształtu wyrobu

Odchyłkę walcowości określono poprzez pomiary dokonane na próbce wałków, ustalając jej wartość równą $2 \mu m$. Tolerancja dotyczy promienia wałka, więc odchyłka na średnicy może wynosić dwa razy więcej. Stąd wartość graniczna:

$$a_{WE} = 4 \mu m$$

Zakładając rozkład równomierny ($b = 0,6$), składowa niepewności równa będzie:

$$u_{WE} = 0,6 \cdot 4 \mu m = 2,4 \mu m$$

Oszacowano, że pomiędzy składowymi niepewnościami nie występuje korelacja. Niepewność złożona wyniesie zatem:

$$u_c = \sqrt{u_{ML}^2 + u_{MF}^2 + u_{MF}^2 + u_{MP}^2 + u_{RR}^2 + u_{NP}^2 + u_{TD}^2 + u_{TA}^2 + u_{WE}^2}$$

$$u_c = \sqrt{2,4^2 + 0,45^2 + 0,45^2 + 1,0^2 + 1,4^2 + 1,0^2 + 1,93^2 + 0,26^2 + 2,4^2}$$

$$u_c = 4,44 \mu m$$

Stąd niepewność rozszerzona przy założeniu poziomu ufności 95%:

$$U(Y) = u_c \cdot k = 4,44 \cdot 2 = 8,88 \mu m$$

Wynik końcowy pomiaru:

$$D = 20,005 \pm 0,009 \text{ mm}$$

Zestawienie wyników w postaci tabelarycznej przedstawia tabela 2.3.

Tabela 2.3. Budżet niepewności

Wielkość	Oszacowanie	Szerokość połówkowa	Wsp. transformacji	Niepewność standardowa	Wsp. wpływu	Składowe niepewności złożonej
1	2	3	4	5	6	7
X_i	Y_i	$0,5 R_i$	k_i	$u(X_i)$	c_i	$u_{xi}(Y_i)$
X	20,005	-	-	0	1	0
C_{ML}	0	0,004	0,6	0,0024	1	0,0024
C_{MF}	0	0,9	0,5	0,00045	1	0,00045
C_{MP}	0	0,9	0,5	0,00045	1	0,00045
C_{MR}	0	2	0,5	0,001	1	0,001
C_{RR}	0,0014	-	-	0,0014	1	0,0014
C_{NP}	0,001	-	-	0,001	1	0,001
C_{TD}	0	12	0,7	8,4	$0,23 \cdot 10^{-3}$	0,00193
C_{TA}	0	16	0,7	11,2	$0,023 \cdot 10^{-3}$	0,00026
C_{WE}	0	0,004	0,6	0,0024	1	0,0024
Y	-	-	-	-	-	0,00443

Analiza budżetu niepewności:

Gdyby mikrometr był pozbawiony błędów wskazań, a jego powierzchnie miernicze były idealnie płaskie i równoległe względem siebie, to niepewność rozszerzoną U można by zredukować z 8,9 do 7,0 μm (o 21%).

Jeżeli mikrometr posiada świadectwo wzorcowania, a do budżetu wprowadzone zostałyby nie wartości maksymalne błędu, a odczytane ze świadectwa wzorcowania (w założeniu o 50% mniejsze), to niepewność rozszerzoną U można by zredukować z 8,9 do 7,6 μm (o 15%).

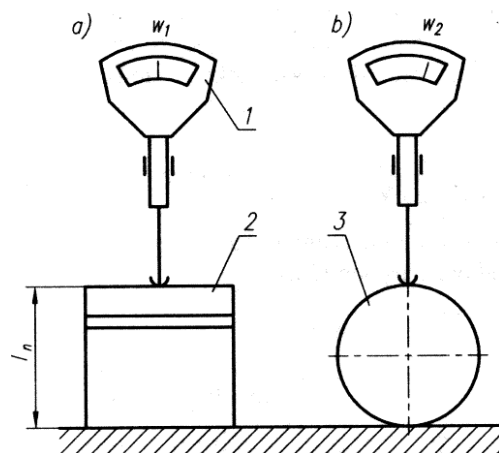
Gdyby środowisko było doskonałe, to znaczy temperatura zarówno mikrometru, jak i przedmiotu mierzonego wynosiłaby 20°C, to niepewność rozszerzoną U można by zredukować z 8,9 do 7,7 μm (o 13%).

O ile nie można wykonać „idealnego” przyrządu pomiarowego, o tyle zachowanie warunków środowiskowych i stosowanie w budżecie niepewności wartości błędów zawartych w świadectwie wzorcowania może obniżyć niepewność rozszerzoną pomiaru o 27%, czyli prawie o 1/3.

Przykład 2.4

Wykonać pomiar różnicowy średnicy w partii wałków stalowych, szlifowanych, o wymiarach nominalnych $D = 5,2 \text{ mm}$, $L = 12 \text{ mm}$. Zasada pomiaru – pomiar różnicowy – porównanie z długością wzorca. Niepewność docelowa pomiaru 2 μm . Pomiary należy przeprowadzić optimetrem o zakresie pomiarowym $\pm 100 \mu\text{m}$ z działką elementarną 1 μm . Przed pomiarem wałek należy przetrzeć szmatką nasączoną spirytusem. Dopuszcza się wykonanie jednego pomiaru. Różnica wskazań wynosiła $W = W_2 - W_1 = 8,5 \mu\text{m}$. W pomiarach przyjęto następujące warunki:

- temperatura w laboratorium utrzymywana jest w granicach $(20 \pm 1)^\circ\text{C}$;
- temperatura wałków i przyrządu nie jest mierzona i rejestrowana;
- zastosowany czujnik nie posiada podanych wartości poprawek wskazań;
- w pomiarach użyto komplet płytek wzorcowych 1 klasy.



Rys. 2.2. Schemat pomiaru

Rozwiązanie

W celu opracowania budżetu niepewności niezbędne jest przeprowadzenie analizy czynników wpływających na niepewność.

Dla optymetru o zakresie pomiarowym $\pm 100 \mu\text{m}$ z działką elementarną $1 \mu\text{m}$:

- dopuszczalny błąd optymetru $\text{MPE} = \pm 0,5 \mu\text{m}$;
- nacisk pomiarowy $P = 1,5 \text{ N}$;
- promień zaokrąglenia końcówki pomiarowej $r = d/2 = 25 \text{ mm}$.

Wzór pomiaru można przedstawić w postaci:

$$Y = [(W_2 + C_{W2}) - (W_1 + C_{W1}) + l_n + C_l + C_t + C_s] \pm U(Y)$$

gdzie: W_2 – wskazanie czujnika na mierzonym wałku; C_{W2} – korekcja wskazania czujnika na wałku; W_1 – wskazanie czujnika na wzorcu; C_{W1} – korekcja czujnika na wzorcu; l_n – wymiar nominalny wzorca; C_l – korekcja wymiaru wzorca; C_t – korekcja temperatury; C_s – korekcja związana z odkształceniami sprężystymi.

Równanie niepewności pomiaru ma postać:

$$u(Y) = \sqrt{c_1^2 u^2(W_2) + c_2^2 u^2(C_{W1}) + c_3^2 u^2(W_1) + c_4^2 u^2(C_{W1}) + c_5^2 u^2(C_l) + c_6^2 u^2(C_t) + c_7^2 u^2(C_s)}$$

Współczynniki wpływu określone pochodnymi wynoszą odpowiednio:

$$c_1 = \frac{\partial Y}{\partial W_2} = 1, \quad c_2 = \frac{\partial Y}{\partial C_{W1}} = 1, \quad c_3 = \frac{\partial Y}{\partial W_1} = -1, \quad c_4 = \frac{\partial Y}{\partial C_{W1}} = -1,$$

$$c_5 = \frac{\partial Y}{\partial C_l} = 1, \quad c_7 = \frac{\partial Y}{\partial C_s} = 1$$

$$c_6 = \frac{\partial Y}{\partial C_t} = 0,1 \cdot \alpha \cdot X = 0,1 \cdot 11,5 \cdot 10^{-6} \cdot 20 = 5,98 \cdot 10^{-6}$$

1. *Optimetr, błąd wskazania*

Jako błąd wskazania optimetru przyjęto wartość graniczną MPE:

$$a_{C_{W1}} = a_{C_{W2}} = 0,5 \mu m$$

Zakładając równomierny rozkład błęd (zasada nadszacowania, ponieważ nie można na podstawie dostępnych danych przyjąć rozkładu normalnego), otrzymujemy wartość składowej niepewności ($b = 0,6$):

$$u_{C_{W1}} = u_{C_{W2}} = 0,6 \cdot a_{C_{W1,2}} = 0,6 \cdot 0,5 \mu m = 0,3 \mu m$$

2. *Powtarzalność/rozdzielczość*

Odchylenie standardowe (empiryczne) wskazań tego czujnika, charakteryzujące jego powtarzalność, wynosi wg producenta:

$$u_{w1,2} = 0,25 \mu m$$

Rozdzielczość zakładają rozkład jednostajny ($b = 0,6$), przy wartości działki elementarnej 0,001 mm (1 μm) i odczycie wykorzystującym interpolację:

$$u_{RA} = \frac{0,1 \cdot W_e}{2} \cdot 0,6 = \frac{0,1 \cdot 1}{2} \cdot 0,6 = 0,08 \mu m$$

Ponieważ składowa wynikająca z powtarzalności jest większa od składowej pochodzącej od rozdzielczości, do budżetu przyjęto wartość większą:

$$u_{w1,2} = 0,25 \mu m$$

3. *Błąd wzorca*

Wymiar 5,2 mm złożono z dwóch płytek wzorcowych klasy 1 o wymiarach 4 mm i 1,2 mm, dla których odchyłki graniczne długości wynoszą $\pm t_e = 0,20 \mu m$.

Niepewność standardową oblicza się ze wzorów (2.16-2.18) uwzględniając rozkład jednostajny ($b = 0,6$):

$$u(C_l) = \sqrt{\left(\frac{0,20}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{0,20}{\sqrt{3}}\right)^2} = 0,17 \mu m$$

4. *Temperatura*

Największa odchyłka od normalnej temperatury odniesienia (20°C) wynosiła 1°C. Założono, że współczynniki liniowej rozszerzalności cieplnej optimetru i wyrobu nie różnią się więcej niż 10%.

Wartość graniczna wyniesie zatem:

$$a_{C_t} = 0,1 \cdot \Delta T_{20} \cdot \alpha \cdot D = 0,1 \cdot 1^\circ\text{C} \cdot 11,5 \cdot 10^{-6} \cdot 0,0052 \text{ m} = 5,98 \cdot 10^{-9} \text{ m}$$

$$a_{C_t} = 0,006 \mu\text{m}$$

Zakładając rozkład antymodalny ($b = 0,7$), składowa niepewności równa będzie:

$$u_{C_t} = 0,7 \cdot 0,006 \mu\text{m} = 0,004 \mu\text{m}$$

Korekcję, ze względu na niestabilność temperatury w laboratorium, można więc pominąć jako nieistotną.

5. Odształcenia sprężyste

W pomiarze wystąpią trzy odkształcenia sprężyste (rys. 2.3):

- w miejscu zetknięcia się końcówki pomiarowej z powierzchnią pomiarową płytki pod wpływem nacisku pomiarowego wynoszącego $P = 1,5 \text{ N}$ i styku kuli (o promieniu 50 mm) z płaszczyzną:

$$C_{s1} = 0,0415 \cdot \sqrt[3]{\frac{P}{d}} = 0,0415 \cdot \sqrt[3]{\frac{1,5}{0,100}} = 0,1289 \mu\text{m}$$

- wzdłuż styku mierzonego wałka ze stolikiem pomiarowym w wyniku superpozycji nacisku pomiarowego i ciężaru wałka. Przyjmując średnicę wałka $D = 5,2 \text{ mm}$, długość $L = 12 \text{ mm}$, ciężar $Q = 0,02 \text{ N}$ oraz długości styku wałka ze stolikiem 41,7% długości wałka ($0,417 L$), co uwzględnia nacięte na stoliku pomiarowym rowki, otrzymamy:

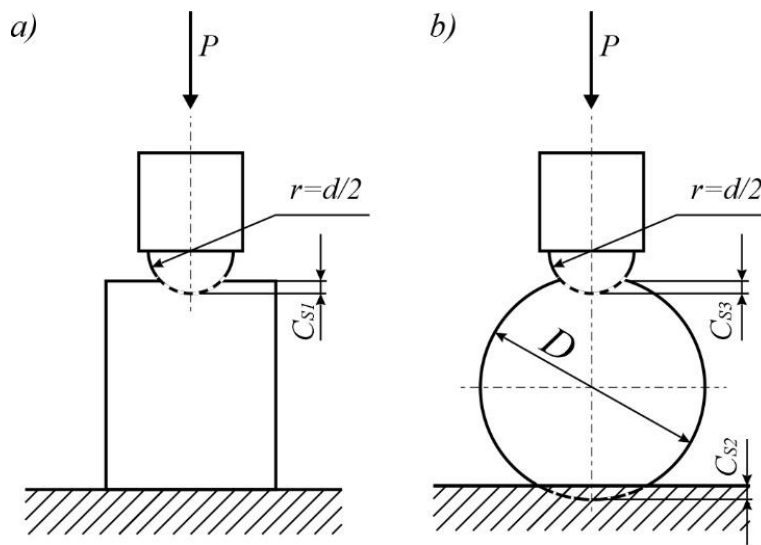
$$C_{s2} = 4,69 \cdot 10^{-6} \frac{P + Q}{0,417 \cdot L} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{D}} = 4,69 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1,5 + 0,02}{0,417 \cdot 0,012} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{0,0052}}$$

$$C_{s2} = 0,008 \mu\text{m}$$

- w miejscu zetknięcia się końcówki pomiarowej z mierzonym walcem pod wpływem nacisku pomiarowego:

$$C_{s3} = 0,048 \cdot \sqrt[3]{P} \cdot \frac{\sqrt[4]{\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{D}\right)} \cdot \frac{1}{D}}{\sqrt[6]{\frac{2}{d} + \frac{1}{D}}} = 0,048 \cdot \sqrt[3]{1,5} \cdot \frac{\sqrt[4]{\left(\frac{1}{0,1} + \frac{1}{0,0052}\right)} \cdot \frac{1}{0,052}}{\sqrt[6]{\frac{2}{0,1} + \frac{1}{0,0052}}}$$

$$C_{s3} = 0,3159 \mu\text{m}$$



Rys. 2.3. Odształcenia sprężyste występujące przy pomiarze różnicowym walca

Stąd korekcja spowodowana odkształceniem sprężystym wyniesie:

$$a_{C_s} = (C_{s3} - C_{s1}) + C_{s2} = (0,3159 - 0,1289) + 0,008 = 0,195 \mu m$$

Zakładając rozkład jednostajny ($b = 0,6$), niepewność można więc pominąć jako nieistotną.

$$u_{C_s} = a_{C_s} \cdot b = 0,195 \cdot 0,6 = 0,117 \mu m$$

Oszacowano, że pomiędzy składowymi niepewnościami nie występuje korelacja. Niepewność złożona wyniesie zatem:

$$u_c = \sqrt{u_{W2}^2 + u_{C_{W2}}^2 + u_{W1}^2 + u_{C_{W1}}^2 + u_{C_l}^2 + u_{C_s}^2}$$

$$u_c = \sqrt{0,3^2 + 0,25^2 + 0,3^2 + 0,25^2 + 0,17^2 + 0,12^2}$$

$$u_c = 0,59 \mu m$$

Stąd niepewność rozszerzona przy założeniu poziomu ufności 95%:

$$U(Y) = u_c \cdot k = 0,59 \cdot 2 = 1,18 \mu m$$

Zestawienie wyników w postaci tabelarycznej przedstawia tabela 2.4.

