

Uniwersytet Zielonogórski
Wydział Mechaniczny

mgr inż. Daniel Dębowski

*Stateczność dynamiczna
porowatej płyty prostokątnej*

Rozprawa doktorska

Promotor: prof. dr hab. inż. Krzysztof Magnucki,
Politechnika Poznańska

Zielona Góra 2008

Spis treści

Streszczenie	3
Wykaz ważniejszych oznaczeń	4
1. Wstęp	6
2. Założenia i podstawowe zależności	30
2.1. Przedmiot badań	31
2.2. Model fizyczny materiału porowatego	32
2.3. Model geometryczny płyty	34
3. Dynamiczne równania ruchu (równowagi płyty).....	36
4. Równania różniczkowe ruchu	43
5. Rozwiązanie układu równań	50
6. Przykład obliczeń	57
6.1. Zagadnienie stateczności statycznej płyty prostokątnej	63
6.1.1. Rozwiązanie dla liniowych związków geometrycznych	64
6.1.2. Rozwiązanie dla nieliniowych związków geometrycznych.....	70
6.2. Zagadnienie stateczności dynamicznej płyty prostokątnej	71
6.2.1. Stateczność dynamiczna w ujęciu liniowym	71
6.2.2. Stateczność dynamiczna w ujęciu nieliniowym	75
– Obciążenie rosnące proporcjonalnie do czasu	75
– Obciążenie o charakterze quasi – impulsowym	82
6.3. Badania porównawcze MES	88
7. Zakończenie	93
Literatura	95
Załączniki	

Streszczenie

Przedmiotem pracy jest porowata płyta prostokątna zorientowana w prostokątnym układzie współrzędnych, obciążona w płaszczyźnie środkowej siłami ściskającymi oraz równomiernie rozłożonym ciśnieniem na całej powierzchni. Właściwości mechaniczne i fizyczne są zmienne po grubości płyty i zależą od porowatości materiału. Zmiana modułów sprężystości i gęstości jest ciągła i symetryczna względem powierzchni środkowej płyty. Przyjęto liniowe związki fizyczne pomiędzy składowymi stanu naprężenia i składowymi stanu odkształcenia oraz określono nieliniowe związki pomiędzy odkształceniem a przemieszczeniem. Składowe odkształcenia wyrażono za pomocą przemieszczeń.

Różniczkowe równania ruchu wyprowadzono za pomocą zasady wariacyjnej Hamiltona. Na podstawie teorii płyt cienkich z uwzględnieniem skończonych ugięć określono naprężenia i siły wewnętrzne w płycie. Wprowadzono funkcję sił oraz dwie funkcje przemieszczeń. Otrzymany układ równań różniczkowych rozwiązano w sposób przybliżony, stosując metodę ortogonalizacyjną Bubnowa-Galerkina. W efekcie otrzymano nieliniowe równanie różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu.

W pracy przedstawiono badania numeryczne, które przeprowadzone zostały w odniesieniu do rozwiązań analitycznych. Określono obszar rozwiązań dopuszczalnych dla badanej rodziny płyt prostokątnych. W pracy przedstawiono analizę stateczności statycznej płyty poddanej obciążeniom dynamicznym. Analizę oparto na algorytmie metody Rungego – Kuty. W końcowym etapie pracy porównane zostały wyniki rozwiązania analitycznego z wynikami otrzymanymi za pomocą metody elementów skończonych przy użyciu programu ANSYS.

Wykaz ważniejszych oznaczeń

- x, y, z – współrzędne układu kartezjańskiego,
 a – długość płyty w kierunku osi x ,
 b – długość płyty w kierunku osi y ,
 t – grubość płyty,
 E – moduł sprężystości podłużnej,
 G – moduł sprężystości postaciowej,
 ρ – gęstość materiału,
 e_0 – bezwymiarowy parametr porowatości,
 e_m – bezwymiarowy parametr gęstości,
 u, v, w – składowe przemieszczenia punktu płyty w kierunkach osi x, y, z ,
 u_0, v_0 – przemieszczenia styczne dowolnego punktu powierzchni środkowej,
 $\psi_1, \psi_2, \phi_1, \phi_2$ – bezwymiarowe funkcje przemieszczeń uogólniające hipotezę płaskich przekrojów,
 ζ – bezwymiarowa współrzędna,
 T_k – energia kinetyczna,
 U_ε – energia potencjalna odkształcenia sprężystego,
 W – praca obciążenia zewnętrznego,
 c_0, \dots, c_9, c_{24} – stałe całkowania po grubości płyty,
 F – funkcja sił,
 $\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}$ – parametry funkcji sił,
 Φ_1, Φ_2 – funkcje przemieszczeń,
 \tilde{f}_1 – bezwymiarowy parametr ugięcia płyty,
 m – liczba półfal na długości boku a ,
 n – liczba fal na długości boku b ,
 N_0 – obciążenie płyty,
 k_0 – parametr obciążenia płyty,
 N_x – siła ściskająca w kierunku osi x ,
 N_y – siła ściskająca w kierunku osi y ,
 p – ciśnienie zewnętrzne,
 $N_{0, KR}$ – krytyczne obciążenie płyty,

$\sigma_{eq,max}$ – największe naprężenia zredukowane (naprężenia Hubera-Misesa),

σ_{all} – dopuszczalne naprężenia dla danego materiału,

τ – czas,

c – prędkość narastania obciążenia zewnętrznego,

$\tilde{\tau}$ – bezwymiarowy parametr czasu,

A – stopień podwyższenia obciążenia krytycznego,

T – czas trwania obciążenia impulsowego.






1. Wstęp

Współczesny rozwój przemysłu stawia dzisiejszym inżynierom bardzo wysokie wymagania jakościowe i ilościowe w zakresie projektowania oraz wytwarzania nowoczesnych maszyn i urządzeń. Przykładem takich konstrukcji mogą być powszechnie znane środki transportu, a w szczególności samochody, statki i samoloty. Maszyny te powinny przede wszystkim charakteryzować się dużą wytrzymałością oraz wysoką trwałością i niezawodnością. Znaczący wpływ na poprawę ich jakości ma dodatkowe kryterium ekonomiczne związane bezpośrednio z maksymalnym obniżeniem kosztów eksploatacji. W tego typu maszynach uwarunkowane jest to głównie poprzez minimalizację ich całkowitej masy.

Z konstrukcyjnego punktu widzenia istotny wpływ na obniżenie masy konstrukcji ma optymalny dobór kształtów oraz zastosowanie odpowiednich materiałów na poszczególne części składowe. Na całym świecie prowadzone są intensywne badania mające na celu opracowanie nowych materiałów i technologii mających na celu udoskonalenie istniejących rozwiązań. W budowie maszyn i urządzeń mechanicznych, ze względu na wymagane własności wytrzymałościowe i technologiczne, nadal są to materiały metalowe. Do ich produkcji wykorzystuje się zarówno stale, jak i inne stopy metali, a także szkło, ceramikę, polimery czy też kompozyty. Ze względu na korzystny stosunek własności wytrzymałościowych do masy własnej, szerokie zastosowanie przede wszystkim w przemyśle lotniczym znalazły nowoczesne stopy aluminium oraz kompozyty. Przykładowy obraz proporcji wykorzystywanych materiałów w produkcji samolotów przedstawia rysunek 1.1.

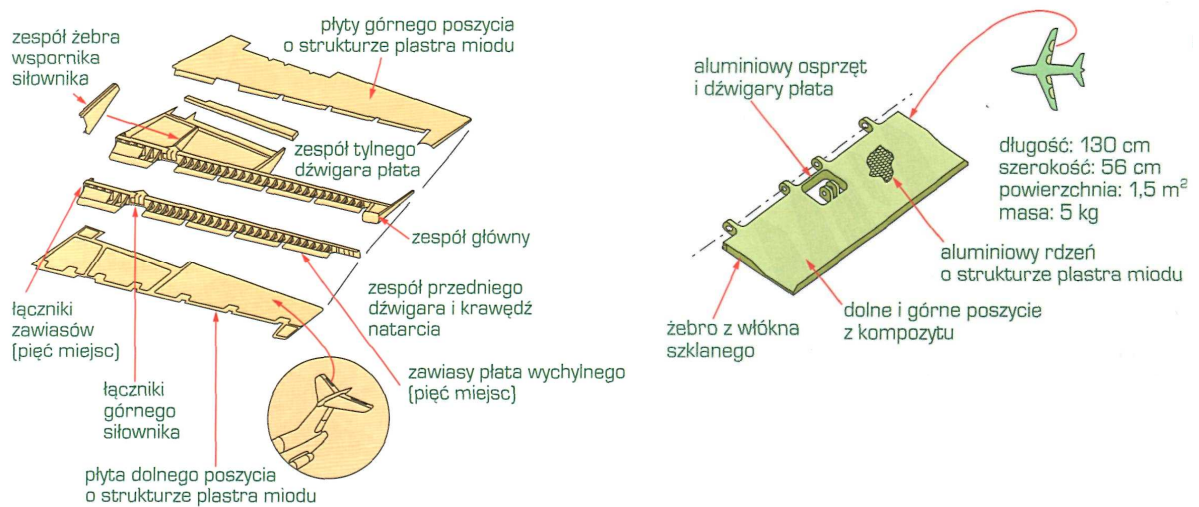
Jednym z podstawowych elementów w tego typu konstrukcjach są płyty i powłoki cienkościenne. Płyty ze względu na swoją budowę oraz charakter przenoszonych obciążeń zaliczane są do tak zwanych dźwigarów powierzchniowych. Elementy konstrukcyjne tego typu najczęściej traktujemy jako ciało o kształcie graniastosłupa lub walca prostego, które charakteryzuje się bardzo małą grubością w stosunku do pozostałych wymiarów.

a)

-  aluminiowa struktura plastra miodu
-  metalowe poszycie, rdzeń z innego materiału
-  element z materiału kompozytowego zbrojonego włóknem szklanym, z rdzeniem aluminiowym o strukturze plastra miodu
-  element z materiału kompozytowego o strukturze plastra miodu pokrytego warstwą tytanową
-  element z materiału kompozytowego zbrojonego włóknem szklanym



b)

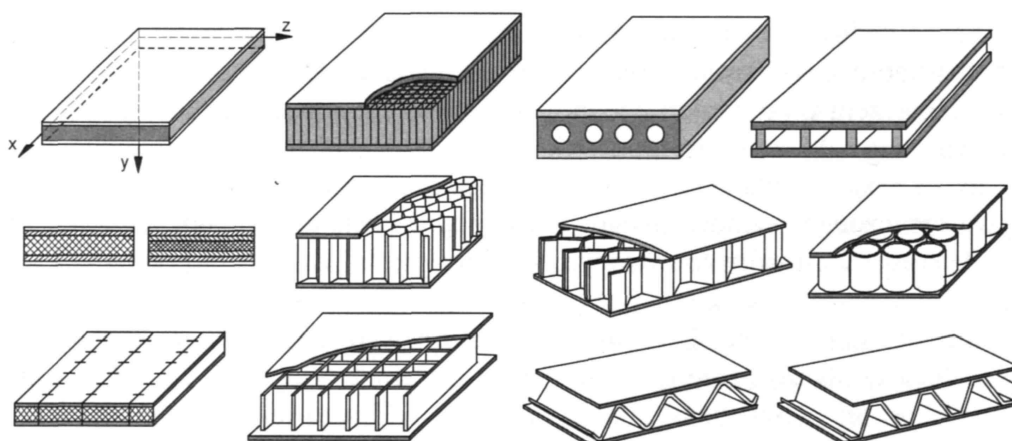


Rys. 1.1. Przykłady zastosowania nowoczesnych materiałów [28]:

a) w samolocie transportowym Lockheed C-5A, b) w podzespołach samolotów Boeing

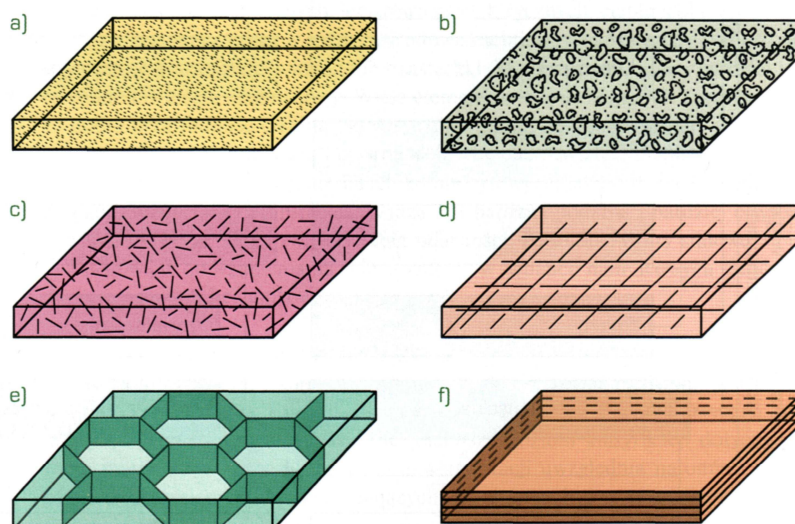
Zgodnie z teorią płyt i powłok, płytę uważa się za cienką, jeżeli stosunek grubości do krótszego wymiaru boków w płytach prostokątnych jest mniejszy od 0.1, a w przypadku płyt kołowych, gdy stosunek grubości do średnicy jest mniejszy od 0.2. Płaszczyznę dzielącą grubość płyty na dwie równe części nazywa się płaszczyzną środkową płyty, natomiast kontur ograniczający płaszczyznę płyty nazywa się brzegiem płyty. Płyty, jako części konstrukcji poddawane są przede wszystkim zginaniu. Istnieje jednak wiele przypadków, w których ścianki konstrukcji oprócz zginania są dodatkowo ściskane. Przy takim stanie obciążeń konstrukcja może ulec zniszczeniu w wyniku wyboczenia. Z tego powodu niezbędne jest projektowanie konstrukcji z odpowiednim formułowaniem warunków wytrzymałości i stateczności. Kompromis pomiędzy odpowiednim doбором materiałów oraz zapewnieniem optymalnych kształtów konstrukcji wymusił na inżynierach poszukiwanie coraz to nowszych rozwiązań konstrukcyjnych oraz materiałowych.

Od około połowy dwudziestego wieku silnie rozwijały się tzw. konstrukcje trójwarstwowe (sandwich construction) składające się z dwóch cienkich i stosunkowo sztywnych warstw zewnętrznych zwanych okładzinami (lub warstwami nośnymi) oraz lekkiej i grubej środkowej warstwy wypełniającej zwanej rdzeniem. Właściwości użytkowe takich konstrukcji zależą od okładzin, a także od warstwy wypełniającej, która stanowi pewne podłoże sprężyste dla okładzin. Zastosowanie rdzeni o zróżnicowanych kształtach oraz użycie materiałów o różnorodnych właściwościach mechanicznych uwidacznia największą zaletę tych konstrukcji jaką jest skuteczne poprawienie sztywności i wytrzymałości przy zachowaniu stosunkowo małej całkowitej masy (Rys. 1.2). Główną ich wadą jest problem odklejania okładzin od rdzenia oraz problem z uzyskaniem wysokiej jakości połączeń między warstwami. Najczęściej poszczególne warstwy łączono ze sobą za pomocą klejenia, spawania, zgrzewania, nitowania i ewentualnie lutowania. Konstrukcje te głównie udoskonalano poprzez wprowadzanie nowych materiałów (np. tworzywa, pianki, materiały ceramiczne) oraz zmianę sposobów łączenia warstw co w konsekwencji doprowadziło do powstania technologicznie zaawansowanych konstrukcji wielowarstwowych (advanced sandwich – type constructions) zwanych dzisiaj kompozytami.



Rys.1.2 Przykłady konstrukcji trójwarstwowych [83]

Kompozyty (łac. *compositus* = złożony) są to materiały konstrukcyjne o niejednorodnej strukturze, zbudowane z dwóch lub więcej składników o odmiennych właściwościach mechanicznych i technologicznych. Materiały te są sztucznie wytwarzane w celu uzyskania właściwości, które nie mogą być osiągnięte oddzielnie przez żaden z występujących w nim składników. Podstawowym elementem kompozytu jest pojedyncza warstwa zwana także laminą. Materiał ten składa się na ogół ze składnika nazywanego elementem wzmacniającym lub zbrojeniem (Rys. 1.3) oraz lepiszcza (inaczej osnowy). Pierwszy zazwyczaj występuje w postaci: ziaren, płatków, włókien lub szkieletów i dzięki znacznie wyższym właściwościom wytrzymałościowym spełnia podstawową rolę konstrukcyjną. Natomiast drugi, oprócz funkcji spoiwa wiążącego ze sobą elementarne składniki konstrukcyjne pełni także rolę ochrony przed czynnikami zewnętrznymi (np. korozją). Wypadkowe właściwości kompozytu w głównej mierze zależą od właściwości poszczególnych jego składników, ich ilości w ogólnej objętości, sposobu rozmieszczenia a także cech geometrycznych. Szczególnym przypadkiem kompozytów są laminaty, które są zbiorem warstw (lamin) ułożonych jedna na drugiej i połączonych ze sobą w procesie laminacji w sposób trwały z tą samą żywicą z którego wykonana jest osnowa. Szczególną cechą tych materiałów jest ich anizotropowość mechaniczna, w której wytrzymałość i sztywność jest bezpośrednio zależna od uformowania i kierunku ułożenia włókien konstrukcyjnych. Uwzględniając tę właściwość konstrukcje te są na ogół o wiele lżejsze i wytrzymalsze od większości konstrukcji z materiałów jednorodnych.

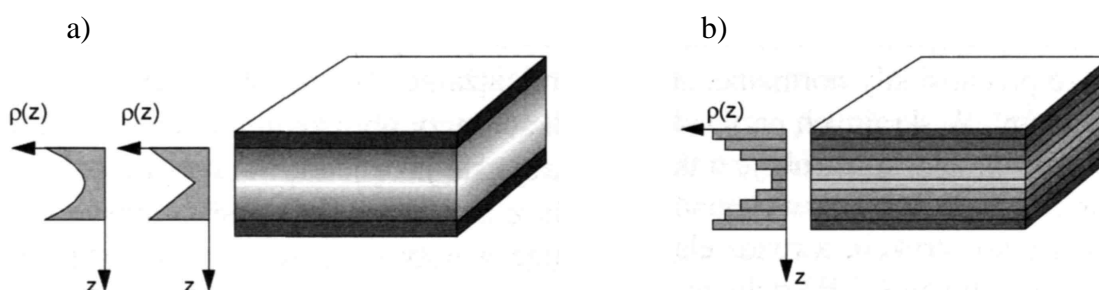


Rys.1.3 Przykłady elementów wzmacniających materiały kompozytowe: [28]

a) cząstkami dyspersyjnymi, b) płatkami, c) włóknami nieciągłymi,
d) włóknami ciągłymi w postaci tkanin, e) szkieletowo, f) warstwowo w laminatach

Teoria konstrukcji wielowarstwowych pozwoliła na projektowanie konstrukcji złożonych z wielu warstw charakteryzujących się zmienną skokowo gęstością oraz zmiennymi własnościami wytrzymałościowymi na grubości (minimalną w środkowych i maksymalną w zewnętrznych warstwach).

Kolejnym przykładem może być tzw. konstrukcja integralna. Cechą charakterystyczną tych konstrukcji jest brak wyróżnienia oddzielnych warstw. Zmiana właściwości występuje poprzez zróżnicowanie gęstości w kierunku prostopadłym do powierzchni (Rys.1.4). Warstwy zewnętrzne spełniające rolę warstw nośnych wykonane są z materiału o dużej gęstości a tym samym wysokiej wytrzymałości, natomiast w kierunku rdzenia stosuje się materiał o coraz to mniejszej gęstości a więc i mniejszej wytrzymałości.



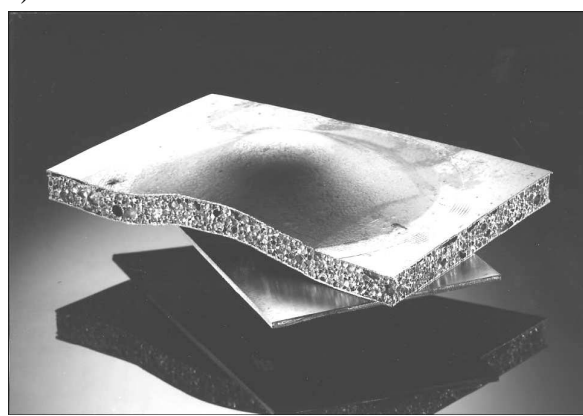
Rys. 1.4. Przykłady konstrukcji integralnych: a) o zmiennej gęstości wypełniacza,
b) o skokowo zmiennej gęstości wypełniacza [83]

W ostatnich latach nastąpiło wyraźne przyspieszenie rozwoju technologii wykonywania konstrukcji o własnościach materiałowych charakteryzujących się niejednorodną strukturą. Współczesnym przykładem mogą być tutaj wysoko-porowate metalowe materiały o strukturze komórkowej, wytwarzane najczęściej na bazie stopów aluminium z litem, magnezem, niklem, miedzią i tytanem. Proces technologiczny należy do dosyć mocno skomplikowanych operacji (osadzanie chemiczne lub elektrochemiczne, metalurgię proszków, naparowywanie próżniowe, odlewanie oraz metody ciekło-fazowe), co uznaje się za zasadniczą ich wadę. Jednak wysoki poziom właściwości fizycznych i mechanicznych (duża sztywność przy ograniczonym ciężarze, zdolność pochłaniania dużych energii zgniotu, dobre właściwości izolacji cieplnej oraz tłumienia wstrząsów i dźwięków) powoduje, iż materiały te są dzisiaj co raz powszechniej stosowane. Przykładem może być tutaj lekka konstrukcja trójwarstwowa z rdzeniem z pianek aluminiowych stosowana w przemyśle samochodowym na maski, przesuwne dachy czy pokrywy bagażników natomiast w przemyśle lotniczym, ze względu na izotropowe właściwości oraz ognioodporność, płyty i panele z rdzeniem z pianek aluminiowych mogą z powodzeniem zastąpić warstwowe materiały kompozytowe z rdzeniem o strukturze plastra miodu. Należy zwrócić uwagę na fakt, że ze względu na swoje właściwości, warstwowe materiały kompozytowe o lekkim rdzeniu począwszy od 2000 roku są jednym z ważniejszych materiałów konstrukcyjnych wchodzących w skład seryjnie produkowanych samolotów pasażerskich, transportowych i wojskowych zapewniając im wysoką niezawodność.

a)



b)



Rys. 1.4. Przykłady zastosowania materiałów porowatych ze spienionego aluminium: [8]

a) dwie płyty o różnych gęstościach i współczynnikach porowatości wytworzone metodą wtryskiwanego gazu

b) wielowarstwowa płyta z rdzeniem ze spienionego aluminium oraz stalowymi warstwami zewnętrznymi wytworzona metodą przetapiania zagęszczonych proszków.

Pojawienie się konstrukcji porowatych nie byłoby możliwe bez wcześniejszej analizy naukowo-badawczej. W roku 1940 Benjamin Sosnick w USA po raz pierwszy otrzymał piankę metalową z wielofazowego stopu o składnikach różniących się temperaturą topnienia i wrzenia, w którym po obniżeniu ciśnienia i gwałtownym ochłodzeniu jeden ze składników krzepł, a drugi w postaci gazowej powodował jego spienienie. Dopiero w 1959 roku opracowano metodę mieszania proszku metalu z materiałem gazotwórczym w postaci wodorków metali (głównie wodorkiem tytanu, który w wysokiej temperaturze rozkłada się na tytan i gazowy wodór powodujący spienienie). Kolejne modyfikacje tej metody polegały na dodawaniu środka spieniającego bezpośrednio do topionego metalu. W taki sposób rozpoczęła się ekspansja badań nowoczesnych materiałów komórkowych. W wielu przypadkach uważa się, materiały te powinny być traktowane jako nowa, odrębna klasa materiałów inżynierskich.

Ogólny i wszechstronny przegląd własności mechanicznych i termicznych materiałów porowatych po raz pierwszy przedstawili w 1999 roku Evans, Hutchinson i Ashby [34]. Rok później ukazała się współautorska książka Ashby i inni [3] traktowana jako swego rodzaju poradnik projektowania metalowych materiałów pianowych. W pracy szeroko przeanalizowano własności mechaniczne, fizyczne, cieplne i akustyczne oraz ich wpływ na praktyczne zastosowanie w przemyśle. Zaprezentowano przykładowe metody obliczeń analitycznych oraz badań wytrzymałościowych z uwzględnieniem stateczności zarówno prostych konstrukcji belkowych jak i bardziej skomplikowanych konstrukcji warstwowych. Poprzez liczne ilustracje graficzne oraz tabele wyraźnie uwypuklono korzyści wynikające z zastosowania metalowych materiałów pianowych. Banhart [8] w 2001 roku przedstawił obszerną pracę z zakresu technologii wytwarzania, badań doświadczalnych, oraz zastosowania nowoczesnych materiałów porowatych. Z polskich opracowań na szczególną uwagę zasługuje wydana w 2004 roku monografia Dobrzańskiego [28], która jako jedyna w kraju zawiera pełne i aktualne informacje na temat własności nowych materiałów inżynierskich z uwzględnieniem obowiązujących międzynarodowych norm. Metalowe materiały komórkowe w zależności od sposobu wytwarzania charakteryzują się zróżnicowaną strukturą porów. Zmienny udział procentowy porów w całkowitej objętości materiału w dużym stopniu wpływa na własności fizyczne i mechaniczne konstrukcji. Z tego względu problemy wytrzymałościowe stają się zagadnieniami bardzo złożonymi. Wiele prac badawczych poświęcono określeniu zależności pomiędzy modułem sprężystości a gęstością materiałów porowatych. Relację tą badał między innymi Gibson i Ashby [40],

Choi i Lakes [19], Kovacik [60, 61], Koval'chenko [62]. Przegląd modeli dotyczących modułu sprężystości materiałów porowatych przedstawili Kaczmarek i Goueygou [51]. Zagadnienie trójwymiarowego modelowania liniowo sprężystych otwartych komórek pianowych zawarte jest w pracy Gan i inni [38]. Ujęcie matematyczne struktur porowatych z uwzględnieniem efektów plastycznych przedstawił w pracy Mielniczuk [86]. Evans i inni [35], przeprowadzili analizę porównawczą własności materiałów komórkowych ze względu na kryterium masy oraz występowania zjawiska dyssypacji. Zdolność pochłaniania energii przez materiały porowate zaprezentowano w pracach [92, 120]. Efekt deformacji oraz pęknięcia ścianek komórkowych porów w zależności od obciążenia omówiono w pracy Markaki i Clyne [84]. Bart-Smith i inni [9] przedstawili symulację zginania belki trójwarstwowej z porowatym rdzeniem. Praktyczne zastosowanie metalowych materiałów porowatych w typowych konstrukcjach zaprezentowano w pracy Simone i Gibson'a [100].

Płyty i powłoki jako konstrukcje cienkościennie szczególnie narażone są na utratę stateczności. Istotne jest więc ze względów wytrzymałościowych poprawne określenie statycznych oraz dynamicznych obciążeń krytycznych. Rozwój teorii płyt i powłok przedstawiono w monografii [4, 50, 121], natomiast zarys historyczny wytrzymałości materiałów zamieszczono w monografii [104]. Podstawowe zagadnienia teorii sprężystości zamieszczono w pracach [48, 65, 106]. Klasyczny opis teorii płyt i powłok zaprezentowano przykładowo w monografiach [29, 41, 42, 107]. Spośród starszych prac poświęconych zagadnieniu stateczności płyt warto wyróżnić monografie Timoshenki i Gerego [105], Volmira [110] oraz Brzoski [12]. Ze współczesnych opracowań z zakresu mechaniki płyt wymienić można monografie pod redakcją Woźniaka [121], monografie autorskie Kączkowskiego [55], Bazanta i Cedolina [10] oraz Romanowa [94]. Wydana w 2001 roku monografia pod redakcją Woźniaka [121] jest ogólnym a zarazem syntetycznym przedstawieniem współczesnej wiedzy na temat teorii płyt i powłok sprężystych. Ze względu na różny stopień ogólności rozważań i ich związek z zagadnieniami inżynierskimi pracę podzielono na pięć niezależnych części. Podjęto próbę jednolitego spojrzenia na problematykę formułowania podstawowych równań różnych teorii płyt i powłok w ramach dużych odkształceń sprężystych. Zaprezentowano zwięzły wykład teorii sprężystości. Przedstawiono różne możliwości formułowania teorii płyt oraz różne warianty równań podstawowych. Analizowano liniowe i nieliniowe teorie płyt cienkich oraz średniej grubości. Uwzględniono zagadnienie stateczności oraz elementy dynamiki płyt.