Tabela 2.4. Budżet niepewności (wartości w mm)

Wielkość	Oszacowanie	Szerokość połówkowa	Wsp. transformacji	Niepewność standardowa	Wsp. wpływu	Składowe niepewności złożonej
1	2	3	4	5	6	7
X_i	Y_i	$0,5 R_i$	k_i	$u(X_i)$	c_i	$u_{xi}(Y_i)$
W_2	$8,5 \cdot 10^{-3}$	-	-	0,00025	1	0,00025
C_{W2}	0	0,0005	0,6	0,00030	1	0,00030
W_1	0	-	-	0,00025	1	0,00025
C_{W1}	0	0,0005	0,6	0,00030	1	0,00030
l_n	5,2	-	-	-	-	-
$C_{l1,2}$	0	0,0002	0,6	0,00012	1	0,00012
$C_{l4,0}$	0	0,0002	0,6	0,00012	1	0,00012
C_s	0	0,00019	0,6	0,00012	1	0,00012
Y	-	-	-	-	-	0,00059

Analiza budżetu niepewności:

Gdyby zamiast płytek klasy 1 użyć w pomiarach płytki klasy 2, to procentowy udział tej składowej niepewności w całkowitym bilansie wzrósłby z 8 do 32%, a niepewność rozszerzona wzrosłaby z 1,18 do 1,36 μm (o 15%).

Gdyby optometr posiadał świadectwo wzorcowania z zawartymi w nim wartościami korekcji (poprawek) wskazań, a do budżetu wprowadzone zostałyby nie wartości maksymalne odpowiadające błędom granicznym, a odczytane ze świadectwa wzorcowania (w założeniu o 50% mniejsze), to niepewność rozszerzoną U można by zredukować z 1,2 do 0,88 μm (o 25%).

Przy założeniu, że w laboratorium panuje temperatura $(20 \pm 1)^\circ\text{C}$, i założonym braku różnic w temperaturze przedmiotu mierzonego i przyrządu, temperatura nie wykazała istotnego wpływu na pomiar i szacowaną jego niepewność.

O ile nie można wykonać „idealnego” przyrządu pomiarowego, o tyle stosowanie w budżecie niepewności wartości błędów zawartych w świadectwie wzorcowania może obniżyć niepewność rozszerzoną pomiaru o 25%.

Wynik końcowy pomiaru:

$$D = 5,2085 \pm 0,0012 \text{ mm}$$

Przykład 2.5

Wykonać pomiar lokalny (dwupunktowy) średnicy próbki $n = 10$ w partii stalowych, toczonych wałków o wymiarach nominalnych $D = 35 \text{ mm}$, $L = 100 \text{ mm}$. Zasada pomiaru – pomiar długości poprzez porównanie ze znaną długością. Pomiar należy przeprowadzić suwmiarką uniwersalną z noniuszem 0,05 mm. Średnicę należy zmierzyć po zdemontowaniu z tokarki. Przed pomiarem wałek należy przetrzeć szmatką. Zakłada się wykonanie jednego pomiaru na każdym z wałków. W pomiarach przyjęto następujące warunki:

- temperatura suwmiarki i wałków nie jest kontrolowana, a temperatura pomieszczenia, w którym przeprowadzane są pomiary wynosi $(20 + 4)^\circ\text{C}$;
- podczas produkcji jeden operator obsługuje obrabiarkę i używa suwmiarki.

Rozwiązanie

W celu opracowania budżetu niepewności niezbędne jest przeprowadzenie analizy czynników wpływających na niepewność.

Zgodnie z normą PN-EN ISO 13385-1:2019-12 dla suwmiarek przyjmuje się:

- tolerancja płaskości powierzchni pomiarowych $T_p = 10 \mu m$;
- tolerancja równoległości powierzchni pomiarowych $T_r = 10 \mu m$;
- dopuszczalny błąd mikrometru $MPE_{ML} = \pm 60 \mu m$.

Wzór pomiaru można przedstawić w postaci:

$$Y = X + C_{CL} + C_{CF} + C_{CF} + C_{CP} + C_{RR} + C_{TA}$$

gdzie: X – wynik pomiaru, C – korekcje (poprawki): C_{CL} – błędów wskazań suwmiarki, C_{CF} – płaskości powierzchni pomiarowych, C_{CP} – równoległości powierzchni pomiarowych, C_{RR} – rozdzielczości/powtarzalności, $C_{TA} = 0,1 \cdot \Delta T_{20} \cdot \alpha \cdot X$ – poprawka temperaturowa.

Równanie niepewności pomiaru ma postać:

$$u(Y) = \sqrt{c_1^2 u^2(X) + c_2^2 u^2(C_{CL}) + c_3^2 u^2(C_{CF}) + c_4^2 u^2(C_{CF}) + c_5^2 u^2(C_{CP}) + c_6^2 u^2(C_{RR}) + c_7^2 u^2(0,1 \cdot \alpha \cdot X)}$$

Współczynniki wpływu określone pochodnymi wynoszą odpowiednio:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\partial Y}{\partial X} = 1, & c_2 &= \frac{\partial Y}{\partial C_{CL}} = 1, & c_3 &= \frac{\partial Y}{\partial C_{CF}} = 1, & c_4 &= \frac{\partial Y}{\partial C_{CF}} = 1, \\ c_5 &= \frac{\partial Y}{\partial C_{CP}} = 1, & c_6 &= \frac{\partial Y}{\partial C_{RR}} = 1, \\ c_7 &= \frac{\partial Y}{\partial C_{TA}} = 0,1 \cdot \alpha \cdot X = 0,1 \cdot 11,5 \cdot 10^{-6} \cdot 20 = 0,04 \cdot 10^{-3} \text{ mm} \end{aligned}$$

1. Suwmiarka, błąd wskazania

Błąd wskazania suwmiarki MPE_{CL} – uwzględniając błąd graniczny suwmiarki, przyjęto wartość graniczną:

$$a_{CL} = 50 \mu m$$

Zakładając równomierny rozkład błędów (zasada nadszacowania, ponieważ nie można na podstawie dostępnych danych przyjąć rozkładu normalnego), otrzymujemy wartość składowej niepewności ($b = 0,6$):

$$u_{CL} = 0,6 \cdot a_{CL} = 0,6 \cdot 50 \mu m = 30 \mu m$$

2. Suwmiarka, płaskość powierzchni pomiarowych

Odchyłka płaskości ma istotne znaczenie, ponieważ wzorcowanie błędów wskazania przeprowadza się za pomocą płytek wzorcowych o płaskich i równoległych powierzchniach. Odchyłka ta wpływa na budżet niepewności

dwukrotnie – po jednym razie dla każdej z powierzchni mierniczych. Uwzględniając maksymalną dopuszczalną odchyłkę, przyjęto wartość graniczną:

$$a_{CF} = 10 \mu m$$

Zakładając normalny rozkład błędu, otrzymujemy wartość składowej niepewności ($b = 0,5$):

$$u_{CF} = 0,5 \cdot a_{CF} = 0,5 \cdot 10 \mu m = 5 \mu m$$

3. Summiarka, równoległość powierzchni pomiarowych

Odchyłka równoległości ma istotne znaczenie, ponieważ wzorcowanie błędu wskazania przeprowadza się za pomocą płytek wzorcowych o płaskich i równoległych powierzchniach. Uwzględniając maksymalną dopuszczalną odchyłkę, przyjęto wartość graniczną:

$$a_{CP} = 10 \mu m$$

Zakładając normalny rozkład błędu, otrzymujemy wartość składowej niepewności ($b = 0,5$):

$$u_{CP} = 0,5 \cdot a_{CP} = 0,5 \cdot 10 \mu m = 5 \mu m$$

4. Rozdzielczość

Rozdzielczość zakładają rozkład jednostajny ($b = 0,6$), przy wartości działki elementarnej 0,05 mm (50 mm) i odczycie wykorzystującym koincydencję:

$$u_{RA} = \frac{W_e}{2} \cdot 0,6 = \frac{50}{2} \cdot 0,6 = 15 \mu m$$

5. Temperatura

Największa odchyłka od normalnej temperatury odniesienia (20°C) wynosiła 4°C. Założono, że współczynniki liniowej rozszerzalności cieplnej mikrometru i wyrobu nie różnią się więcej niż 15%.

Wartość graniczna wyniesie zatem:

$$a_{TA} = 0,15 \cdot \Delta T_{20} \cdot \alpha \cdot D = 0,1 \cdot 4^\circ C \cdot 11,5 \cdot 10^{-6} \cdot 0,035 m = 0,161 \cdot 10^{-6} m$$

$$a_{TA} = 0,161 \mu m$$

Zakładając rozkład antymodalny ($b = 0,7$), składowa niepewności równa będzie:

$$u_{TA} = 0,7 \cdot 0,161 \mu m = 0,11 \mu m$$

Składowa temperaturowa jest pomijalnie mała i można jej nie uwzględniać.

Oszacowano, że pomiędzy składowymi niepewnościami nie występuje korelacja. Niepewność złożona wyniesie zatem:

$$u_c = \sqrt{u_{CL}^2 + u_{CF}^2 + u_{CF}^2 + u_{CP}^2 + u_{RA}^2 + u_{TA}^2}$$

$$u_c = \sqrt{30^2 + 5^2 + 5^2 + 5^2 + 15^2 + 0,11^2}$$

$$u_c = 34,6 \mu m$$

Stąd niepewność rozszerzona przy założeniu poziomu ufności 95%:

$$U(Y) = u_c \cdot k = 34,6 \cdot 2 = 70 \mu m$$

Wynik końcowy każdego pojedynczego pomiaru wyniósłby:

$$D = X \pm 0,070 \text{ mm}$$

Zestawienie wyników w postaci tabelarycznej przedstawia tabela 2.5.

Tabela 2.5. Budżet niepewności

Wielkość	Oszacowanie	Szerokość połówkowa	Wsp. transformacji	Niepewność standardowa	Wsp. wpływu	Składowe niepewności złożonej
1	2	3	4	5	6	7
X_i	Y_i	$0,5 R_i$	k_i	$u(X_i)$	c_i	$u_{xi}(Y_i)$
X	35,00	-	-	0	1	0
C_{CL}	0	0,05	0,6	0,030	1	0,030
C_{CF}	0	0,01	0,5	0,005	1	0,005
C_{CF}	0	0,01	0,5	0,005	1	0,005
C_{CP}	0	0,01	0,5	0,005	1	0,005
C_{RA}	0	0,025	0,6	0,015	1	0,015
C_{TA}	0	4	0,7	2,8	$0,04 \cdot 10^{-3}$	0,00011
Y	-	-	-	-	-	0,0346

W serii 10 pomiarów otrzymano wyniki:

d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	d_9	d_{10}
35,15	35,05	34,90	35,05	35,20	35,10	34,80	35,15	34,90	34,85

Stąd odchylenie standardowe:

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - 35,015)^2}{9}} = 0,14152$$

a niepewność standardowa:

$$u_{s\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}} = \frac{0,14152}{\sqrt{10}} = 0,04475$$

Stąd niepewność rozszerzona A serii pomiarów, przy założeniu poziomu ufności 95% (rozkład t-Studenta):

$$U_A = \pm 0,04475 \cdot 2,2622 = 0,101 \text{ mm}$$

Wynik końcowy pomiaru będzie sumą geometryczną niepewności pojedynczego pomiaru B, wynikającą z niepewności narzędzia pomiarowego, oraz niepewności serii pomiarów wyznaczonych metodą A, wynikającą z rozrzutu wyników pomiaru:

$$U = \pm \sqrt{U_A^2 + U_B^2} = \sqrt{0,101^2 + 0,070^2} = 0,123 \text{ mm}$$

W przypadku tym 67% niepewności całkowitej stanowi niepewność związana z rozrzutem wyników pomiaru, a 33% niepewność związana z przyrządem i metodą pomiarową. Zwiększenie dokładności pomiaru (zmniejszenie jego niepewności) nie będzie więc miało istotnego wpływu na niepewność końcową pomiaru.