Na szczególną uwagę zasługuje bogaty przegląd bibliograficzny liczący ponad dwa i pół tysiąca pozycji. Na jego podstawie powstała wartościowa część zawierająca przegląd różnych teorii płyt i powłok w historycznym procesie ich formułowania. Ze względu na zawarty materiał i sposób przedstawienia teorii płyt godna polecenia jest również monografia [55]. Ogólny przegląd podstawowych problemów stateczności konstrukcji przedstawiono w pracy [10]. Między innymi badano wytrzymałość oraz stateczność najczęściej spotykanych w praktyce konstrukcji płyt. Omówiono szereg różnych przypadków ich obciążenia i utwierdzenia. Do określenia obciążeń krytycznych wykorzystano metodę energetyczną. Oprócz rozwiązań dokładnych zastosowano także przybliżone metody wariacyjne, szczególnie Ritza oraz Galerkina. W dalszej części badano siły pokrytyczne z uwzględnieniem teorii dużych odkształceń. Teoretyczne podstawy obliczania konstrukcji warstwowych przedstawiono w pracach [83, 94]. W pracy [83] oprócz zagadnień stateczności w zakresie sprężystym i sprężysto-plastycznym przeprowadzono przegląd podstawowych pojęć i metod optymalizacji. Jednym z przykładów była optymalizacja wielokryterialna trójwarstwowych płyt. Monografia Romanowa [94] charakteryzuje się odmiennym podejściem do obliczeń konstrukcji trójwarstwowych poprzez zastosowanie w modelu analitycznym hiperbolicznej hipotezy trójosiowego stanu przemieszczeń rdzenia. W pracy wiele uwagi poświęcono analizie stateczności płyt. Rozpatrywano między innymi przypadek utraty stateczności płyty swobodnie podpartej na całym konturze i ściskanej w jednym lub dwóch wzajemnie prostopadłych kierunkach. Zaprezentowano wyniki badań doświadczalnych w celu określenia obciążeń krytycznych płyt warstwowych obciążonych stycznie. Przedstawiono także zależności mające wpływ na tłumienie i energoabsorbcję podczas drgania płyt.

W badaniach stateczności płyt istotnym czynnikiem mającym wpływ na określenie obciążeń krytycznych jest przyjęcie odpowiedniego modelu matematycznego uwzględniającego strukturę płyty. Złożoność problemu uwidacznia się w przypadku płyt charakteryzujących się zmienną strukturą materiału, przykładowo: zmienną gęstością w konstrukcjach integralnych lub różną konfiguracją warstw w konstrukcjach warstwowych. Istotne jest tutaj zastosowanie odpowiednich hipotez kinematycznych. W klasycznej teorii płyt i powłok przyjmuje się hipotezę Kirchhoffa-Love zakładającą, że przekrój płaski przed odkształceniem pozostaje także płaski po odkształceniu. Zaletą takiego podejścia jest prostota i możliwość stosowania rozwiązań wyprowadzonych dla płyt jednorodnych. Główną wadą jest tutaj pomijanie sił poprzecznych i przemieszczeń, które ograniczają stosowanie

tej metody w przypadku płyt o zmiennej strukturze na grubości. Żeby pokonać wyżej wspomniane trudności stosuje się hipotezy wyższych rzędów, uwzględniających między innymi efekt ścinania w przekroju poprzecznym płyty. Przykładem opracowania poświęconego rozwiązaniu tego problemu jest praca Wang'a i innych [114]. Autorzy przedstawili nie tylko własne rozwiązania, ale też przegląd wcześniej dokonanych prób modelowania belek i płyt. Należy zaznaczyć, że we współczesnych opracowaniach dużo miejsca zajmują płyty kompozytowe. Wilde i Zborala w pracy [117] przedstawili przegląd podstawowych hipotez „linii łamanej” płyt i powłok kompozytowych, natomiast w pracy [118] przegląd różnych teorii laminowanych kompozytowych płyt i powłok. Gruntowny przegląd z dziedziny modelowania płyt wielowarstwowych wraz z bogatą bibliografią zaprezentował Carrera [15]. Rozwój wariacyjnej teorii Reissner'a oraz zastosowanie w modelowaniu wielowarstwowych płyt i powłok omówiono w pracy [16]. Przegląd historyczny teorii linii łamanej omówiono w pracy [17]. Porównanie teorii stosowanych w modelowaniu ściskanych i zginanych wielowarstwowych płyt kompozytowych można prześledzić na podstawie pracy Idbi i inni [49] oraz Gu i Chattopadhyay [47]. W pracy Fares'a i Elmarghany'a [36] przedstawiono udoskonaloną nieliniową teorię linii łamanej pierwszego rzędu z uwzględnieniem efektu ścinania. Opisana teoria spełnia warunki ciągłości na powierzchniach przylegania warstw oraz na powierzchniach zewnętrznych. Zaletą jej jest uwzględnienie naprężeń międzywarstwowych bez potrzeby stosowania współczynników korygujących efekt ścinania. W pracy przedstawiono wyniki obliczeń numerycznych dla naprężeń i odkształceń. Następnie przeprowadzono weryfikację z danymi zamieszczonymi w literaturze dla laminatów wyższych rzędów. W pracy Vasiliev'a [109] przedstawiono koncepcje modernizacji klasycznej teorii płyt szóstego rzędu pierwotnie opracowanych przez Reissner'a, Hencky'ego i Bolle'a. W przeciwieństwie do dotychczasowych interpretacji tych teorii bez klasycznego ścinania w teorii odkształconej płyty wykazano, że poprzez poprawne przekształcenie równań teorii szóstego rzędu za pomocą klasycznych metod rachunku wariacyjnego można zredukować do układu dwóch cząstkowych równań różniczkowych. Jedno z nich odpowiada rządzącemu równaniu klasycznej teorii płyt Kirchhoff'a, drugie wprowadzonemu przez Reissner'a. Aby poprzeć prezentowaną koncepcję przedstawiono istniejące sprzeczności w dotychczasowej teorii czwartego rzędu. Proponowaną interpretację, która jest całkowicie inna niż teorie pierwotne, nazwano nowoczesną formą klasycznej teorii płyt. Sformułowanie zadań stateczności dla wielowarstwowych płyt kompozytowych przedstawił Muc [88]. W rozwiązaniu uwzględniono metodę energetyczną z wykorzystaniem funkcjonału całkowitej energii

potencjalnej układu w formie Lagrange'a. Zaprezentowano trudności związane z budową powierzchni granicznych dla płyt poddanych działaniu obciążeń złożonych (ściskania i ścinania). Zwrócono uwagę na mnogość problemów związanych z analizą wyboczenia płyt kompozytowych spowodowanych odmienną strukturą materiału (efekty higrotermiczne, delaminacja, koncentracja naprężeń wokół otworów, pryzmatycznych i falistych struktur płytowych). Podkreślono także konieczność optymalizacji zarówno konfiguracji jak i grubości laminatu. Kant i Swaminathan [53] badali utratę stateczności swobodnie podpartych płyt kompozytowych i warstwowych. Badania przeprowadzono w oparciu o zaproponowaną we wcześniejszych pracach, przez pierwszego z autorów, udoskonaloną teorię wyższego rzędu. Przedstawiony w pracy model odkształcenia konstrukcji uwzględnia działanie sił poprzecznych oraz nieliniową zmianę przemieszczeń na grubości płyty. Dzięki temu wyeliminowano potrzebę stosowania współczynników korygujących ścinanie. Równania równowagi otrzymano z zasady minimum energii potencjalnej, następnie rozwiązano metodą Navier'a. Autorzy przeprowadzili analizę numeryczną dla własnego oraz czterech innych modeli proponowanych w literaturze. Porównanie wyników przedstawiono w sposób tabelaryczny i graficzny. Wyższość zaproponowanego przez siebie modelu autorzy interpretują uzyskaniem dokładniejszych wyników.

Badania analityczne wytrzymałości i stateczności konstrukcji porowatych przeprowadzili Magnucki i inni w pracach [27, 73, 76-77, 79-82]. Szczególną uwagę należy zwrócić na model matematyczny, w którym przyjęto nieliniową hipotezę odkształcenia płaskiego przekroju poprzecznego na grubości ścianki z uwzględnieniem efektu ścinania. Składowe pola odkształceń określono za pomocą liniowych związków geometrycznych. Przyjęto również nieliniowy rozkład właściwości mechanicznych materiału na grubości ścianki. Pierwsze prace z powyższymi założeniami przedstawili w 2004 roku Magnucki i Stasiewicz [81, 82]. Pierwsza z nich dotyczy zagadnienia wytrzymałości a druga wyboczenia sprężystej, izotropowej belki porowatej. Analogiczne badania dla porowatej płyty prostokątnej przedstawiono w pracy [79], a dla płyty kołowej w pracy [73]. Zagadnienia wytrzymałości i stateczności niejednorodnych płyt i powłok cienkościennych, wykonanych jako konstrukcje trójwarstwowe lub jednowarstwowe z materiałów porowatych, omówiono w monografii Magnuckiego, Mielniczuka i Ostwalda [80]. W pracy przedstawiono podstawowe cechy i własności mechaniczne materiałów porowatych. Szczególną uwagę zwrócono na rolę parametrów struktury przy określaniu zastępczych stałych materiałowych. Przedmiotem badań była między innymi porowata płyta prostokątna obciążona ciśnieniem,

lub ściskana w swej płaszczyźnie. Wyniki zweryfikowano za pomocą metody elementów skończonych. Dodatkowym rozwinięciem wyżej prezentowanego modelu jest przyjęcie nieliniowych związków pomiędzy przemieszczeniem a odkształceniem. Model w takim ujęciu zaprezentowano w pracach Dębowskiego i Magnuckiego [27] oraz Magnuckiego i Magnuckiej-Blandzi [77]. W pracy [27] przedstawiono zagadnienie utraty stateczności porowatej płyty prostokątnej obciążonej tarczowo. W badaniach wyznaczono przebieg utraty stateczności dla wybranej rodziny płyt z uwzględnieniem różnych kombinacji dwukierunkowego obciążenia oraz różnego stopnia porowatości płyty. W pracy [77] analizowano różne warianty rozwiązań konstrukcyjnych trójwarstwowej belki z porowatym rdzeniem. Wyznaczono ugięcie, rozkłady naprężeń w przekroju poprzecznym belki, oraz siłę krytyczną. Szczególną uwagę zwrócono na efektywny rozkład porowatości rdzenia z uwagi na największe obciążenie krytyczne. Binieliniową teorię obliczania konstrukcji warstwowych przedstawiono również w pracy Romanowa [93]. Wyprowadzono uogólnione równania różniczkowe dla małowyniosłych powłok oraz płyt. Analizę oparto na trójosiowym nieliniowym stanie przemieszczeń rdzenia (hipoteza hiperboliczna) oraz na geometrycznie nieliniowej teorii. Równania wyprowadzono na podstawie równań równowagi elementu warstwowego. Przykład jednoosiowego ściskania trójwarstwowej płyty prostokątnej przedstawiono w pracy Romanowa i Najdychora [95]. Płytę podparto przegubowo na dwóch krawędziach. Przedstawiono analizę obciążeń nadkrytycznych. Podobne badania dla sprasowanych jednorodnych płyt z usztywnionymi zewnętrznymi warstwami przedstawiono w pracy [96]. Warstwy wykonano z pianki poliuretanowej a ich przemieszczenie opisano za pomocą hipotezy hiperbolicznej.

Kolejnym czynnikiem wpływającym na obciążenia krytyczne płyty jest charakter obciążenia. Większość badaczy analizowało w swoich pracach utratę stateczności płyt poddanych jedno lub dwuosowemu ściskaniu, o stałym lub liniowo zmiennym wyężeniu siły na długości płyty. W pracach bada się również różne przypadki podparcia. W zależności od zastosowania uwzględnia się w różnych konfiguracjach krawędzie płyty swobodnie podparte, utwierdzone, sprężyste podparte lub swobodne. Jednym z badanych przypadków w pracy Wilde i inni [116] była płyta prostokątna swobodnie podparta na trzech krawędziach i z jedną krawędzią swobodną. Płytę wykonano z materiału jednorodnego. Konstrukcję obciążono równomiernie rozłożonymi siłami ściskającymi na dwóch przeciwległych swobodnie podpartych brzegach. Takie same przypadki obciążenia i utwierdzenia przyjęto w pracy Magnuckiej-Blandzi i innych [73]. Badano płytę trójwarstwową z metalowym

porowatym rdzeniem. Przyjęto zmienny rozkład właściwości fizycznych i mechanicznych na grubości rdzenia. Do opisu pola przemieszczeń rdzenia przyjęto nieliniową hipotezę odkształcenia płaskiego przekroju poprzecznego. W pracy przedstawiono rozwiązanie zagadnienia statycznego. Wyniki obliczeń numerycznych porównano z wynikami analizy MES. Kang i Leissa [52] badali płytę prostokątną ścisną osiowo na dwóch przeciwległych, swobodnie podpartych krawędziach. Dla pozostałych dwóch krawędzi badano różne warunki podparcia. Uwzględniono między innymi przypadki brzegów utwierdzonych, swobodnie podpartych, swobodnych, sprężysto podpartych oraz ich kombinacji. Analizowano różne przypadki liniowo zmiennego rozkładu obciążenia wzdłuż brzegów płyty. Poszczególne warianty rozwiązano z uwzględnieniem metody Frobenius'a. Wyniki obliczeń porównano z wynikami dostępnymi w literaturze. Różne przypadki nierównomiernego rozkładu obciążenia płyty badali również w zakresie sprężystym Walczak i Mania [113] oraz sprężysto-plastycznym Grądzki [44]. W pracach analizowano różne przypadki podparcia przy zmiennych kombinacjach krawędzi swobodnie podpartych i utwierdzonych. W pracy [113] badano prostokątną płytę trójwarstwową z lekkim wypełniaczem, natomiast w pracy [44] płytę o strukturze jednorodnej. Shahabian i Roberts [98] przedstawili przybliżoną metodę wyznaczania obciążeń krytycznych płyt prostokątnych w zależności od różnych kombinacji nierównomiernie rozłożonego obciążenia.