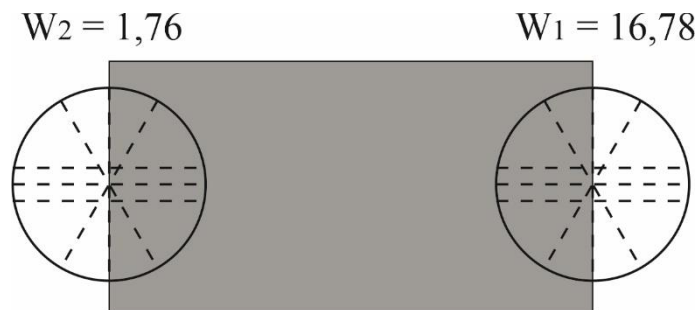
Wynik końcowy można zapisać w postaci:

$$D = 35,015 \pm 0,123 \text{ mm}$$

Przykład 2.6

Wykonać pomiar długości elementu szlifowanego o wymiarach nominalnych $L = 15 \text{ mm}$ i wysokości $H = 5 \text{ mm}$. Zasada pomiaru – różnica wskazań śrub mikrometrycznych mikroskopu. Pomiary należy przeprowadzić na mikroskopie warsztatowym dużym, z działką elementarną $0,01 \mu\text{m}$. Przed pomiarem element należy przetrzeć szmatką nasączoną spirytusem. Dopuszcza się wykonanie jednego pomiaru. Różnica wskazań wynosiła $W = W_2 - W_1 = 15,02 \text{ mm}$. W pomiarach przyjęto następujące warunki:

- temperatura w laboratorium utrzymywana jest w granicach $(20 \pm 1)^\circ\text{C}$;
- temperatura elementów i mikroskopu nie jest mierzona i rejestrowana;
- zastosowany mikroskop nie posiada podanych wartości poprawek wskazań.



Rys. 2.4. Schemat pomiaru

Rozwiązanie

W celu opracowania budżetu niepewności niezbędne jest przeprowadzenie analizy czynników wpływających na niepewność.

Dla mikroskopu warsztatowego dużego z działką elementarną 0,01 mm dopuszczalny błąd mikroskopu

$$MPE = \pm(A + 0,7K + B \cdot L + C \cdot H \cdot L) \mu m$$

Wzór pomiaru można przedstawić w postaci:

$$Y = [(W_1 - W_2) + C_{W_1-W_2} + C_t] \pm U(Y)$$

gdzie: W_2 – wskazanie mikroskopu na mierzonym elemencie; W_1 – wskazanie mikroskopu na elemencie; $C_{W_1-W_2}$ – korekcja wskazania mikroskopu na elemencie; C_t – korekcja temperatury.

Równanie niepewności pomiaru ma postać:

$$u(Y) = \sqrt{c_1^2 u^2(W_2) + c_2^2 u^2(W_1) + c_3^2 u^2(C_{W_1-W_2}) + c_4^2 u^2(C_t)}$$

Współczynniki wpływu określone pochodnymi wynoszą odpowiednio:

$$c_1 = \frac{\partial Y}{\partial W_2} = 1, c_2 = \frac{\partial Y}{\partial W_1} = 1 \quad c_3 = \frac{\partial Y}{\partial C_{W_1-W_2}} = 1,$$

$$c_4 = \frac{\partial Y}{\partial C_t} = 0,1 \cdot \alpha \cdot X = 0,1 \cdot 11,5 \cdot 10^{-6} \cdot 20 = 5,98 \cdot 10^{-6}$$

1. Mikroskop, błąd pomiaru

Jako błąd pomiaru mikroskopu, przy pomiarze elementu leżącego na stoliku pomiarowym, przyjęto wartość MPE:

$$a_{C_{W_1-W_2}} = \pm(A + 0,7K + B \cdot L + C \cdot H \cdot L) \mu m$$

Stąd dla przesuwu wzdłużnego:

$$a_{C_{W_1-W_2}} \pm (5 + 0,7 \cdot 1 + \frac{L}{28} + \frac{H \cdot L}{3000}) \mu m$$

$$a_{C_{W_1-W_2}} = \pm \left(5 + 0,7 \cdot 1 + \frac{15,02}{28} + \frac{5 \cdot 15,02}{3000} \right) = 6,261 \mu m$$

Zakładając równomierny rozkład błędów (zasada nadszacowania, ponieważ nie można na podstawie dostępnych danych przyjąć rozkładu normalnego), otrzymujemy wartość składowej niepewności ($b = 0,6$):

$$u_{C_{W_1}} = u_{C_{W_2}} = 0,6 \cdot a_{C_{W_1,2}} = 0,6 \cdot 6,3 \mu m = 3,8 \mu m$$

2. Powtarzalność/rozdzielczość

Zakładając rozkład jednostajny ($b = 0,6$), przy wartości działki elementarnej $0,01 \text{ mm}$ ($10 \text{ }\mu\text{m}$) i odczycie wykorzystującym interpolację, otrzymujemy:

$$u_{w1,2} = u_{RA} = \frac{0,1 \cdot W_e}{2} \cdot 0,6 = \frac{0,1 \cdot 10}{2} \cdot 0,6 = 0,30 \text{ }\mu\text{m}$$

3. Temperatura

Największa odchyłka od normalnej temperatury odniesienia (20°C) wynosiła 1°C . Założono, że współczynniki liniowej rozszerzalności cieplnej mikroskopu i wyrobu nie różnią się więcej niż 10%.

Wartość graniczna wyniesie zatem:

$$a_{c_t} = 0,1 \cdot \Delta T_{20} \cdot \alpha \cdot D = 0,1 \cdot 1^\circ\text{C} \cdot 11,5 \cdot 10^{-6} \cdot 0,01502 \text{ m} = 1,727 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

$$a_{c_t} = 0,017 \text{ }\mu\text{m}$$

Zakładając rozkład antymodalny ($b = 0,7$), składowa niepewności równa będzie:

$$u_{c_t} = 0,7 \cdot 0,017 \text{ }\mu\text{m} = 0,012 \text{ }\mu\text{m}$$

Korekcję ze względu na niestabilność temperatury w laboratorium można więc pominąć jako nieistotną.

Oszacowano, że pomiędzy składowymi niepewnościami nie występuje korelacja.

Niepewność złożona wyniesie zatem:

$$u_c = \sqrt{u_{W1-W2}^2 + u_{c_{W2}}^2 + u_{c_{W1}}^2}$$

$$u_c = \sqrt{3,8^2 + 0,30^2 + 0,30^2}$$

$$u_c = 3,8 \text{ }\mu\text{m}$$

Stąd niepewność rozszerzona przy założeniu poziomu ufności 95%:

$$U(Y) = u_c \cdot k = 3,8 \cdot 2 = 7,6 \text{ }\mu\text{m}$$

Zestawienie wyników w postaci tabelarycznej przedstawia tabela 2.6.

Wynik końcowy można zapisać w postaci:

$$L = 15,020 \pm 0,008 \text{ mm}$$

Tabela 2.6. Budżet niepewności (wartości w mm)

Wielkość	Oszacowanie	Szerokość połówkowa	Wsp. transformacji	Niepewność standardowa	Wsp. wpływu	Składowe niepewności złożonej
1	2	3	4	5	6	7
X_i	Y_i	$0,5 R_i$	k_i	$u(X_i)$	c_i	$u_{xi}(Y_i)$
$W_1 - W_2$	15,02	-	-	0,00030	1	0,0003
C_{W2}	0	0,0005	0,6	0,00030	1	0,0038
C_{W1}	0	-	-	0,00030	1	0,0003
Y	-	-	-	-	-	0,0038

2.3. Wyznaczenie niepewności pomiaru przy pomiarach pośrednich

W przypadku pomiaru pośredniego, w którym wynik pomiaru Y jest funkcją pewnej liczby wartości zmierzonych X_i , które mogą być funkcjami:

$$Y = G(X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_{p+r}) \quad (2.18)$$

niepewność pomiaru standardowa złożona wyrażona jest równaniem:

$$u_c = \sqrt{u_r^2 + \sum_{i=1}^p \left(\frac{\partial Y}{\partial X_i} \cdot u_{X_i} \right)^2} \quad (2.19)$$

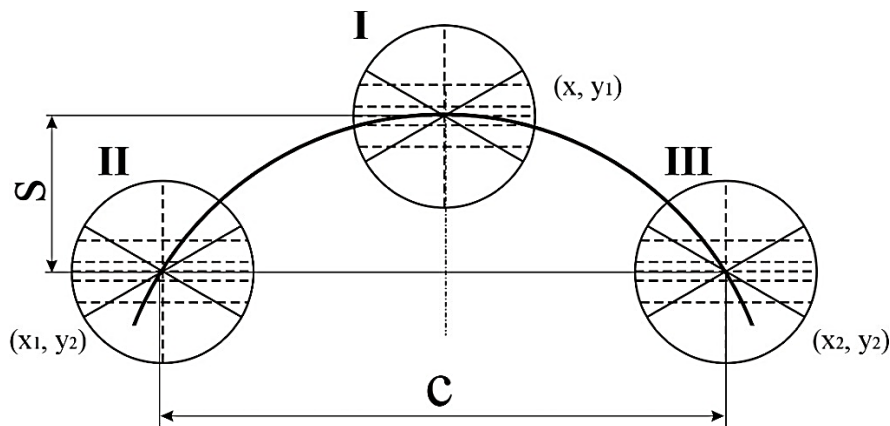
gdzie: $u_r = \sum_{i=1}^r \frac{\partial Y}{\partial X_i} \cdot u_{X_i}$ – suma silnie skorelowanych składowych niepewności pomiaru; $\frac{\partial Y}{\partial X_i}$ – pochodne cząstkowe funkcji Y po X_i ; u_{X_i} – niepewność standardowa złożona pomiaru wartości zmierzonej o numerze i .

Przykład 2.7

Na mikroskopie warsztatowym dokonano pomiaru promienia wycinka koła metodą pośrednią (rys. 2.5) poprzez pomiar cięciwy c i jej wysokości s , otrzymując wyniki pomiaru:

$$c = (15,000 \pm 0,008) \text{ mm} \quad s = (2,000 \pm 0,006) \text{ mm}$$

Błędy pomiaru cięciwy i jej wysokości stanowią zmienne wzajemnie niezależne. Określić niepewność pomiaru promienia.



Rys. 2.5. Schemat pomiaru średnicy metodą cięgiwy

Rozwiązanie

W przypadku pomiaru metodą cięgiwy promień mierzonego łuku określa zależność:

$$R = \frac{c^2}{8s} + \frac{s}{2} = \frac{(x_1 - x_2)^2}{8 \cdot |y_1 - y_2|} + \frac{|y_1 - y_2|}{2}$$

Stąd wartość promienia wynosi:

$$R = \frac{15^2}{8 \cdot 2} + \frac{2}{2} = 15,062$$

Niepewność pomiaru określa równanie:

$$u_R = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial c} \cdot u_c\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial s} \cdot u_s\right)^2}$$

które po zróźniczkowaniu przyjmuje postać:

$$u_R = \sqrt{\left(\frac{c}{4s} \cdot u_c\right)^2 + \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{c^2}{8s^2}\right) \cdot u_s\right)^2}$$

gdzie: u_c i u_s – odpowiednio niepewność wyznaczenia na mikroskopie warsztatowym wymiarów c i s .

Zakładając współczynnik rozszerzenia $k = 2$ dla $P = 95\%$, otrzymujemy wartości niepewności standardowych składowych: $u_c = 0,004$ mm i $u_s = 0,003$ mm. Stąd po podstawieniu danych otrzymujemy:

$$u_R = \sqrt{\left(\frac{15}{4 \cdot 2} \cdot 0,004\right)^2 + \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{15^2}{8 \cdot 2^2}\right) \cdot 0,003\right)^2} = 0,024 \text{ mm}$$

Niepewność rozszerzona przy założeniu $P = 95\%$ i odpowiadającemu mu $k = 2$ wynosi:

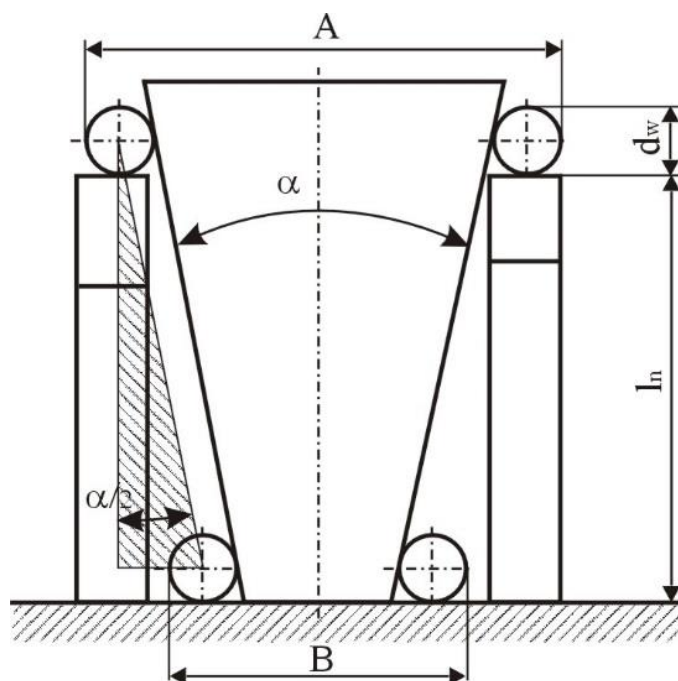
$$U_R = 0,048 \text{ mm}$$

Stąd wynik końcowy można zapisać w postaci:

$$R = (15,062 \pm 0,048) \text{ mm}$$

Przykład 2.8

Przeprowadzono pomiar kąta stożka metodą pośrednią, zgodnie z przedstawionym poniżej rysunkiem 2.6. Do określenia wielkości A i B wykorzystano mikrometr, uzyskując wyniki: $A = 46,678 \pm 0,00$ $B = 37,645 \pm 0,006$. Pomiar przeprowadzono, wykorzystując komplet płytek wzorcowych II klasy, stosując płytki 75, 50 i 25 mm, w celu uzyskania jednakowej wysokości stosów płytek po obu stronach mierzonego stożka. Pomiaru dokonywano poprzez wałeczki pomiarowe o średnicy $d_w = 10,2$ mm. Wyznaczyć niepewność rozszerzoną pomiaru kąta stożka.