Podczas ścisania osiowego istotny wpływ na nośność konstrukcji mają wstępne imperfekcje inaczej mówiąc odchylenia od geometrycznie idealnego kształtu. Z praktycznego punktu widzenia, niemożliwe jest wykonanie cienkościennego dźwigara bez uwzględnienia wstępnych ugięć czy naprężeń początkowych, które powstają przykładowo w procesie spawania. Przykłady płyty prostokątnej oraz paneli walcowej swobodnie podpartych na dwóch brzegach i dwóch swobodnych przeanalizowano w pracy Magnuckiego [78]. Równania równowagi zapisano z uwzględnieniem wstępnych imperfekcji. Określono obciążenia krytyczne poprzez porównanie ścieżek równowagi w zależności od geometrycznych niedoskonałości paneli i płyty. Lin i Zhang [72] analizowali stan krytyczny i zakrytyczny swobodnie podpartej kompozytowej płyty prostokątnej. Uwzględniono wpływ początkowych imperfekcji, efekt poprzecznego ścinania oraz interakcję ścinania i zginania. Yang i inni [123] przedstawili badanie wrażliwości na imperfekcje funkcjonalnie uwarstwionych płyt. Wykorzystano teorię wyższego rzędu uwzględniającą efekt ścinania.

Bardziej złożonymi modelami matematycznymi są modele opisujące zachowanie się konstrukcji w stanie zakrytycznym, a zwłaszcza w zakrytycznym sprężysto-plastycznym. Do rozwiązania tego typu zagadnienia w sposób ścisły stosuje się nieliniowy układ równań różniczkowych cząstkowych, natomiast analiza w przypadku metod przybliżonych (energetycznych lub wariacyjnych) prowadzi najczęściej do nieliniowych równań algebraicznych. Zagadnienie stanu krytycznego płyty podpartej przegubowo na wszystkich brzegach zostało rozwiązane po raz pierwszy, metodą energetyczną, przez G.H Bryana [13]. Natomiast jedną z pierwszych prac poświęconych zagadnieniu stanów zakrytycznych płyt w zakresie sprężystym jest współautorska praca Karman'a, Sechler'a i Donnel'a [54]. Autorzy jako pierwsi zaproponowali wzór na tzw. szerokość efektywną (zredukowaną) płyt ściskanych. Natomiast Winter [119] w oparciu o przeprowadzone badania doświadczalne zmodyfikował wzór Karman'a, uwzględniając w nim ugięcia wstępne płyt. Analizę stanu naprężenia prostokątnej izotropowej tarczy znajdującej się w stanie zakrytycznym, wywołanym zginaniem w płaszczyźnie tarczy omówiono w pracy Walczaka [112]. Przyjęto stałą grubość oraz swobodne podparcie na całym obwodzie. Zagadnienie rozwiązano w oparciu o nieliniową teorię płyt z uwzględnieniem dużych ugięć. Ze współczesnych krajowych opracowań warto zwrócić szczególną uwagę na pracę zbiorową pod redakcją M. Królaka [66]. W treści monografii oprócz podstaw teoretycznych i metod wymiarowania omówiono zachowania i praktyczne metody obliczania stanów zakrytycznych i nośności granicznej dźwigarów cienkościennych. Jednym z szeroko omawianych przykładów była cienkościenna płyta prostokątna poddana różnym kombinacjom obciążenia. Badania przeprowadzono w zakresie sprężystym i sprężysto plastycznym. Wyniki porównano z wynikami badań doświadczalnych oraz wynikami dostępnymi w literaturze. W pracy Bakker'a i innych [7] przedstawiono analizę zakrytyczną swobodnie podpartych płyt prostokątnych poddanych jedno i dwuosowemu ściskaniu. Uwzględniono model dwu pasowy, którego zaletą jest bardziej wnikliwe badanie utraty stateczności płyty. Równania wyprowadzono z wykorzystaniem funkcji sił przy użyciu metody energetycznej. Uwzględniono stosunek sztywności pokrytycznej do sztywności wstępnej. Otrzymany model porównano z innymi dostępnymi w literaturze.

W rzeczywistych konstrukcjach każdy element, w mniejszym lub większym stopniu, poddany jest obciążeniom dynamicznym, które powodują ruch elementu. Płyty ze względu na swoją geometrię oraz zastosowanie są wyjątkowo wrażliwe na tego typu obciążenia. Zagadnienia dynamiczne płyt należą historycznie do najstarszych w literaturze przedmiotu.

Chladni (1756-1827) jako pierwszy poprzez badania doświadczalne wykazał istnienie linii węzłowych drgań własnych płyty swobodnej na całym obwodzie. Pierwsze próby ich teoretycznego opisanie podjął w 1789 roku J. Bernoulli. Od tego czasu rozpoczął się burzliwy rozwój dynamiki płyt i trwa do dnia dzisiejszego. Efektem zainteresowania tym tematem jest kilkutysięczna liczba różnych opracowań, prac przeglądowych, monografii oraz oryginalnych rozpraw.

Podstawy dynamiki w bardzo ogólnym ujęciu przedstawiono w monografii Woźniaka [122]. Zagadnienia dynamiczne płyt przedstawione są przykładowo w monografiach Mindlin'a [87], Nowackiego [89], Gorman'a [43]. Na szczególną uwagę zasługuje praca o charakterze przeglądowym Leissy [70] licząca w sumie ok. 500 prac dotyczących dynamiki płyt. Zagadnieniom stateczności dynamicznej poświęcono monografie Bolotin'a [11], Volmir'a [111] oraz Grybosia [45]. W pracy [11] przedstawiono szczegółowe teorie stateczności konstrukcji poddanych obciążeniom pulsującym. Szczególną uwagę poświęcono konstrukcjom prętowym oraz płytowym. W monografii [111] obszernie przedstawiono nieliniowe drgania płyt i powłok. Jednym z przykładów była analiza stateczności dynamicznej cienkich płyt z uwzględnieniem wstępnych ugięć. Autor jako pierwszy określił kryterium wyznaczania krytycznej amplitudy impulsu obciążenia powodującej utratę stateczności, które do dnia dzisiejszego jest powszechnie stosowane pod nazwą kryterium Volmira. W monografii [45] omówiono zagadnienia stateczności konstrukcji pod obciążeniami uderzeniowymi. Na wstępie omówiono podstawowe wiadomości teorii stateczności dynamicznej oraz propagacji zaburzeń w ośrodku sprężystym. Następnie przedstawiono modele obciążeń konstrukcji oraz typowe przebiegi obciążeń quasi-impulsowych. Zwrócono uwagę na szczególne znaczenie w teorii stateczności dynamicznej równania Mathieu, którego rozwiązanie wykorzystuje się do określenia np. obszarów stateczności konstrukcji poddanych obciążeniom pulsującym. W dalszej części pracy przedstawiono zagadnienie stateczności różnych konstrukcji, poddanych określonym obciążeniom dynamicznym. Jednym z prezentowanych przykładów była analiza stateczności dynamicznej płyty prostokątnej poddanej różnym kombinacjom obciążenia.

Z nowszych prac obejmujących swoim zakresem zagadnienie stateczności dynamicznej można wymienić przykładowo Szcześniaka [101], Doyle'a [30], Qatu [91], Awrejcewicza i Krysko [5] oraz Kowal-Michalską [64]. W monografii [101], przedstawiono wybrane zagadnienia z dynamiki płyt. Na wstępie omówiono podstawowe prawa i zasady mechaniki teoretycznej. Dużo uwagi poświęcono drganiom płyt o średniej grubości,

a więc z uwzględnieniem ścinania i bezwładności obrotowej. W sposób elementarny opisano podstawowe zależności w teorii płyt cienkich i średniej grubości. W zasadniczej części monografii przedstawiono rozważania na temat drgań wymuszonych pochodzących od obciążeń impulsowych, harmonicznym, ruchomych i innych. Szczególne znaczenie mają przykłady obliczeniowe, które w sposób obrazowy odzwierciedlają praktyczne zastosowanie licznych teorii prezentowanych w tej pracy. Monografia [30] jest obszernym zbiorem wiedzy inżynierskiej z zakresu metod obliczeniowych konstrukcji cienkościennych. W pracy zwrócono szczególną uwagę na konieczność rozwiązywania zagadnień mechaniki z uwzględnieniem nieliniowych zjawisk zachodzących w wewnętrznej strukturze materiału. Badania analityczne w głównej mierze rozwiązano metodami wariacyjnymi z uwzględnieniem dużych odkształceń. Monografię [5] poświęcono badaniom dynamiki chaotycznej belek, płyt i powłok wykonanych z materiału niejednorodnego. Na wstępie omówiono podstawy modelowania konstrukcji oraz podstawowe pojęcia teorii stateczności sprężystej. Następnie omówiono podstawowe postacie kryterium energetycznego bifurkacyjnej utraty stateczności. Po czym szczegółowo opisano, szeroko stosowane w badaniach stateczności płyt, przybliżone metody typu Bubnowa-Galerkina. W dalszej części omówiono zagadnienia liniowych i nieliniowych drgań płyt i powłok. W dużej części pracy przeprowadzono badania numeryczne w zakresie drgań i utraty stateczności powłok prostokątnych oraz walcowych (w ujęciu statycznym i dynamicznym). Ostatecznie omówiono scenariusze przejścia od ruchów harmonicznym do chaotycznych oraz przedstawiono porównanie wyników badań drgań chaotycznych, podatnych prostokątnych powłok, uzyskanych za pomocą metody Bubnowa-Galerkina oraz metody różnic skończonych. Najnowsze badania z zakresu stateczności dynamicznej kompozytowych konstrukcji płytowych przedstawiono w monografii [64], natomiast badań drgań płyt i powłok w monografii [91].

Pierwsze prace z zakresu dynamiki płyt dotyczyły drgań. Przegląd prac poświęconych stateczności dynamicznej płyt i powłok w latach 1987-2005 przedstawili Sahu i Datta [97]. W pracy Wang'a i innych [115] przeprowadzono badania stateczności dynamicznej lepkosprężystej płyty prostokątnej. Równanie różniczkowe ruchu płyty wyprowadzono na podstawie teorii cienkich płyt oraz dwuwymiarowych, różniczkowych związków konstytutywnych (Laplace'a). Przedstawiono również wyprowadzenie różniczkowego równania ruchu na podstawie modelu Kelvin-Voigt'a. Płytę obciążono równomiernie rozłożonymi siłami stycznymi. Uwzględniono różne przypadki podparcia (cztery lub dwie

krawędzie swobodnie podparte oraz dwie krawędzie utwierdzone). Określono bezwymiarową postać trzech pierwszych częstotliwości płyty oraz czynniki mające wpływ na stateczność dynamiczną badanej płyty. W pracy przedstawiono również dynamiczne kryteria stateczności konstrukcji oraz porównanie wyników otrzymanych przy pomocy dwóch metod (różnic skończonych oraz Bubnowa-Galerkina). W pracy Leissy [69] przedstawiono historyczne podstawy stosowania metod Rayleigh'a i Ritz'a do obliczeń rzeczywistych częstości drgań własnych ośrodków ciągłych (strun, prętów, belek, membran oraz płyt) przy założeniu odpowiedniego kształtu oraz ustawieniu maksimum energii potencjalnej i kinetycznej w cyklu ruchu jeden po drugim. W pracy przedstawiono szczegółowe badania tej metody oraz sposób przedstawienia przez poszczególnych autorów: Rayleigh'a oraz przez Ritz'a. Na podstawie przeprowadzonego przeglądu literatury autor konkluduje nad poprawnością nazewnictwa metod. Badania dynamicznej stateczności całkowicie swobodnej płyty prostokątnej poddanej pośrednio działaniu sił wtórnych przedstawiono w pracy Kim'a i Park'a [56]. Badania ściśle związane ze zmianą pozycji linii działania siły oraz zmianą wydłużenia płyty. Jeżeli siła wtórna działa w pośredniej (między brzegami) części płyty, muszą zostać przeanalizowane dwa obszary płyty. Z powodu rozkładu sił bezwładności płyty, jeden z obszarów podlega analizie sił ściskających a drugi sił rozciągających. W pracy zastosowano zasadę Hamiltona. Wyniki obliczeń przedstawiono za pomocą krzywych na wykresach. Deolasi i Datta [24] badali wpływ parametrycznego wzbudzenia na niestateczne obszary płyty poddanej działaniu okresowych sił ściskających lub rozciągających rozłożonych na krawędziach płyty w sposób miejscowy. Uwzględniono efekt ścinania oraz inercji. Badano oraz omówiono różne konfiguracje obciążenia. Zwrócono szczególną uwagę na wcześniejsze pojawienie się obszarów niestatecznych w przypadkach obciążeń położonych w pobliżu narożnika płyty. W pracy Shimpi i Patel'a [99] przedstawiono rozwinięcie udoskonalonej teorii dwóch zmiennych (RPT) w celu przeprowadzenia analizy drgań swobodnych płyt. Zastosowanie teorii omówiono na przykładzie jednorodnej izotropowej płyty prostokątnej swobodnie podpartej na wszystkich brzegach. Na wstępie pracy w prosty sposób przedstawiono rozwój podstawowych teorii płyt uwzględniających efekt ścinania w przekroju poprzecznym. Wykazano, że w przeciwieństwie do innych teorii posiadających sprzeczności, proponowana teoria jest wariacyjnie zgodna. Otrzymano dwa równania rządzące sprzężone bezwładnościowo bez żadnych sprzężeń sprzężystych. Występują tylko dwie nieznane funkcje wobec trzech w przypadku teorii Mindlin'a. Z różnych względów autorzy wskazują na wysokie podobieństwo prezentowanej teorii z klasyczną teorią płyt (CPT). Przedstawiona teoria nie wymaga uwzględnienia czynnika