Rys. 2.6. Schemat pomiarowy

Rozwiązanie

Z zależności przedstawionej na powyższym rysunku wynika, że:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{A}{2} - \frac{d_w}{2} - \left(\frac{B}{2} - \frac{d_w}{2}\right)}{l_n + \frac{d_w}{2} - \frac{d_w}{2}}$$

Skąd po przekształceniach otrzymujemy:

$$\frac{\alpha}{2} = \arctg \frac{A - B}{2 \cdot l_n}$$

Po podstawieniu danych wartość kąta wynosi:

$$\frac{\alpha}{2} = \arctg \frac{46,678 - 37,645}{2 \cdot 75} = 3,4462^\circ = 3^\circ 26' 46''$$

Analizując niepewność pomiaru, przyjąć należy, że kąt stożka α jest funkcją trzech wymiarów różnicy $(A-B)$, (d_w) oraz l_n . W związku z tym niepewność standardową pomiaru u_α wylicza się ze wzoru:

$$u_{\alpha/2} = \sqrt{\left(\frac{\partial \alpha}{\partial (A-B)} \cdot u_{(A-B)}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial (d_w)} \cdot u_{(d_w)}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial l_n} \cdot u_{l_n}\right)^2}$$

Skąd ostatecznie otrzymuje się zależność:

$$u_{\alpha/2} = \frac{1}{l_n} \cos \frac{\alpha}{2} \sqrt{\left(\cos \frac{\alpha}{2} \cdot u_{(A-B)}\right)^2 + \left(\left(\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}\right) \cdot u_{(d_w-d_w)}\right)^2 + \left(2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot u_{l_n}\right)^2}$$

gdzie: u_{A-B} – niepewność wyznaczenia różnicy wymiarów A i B ; u_{d_w} – niepewność wałeczka pomiarowego; u_{l_n} – niepewność stosu płytek wzorcowych.

1. Określenie niepewności standardowej wyznaczenia różnicy wymiarów A i B

Zakładając współczynnik rozszerzenia $k = 2$ dla $P = 95\%$, otrzymujemy wartości niepewności standardowych składowych: $u_A = 0,003$ mm i $u_B = 0,003$ mm.

Stąd niepewność wyznaczenia różnicy wymiarów A i B wynosi:

$$u_{A-B} = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 4,2 \mu m$$

2. Określenie niepewności standardowej wałeczka pomiarowego

Błąd graniczny wałeczka pomiarowego $MPE = \pm 0,0005$ mm.

Stąd jego niepewność standardowa przy założeniu rozkładu jednostajnego:

$$u_{d_w} = MPE \cdot 0,6 = 0,5 \cdot 0,6 = 0,3 \mu m$$

3. Obliczenie niepewności stosu płytek wzorcowych

Dopuszczalne błędy graniczne użytych płytek wzorcowych klasy II wynoszą:

$$\text{MPE}_{25} = \pm 0,60 \mu\text{m}, \text{MPE}_{50} = \pm 0,80 \mu\text{m}, \text{MPE}_{75} = \pm 0,10 \mu\text{m}$$

Stąd ich niepewności standardowe przy założeniu rozkładu jednostajnego odpowiednio:

$$u_{25} = 0,36 \mu\text{m}, u_{50} = 0,48 \mu\text{m}, u_{75} = 0,60 \mu\text{m}$$

Niepewność wysokości l_n ułożonej z dwóch płytek wzorcowych o wysokościach 25 i 50 mm wynosi:

$$u_{25+50} = \sqrt{u_{25}^2 + u_{50}^2} = \sqrt{0,36^2 + 0,48^2} = 0,60 \mu\text{m}$$

Zatem niepewności wysokości stosów płytek wzorcowych z obu stron stożka są jednakowe i dlatego nie ma różnicy, którego stosu niepewność przyjmujemy do dalszych obliczeń.

4. Obliczenie niepewności standardowej wyniku pomiaru stożka

Niepewność wyliczamy z podanej niżej zależności:

$$u_{\alpha/2} = \frac{1}{l_n} \cos \frac{\alpha}{2} \sqrt{\left(\cos \frac{\alpha}{2} \cdot u_{(A-B)}\right)^2 + \left(\left(\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}\right) \cdot u_{(d_w-d_n)}\right)^2 + \left(2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot u_{l_n}\right)^2}$$

Po podstawieniu danych otrzymujemy:

$$u_{\alpha/2} = \frac{1}{75} \cos \frac{3^\circ 26' 46''}{2} \sqrt{\left(\cos \frac{3^\circ 26' 46''}{2} \cdot 4,2\right)^2 + \left(\left(\cos \frac{3^\circ 26' 46''}{2} - \sin \frac{3^\circ 26' 46''}{2}\right) \cdot 0,3\right)^2 + \left(2 \sin \frac{3^\circ 26' 46''}{2} \cdot 0,6\right)^2}$$
$$u_{\alpha/2} = 0,058541 \text{ mrad}$$

Po przeliczeniu na minuty katowe:

$$u_{\alpha/2} = 0,2011' = 12''$$

Niepewność rozszerzona pomiaru dla $k = 2$ dla $P = 95\%$:

$$U_{\alpha/2} = 12'' \cdot 2 = 24''$$

Ostatecznie wynik można zapisać w postaci

$$\alpha/2 = 3^\circ 26' 46'' \pm 24''$$

2.4. Niepewność średniej ważonej

W dotychczasowych przykładach rozważano określenie niepewności wyniku pomiaru w oparciu o pomiar lub serię pomiarów wykonywanych w tych samych lub zbliżonych warunkach. Jeżeli jednak mamy do czynienia ze zbliżonymi wartościami wyników pomiarów o różnych wartościach niepewności, wynikających np. z pomiaru w różnych laboratoriach, to nie można ich uznać za równoważne, ponieważ mają one przyporządkowane różne wartości niepewności. W tym przypadku za wartość prawdziwą nie można przyjąć średniej arytmetycznej wyników pomiaru, lecz należy wyznaczyć średnią ważoną, ponieważ każdy rozpatrywany wynik ma inną wartość niepewności i wpływ na ostateczną wartość niepewności końcowej.

Przyjmując, że wszystkie wyniki pomiarów można uznać za wiarygodne, i nie są one rozbieżne, a ich niepewności standardowe są różne i wynoszą:

$$w_1 : w_2 : \dots : w_{m-1} : w_m = \frac{1}{u^2(X_1)} : \frac{1}{u^2(X_2)} : \dots : \frac{1}{u^2(X_{m-1})} : \frac{1}{u^2(X_m)} \quad (2.20)$$

to proporcje poszczególnych wag można określić z zależności:

$$w_1 : w_2 : \dots : w_{m-1} : w_m = \frac{u^2(X_i)_{\max}}{u^2(X_1)} : \frac{u^2(X_i)_{\max}}{u^2(X_2)} : \dots : \frac{u^2(X_i)_{\max}}{u^2(X_{m-1})} : \frac{u^2(X_i)_{\max}}{u^2(X_m)} \quad (2.21)$$

Uwzględniając określone w powyższy sposób wagi, najlepsze przybliżenie wielkości mierzonej uzyskamy, wyznaczając jej średnią ważoną z zależności:

$$\bar{X}_w = \frac{w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2 + \dots + w_{m-1} \cdot x_{m-1} + w_m \cdot x_m}{w_1 + w_2 + \dots + w_{m-1} + w_m} \quad (2.22)$$

Niepewność tak wyliczonej średniej obliczyć można z zależności:

$$u(\bar{X}_w) = \frac{u(X_i)_{\max}}{\sqrt{w_1 + w_2 + \dots + w_{m-1} + w_m}} \quad (2.23)$$

Przykład 2.9

W trzech niezależnych laboratoriach (różniących się osobą metrologa, sprzętem, metodą pomiarową) przeprowadzono pomiary średnicy elementu, uzyskując na poziomie ufności $P = 0,95$ następujące wyniki:

$$D_1 = 20,992 \pm 0,008$$

$$D_2 = 20,998 \pm 0,012$$

$$D_3 = 20,989 \pm 0,006$$

Rozwiązanie

1. Wyznaczenie wag poszczególnych pomiarów

Przyjmując współczynnik rozszerzenia $k = 2$, niepewności standardowe poszczególnych pomiarów wynoszą:

$$u(\rho_1) = 0,004 \text{ mm};$$

$$u(\rho_2) = 0,006 \text{ mm} = u(\rho)_{\max};$$

$$u(\rho_3) = 0,003 \text{ mm}$$

a ich wagi obliczamy z zależności:

$$w_1 : w_2 : \dots : w_{m-1} : w_m = \frac{u^2(X_1)_{\max}}{u^2(X_1)} : \frac{u^2(X_2)_{\max}}{u^2(X_2)} : \dots : \frac{u^2(X_{m-1})_{\max}}{u^2(X_{m-1})} : \frac{u^2(X_m)_{\max}}{u^2(X_m)}$$

i wynoszą one odpowiednio:

$$w_1 = \frac{0,006^2}{0,004^2} = 2,25;$$

$$w_2 = \frac{0,006^2}{0,006^2} = 1;$$

$$w_3 = \frac{0,006^2}{0,003^2} = 4$$

2. Obliczenie wartości mierzonej jako średniej ważonej

Wartość średnią obliczamy z zależności:

$$\bar{X}_w = \frac{w_1 \cdot D_1 + w_2 \cdot D_2 + D_3 \cdot w_3}{w_1 + w_2 + w_3}$$

$$\bar{D} = \frac{2,25 \cdot 20,992 + 1 \cdot 20,998 + 4 \cdot 20,989}{2,25 + 1 + 4} = 20,991 \text{ mm}$$

3. Obliczenie niepewności średniej

Niepewność średnią obliczamy z zależności

$$u(\bar{D}) = \frac{u(X_i)_{\max}}{\sqrt{w_1 + w_2 + w_3}}$$

$$u(\bar{D}) = \frac{0,006}{\sqrt{2,25 + 1 + 4}} = 0,002 \text{ mm}$$

Stąd wynik końcowy na poziomie ufności $P = 0,95$ i współczynnika rozszerzenia $k = 2$ można zapisać w postaci:

$$D = 20,991 \pm 0,004 \text{ mm}$$

3. STWIERDZENIE ZGODNOŚCI WYROBU ZE SPECYFIKACJĄ

3.1. Graficzna interpretacja wyników pomiaru

Pomiary nie są i nie mogą być oderwanym, samodzielnym celem działania. Są one środkiem poznawczym, pomocnym do osiągnięcia celu, którym jest np. uzyskanie wyrobu o założonych kształtach i wymiarach. Zapewniają pośrednio uzyskanie, a bezpośrednio – obiektywne stwierdzenie właściwej jakości wymiarowej, żądanej dokładności urządzeń i wyrobów.

Kompletny wynik każdego pomiaru y' podawany jest jako wynik pomiaru y wraz z niepewnością pomiaru, wyrażoną jako niepewność rozszerzona U :

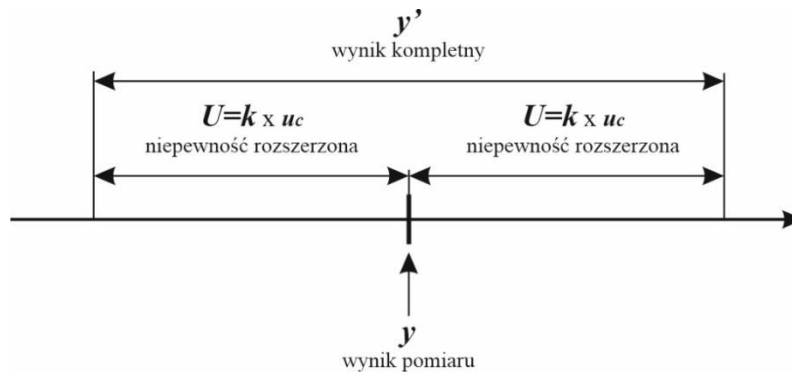
$$y' = y \pm U \quad (3.1)$$

w którym niepewność rozszerzona pomiaru:

$$U = k \cdot u_c \quad (3.2)$$

gdzie: k – współczynniki rozszerzenia o domyślnej wartości równej 2;
 u_c – standardowa niepewność pomiaru.

Graficzną interpretację wyniku pomiaru przedstawiono na rys. 3.1.



Rys. 3.1. Graficzna interpretacja wyniku pomiaru

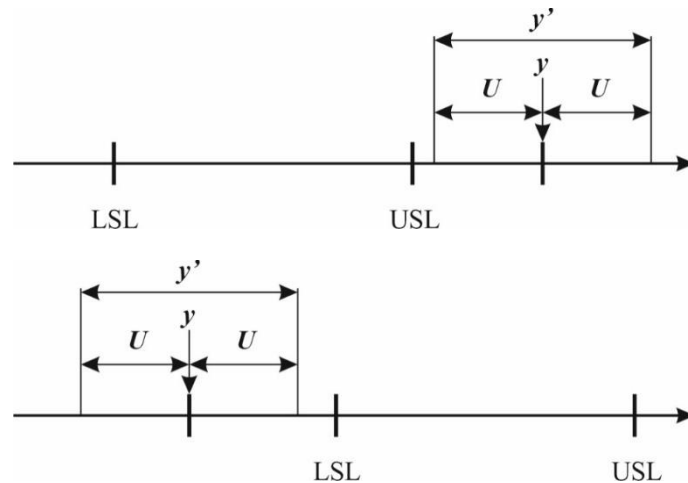
Zatem przeprowadzony pomiar pozwala na stwierdzenie, że wartość wielkości mierzonej znajduje się, z określonym prawdopodobieństwem, w pewnym przedziale, a nie stanowi pojedynczej wartości.

Stwierdzenie zgodności wyrobu ze specyfikacją jest potwierdzeniem spełnienia przez wyrób wymagań zawartych w dokumentacji konstrukcyjnej. Jest to potwierdzenie, że zmierzony wymiar mieści się w granicach tolerancji określonych przez producenta.

Uwzględniając jednak niepewność otrzymanego wyniku pomiaru, mamy do czynienia z dwoma przedziałami, które nie zawsze pokrywają się w swoich granicach.

Jeżeli specyfikacja wyrobu (tolerancja wykonania) określona jest wymiarami granicznymi LSL (*Lower Specification Limit* – dolna granica specyfikacji) oraz USL (*Upper Specification Limit* – górna granica specyfikacji), a wynik kompletny pomiaru oznaczony przez y' zawierający niepewność rozszerzoną U znajduje się poza zakresem pola tolerancji charakterystyki wyrobu (rys. 3.2), to można w sposób jednoznaczny przyjąć, że wyrób jest niezgodny ze specyfikacją:

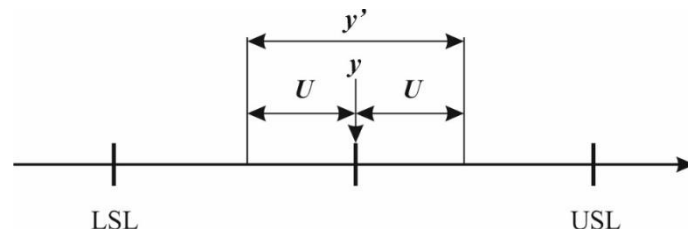
$$y + U \leq LSL \text{ lub } USL \leq y - U \quad (3.3)$$



Rys. 3.2. Wyrób niezgodny ze specyfikacją

Podobnie jednoznaczna jest interpretacja zgodności wyrobu ze specyfikacją w przypadku, kiedy wynik pomiaru wraz z wyznaczonymi granicami niepewności znajduje się w ustalonych w specyfikacji wymiarach granicznych LSL lub USL (rys. 3.3). Można wtedy przyjąć, że wyrób spełnia wymagania dotyczące zgodności.

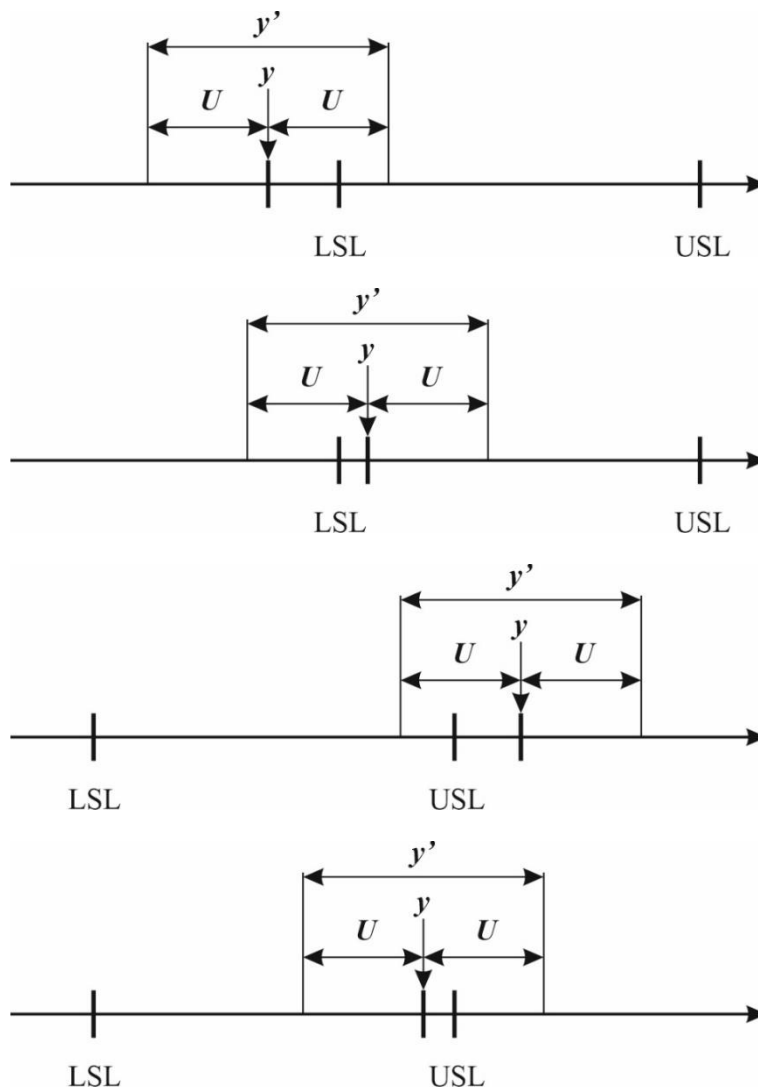
$$LSL \leq y - U \text{ oraz } y + U \leq USL \quad (3.4)$$



Rys. 3.3. Wyrób zgodny ze specyfikacją

Sytuacja staje się mniej oczywista, kiedy wynik pomiaru znajduje się wprawdzie w granicach specyfikacji, lecz wyznaczony przedział niepewności przekracza te granice. Również w sytuacji, kiedy wynik pomiaru znajduje się poza granicami specyfikacji, lecz granice wyznaczonej w pomiarze niepewności znajdują się w polu specyfikacji (rys. 3.4).

$$y - U < LSL < y + U \text{ lub } y - U < USL < y + U \quad (3.5)$$



Rys. 3.4. Brak możliwości podjęcia jednoznacznej decyzji

W takim przypadku zachodzi ryzyko podjęcia błędnej decyzji, w wyniku której:

- odrzucony zostanie wyrób zgodny ze specyfikacją,
- zaakceptowany zostanie wyrób niezgodny ze specyfikacją.

Ryzyko takiej decyzji można określić, analizując probabilistyczny model wyniku pomiaru (rys. 3.5). Zakładając, że wynik pomiaru określony funkcją $f(y)$, jak i kontrolowana cecha określona funkcją $f(w)$ mają rozkład normalny, a granice specyfikacji zostały określone wymiarami LSL oraz USL, to prawdopodobieństwo $(\alpha + \beta)$ błędnego zakwalifikowania wymiaru można wyznaczyć z podanych niżej zależności.

Prawdopodobieństwo, że wymiar ocenianego wyrobu będzie należał do przedziału $(A-U, A+U)$:

$$P(LSL - U \leq W \leq LSL + U) = \int_{LSL-U}^{LSL+U} f(w)dw \quad (3.6)$$

i będzie ono takie samo jak prawdopodobieństwo, że wymiar ten będzie należał do przedziału $(B-U, B+U)$:

$$P(USL - U \leq W \leq USL + U) = \int_{USL-U}^{USL+U} f(w)dw \quad (3.7)$$

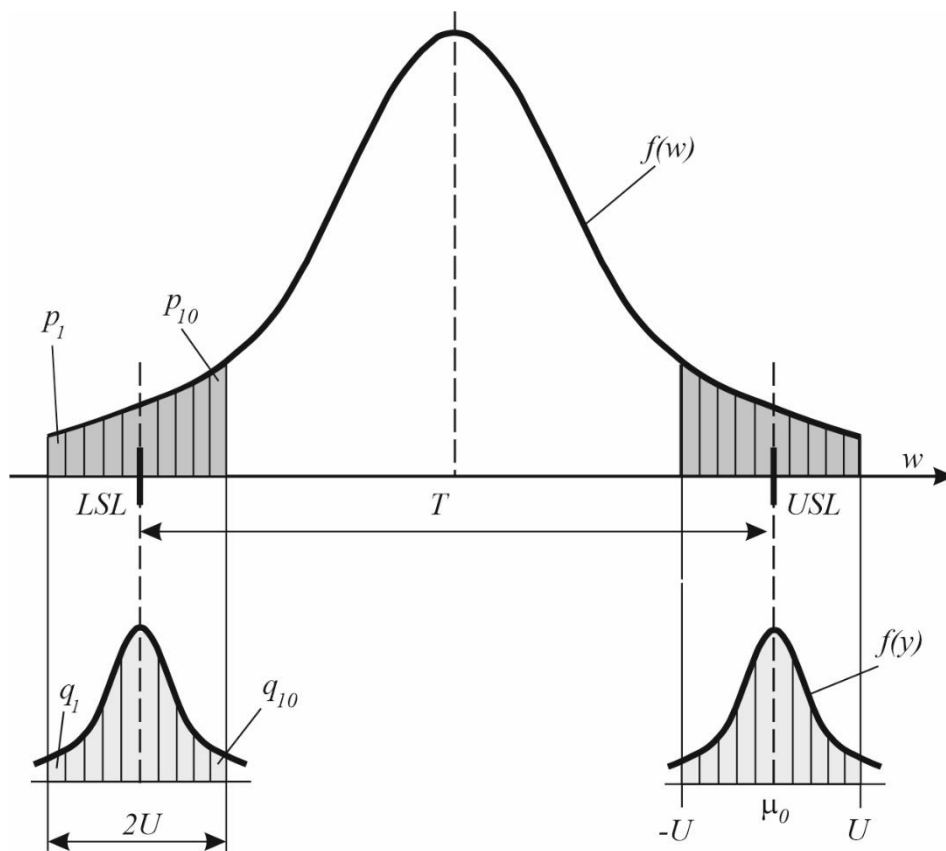
Z przedstawionej na rys. 3.5 istoty wyznaczania prawdopodobieństwa błędnej oceny wyrobu wynika, że wymiar z zaznaczonego przedziału 10 zostanie niesłusznie uznany za niezgodny, gdy podczas jego pomiaru wystąpi błąd z przedziału nr 1 lub mniejszy. Prawdopodobieństwo takiego zdarzenia równe jest iloczynowi (p_{10}, q_1) .

Ryzyko dostawcy (a) oznaczające prawdopodobieństwo uznania wymiaru większego od LSL za zbyt mały lub mniejszego od USL za zbyt duży określić można z zależności:

$$\alpha = \int_{LSL}^{LSL+U} f(w) \left[\int_{-U}^{LSL-w} f(y)dy \right] dw + \int_{USL-U}^{USL} f(w) \left[\int_{-U}^{USL-w} f(y)dy \right] dw \quad (3.8)$$

Natomiast ryzyko odbiorcy (b), oznaczające prawdopodobieństwo uznania wymiaru mniejszego od LSL lub większego od USL, za należący do przedziału specyfikacji, określić można z zależności:

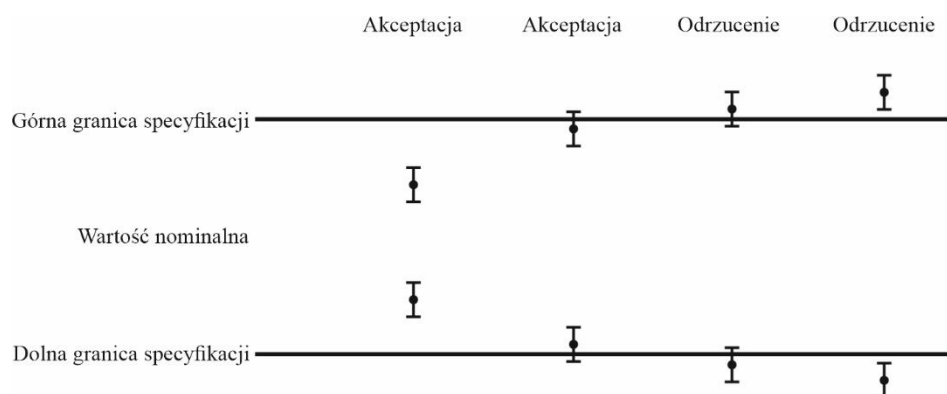
$$\beta = \int_{LSL-U}^{LSL} f(w) \left[\int_{-U}^{LSL-w} f(y)dy \right] dw + \int_{USL}^{USL+U} f(w) \left[\int_{-U}^{USL-w} f(y)dy \right] dw \quad (3.9)$$



Rys. 3.5. Schemat wyznaczania prawdopodobieństwa błędnych decyzji

3.2. Zasady podejmowania decyzji

Zastosowanie binarnej zasady podejmowania decyzji, opartej na *prostej akceptacji*, polega na uznaniu za zgodny ze specyfikacją każdy wyrób, którego wynik pomiaru znajduje się w polu specyfikacji (tolerancji) (rys. 3.6). Metoda ta jest również nazywana *ryzykiem wspólnym*, ponieważ prawdopodobieństwo, że wynik pomiaru (uwzględniając niepewność rozszerzoną) przekroczy granicę tolerancji, może wynieść w skrajnym przypadku 50%, kiedy wynik znajduje się dokładnie na granicy tolerancji (specyfikacji). Dokładne wartości prawdopodobieństw, dla zaistniałych rzeczywistych przypadków, wyliczyć można z przedstawionym w poprzednim podrozdziale zależności.