korygującego efekt ścinania. Naprężenia ścinające są zmienne parabolicznie na grubości płyty. W analizie stateczności dynamicznej konstrukcji poddanej okresowo zmiennemu obciążeniu w czasie szczególne znaczenie ma równanie Mathieu. Podstawy teoretyczne oraz zastosowanie tego równania opisano w sposób szczegółowy w pracach [30, 45, 85, 111]. Badania stateczności dynamicznej konstrukcji porowatych sprowadzających układ równań ruchu do równania różniczkowego Mathieu można prześledzić w pracach [26, 75]. W pracy Magnuckiej-Blandzi i Magnuckiego [75] analizowano porowatą płytę kołową ścisną promieniowo. Badania przeprowadzono dla dwóch przypadków utwierdzenia brzegów płyty (swobodnie podpartej i utwierdzonej). Natomiast przykład porowatej płyty prostokątnej swobodnie podpartej na całym obwodzie i poddanej jednoosiowemu ścisnaniu omówiono w pracy Dębowskiego i Magnuckiego [26]. W obydwu pracach właściwości mechaniczne po grubości są zmienne i zależą od porowatości materiału. Najpierw zdefiniowano pole przemieszczeń w dowolnym przekroju poprzecznym płyty a następnie znaleziono składowe odkształcenia oraz stanu naprężeń. Równania stateczności dynamicznej wyprowadzono z zasady Hamiltona, a następnie rozwiązano w sposób przybliżony przy użyciu metody Bubnowa-Galerkina. W zależności od parametrów porowatości i obciążenia określono granice niestatecznych obszarów. Gbadeyan i Dada [39] badali dynamiczną reakcję płyty prostokątnej Mindlin'a w zakresie sprężystym poddanej ruchomemu obciążeniu. Płyta została swobodnie podparta na krawędziach zewnętrznych. W równaniach uwzględniono efekt deformacji ścinania oraz inercji obrotu. W pracy przedstawiono wpływ maksymalnych sił ścinających, zginających oraz momentów skręcających na ugięcie płyty. Fares i Zenkour [37] badali dynamiczną odpowiedź niejednorodnych, kompozytowych laminatów prostokątnych. Przedstawiono wyniki badań numerycznych częstotliwości drgań własnych oraz dynamicznych sił krytycznych z uwzględnieniem poprzecznej symetrii warstw laminatu. Badano wpływ stopnia niejednorodności, współczynników kształtu, oraz współczynnika ortotropii na wartość częstości drgań własnych oraz krytycznych sił wyboczenia. Z badań wywnioskowano, że klasyczna teoria płyt jest nieodpowiednia do analizy laminatów oraz że drgania własne oraz stan stateczności są ściśle związane ze stopniem niejednorodności materiału.

Jednym z powszechnie analizowanych przypadków wyboczenia jest rozwiązanie zagadnienia utraty stateczności konstrukcji poddanych obciążeniu rosnącemu proporcjonalnie do czasu. Przykłady badań związanych z tego typu zagadnieniem można prześledzić na podstawie prac [14, 25, 31, 32, 33, 102, 103,]. Eshmatov [32, 33] badał stateczność

dynamiczną lepkosprężystej ortotropowej płyty prostokątnej, poddanej liniowo narastającemu w czasie obciążeniu zewnętrznemu. W pracy [32] przyjęto że płyta jest ściskana jednostronnie siłami równomiernie rozłożonymi na przeciwległych krawędziach. Model płyty oparto na uogólnionej teorii Timoshenki z wykorzystaniem geometrycznie nieliniowych związków. Zagadnienie rozwiązano metodą Bubnowa–Galerkina w połączeniu z numeryczną metodą opartą na wzorach kwadratury. Badano wpływ lepkosprężystych i niejednorodnych własności materiału na dynamiczną utratę stateczności płyty. W pracy [33] płytę obciążono, równomiernie rozłożonymi na krawędziach zewnętrznych, siłami ściskającymi oraz stycznymi. Model płyty oparto na hipotezie Kirchhoff’a–Love’a i uogólnionej teorii Reissner’a–Mindlin’a, uwzględniającej w geometrycznie nieliniowych związkach efekt ścinania oraz inercji obrotu. W zadaniach badano zbieżność metody Bubnowa–Galerkina. W sposób graficzny przedstawiono wpływ materiału lepkosprężystego na drgania oraz dynamiczną utratę stateczności płyty. Przypadek prostokątnej ortotropowej płyty poddanej szybko wzrastającemu obciążeniu ściskającemu analizował również Ekstrom [31].

Badania swobodnie podpartej płyty ze wstępnymi imperfekcjami przeprowadzono w zakresie sprężystym. Przyjęto geometrycznie nieliniowe związki dla dużych ugięć. Badano wpływ imperfekcji oraz efektu inercji na przebieg wyboczenia. Dębowski [25] przedstawił wyniki badań porowatej płyty prostokątnej swobodnie podpartej na całym obwodzie i obciążonej siłami jednostkowymi działającymi w dwóch kierunkach. Przyjęto nieliniową hipotezę przemieszczeń oraz nieliniowe związki geometryczne. Naprężenia normalne i styczne określono zgodnie z prawem Hooke’a. Analizowano wpływ współczynnika porowatości na postać wyboczenia płyty. Rozwiązanie zagadnienia wyboczenia ściskanej otwartej trójwarstwowej powłoki walcowej przy założeniu, że obciążenie wzrasta szybko w czasie omówiono w pracy Szyca [102] natomiast przypadek obciążenia wzrastającego ze stałą prędkością w pracy Szyca i Twardosza [103]. W pracy [102] konstrukcję obciążono siłami ściskającymi w dwóch kierunkach. Autor zwraca uwagę na wzrastającą rolę energii kinetycznej w ogólnym bilansie energetycznym przy założeniu dużej prędkości deformacji. W pracy [103] powłokę obciążono siłami stycznymi na swobodnie podpartych brzegach. Dodatkowo uwzględniono początkowe odchylenia od geometrycznie idealnego kształtu powłoki. W obu pracach badano wpływ szeregu parametrów fizycznych i geometrycznych powłoki na przebieg dynamicznego wyboczenia. Badania małowyniosłej, sprężystej powłoki trójwarstwowej o niesymetrycznej, izotropowej budowie warstw przedstawiono w pracy Bugajnego [14]. W równaniach uwzględniono efekt inercji obrotu elementu powłoki oraz początkowe odchylenie od geometrycznie idealnego kształtu. Przykład liczbowy dotyczy

powłoki ściskanej siłami zmieniającymi się w czasie według funkcji wykładniczej. Analizowano wpływ efektu inercji obrotu na wartość krytycznego obciążenia dynamicznego i czasu krytycznego.

W literaturze nie znaleziono ścisłego rozwiązania matematycznego pozwalającego na określenie dynamicznych obciążeń krytycznych konstrukcji obciążonych quasi-impulsowo. Dlatego przy ich ocenie istotne jest stosowanie odpowiedniego kryterium. Pierwszym znanym kryterium dynamicznej utraty stateczności jest kryterium Volmira. Mówi ono, że utrata stateczności następuje w momencie gdy maksymalne ugięcie płyty równe jest jej grubości. Jednakże w zależności od charakteru impulsu oraz jego czasu trwania powinno się stosować różne kryteria. Powstało wiele prac poświęconych temu zagadnieniu. Można wyróżnić tutaj pracę Kubiaka [67], Li [71], Kowal-Michalskiej [63]. Ogólny przegląd powszechnie stosowanych kryteriów przedstawiono w pracy [63]. Następnie analizowano wpływ takich parametrów jak wstępne imperfekcje, kształt i czas trwania impulsu na odpowiedź dynamiczną konstrukcji płytowej. W pracy porównano również wartości dynamicznych obciążeń krytycznych uzyskanych dla trzech różnych kryteriów. W pracy [71] szczególnie uwzględniono rozwinięcie efektywnych metod do określenia dynamicznych obciążeń krytycznych konstrukcji z użyciem wielostopniowego elementu skończonego. W porównaniu z innymi pierwotnymi kryteriami określona metoda znacznie skraca obliczenia numeryczne. Kubiak [67] zaproponował nowe kryterium stateczności bazując na quasi-bifurkacyjnym kryterium stateczności dynamicznej dla obciążenia skokowego. Przedstawione kryterium pozwala wyznaczyć wartości krytyczne dla postaci globalnych co nie jest możliwe przy wykorzystaniu kryterium Volmira.

Dynamiczne wyboczenie cienkościennych kompozytowych płyt prostokątnych poddanych obciążeniu impulsowemu w płaszczyźnie płyty badał Kubiak [68]. Założono że płyta jest wykonana z ortotropowego materiału w którym główne kierunki ortotropii są równoległe do krawędzi płyty oraz obciążona wzdłuż swobodnie podpartych krawędzi. Dla pozostałych brzegów założono pięć różnych warunków brzegowych. Równania wyprowadzono z uwzględnieniem wszystkich składowych sił inercji. Do rozwiązania równań ruchu zastosowano zasadę Hamiltona. Nieliniowy problem stateczności statycznej rozwiązano przy użyciu teorii drugiego rzędu Koiter'a. Wyniki uzyskane na drodze analityczno numerycznej porównano z wynikami MES. Ari-Gur i Simonetta [2] badali dynamiczną utratę stateczności kompozytowej płyty prostokątnej w zakresie sprężystym, poddanej jednostronnemu obciążeniu impulsowemu. W modelu matematycznym uwzględniono

geometrycznie nieliniowe związki oraz efekt propagacji fali. Badano wpływ orientacji włókien w laminowanych warstwach. Zdefiniowano odpowiednie kryteria w zależności od charakteru i czasu trwania obciążenia oraz różnych konfiguracji prelaminate. Stwierdzono że w pewnych przypadkach dynamiczne obciążenia krytyczne nie zawsze są większe od statycznych. Zaobserwowano również małą wrażliwość konfiguracji poszczególnych warstw na krytyczne osiowe przemieszczenie. Otrzymane wyniki poparto wynikami otrzymanymi metodą elementów skończonych. Petry i Fahlbusch [90] badali stateczność dynamiczną swobodnie podpartych cienkich izotropowych płyt, poddanych obciążeniu impulsowemu. Zagadnienie rozwiązano przy użyciu metody Galerkina z zastosowaniem podwójnych szeregów Fourier'a. W badaniach parametrycznych określano wpływ takich czynników jak czas trwania impulsu, imperfekcje, wymiary płyty oraz dopuszczalne naprężenia dla danego materiału na utratę stateczności płyty. Do oceny wyników wykorzystano kryterium Budiansky'ego-Hutchinson'a. W pracy Kołakowskiego i Kubiaka [59] zaprezentowano zagadnienie dynamicznej odpowiedzi cienkościennych kolumn poddanych w płaszczyźnie obciążeniu impulsowemu z uwzględnieniem zjawiska opóźnienia ścinania oraz poprzecznych deformacji. Do badań przyjęto konstrukcje cienkościenną, o przekroju ceowym, swobodnie podpartą na krawędziach zewnętrznych. W celu otrzymania równań ruchu dla oddzielnych płyt zmodyfikowano nieliniową teorię cienkościennych płyt ortotropowych w taki sposób, żeby dodatkowo uwzględnić wszystkie składowe sił bezwładności (inercji). Do rozwiązania różniczkowych równań ruchu zastosowano zasadę Hamiltona. Rozwiązanie równań w sposób przybliżony uzyskano dzięki zastosowaniu metody zaburzeń, natomiast problem nieliniowej stateczności rozwiązano za pomocą metody przeniesienia macierzy. Obliczenia przeprowadzono przy użyciu analityczno-numerycznej metody asymptotycznej (A-N) a następnie zweryfikowano metodą elementów skończonych (MES). Prezentowana metoda analityczno-numeryczna przedstawia bardzo efektywne rozwiązania stateczności dynamicznej dla różnych typów cienkościennych konstrukcji z uwzględnieniem mezostruktury oraz różnych przypadków obciążenia złożonego. Pozwala badać dynamiczną odpowiedź konstrukcji w zależności od różnych kształtów obciążenia impulsowego oraz określić wartość dynamicznego obciążenia krytycznego z uwzględnieniem różnych dynamicznych kryteriów wyboczeniowych. Dzięki zbieżności wyników obu metod potwierdzono słuszność zastosowania metody analityczno-numerycznej (A-N) do tego typu analiz. Prezentowana praca jest wstępem do serii opracowań poświęconych badaniom interakcyjnego dynamicznego wyboczenia cienkościennych konstrukcji.

W pracy Czechowskiego i Kowal-Michalskiej [23] badano stateczność dynamiczną ortotropowych płyt prostokątnych podpartych przegubowo. Przedstawiono szczególny przypadek złożonego dynamicznego obciążenia impulsem prostokątnym o czasie trwania równym okresowi drgań własnych płyty. Zależność maksymalnego ugięcia w funkcji stosunku amplitudy impulsu do statycznej siły krytycznej zaprezentowano na wykresach. Wykazano, że dla płyty izotropowej o tym samym ugięciu wstępnym odpowiedzi dynamiczne w przypadku czystego ściskania i obciążenia złożonego różnią się nieznacznie. Potwierdzono, że orientacja głównych kierunków ortotropii względem brzegów płyty ma istotny wpływ na wielkość dynamicznych obciążeń krytycznych. Aydogdu i Ece [6] badali wyboczenie i drgania swobodnie podpartej izotropowej prostokątnej płyty. Założono że na jednym z brzegów płyty mogą występować małe ugięcia i moment. Płytę obciążono w płaszczyźnie siłami rozłożonymi równolegle i prostopadle do krawędzi na której nie są spełnione wszystkie warunki brzegowe. Zagadnienie rozwiązano przy użyciu metody zaburzeń Linshtead-Poincare. Cui i inni [21, 22] przedstawili badania numeryczne MES dynamicznej utraty stateczności płyt prostokątnych poddanych obciążeniu uderzeniowemu z uwzględnieniem imperfekcji. Na podstawie uzyskanych wyników określono dynamiczne obciążenia krytyczne płyty oraz dynamiczny warunek kryterium plastyczności. Stwierdzono również wpływ wskaźników utwardzania materiału płyty na sprężysto-plastyczne właściwości dynamicznego wyboczenia płyty. Potwierdzono zgodność wyników obliczeń numerycznych z wcześniejszymi badaniami doświadczalnymi. Zhang i inni [124] przedstawili uproszczone obliczenia dynamicznej utraty stateczności usztywnionej płyty, poddanej obciążeniu uderzeniowemu. Model dyskretny płyty oparto na teorii dużych ugięć. W analizie pominięto naprężenia styczne oraz przemieszczenia w płaszczyźnie płyty. Równania wyprowadzono z zasady Hamiltona. Funkcje aproksymujące ugięcie przyjęto w postaci szeregu Fourier'a. Otrzymany układ równań rozwiązano metodą Galerkina a następnie metodą Rungego-Kutty. Dynamiczne obciążenia krytyczne określono przyjmując kryterium Budiansky'ego-Roth'a.