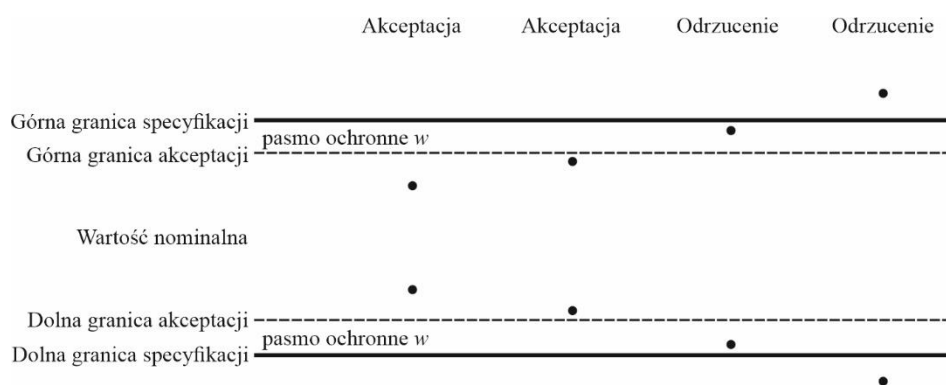
Rys. 3.6. Graficzne przedstawienie binarnego stwierdzenia zgodności – prosta akceptacja

Innym rozwiązaniem, pozwalającym na zmniejszenie ryzyka podjęcia błędnej decyzji dotyczącej określenia zgodności wyrobu ze specyfikacją, jest przyjęcie binarnej zasady podejmowania decyzji z zastosowaniem pasm ochronnych. Polega ono na ustanowieniu granicy akceptacji poniżej granicy tolerancji (specyfikacji). Wyznaczając pasmo ochronne o szerokości tolerancji, ograniczony zostaje zakres akceptacji zgodności (rys. 3.7). Górną granicę akceptacji wyznaczamy z zależności:

$$UAL = USL - U \quad (3.10)$$

Natomiast dolną granicę akceptacji z zależności:

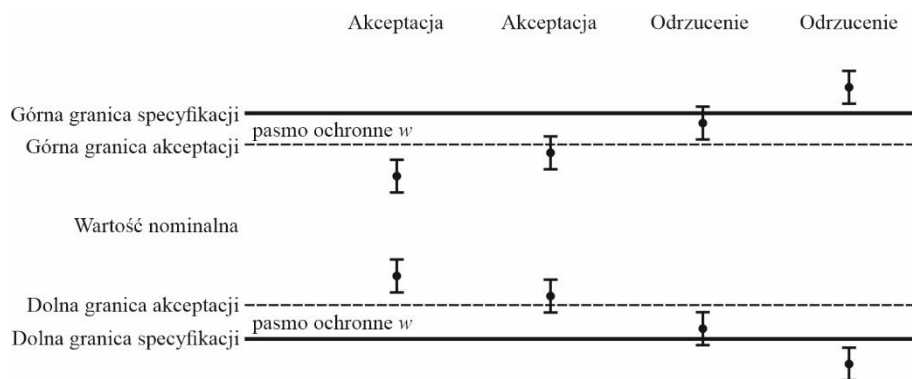
$$LAL = LSL + U \quad (3.11)$$



Rys. 3.7. Graficzne przedstawienie pasma ochronnego

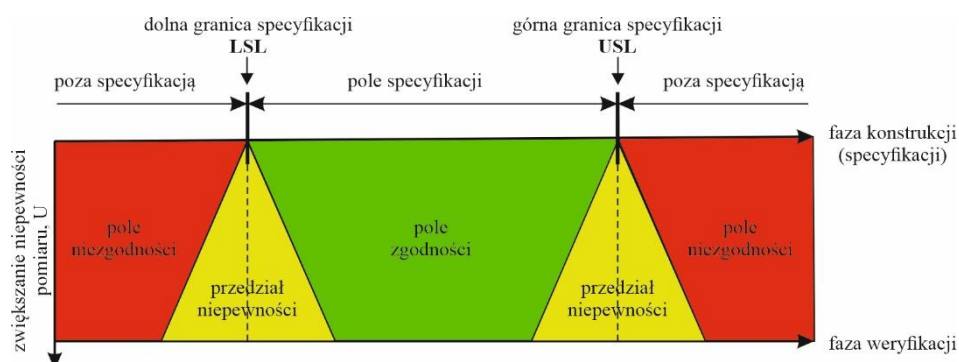
Rozwiązanie takie pozwala na stwierdzenie zgodności wyrobu ze specyfikacją w przypadku, kiedy wynik pomiaru znajduje się w paśmie akceptacji (rys. 3.8). Zapewnia ono podjęcie poprawnej decyzji na poziomie

odpowiadającym prawdopodobieństwu wyznaczenia niepewności rozszerzonej (przy $k = 2$ wynosi ono 95%), jednak może spowodować niesłuszne odrzucenie wyrobu zgodnego ze specyfikacją, w przypadku kiedy wynik pomiaru znajduje się w pasmie ochronnym.



Rys. 3.8. Interpretacja wyników pomiaru z zastosowaniem pasma ochronnego

Wadą tego rozwiązania może być znaczne ograniczenie pola zgodności wraz ze wzrostem wartości niepewności rozszerzonej (rys. 3.9), której obniżenie związane jest ze znacznym zwiększeniem kosztów kontroli.



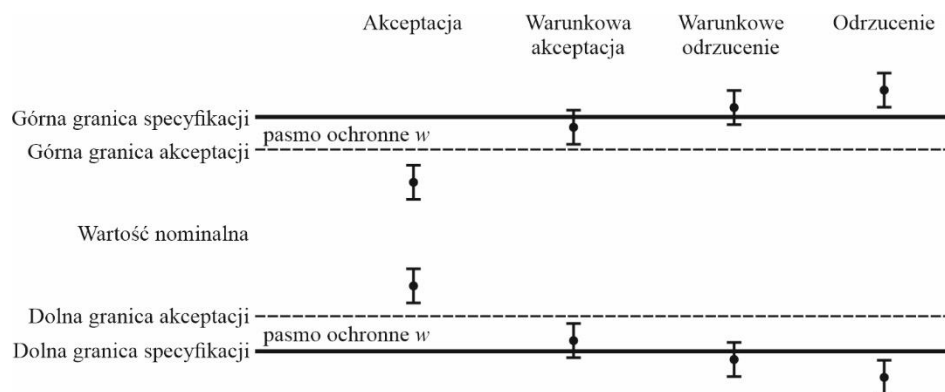
Rys. 3.9. Zależność wielkości pola zgodności od niepewności pomiaru

Kolejną metodą jest niebinarne stwierdzenie zgodności wyrobu ze specyfikacją z zastosowaniem pasm ochronnych (rys. 3.10).

Stwierdzenie zgodności jest przedstawiane jako:

- Spełnia – wynik pomiaru znajduje się poniżej granicy akceptacji.
- Warunkowo spełnia – wynik pomiaru znajduje się w pasmie ochronnym, poniżej granicy tolerancji (specyfikacji).
- Warunkowo nie spełnia – wynik pomiaru znajduje się powyżej granicy tolerancji (specyfikacji), ale poniżej granicy tolerancji (specyfikacji) powiększonej o pasmo ochronne.

- Nie spełnia – wynik pomiaru znajduje się powyżej granicy tolerancji powiększonej o pasmo ochronne.



Rys. 3.10. Graficzne przedstawienie niebinarnego stwierdzenia zgodności z zastosowaniem pasma ochronnego

Norma ISO/IEC 17025:2017 wymaga, aby laboratoria oceniały niepewność pomiaru oraz stosowały udokumentowaną zasadę podejmowania decyzji przy przedstawianiu stwierdzeń zgodności. Przyjęte podejścia mogą się znacznie różnić w zależności od sytuacji, mogą też być stosowane różne pasma ochronne. Powszechnie przyjmuje się pasmo ochronne równe niepewności rozszerzonej U , lecz w niektórych przypadkach, w celu osiągnięcia określonych poziomów ryzyka specyficznego, w oparciu o wnioski klienta, bardziej odpowiedni może być mnożnik inny niż 1. W tabeli 3.1 podano przykłady różnych pasm ochronnych wraz z odpowiadającym im ryzykiem, przy założeniu jednostronnej granicy specyfikacji i rozkładu normalnego wyników pomiaru.

Tabela 3.1. PFA – prawdopodobieństwo błędnej akceptacji i PFR – prawdopodobieństwo błędnego odrzucenia

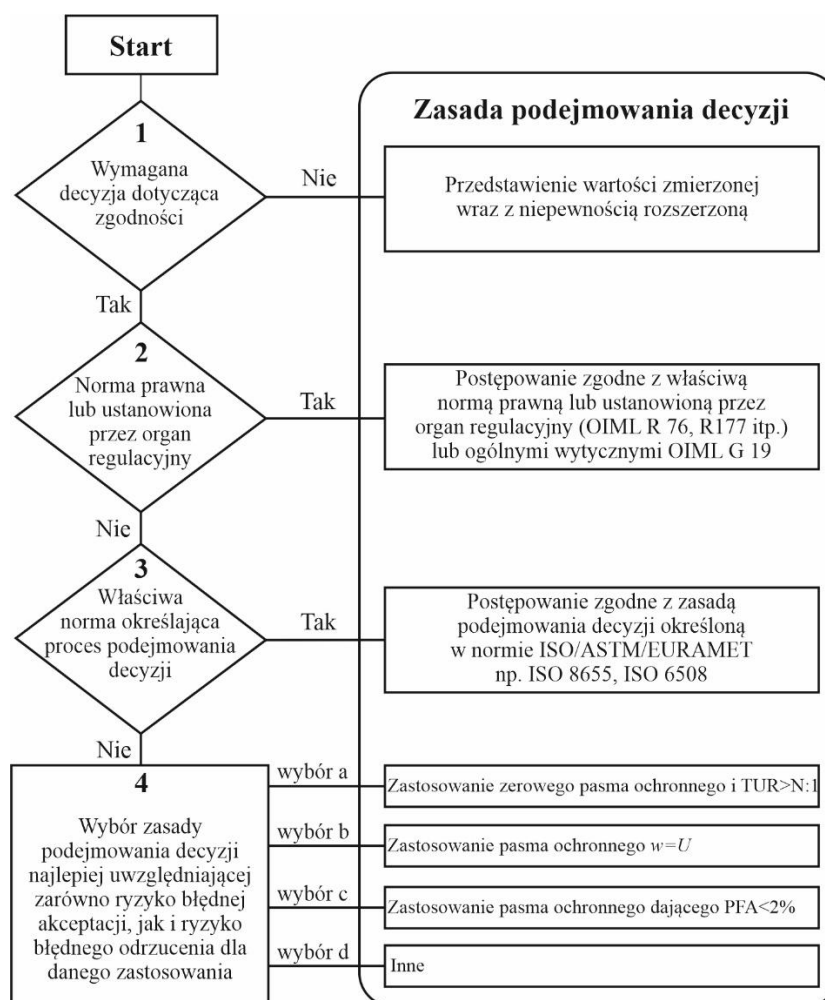
Zasada podejmowania decyzji	Pasmo ochronne	Ryzyko specyficzne
6 sigma	$3 U$	$< 1 \text{ ppm (PFA)}$
3 sigma	$1,5 U$	$< 0,16\% \text{ (PFA)}$
ILAC G8:2009	$1 U$	$< 2,5\% \text{ (PFA)}$
ISO 14253-1:2017	$0,83 U$	$< 5\% \text{ (PFA)}$
Prosta akceptacja	0	$< 50\% \text{ (PFA)}$
Niekrytyczna	$- U$	Odrzucenie obiektu w przypadku wartości zmierzonej większej niż $AL = T + U < 2,5\% \text{ (PFR)}$
Określona przez klienta	$r U$	r – definiowane przez klienta

3.3. Algorytm postępowania przy wyborze zasady podejmowania decyzji

Wybór zasady podejmowania decyzji przeprowadzony musi zostać w oparciu o ustalenia pomiędzy klientem i laboratorium, uwzględniające poziom ryzyka dotyczącego prawdopodobieństwa błędnej akceptacji lub błędnego odrzucenia. Żadna pojedyncza zasada podejmowania decyzji nie jest dedykowana do całego, różnorodnego zakresu badań i wzorcowań w rozumieniu wymagań normy ISO/IEC 17025.

Dla niektórych dziedzin, branż, lub obszarów regulowanych określono odpowiednie dla nich zasady podejmowania decyzji, które zostały opublikowane w specyfikacjach, normach lub przepisach.

Ogólne wytyczne dotyczące wyboru zasady podejmowania decyzji przedstawiono na rys. 3.11.



Rys. 3.11. Schemat blokowy wyboru zasady podejmowania decyzji dotyczącej zgodności

W doborze zasady podejmowania decyzji należy stosować się do poniższych zasad:

1. W przypadku stosowania niektórych wzorcowań i badań, w których nie jest wymagane stwierdzenie zgodności ze specyfikacją metrologiczną, zalecane jest przedstawienie wyniku pomiaru i niepewności pomiaru zgodnie z *JCGM 100:2008 (GUM) Ewaluacja danych pomiarowych. Przewodnik wyrażania niepewności*.
2. Jeżeli dla wyniku pomiaru ustanowiono wymagania w przepisach prawa lub wymagania określiły organy regulacyjne, należy stosować zasadę podejmowania decyzji określoną w odpowiednim normatywie. Wytyczne dotyczące decyzji w obszarze metrologii prawnej zawarte są w *Guide OIML G 19, The role of measurement uncertainty in conformity assessment decisions in legal metrology*, 2017.
3. Należy rozważyć, czy dla danego zastosowania istnieje zasada podejmowania decyzji dotycząca pomiarów, określona w opublikowanej normie np. ISO 14253, ISO 8655. ISO 6508.
4. Osiągnięcie w algorytmie postępowania czwartego kroku decyzyjnego oznacza zazwyczaj, że dla danego zastosowania nie ma żadnej opublikowanej zasady podejmowania decyzji i powinna ona zostać przyjęta w oparciu o ustalenia pomiędzy laboratorium a klientem.

Koncepcja zasad podejmowania decyzji mających zastosowanie przy stwierdzaniu zgodności wyrobu ze specyfikacją lub wymaganiami nie jest koncepcją nową. Norma ISO/IEC 17025:2017 przedstawia dodatkowe wyjaśnienia dotyczące zasad i podkreśla ich znaczenie, wymagając od laboratoriów:

1. Zrozumienia i uwzględnienia potrzeb klientów związanych z oczekiwanymi przez nich stwierdzeniami zgodności (ustalenie poziomu ryzyka) oraz ich potwierdzenia na etapie przeglądu zapytań ofertowych i umów dotyczących badania/wzorcowania.
2. Włączenia zasady podejmowania decyzji do raportów przedstawiających stwierdzenia zgodności.

4. ROZKŁADY ZMIENNYCH LOSOWYCH

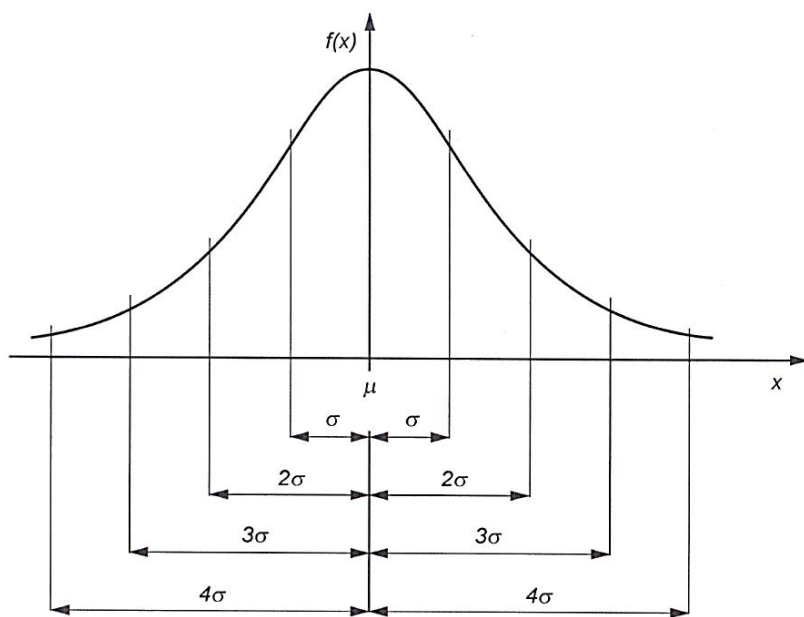
4.1. Rozkład normalny

W metrologii szczególną rolę odgrywa zbiór o rozkładzie normalnym. Wynika to zarówno z liczby zjawisk tworzących zbiory o rozkładzie normalnym, jak i z właściwości opisującej rozkład wartości zbioru. W szczególności o rozkładzie normalnym mówi centralne twierdzenie graniczne: *Jeżeli zmienna losowa x jest skutkiem działania wielu zmiennych losowych i nie ma wśród nich zmiennej dominującej, to rozkład zmiennej x jest zbieżny do rozkładu normalnego.*

Rozkład normalny opisuje funkcja:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right] \quad (4.1)$$

gdzie: σ – odchylenie standardowe badanej cechy x , $\varphi(x)$ – funkcja gęstości zmiennej losowej, μ – wartość średnia badanej cechy populacji.



Rys. 4.1. Funkcja rozkładu normalnego

Przedstawiona na rys. 4.1 funkcja ma następujące własności:

1. Jest symetryczna względem wartości μ .
2. W punkcie $x = \mu$ funkcja ma maksimum.
3. Funkcja przybiera tylko wartości dodatnie.
4. Wraz z oddalaniem się od punktu $x = \mu$ funkcja maleje monotonicznie.
5. Funkcja charakteryzuje zbiór nieskończony i nieograniczony.

6. Prawdopodobieństwo wystąpienia zmiennej losowej w charakterystycznych przedziałach w otoczeniu wartości oczekiwanej wynosi:

- $P(\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma) = 0,6826$ (68,26%);
- $P(\mu - 2\sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma) = 0,9544$ (95,44%);
- $P(\mu - 3\sigma \leq x \leq \mu + 3\sigma) = 0,9973$ (99,73%);
- $P(\mu - 4\sigma \leq x \leq \mu + 4\sigma) = 0,99994$ (99,994%).

W celach praktycznych funkcję rozkładu normalnego standaryzuje się, wprowadzając bezwymiarową zmienną t , nazywaną zmienną standaryzowaną:

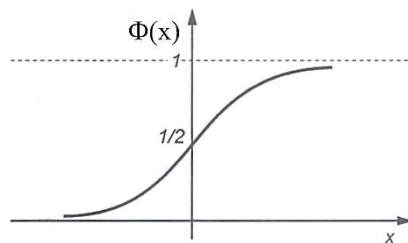
$$t = \frac{x - \mu}{\sigma} \quad (4.2)$$

Jednostką nowej zmiennej jest krotność odchylenia standardowego, a funkcja Gaussa przyjmuje postać:

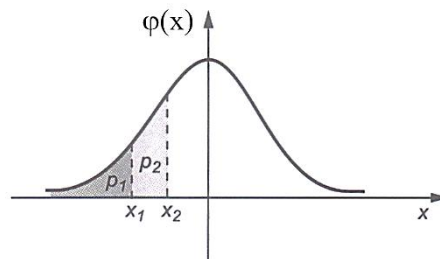
$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \quad (4.3)$$

Wartości funkcji Gaussa podano w tabeli 4.1.

Rozkład skumulowany (rys. 4.2) oznacza powierzchnię pod krzywą rozkładu od wartości $x = -\infty$ do x (rys. 4.3) i jest to wartość prawdopodobieństwa wystąpienia zmiennej losowej x w tym przedziale. Standaryzowane wartości skumulowanego rozkładu normalnego podaje się w tabelach w postaci funkcji Laplace'a (tabela 4.2).



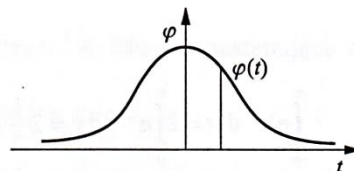
Rys. 4.2. Rozkład skumulowany (dystrybuanta) zmiennej losowej x



Rys. 4.3. Funkcja gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej x

Tabela 4.1. Wartości funkcji Gaussa

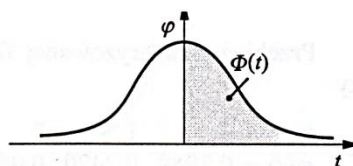
$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-t^2/2)$$



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,39894	0,39892	0,39886	0,39876	0,39862	0,39844	0,39822	0,39797	0,39767	0,39733
1	39695	39654	39608	39559	39505	39448	39387	39322	39253	39181
2	39104	39024	38940	38853	38762	38667	38568	38466	38361	38251
3	38139	38023	37903	37780	37654	37524	37391	37255	37115	36973
4	36827	36678	36526	36371	36213	36053	35889	35723	35553	35381
5	35207	35029	34849	34667	34482	34294	34105	33912	33718	33521
6	33322	33121	32918	32713	32506	32297	32086	31874	31659	31443
7	31225	31006	30785	30563	30339	30114	29887	29659	29431	29200
8	28969	28737	28504	28269	28034	27798	27562	27324	27086	26848
9	26609	26369	26129	25888	25647	25406	25164	24923	24681	24439
1,0	24197	23955	23713	23471	23230	22988	22747	22506	22265	22025
1	21785	21546	21307	21069	20831	20594	20357	20121	19886	19652
2	19419	19186	18954	18724	18494	18265	18037	17810	17585	17360
3	17137	16915	16694	16474	16256	16038	15822	15608	15395	15183
4	14973	14764	14556	14350	14146	13943	13742	13542	13344	13147
5	12952	12758	12566	12376	12188	12001	11816	11632	11450	11270
6	11092	10915	10741	10567	10396	10226	10059	09893	09728	09566
7	09405	09246	09089	08933	08780	08628	08478	08329	08183	08038
8	07895	07754	07614	07477	07341	07206	07074	06943	06814	06687
9	06562	06438	06316	06195	06077	05959	05844	05730	05618	05508
2,0	05399	05292	05186	05082	04980	04879	04780	04682	04586	04491
1	04398	04307	04217	04128	04041	03955	03871	03788	03706	03626
2	03547	03470	03394	03319	03246	03174	03103	03034	02965	02898
3	02833	02768	02705	02643	02582	02522	02463	02406	02349	02294
4	02239	02186	02134	02083	02033	01984	01936	01888	01842	01797
5	01753	01709	01667	01625	01585	01545	01506	01468	01431	01394
6	01358	01323	01289	01256	01223	01191	01160	01130	01100	01071
7	01042	01014	00987	00961	00935	00909	00885	00861	00837	00814
8	00792	00770	00748	00727	00707	00687	00668	00649	00631	00613
9	00595	00578	00562	00545	00530	00514	00499	00485	00471	00457
3,0	00443	00430	00417	00405	00393	00381	00370	00358	00348	00337
1	00327	00317	00307	00298	00288	00279	00271	00262	00254	00246
2	00238	00231	00224	00217	00210	00203	00196	00190	00184	00178
3	00172	00167	00161	00156	00151	00146	00141	00136	00132	00128
4	00123	00119	00115	00111	00108	00104	00100	00097	00094	00090
5	00087	00084	00081	00079	00076	00073	00071	00068	0,00066	0,00063
6	00061	00059	00057	00055	00053	00051	00049	00047	00046	00044
7	00042	00041	00039	00038	00037	00035	00034	00033	00031	00030
8	00029	00028	00027	00026	00025	00024	00023	00022	00021	00021
9	00020	00019	00018	00018	00017	00016	00016	00015	00014	00014

Tabela 4.2. Wartości funkcji Laplace'a

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \exp(-t^2/2) dt$$



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,00000	0,00399	0,00798	0,01197	0,01595	0,01994	0,02392	0,02790	0,03188	0,03586
1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	0,19146	0,19497	0,19847	0,20194	0,20540	0,20884	0,21226	0,21566	0,21904	0,22240
6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774
4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
6	49534	49547	49560	49573	49586	49598	49609	49621	49632	49643
7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49737
8	49745	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
3,0	49865	49869	49874	49878	49882	49886	49889	49893	49897	49900
1	49903	49906	49910	49913	49916	49918	49921	49924	49926	49929
2	49931	49934	49936	49938	49940	49942	49944	49946	49948	49950
3	49952	49953	49955	49957	49958	49960	49961	49962	49964	49965
4	49966	49968	49969	49970	49971	49972	49973	49974	49975	49976
5	49977	49978	49978	49979	49980	49981	49981	49982	49983	49983
6	49984	49985	49985	49986	49986	49987	49987	49988	49988	49989
7	49989	49990	49990	49990	49991	49991	49992	49992	49992	49992
8	49993	49993	49993	49994	49994	49994	49994	49995	49995	49995
9	49995	49995	49996	49996	49996	49996	49996	49996	49997	49997
4,5	0,499997									
5,0	0,49999997									

Przytoczone w powyższych tabelach wartości stosuje się w rozwiązywaniu wielu zagadnień technicznych, m.in. w celu określenia minimalnej wielkości tolerancji technologicznych czy przewidywanej liczby braków.

Przykład 4.1

Odchylenie standardowe długości od nastawionego wymiaru elementów ciętych na zautomatyzowanym stanowisku wynosi 0,15 mm. Dopuszczalne odchyłki długości elementów wynoszą odpowiednio:

- górna + 0,1 mm
- dolna – 0,2 mm.

Obliczyć spodziewany procent braków procesu cięcia.

Rozwiązanie

Przeprowadzamy standaryzację danych wejściowych z wielkości wyrażonych w mm na bezwymiarowe, będące krotnością odchylenia standardowego:

$$t_1 = \frac{|x_1 - \mu|}{\sigma} = \frac{|+0,10|}{0,15} = 0,66$$

oraz

$$t_2 = \frac{|x_2 - \mu|}{\sigma} = \frac{|-0,20|}{0,15} = 1,33$$

W tabeli 4.2 odczytujemy wartości funkcji Laplace'a dla wartości zmiennych standaryzowanych t_1 oraz t_2 :

$$\Phi_{t_1} = \Phi_{0,66} = 0,24537 \quad \text{oraz} \quad \Phi_{t_2} = \Phi_{1,33} = 0,40824$$

Obliczamy sumę prawdopodobieństwa:

$$\Phi_t = \Phi_{t_1} + \Phi_{t_2} = 0,24537 + 0,40824 = 0,65361$$

Oznacza to, że prawdopodobieństwo otrzymania wymiaru w założonym przedziale tolerancji wynosi 65,36%. Natomiast prawdopodobieństwo wystąpienia wymiaru poza tym przedziałem wynosi:

$$\beta = 1 - \Phi_t = 1 - 0,65361 = 0,34639$$

czyli 34,64%.

4.2. Rozkład t -Studenta

Rozkład t -Studenta jest to rozkład zmiennej losowej o funkcji gęstości prawdopodobieństwa wyrażonej wzorem:

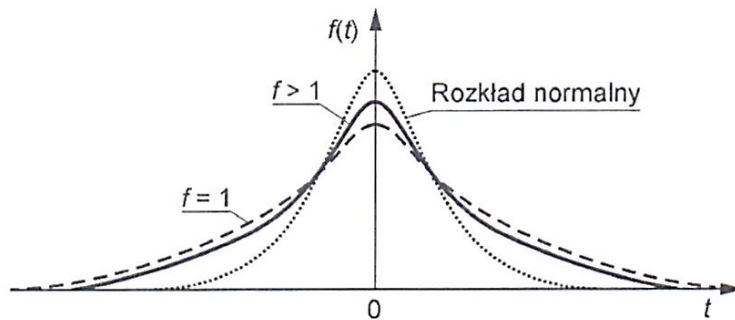
$$f(t) = \frac{\Gamma\left[\frac{1}{2}(f+1)\right]}{\Gamma\left(\frac{1}{2}f\right)\sqrt{f\pi}} \left(1 + \frac{t^2}{f}\right)^{-\frac{1}{2}(f+1)} \quad (4.4)$$

który t wyraża rozkład zmiennej losowej:

$$t = \frac{\sqrt{n}}{S(x)} (\bar{x} - \mu) \quad (4.5)$$

gdzie: $f = n - 1$ – liczba stopni swobody; $S(x)$ – odchylenie standardowe czynnika x ;
 Γ – funkcja gamma Eulera; $\bar{x}$ – średnia wyników z próby; n – licznosc próby.