Badania doświadczalne stanowią jeden z najważniejszych sposobów weryfikacji teorii, dlatego prace przedstawiające ich wyniki mają zasadniczy wpływ na rozwój danej gałęzi wiedzy. Przykładowe badania doświadczalne stateczności płyt omówiono w pracach [1, 18, 20, 46, 57, 58, 94, 108]. Gu i Chattopadhyay [46] badali kompozytowe laminowane płyty prostokątne ściskane jednokierunkowo. Badano wyboczenie oraz przebieg utraty stateczności płyt. Szczególny nacisk położono na proces rozwarstwiania się konstrukcji (delaminacji).

Cui, Cheong i Hao [18, 20] badali sprężysto plastyczne właściwości dynamicznej utraty stateczności płyty prostokątnej poddanej obciążeniu uderzeniowemu. Płyta wykonano ze stali niskostopowej. Na podstawie przeprowadzonych badań w pracy [20], zdefiniowano dynamiczne kryterium utraty stateczności oraz dynamiczne kryterium dla zakresu plastycznego. Zaobserwowano że w przypadku badanych płyt dynamiczna utrata stateczności zachodzi zawsze w zakresie sprężystym. Badania doświadczalne w zakresie maksymalnych obciążeń niszczących konstrukcję przedstawiono w pracy [18]. Na podstawie uzyskanych wyników zaproponowano dynamiczne kryterium zniszczenia konstrukcji. W pracach badano również wpływ różnych warunków brzegowych na właściwości dynamicznej utraty stateczności. Abramovich [1] przeprowadził badania laminowanych wielowarstwowych płyt kompozytowych poddanych osiowemu obciążeniu uderzeniowemu. Analizowano pięć płyt z różnymi warunkami brzegowymi i o różnych własnościach materiałowych. Statyczne i dynamiczne obciążenie krytyczne uzyskano w oparciu o zmodyfikowaną metodę Donnell'a. Ze szczególną uwagą przeanalizowano wpływ współczynnika obciążenia dynamicznego (DLF) na wartość obciążenia krytycznego. Tereszowski [108] badał zachowanie się po utracie stateczności cienkościennej płyty podpartej na trzech brzegach przegubowo przesuwnie w płaszczyźnie płyty, a na czwartym brzegu swobodnie. Określono wartości maksymalnej siły, którą może przenosić płyta oraz zbadano parametry wpływające na jej wartość. Kim i Hoa [57] badali doświadczalnie i numerycznie wyboczenie kompozytowych płyt poddanych dwuosiowemu obciążeniu ściskającemu. W celu poprawności wykonania badania zaproponowano zmianę geometrii płyty poprzez zmodyfikowanie jej narożników (ścięcia). Badano wpływ modyfikacji konstrukcyjnej na wartość siły krytycznej w porównaniu z rozwiązaniem idealnej płyty.

Na podstawie przeprowadzonej analizy literatury można stwierdzić, iż badania płyt zmierzają głównie w kierunku opracowania modelu teoretycznego jednoznacznie określającego strukturę wewnętrzną oraz zachowanie się konstrukcji. Powszechnie stosowane metody obliczeń opierają się na założeniach idealizacji zachodzących zjawisk oraz struktury wewnętrznej materiału. W rzeczywistości jednak, prawie wszystkie materiały charakteryzują się nieuporządkowaną strukturą. W tego typu materiałach problemy mechaniki i wytrzymałości stają się zagadnieniami bardzo złożonymi i z tego powodu dokonuje się niezbędnych uproszczeń w ramach stosowanej teorii np. uśredniania wskaźników mechanicznych lub wielkości fizycznych na grubości płyty. Standardowy model obliczeniowy może znacznie odbiegać od obiektu rzeczywistego dlatego bardzo ważne jest

uwzględnienie w nim odpowiedniego opisu wewnętrznej struktury materiału. W zależności od struktury materiału, przyjmuje się różne hipotezy przemieszczeniowe opisane związkami liniowymi lub nieliniowymi. W przypadku struktur jednowarstwowych najczęściej wykorzystuje się hipotezy Kirchhoffa-Love'a, Reissnera lub Mindlin'a natomiast dla struktur wielowarstwowych, odpowiednie modyfikacje hipotezy linii łamanej. Należy zwrócić uwagę na fakt, iż w istniejących dotychczas teoriach występują pewne wewnętrzne sprzeczności.

W rozprawie postanowiono zająć się przede wszystkim rozwiązaniem analitycznym, które mogłoby wyeliminować problematykę występowania wewnętrznych sprzeczności teorii w modelowaniu konstrukcji płytowych o niejednorodnej strukturze materiału.

Przedmiotem rozprawy jest płyta prostokątna o strukturze porowatej. Przyjęto zmienny, ciągły i symetryczny względem powierzchni środkowej rozkład właściwości mechanicznych i fizycznych na grubości płyty.

Biorąc pod uwagę możliwości wykorzystania rozwiązań analitycznych w zastosowaniach praktycznych, można sądzić o zasadności wyboru tematu. Podjęty temat pracy jest szczególnie istotny z punktu widzenia opisu konstrukcji a spodziewane wyniki mają ciekawe aspekty poznawcze.

Dokonany przegląd literatury pozwolił na sformułowanie tezy, celu i założeń pracy

Teza rozprawy. Istnieje możliwość sformułowania pola przemieszczeń – deformacji przekroju poprzecznego ścianki, na podstawie której zdefiniowane siły i momenty wewnętrzne nie będą zawierały sprzeczności (brak wewnętrznej sprzeczności teorii), która jest charakterystyczna dla klasycznych teorii

Celem rozprawy doktorskiej jest zbadanie stateczności dynamicznej płyty prostokątnej, poddanej obciążeniom zmiennym w czasie.

Postawiony w pracy problem jest rozwiązany w następującej kolejności:

- przyjęcie modelu stanu przemieszczeń w przekroju poprzecznym płyty,
- wyprowadzenie różniczkowych równań ruchu za pomocą wariacyjnej zasady Hamiltona,
- rozwiązanie równań za pomocą ortogonalizacyjnej metody Bubnowa-Galerkina,
- badania analityczne i numeryczne stateczności konstrukcji,
- badania porównawcze wybranych przypadków metodą elementów skończonych.

2. ZAŁOŻENIA I PODSTAWOWE ZALEŻNOŚCI

Główną charakterystyczną cechą, związaną z analizą dynamiki i statyki płyt cienkich, stanowi sprowadzenie problemu trójwymiarowego teorii sprężystości do zagadnienia dwuwymiarowego. W takich przypadkach, należy układ współrzędnych związać z powierzchnią środkową płyty. W podstawowej teorii płyt cienkich redukcję zagadnienia trójwymiarowego do zagadnienia dwuwymiarowego stanowi przyjęcie hipotezy, dotyczącej braku odkształcalności prostych prostopadłych do ich powierzchni, czyli tzw. *hipotezy Kirchhoffa*. Polega ona na tym, że dowolne punkty, które przed odkształceniem leżały na odcinkach prostopadłych do płaszczyzny środkowej, po odkształceniu płyty znajdować się będą na odcinkach prostopadłych do powierzchni wygiętej płyty. Założenie to jest analogiczne do „założenia płaskich przekrojów” (*Bernoulliego*) w teorii zginania belek. Ponadto hipoteza ta zakłada, że naprężenia normalne prostopadłe do powierzchni środkowej są pomijalnie małe w porównaniu z pozostałymi naprężeniami oraz nie uwzględnia odkształceń płaszczyzny środkowej płyty, które de facto w rzeczywistości zawsze występują. Przeprowadzone badania potwierdziły jednak zasadność przyjętych założeń, ale w przypadku, gdy ugięcia płyty są małe w porównaniu z jej grubością. Jeżeli natomiast ugięcia są większe, to konieczne jest uwzględnienie tych naprężeń przy wyprowadzeniu równania różniczkowego płyty, otrzymujemy w ten sposób równanie nieliniowe. Należy także uwzględnić przesuwności lub nieprzesuwności krawędzi płyty w płaszczyźnie środkowej płyty, gdyż ma to duży wpływ na wielkość ugięć i naprężeń w płycie.

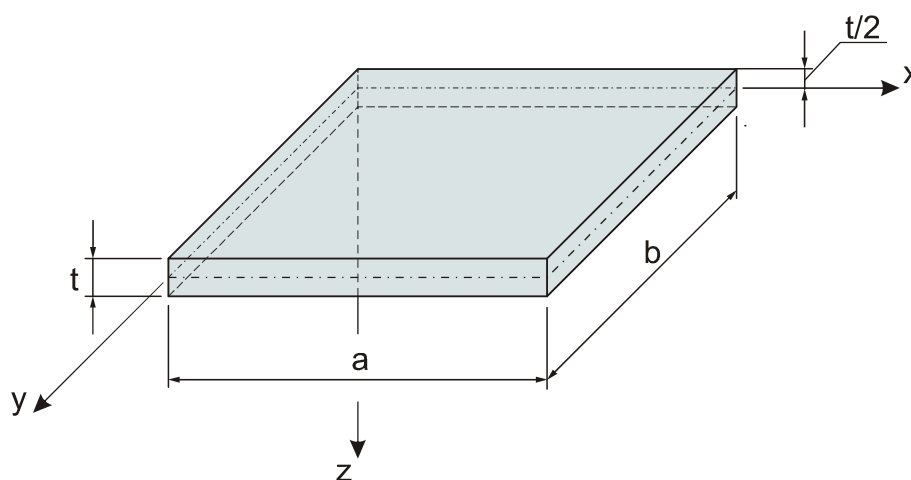
W pracy odstąpiono od hipotezy *Kirchhoffa*, przyjmując nieliniową hipotezę odkształcenia płaskiego przekroju poprzecznego płyty, uwzględniającą efekt ścinania.

W pracy przyjęto dodatkowo następujące założenia :

- kształt płyty jest idealny
- płyta spełnia warunek cienkościennych konstrukcji powierzchniowych
- płyta wykonana jest z materiału sprężystego izotropowego (własności sprężyste są takie same we wszystkich kierunkach)
- płyta podparta jest przegubowo-przesuwnie na całym obwodzie

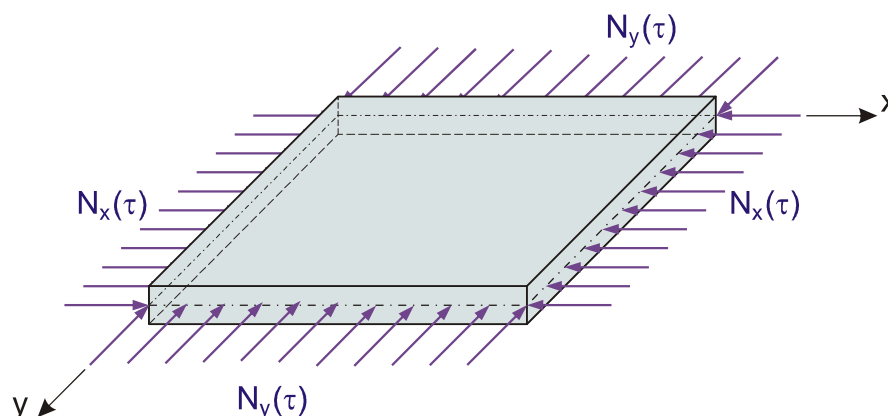
2.1 Przedmiot badań

Przedmiotem badań jest porowata płyta prostokątna o długości boków a i b oraz grubości t . Zgodnie z definicją konstrukcji cienkościennych zakładamy, że grubość płyty jest znacznie mniejsza od jej pozostałych wymiarów. Płyta zorientowana jest w prostokątnym układzie współrzędnych x, y, z , przy czym płaszczyzna podstawowa xy leży w płaszczyźnie środkowej płyty (Rys.2.1). Linię powstałą w wyniku przecięcia się płaszczyzny środkowej ze ściankami bocznymi płyty nazywamy brzegiem płyty.



Rys. 2.1. Model geometryczny płyty.

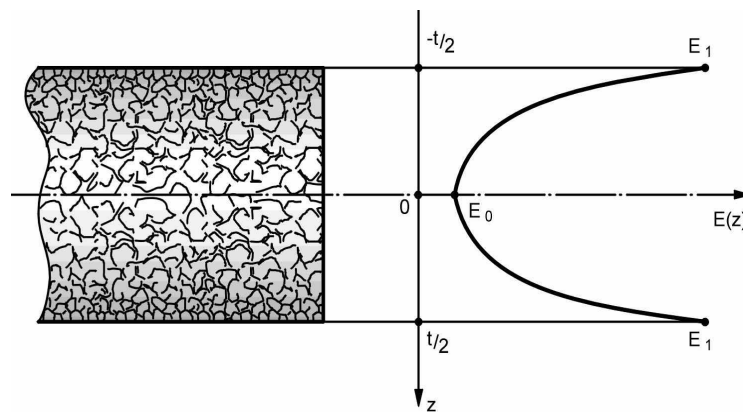
Płyta obciążona jest w płaszczyźnie środkowej siłami ściskającymi, których kierunki działania są zgodne z osiami x i y (Rys. 2.2). Intensywność obciążeń N_x oraz N_y jest stała na długości brzegów płyty. Wartość obciążenia jest zmienna w czasie i nie zależy od współrzędnych x, y, z .