Rozkład t -Studenta przedstawiono na rys. 4.4.



Rys. 4.4. Rozkład t -Studenta

W miarę wzrostu licznosci próby funkcja rozkładu t -Studenta jest coraz bardziej zbliżona do funkcji rozkładu normalnego i w praktyce rozkład ten stosuje się przy $n < 30$. Przy większych licznosciach prób można stosować zamiennie rozkład normalny. Wykorzystuje się go m.in. w testowaniu hipotez statystycznych dotyczących miar położenia (wartości średniej), sprawdzania istotności współczynników równań empirycznych, wyznaczania przedziałów ufności czy określania licznosci próby.

Wartości krytyczne t_k dla rozkładu t -Studenta podano w tabeli 4.3.

Przykład 4.2

Na podstawie pomiarów długości elementów ciętych na zautomatyzowanym stanowisku dla próby o licznosci 10 sztuk obliczono wartość średnią $\bar{x} = 25$ mm oraz odchylenie standardowe $S_x = 2,8$ mm. Jaka powinna być licznosc próby, aby umożliwić oszacowanie długości ciętych elementów z dokładnością ± 1 mm?

Rozwiązanie

Korzystając z tabeli 4.3 oraz ze wzoru:

$$n = \frac{t_{k,f}^2 \cdot S_x^2}{\varepsilon^2} \quad (4.6)$$

gdzie: S_x^2 – wariancja badanej cechy określona na podstawie próbki pilotażowej (próby wstępnej); ε – założona dokładność oceny, równa połowie zadanego przedziału dokładności; f – liczba stopni swobody.

otrzymujemy:

$$n = \frac{t_{k,f}^2 \cdot S_x^2}{\varepsilon^2} = \frac{2,262^2 \cdot 2,8^2}{1^2} = 40$$

Dla estymacji z dokładnością ± 1 mm, na poziomie prawdopodobieństwa 95%, należy wykonać pomiary na próbie wynoszącej 40 sztuk.

Tabela 4.3. Wartości krytyczne współczynnika t_k dla rozkładu t -Studenta

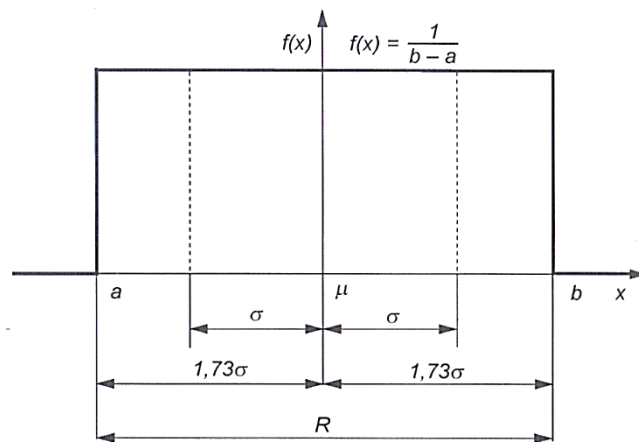
f	α									
	0,60	0,40	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	0,727	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	318,31	636,62
2	0,617	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,326	31,598
3	0,584	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,213	12,924
4	0,569	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610
5	0,559	0,919	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893	6,869
6	0,553	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	0,549	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,408
8	0,546	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
9	0,543	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
10	0,542	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	0,540	0,875	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12	0,539	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
13	0,538	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221
14	0,537	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140
15	0,536	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16	0,535	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
17	0,534	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
18	0,534	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610	3,922
19	0,533	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20	0,533	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850
21	0,532	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819
22	0,532	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792
23	0,532	0,857	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,767
24	0,531	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745
25	0,531	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725
26	0,531	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27	0,531	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690
28	0,530	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674
29	0,530	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659
30	0,530	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
40	0,529	0,851	1,050	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551
60	0,527	0,848	1,046	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460
120	0,526	0,845	1,041	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,160	3,373
∞	0,524	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291

4.3. Rozkład jednostajny

Jeżeli znane są granice przedziału, w którym zawiera się wartość wielkości, ale nie ma podstaw do założenia, że istnieje większe prawdopodobieństwo wystąpienia wartości w części środkowej niż na granicach przedziału, to zamiast rozkładu normalnego stosuje się rozkład równomierny, nazywany również prostokątnym (rys. 4.5).

Gęstość prawdopodobieństwa opisuje zależność:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a, b] \\ \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \end{cases} \quad (4.7)$$



Rys. 4.5. Rozkład równomierny

Przedstawiona na rys. 4.5 funkcja ma następujące własności:

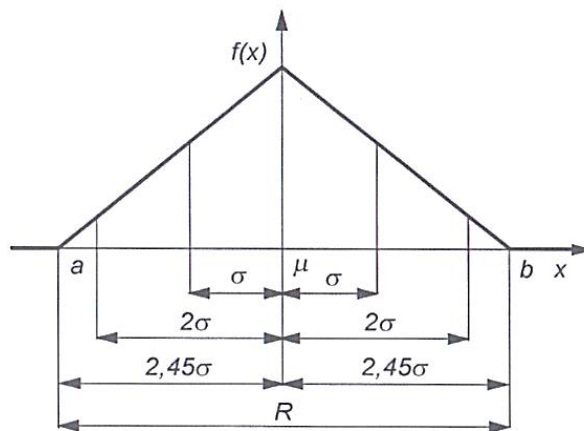
1. Jest symetryczna względem wartości μ .
2. Funkcja ma wartość stałą.
3. Funkcja nie posiada maksimum.
4. Funkcja przybiera tylko wartości dodatnie.
5. Prawdopodobieństwo wystąpienia zmiennej losowej w charakterystycznych przedziałach w otoczeniu wartości oczekiwanej wynosi:
 - $P(\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma) \approx 0,58$;
 - $P(a \leq x \leq b) = 1$.

Zależność pomiędzy rozstępem $R = b - a$ i wariancją dla tego rozkładu ma postać:

$$\sigma^2 = \frac{R^2}{12}$$

4.4. Rozkład trójkątny

Jeżeli prawdopodobieństwo wystąpienia wartości jest mniejsze w pobliżu granic niż w części środkowej przedziału, to można przyjąć do rozważań rozkład pośredni, pomiędzy rozkładami normalnym i równomiernym. Rozkład ten jest rozkładem trójkątnym (rys. 4.6), nazywanym również rozkładem Simpsona.



Rys. 4.6. Rozkład trójkątny

Przedstawiona na rys. 4.6 funkcja ma następujące własności:

1. Jest symetryczna względem wartości μ .
2. W punkcie $x = \mu$ funkcja ma maksimum.
3. Funkcja przybiera tylko wartości dodatnie.
4. Prawdopodobieństwo wystąpienia zmiennej losowej w charakterystycznych przedziałach w otoczeniu wartości oczekiwanej wynosi:
 - $P(\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma) \approx 0,65$;
 - $P(\mu - 2\sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,97$;
 - $P(a \leq x \leq b) = 1$.

Zależność pomiędzy rozstępem $R = b - a$ i wariancją dla tego rozkładu ma postać:

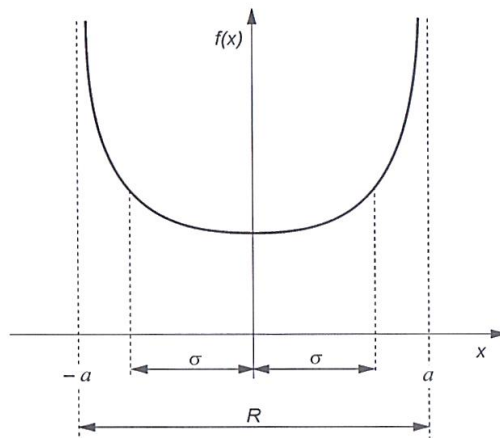
$$\sigma^2 = \frac{R^2}{24}$$

4.5. Rozkład antymodalny

W niektórych przypadkach w metrologii może znaleźć zastosowanie rozkład arcsin, w którym gęstość prawdopodobieństwa opisana jest wzorem:

$$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (4.8)$$

Jest to tzw. rozkład antymodalny, który przedstawiono na rys. 4.7.



Rys. 4.7. Rozkład antymodalny

Przedstawiona na rys. 4.7 funkcja ma następujące własności:

1. Jest symetryczna względem wartości μ .
2. W punkcie $x = \mu$ funkcja ma minimum.
3. Funkcja przyjmuje tylko wartości dodatnie.

Zależność pomiędzy rozstępem $R = b - a$ i wariancją dla tego rozkładu ma postać:

$$\sigma^2 = \frac{R^2}{8}$$

Bibliografia

1. Adamczak S., Makiela W.: Metrologia w budowie maszyn. Zadania z rozwiązaniami. WNT, Warszawa 2007.
2. Arendalski J.: Niepewność pomiarów. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2013.
3. Arendalski J.: Niepewność pomiarów a wiarygodność orzekania o zgodności mierzonych wielkości ze specyfikacjami. PAK 12/2005, s. 21-23.
4. Arendalski J., Gliwa-Gliwiński J., Jabłoński Z., Ratajczyk E., Tomasik J., Żebrowska-Łucyk S.: Sprawdzanie przyrządów do pomiaru długości i kąta. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2009.
5. Fotowicz P.: Praktyka obliczania niepewności pomiaru. Kurs szkoleniowy, Warszawa, GUM 2021.
6. Jakubiec W., Malinowski J.: Metrologia wielkości geometrycznych. WNT, Warszawa 2018.
7. Korzyński M.: Metodyka eksperymentu. Planowanie, realizacja i statystyczne opracowanie wyników eksperymentów technologicznych. WNT, Warszawa 2017.
8. Pajzderski P., Iglantowicz T.: Dokładność metody pomiarowej a niepewność pomiaru – próba analizy. PAK 5/2000, s. 14-16.
9. Piotrowski J.: Podstawy miernictwa. WNT, Warszawa 2002.
10. Świsulski D., Golijanek-Jędrzejczyk A.: Uchyb, błąd, niepewność – geneza określenia niedokładności w miernictwie elektrycznym. Przegląd elektrotechniczny, R. 93, nr 9/2017, s. 130-133.
11. Świsulski D., Golijanek-Jędrzejczyk A.: Wyrażanie niedokładności pomiaru – błąd czy niepewność? INPE: Informacje o normach i przepisach elektrycznych, nr 211, 2017, s. 3-15.
12. Zawada J.: Metrologia wielkości geometrycznych. Zagadnienia wybrane. Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź 2011.
13. EA-4/02 Wyrażanie niepewności pomiaru przy wzorcowaniu, GUM, Warszawa 2001.
14. EN ISO 14253-1:2013 Specyfikacje geometrii wyrobów (GPS). Kontrola wyrobów i wyposażenia pomiarowego za pomocą pomiarów. Część 1: Reguły orzekania zgodności lub niezgodności ze specyfikacją.
15. Guidelines on Decision Rules and Statements of Conformity. ILAC-G8:09/2019.
16. Guide OIML G 19, The role of measurement uncertainty in conformity assessment decisions in legal metrology, 2017.
17. ISO/IEC Guide 99:2010 | International vocabulary of metrology – Basic and general concepts and associated terms (VIM).
18. ISO/IEC 17025:2017 Ogólne wymagania dotyczące kompetencji laboratoriów badawczych i wzorcujących.
19. JCGM 100:2008 Evaluation of measurement data – Guide to the expression of uncertainty in measurement.

20. JCGM 100:2008 (GUM) Ewaluacja danych pomiarowych. Przewodnik wyrażania niepewności.
21. Niepewność pomiaru w praktyce. Monografia. GUM, Warszawa 2011.
22. Stwierdzanie zgodności z wyspecyfikowanym wymaganiem – zasada podejmowania decyzji. Polskie Centrum Akredytacji, 2018.

SPIS TREŚCI

Przedmowa.....	5
1. BŁĄD POMIARU.....	7
1.1. Przyczyny powstawania błędów	7
1.1.1. Nieścisłość definicji wielkości mierzonej	7
1.1.2. Błędy instrumentalne	8
1.1.3. Błędy metody	9
1.1.4. Błędy środowiskowe.....	16
1.1.5. Błędy obserwacji	17
1.1.6. Błędy obliczeniowe	19
1.2. Rodzaje błędów pomiaru i metody ich eliminacji	20
1.2.1. Błędy systematyczne	22
1.2.2. Błędy przypadkowe	23
1.2.3. Błędy nadmierne	25
1.3. Oszacowanie błędów przy pomiarach pośrednich	27
2. NIEPEWNOŚĆ POMIARU	30
2.1. Metody szacowania niepewności pomiaru	35
2.1.1. Wyznaczanie składowych niepewności pomiaru Metodą A	36
2.1.2. Wyznaczanie składowych niepewności pomiaru Metodą B	37
2.2. Wyznaczanie niepewności pomiaru przy pomiarach bezpośrednich	40
2.3. Wyznaczanie niepewności pomiaru przy pomiarach pośrednich ...	58
2.4. Niepewność średniej ważonej	63
3. STWIERDZENIE ZGODNOŚCI WYROBU ZE SPECYFIKACJĄ	65
3.1. Graficzna interpretacja wyników pomiaru	65
3.2. Zasady podejmowania decyzji	69
3.3. Algorytm postępowania przy wyborze zasady podejmowania decyzji	73
4. ROZKŁADY ZMIENNYCH LOSOWYCH	75
4.1. Rozkład normalny	75
4.2. Rozkład t-Studenta	79
4.3. Rozkład jednostajny	82
4.4. Rozkład trójkątny	82
4.5. Rozkład antymodalny	83
Bibliografia	85



UNIwersytet
Zielonogórski

ISBN 978-83-7842-549-6