Rys. 2.2. Schemat obciążenia płyty.

2.2 Model fizyczny materiału porowatego

Płyta wykonana jest z niejednorodnego materiału porowatego charakteryzującego się uporządkowaną strukturą porów. Właściwości mechaniczne i fizyczne są zmienne po grubości płyty i zależą od porowatości materiału. Zmiana modułów sprężystości i gęstości jest ciągła i symetryczna względem powierzchni środkowej płyty, przy czym maksymalna wartość modułu Younga E_1 występuje na zewnętrznych powierzchniach płyty, natomiast wartość minimalna E_0 na jej powierzchni środkowej (Rys.2.3).



Rys. 2.3 Graficzna ilustracja zmiany modułu sprężystości na grubości płyty.

Zmianę modułów sprężystości wyrażono za pomocą funkcji, które przyjęto jak dla belki porowatej na podstawie prac Magnuckiego i Stasiewicza (2004) [81, 82], w postaci:

$$E(\zeta) = E_1 [1 - e_0 \cos(\pi\zeta)], \quad (2.1)$$

$$G(\zeta) = G_1 [1 - e_0 \cos(\pi\zeta)]. \quad (2.2)$$

gdzie:

$$e_0 = 1 - \frac{E_0}{E_1} = 1 - \frac{G_0}{G_1} \quad \text{– bezwymiarowy parametr porowatości } (0 \leq e_0 < 1),$$

E_0, E_1, G_0, G_1 – moduły sprężystości wzdłużnej (Younga) i poprzecznej (Kirchhoffa) odpowiednio dla $\zeta = 0$ i $\zeta = \pm 1/2$,

$\zeta = z/t$ – bezwymiarowa współrzędna.

Struktura materiału porowatego w głównej mierze zależy od wartości bezwymiarowego parametru porowatości e_0 . W przypadku gdy $e_0 = 0$ mamy postać materiału o strukturze jednorodnej, natomiast w przypadku wartości parametru z zakresu $0 \leq e_0 < 1$ otrzymamy strukturę niejednorodną.

W rozdziale pierwszym zwrócono uwagę na szereg problemów związanych z wytwarzaniem oraz modelowaniem materiałów porowatych. Jednym z nich jest dokładne określenie zależności pomiędzy stałymi sprężystości a gęstością materiału. Prace badawcze poświęcone badaniu tych zależności wykonali przykładowo Choi i Lakes [19] oraz Gibson i Ashby [40]. W wyniku przeprowadzonych badań przedstawiono równanie określające zależność pomiędzy modułem Younga i gęstością materiału porowatego w postaci $E_0/E_1 = (\rho_0/\rho_1)^2$. Uwzględniając wyniki przytoczonych prac w niniejszej pracy przyjęto model gęstości materiału porowatego w następującej formie:

$$\rho(\zeta) = \rho_1 [1 - e_m \cos(\pi\zeta)], \quad (2.3)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \rho_0, \rho_1 & \text{ – gęstość materiału odpowiednio dla } \zeta = 0, \zeta = \pm 1/2, \\ e_m = 1 - \sqrt{1 - e_0} & \text{ – bezwymiarowy parametr gęstości.} \end{aligned}$$

Zakładając, że płyta po utracie stateczności odkształca się w zakresie sprężystym, przyjęto liniowe związki fizyczne pomiędzy składowymi stanu naprężenia i składowymi stanu odkształcenia zgodnie z prawem Hooke'a w postaci :

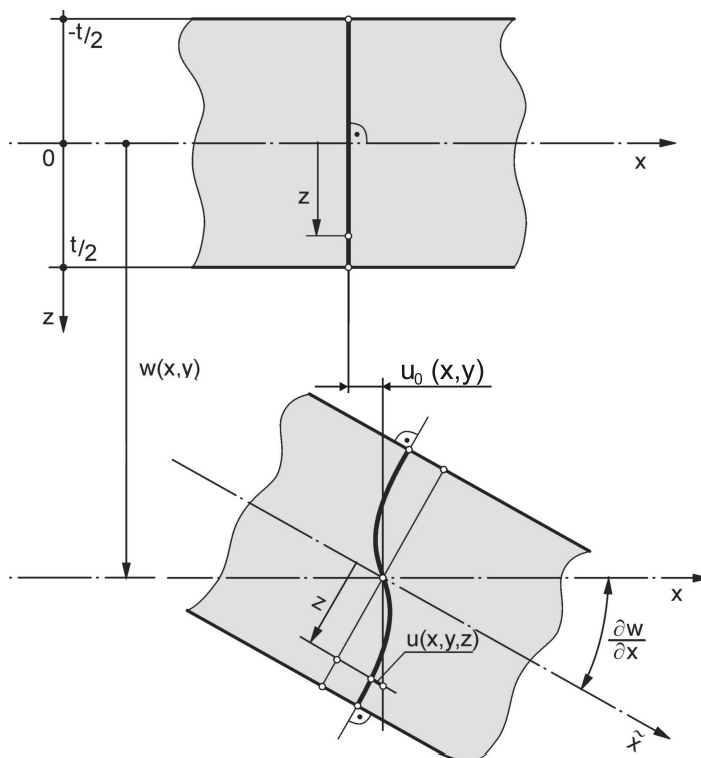
$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E(\zeta)}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y), \\ \sigma_y &= \frac{E(\zeta)}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x), \\ \tau_{xy} &= G(\zeta) \cdot \gamma_{xy} = \frac{E(\zeta)}{2(1+\nu)} \cdot \gamma_{xy}, \\ \tau_{xz} &= G(\zeta) \cdot \gamma_{xz} = \frac{E(\zeta)}{2(1+\nu)} \cdot \gamma_{xz}, \\ \tau_{yz} &= G(\zeta) \cdot \gamma_{yz} = \frac{E(\zeta)}{2(1+\nu)} \cdot \gamma_{yz}, \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

gdzie:

- σ_x, σ_y – naprężenia normalne,
- $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ – naprężenia styczne,
- $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ – wydłużenia względne wzdłuż osi x i y ,
- $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ – kąty odkształcenia postaciowego w odpowiednich płaszczyznach,
- ν – współczynnik Poissona.

2.3 Model geometryczny płyty

Płaszczyzna przekroju poprzecznego ścianki płyty przed odkształceniem zmienia się po odkształceniu w pewną powierzchnię, która przecina płaszczyzny zewnętrzne płyty pod kątem prostym (Rys.2.4).



Rys. 2.4. Schemat przemieszczeń w przekroju poprzecznym xz ścianki płyty.

Przyjęto nieliniowe związki pomiędzy odkształceniem a przemieszczeniem następującej postaci:

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - t \left\{ \zeta \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{1}{\pi} [\psi_1(x, y) \sin(\pi \zeta) + \psi_2(x, y) \sin(2\pi \zeta) \cos^2(\pi \zeta)] \right\}, \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - t \left\{ \zeta \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{1}{\pi} [\phi_1(x, y) \sin(\pi \zeta) + \phi_2(x, y) \sin(2\pi \zeta) \cos^2(\pi \zeta)] \right\}, \\ w(x, y, z) &= w(x, y, 0) = w(x, y), \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

gdzie:

- $w(x, y)$ – ugięcie płyty,
- $u_0(x, y), v_0(x, y)$ – przemieszczenia styczne dowolnego punktu powierzchni środkowej,
- $\psi_i(x, y), \phi_i(x, y)$ – bezwymiarowe funkcje przemieszczeń dla $i = 1, 2$.

Należy zaznaczyć, że związki (2.5) w zagadnieniu dynamicznym będą występowały jako zmienne zależne również od czasu.

Składowe odkształcenia wyrażone za pomocą przemieszczeń określono następującymi związkami geometrycznymi:

$$\left. \begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = \\
 &\frac{\partial u_0}{\partial x} - t \left\{ \zeta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \sin(\pi \zeta) + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \sin(2\pi \zeta) \cos^2(\pi \zeta) \right] \right\} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \\
 \varepsilon_y &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 = \\
 &\frac{\partial v_0}{\partial y} - t \left\{ \zeta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial y} \sin(\pi \zeta) + \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \sin(2\pi \zeta) \cos^2(\pi \zeta) \right] \right\} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} - \\
 &- t \left\{ 2\zeta \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{1}{\pi} \left[\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right) \sin(\pi \zeta) + \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right) \sin(2\pi \zeta) \cos^2(\pi \zeta) \right] \right\} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y}, \\
 \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \psi_1(x, y) \cos(\pi \zeta) + \psi_2(x, y) [\cos(2\pi \zeta) + \cos(4\pi \zeta)].
 \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

3. DYNAMICZNE RÓWNANIA RUCHU (RÓWNOWAGI PŁYTY)

Różniczkowe równania ruchu wyprowadzono za pomocą zasady wariacyjnej Hamiltona, która stwierdza że rzeczywisty ruch układu punktów materialnych odbywa się w ten sposób, że dla każdego przedziału czasowego (τ_0, τ_1) wariacja całki działania $\int_{\tau_0}^{\tau_1} (T_K - U) d\tau$ jest równa zeru przy dowolnych wariacjach δq_i spełniających warunek $\delta q_i(\tau_0) = \delta q_i(\tau_1) = 0$. W tym celu obliczamy wielkości występujące w działaniu hamiltonowskim

$$\delta \int_{\tau_0}^{\tau_1} (T_K - U) d\tau, \quad (3.1)$$

gdzie:

T_K – energia kinetyczna,

U – energia potencjalna układu,

q_i – niezależne od siebie składowe stanu przemieszczenia,

τ_0, τ_1 – granice dowolnego przedziału czasowego,

τ – czas.

Energię potencjalną U możemy przedstawić w następującej postaci

$$U = U_\varepsilon - W, \quad (3.2)$$

gdzie:

U_ε – energia potencjalna wewnętrznych sił sprężystości,

W – praca sił zewnętrznych (obciążenia).

Jako pierwszą wyznaczmy energię potencjalną wewnętrznych sił sprężystości, określoną równaniem

$$U_\varepsilon = \frac{t}{2} \int_0^a \int_0^b \int_{-1/2}^{1/2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dx dy d\zeta. \quad (3.3)$$

Podstawiając zależności (2.6) powyższe równanie zapisano w postaci

$$U_\varepsilon = \frac{t}{2} \int_0^a \int_0^b \int_{-1/2}^{1/2} \frac{E(z)}{1-\nu^2} \left[(\varepsilon_x^2 + 2\nu \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y^2) + \frac{1}{2}(1-\nu)(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2) \right] dx dy d\zeta. \quad (3.4)$$

Uwzględniając związki (2.6) w równaniu (3.4), a następnie wykonując całkowanie po grubości płyty w granicach $-1/2 \leq \zeta \leq 1/2$ (Załącznik nr 1) otrzymano:

$$\begin{aligned}
U_\varepsilon = & \frac{E_1 t}{2(1-\nu^2)} \int_0^a \int_0^b \left\{ c_1 \left[t^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2\nu t^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + t^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\nu)t^2 \cdot \right. \right. \\
& \cdot \left. \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] - 2 \left[c_2 \left[t^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \nu t^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial \phi_1}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right) + t^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial \phi_1}{\partial y} + \right. \right. \\
& + t^2 (1-\nu) \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \left. \right] + c_3 \left[t^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial \psi_2}{\partial x} + \nu t^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial \phi_2}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right) + \right. \\
& + t^2 \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + t^2 (1-\nu) \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \left. \right] + \left[c_4 \left[t^2 \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right)^2 + 2\nu t^2 \cdot \right. \right. \\
& \cdot \left. \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial \phi_1}{\partial y} + t^2 \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right)^2 + \frac{1-\nu}{2} t^2 \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right)^2 \right] + 2c_5 \left[t^2 \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial \psi_2}{\partial x} + t^2 \nu \cdot \right. \\
& \cdot \left. \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial \phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right) + t^2 \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \frac{\partial \phi_2}{\partial y} + t^2 \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right) \right] + \\
& + c_6 \left[t^2 \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right)^2 + 2\nu t^2 \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \frac{\partial \phi_2}{\partial y} + t^2 \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right)^2 + \frac{1-\nu}{2} t^2 \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right)^2 \right] \left. \right\} + \\
& + \frac{1-\nu}{2} \left[c_7 (\psi_1^2 + \phi_1^2) + 2c_8 (\psi_1 \psi_2 + \phi_1 \phi_2) + c_9 (\psi_2^2 + \psi_2^2) \right] + c_{24} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^4 + \right. \\
& + \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial y} + \nu \frac{\partial u_0}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \\
& + \nu \frac{\partial v_0}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^4 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial v_0}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \right)^2 + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 + \\
& \left. + (1-\nu) \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial v_0}{\partial x} + (1-\nu) \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + (1-\nu) \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \left. \right\} dx dy, \tag{3.5}
\end{aligned}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{1}{12} - \frac{\pi^2 - 8}{2\pi^3} e_0, & c_2 &= \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{4} e_0 \right), & c_3 &= \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{3}{16} - \frac{32}{75\pi} e_0 \right), \\
c_4 &= \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3\pi} e_0 \right), & c_5 &= \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{8}{15\pi} - \frac{1}{8} e_0 \right), & c_6 &= \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{5}{32} - \frac{128}{315\pi} e_0 \right),
\end{aligned}$$

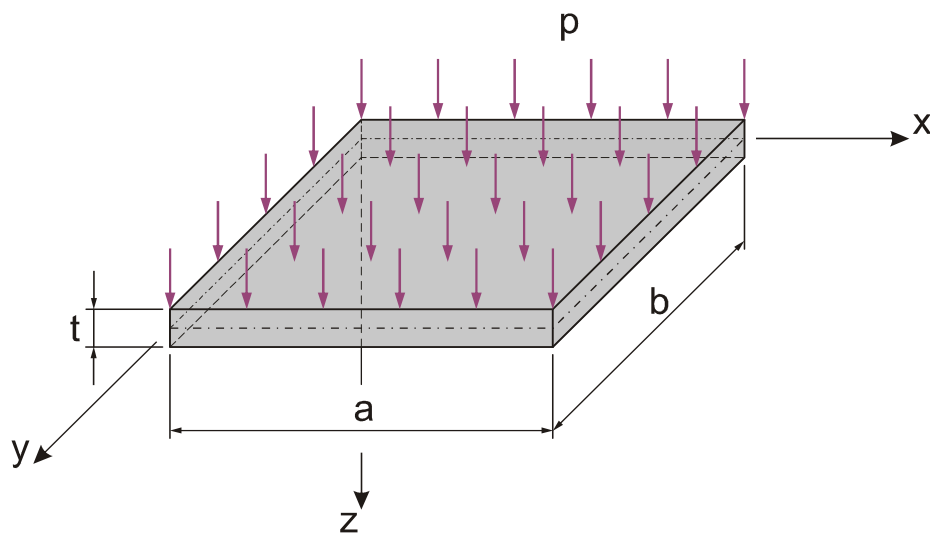
$$c_7 = \frac{1}{2} - \frac{4}{3\pi} e_0, \quad c_8 = \frac{8}{15\pi} - \frac{1}{4} e_0, \quad c_9 = 1 - \frac{832}{315\pi} e_0, \quad c_{24} = 1 - \frac{2}{\pi} e_0.$$

W kolejnym etapie obliczono pierwszą wariację energii sprężystej:

$$\begin{aligned} \delta U_\varepsilon = & \frac{E_1 t}{(1-\nu^2)} \int_0^a \int_0^b \left\{ c_1 t^2 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\delta w) + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\delta w) + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\delta w) \right) + \right. \right. \\ & + \left. \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\delta w) + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\delta w) \right] - \left[c_2 t^2 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x} (\delta \psi_1) + \right. \right. \\ & + \left. \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\delta w) + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial y} (\delta \phi_1) + \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\delta w) + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial}{\partial x} (\delta \psi_1) + \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\delta w) \right) + \right. \\ & + \left. \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial}{\partial y} (\delta \phi_1) + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\delta w) + (1-\nu) \left(\frac{\partial}{\partial y} (\delta \psi_1) + \frac{\partial}{\partial x} (\delta \phi_1) \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + (1-\nu) \cdot \right. \\ & \cdot \left. \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\delta w) \right] + c_3 t^2 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x} (\delta \psi_2) + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\delta w) + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial y} (\delta \phi_2) + \right. \right. \\ & + \left. \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\delta w) + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial}{\partial x} (\delta \psi_2) + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\delta w) \right] + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial}{\partial y} (\delta \phi_2) + \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\delta w) + \\ & + (1-\nu) \left(\frac{\partial}{\partial y} (\delta \psi_2) + \frac{\partial}{\partial x} (\delta \phi_2) \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + (1-\nu) \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\delta w) \left. \right] + \\ & + c_4 t^2 \left[\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta \psi_1) + \nu \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} (\delta \psi_1) + \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} (\delta \phi_1) \right) + \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (\delta \phi_1) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot \right. \\ & \cdot \left. \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial y} (\delta \psi_1) + \frac{\partial}{\partial x} (\delta \phi_1) \right) \right] + c_5 t^2 \left[\frac{\partial \psi_2}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta \psi_1) + \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta \psi_2) + \right. \\ & + \nu \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} (\delta \psi_1) + \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} (\delta \phi_2) + \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} (\delta \psi_2) + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} (\delta \phi_1) \right) + \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (\delta \phi_1) + \\ & + \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (\delta \phi_2) + \frac{1-\nu}{2} \left(\left(\frac{\partial}{\partial y} (\delta \psi_1) + \frac{\partial}{\partial x} (\delta \phi_1) \right) \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial y} (\delta \psi_2) + \frac{\partial}{\partial x} (\delta \phi_2) \right) \cdot \right. \\ & \cdot \left. \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right) \right] + c_6 t^2 \left[\frac{\partial \psi_2}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta \psi_2) + \nu \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} (\delta \psi_2) + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} (\delta \phi_2) \right) + \right. \\ & + \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (\delta \phi_2) + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial y} (\delta \psi_2) + \frac{\partial}{\partial x} (\delta \phi_2) \right) \left. \right] + \frac{1-\nu}{2} \left[c_7 (\psi_1 (\delta \psi_1) + \right. \\ & + \left. \phi_1 (\delta \phi_1) \right) + c_8 \left(\psi_2 (\delta \psi_1) + \psi_1 (\delta \psi_2) + \phi_2 (\delta \phi_1) + \phi_1 (\delta \phi_2) \right) + c_9 \left(\psi_2 (\delta \psi_2) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \phi_2(\delta\phi_2) \Big] + c_{24} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) + \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta u_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial}{\partial x} (\delta u_0) + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u_0}{\partial x} \cdot \right. \\
 & \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (\delta w) + \nu \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} (\delta v_0) + \nu \frac{\partial v_0}{\partial y} \cdot \\
 & \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\delta u_0) + \nu \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (\delta w) + \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial}{\partial x} (\delta u_0) + \nu \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) + \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \cdot \\
 & \cdot \frac{\partial}{\partial y} (\delta v_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^3 \frac{\partial}{\partial y} (\delta w) + \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (\delta v_0) + \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (\delta w) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial}{\partial y} (\delta v_0) + \\
 & + \frac{1-\nu}{2} \left[\frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (\delta u_0) + \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta v_0) + \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} (\delta v_0) + \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} (\delta u_0) + \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} (\delta w) + \right. \\
 & + \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (\delta u_0) + \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} (\delta w) + \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) + \\
 & \left. + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (\delta v_0) \right] \Big] \Big\} dx dy. \tag{3.6}
 \end{aligned}$$

Drugim składnikiem całkowitej energii potencjalnej jest praca sił zewnętrznych, której postać jest zależna od rodzaju obciążenia. Przyjęto, że płyta obciążona jest równomiernie rozłożonym ciśnieniem na całej powierzchni (Rys. 3.1). Natomiast w przypadku sił ściskających, przyłożonych na brzegach płyty, obciążenie definiuje się przez uwzględnienie warunków brzegowych, co przedstawiono w dalszej części pracy.



Rys. 3.1. Schemat obciążenia powierzchniowego płyty.

Pracę obciążenia powierzchniowego wyrażono poniższym wzorem

$$W = \int_0^a \int_0^b p w \, dx dy, \quad (3.7)$$

gdzie:

p – ciśnienie.

Pierwsza wariacja pracy obciążenia

$$\delta W = \int_0^a \int_0^b p(\delta w) \, dx dy. \quad (3.8)$$

Ostatnim składnikiem działania hamiltonowskiego jest energia kinetyczna, którą obliczono na podstawie poniższej zależności

$$T_K = \frac{t}{2} \int_0^a \int_0^b \int_{-1/2}^{1/2} \rho(\zeta) \left[\left(\frac{\partial w}{\partial \tau} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \tau} \right)^2 \right] dx dy d\zeta, \quad (3.9)$$

gdzie:

u, v, w – składowe przemieszczenia dowolnego punktu płyty w kierunku osi odpowiednio x, y, z ,

$\rho(\zeta)$ – gęstość materiału porowatego.

Zakładając, że w zagadnieniach stateczności płyt siły bezwładności w kierunku osiowym w porównaniu ze składową normalną do powierzchni płyty są pomijalnie małe, równanie (3.9) przyjmuje następującą postać

$$T_K = \frac{t}{2} \int_0^a \int_0^b \int_{-1/2}^{1/2} \rho(\zeta) \left(\frac{\partial w}{\partial \tau} \right)^2 dx dy d\zeta. \quad (3.10)$$

Rozwiązując powyższe równanie przy uwzględnieniu zależności (2.3) otrzymano

$$T_K = \frac{1}{2} \rho_1 \cdot c_{11} \cdot t \int_0^a \int_0^b \left(\frac{dw}{d\tau} \right)^2 dx dy, \quad (3.11)$$

gdzie:

$$c_{11} = 1 - \frac{2}{\pi} e_m.$$

Ostatecznie pierwszą wariację energii kinetycznej przedstawiono w następującej formie:

$$\delta T_K = t\rho_1 c_{11} \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} (\delta w) dx dy. \quad (3.12)$$

Wyprowadzone zależności (3.6), (3.8), (3.12) podstawiono do równania (3.1), wynikającego z wariacyjnej zasady Hamiltona. Zgodnie z podstawową zasadą rachunku wariacyjnego otrzymamy równania różniczkowe ruchu płyty oraz zespół warunków brzegowych zagadnienia. Równania ruchu otrzymano poprzez pogrupowanie poszczególnych wyrażeń zawierających wariacje tego samego argumentu występujących pod znakiem całki powierzchniowej $\int_0^a \int_0^b [] dx dy$. Warunki brzegowe otrzymano z wyrażeń znajdujących się

pod znakiem całki pojedynczej $\left[\int_0^a dx \right]_0^b, \left[\int_0^b dy \right]_0^a$.

Po wykonaniu stosownych przekształceń (*Załącznik nr 2*) otrzymano układ siedmiu równań różniczkowych ruchu płyty:

δw)

$$\begin{aligned} & \frac{E_1 t}{(1-\nu^2)} \left\{ \left[c_1 t^2 \nabla^4 w - c_2 t^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \psi_1) + \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 \phi_1) \right) - c_3 t^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \psi_2) + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 \phi_2) \right) \right] + c_{24} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \left[-\frac{3}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \left[-\frac{3}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] - \right. \\ & - 2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right] - \frac{\partial w}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{(1-\nu)}{2} \right. \\ & \cdot \left. \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right] - \frac{\partial u_0}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] - \frac{\partial v_0}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] - (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cdot \\ & \left. \left. \left. \left[\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right] \right] \right\} + t\rho_1 c_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} - p = 0, \quad (3.13) \end{aligned}$$

δu_0)

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad (3.14)$$

$\delta v_0)$

$$\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad (3.15)$$

 $\delta \psi_1)$

$$c_2 \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) - c_4 \left[\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x \partial y} \right] - c_5 \left[\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x \partial y} \right] + \frac{1-\nu}{2t^2} \left[c_7 \psi_1 + c_8 \psi_2 \right] = 0, \quad (3.16)$$

 $\delta \phi_1)$

$$c_2 \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w) - c_4 \left[\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y} \right] - c_5 \left[\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial y} \right] + \frac{1-\nu}{2t^2} \left[c_7 \phi_1 + c_8 \phi_2 \right] = 0, \quad (3.17)$$

 $\delta \psi_2)$

$$c_3 \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) - c_5 \left[\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x \partial y} \right] - c_6 \left[\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x \partial y} \right] + \frac{1-\nu}{2t^2} \left[c_8 \psi_1 + c_9 \psi_2 \right] = 0, \quad (3.18)$$

 $\delta \phi_2)$

$$c_3 \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w) - c_5 \left[\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y} \right] - c_6 \left[\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial y} \right] + \frac{1-\nu}{2t^2} \left[c_8 \phi_1 + c_9 \phi_2 \right] = 0, \quad (3.19)$$

gdzie:

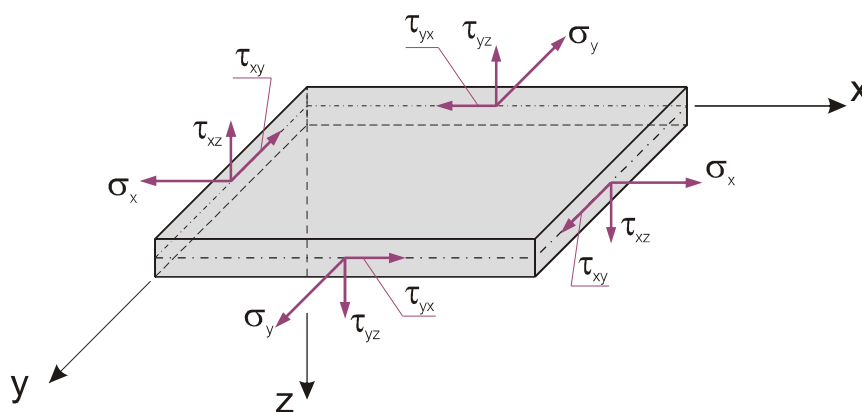
$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} - \text{operator Laplace'a.}$$

Równania (3.13), (3.14) i (3.15) określają odpowiednio rzuty sił na osie z, x, y , natomiast równania (3.16) – (3.19) wynikają z przyjętych założeń modelu płyty.

4. RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE RUCHU

Otrzymane równania różniczkowe ruchu płyty (3.13) – (3.19) zostaną odpowiednio przekształcone do układu czterech podstawowych równań różniczkowych. W tym celu zdefiniowano naprężenia i siły wewnętrzne w płycie, które wyprowadzono na podstawie teorii płyt cienkich z uwzględnieniem skończonych ugięć.

Rozważono równowagę małego elementu wyciętego z płyty dwiema parami płaszczyzn równoległych do xz i yz . Stan naprężenia zdefiniowano za pomocą pięciu składowych $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ pomijając zgodnie z założeniem σ_z (Rys. 4.1).



Rys 4.1 Rozkład naprężeń w płycie.

Podstawiając związki (2.5) do zależności (2.6) otrzymano następujące wyrażenie dla naprężeń:

$$\sigma_x = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \left\{ \frac{\partial u_0}{\partial x} - t \left\{ \zeta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \sin(\pi \zeta) + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \sin(2\pi \zeta) \cos^2(\pi \zeta) \right] \right\} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \right. \\ \left. + \nu \frac{\partial v_0}{\partial y} - t \nu \left\{ \zeta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial y} \sin(\pi \zeta) + \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \sin(2\pi \zeta) \cos^2(\pi \zeta) \right] \right\} + \frac{1}{2} \nu \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\}, \quad (4.1)$$

$$\sigma_y = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \left\{ \nu \frac{\partial u_0}{\partial x} - t \nu \left\{ \zeta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \sin(\pi \zeta) + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \sin(2\pi \zeta) \cos^2(\pi \zeta) \right] \right\} + \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \right.$$

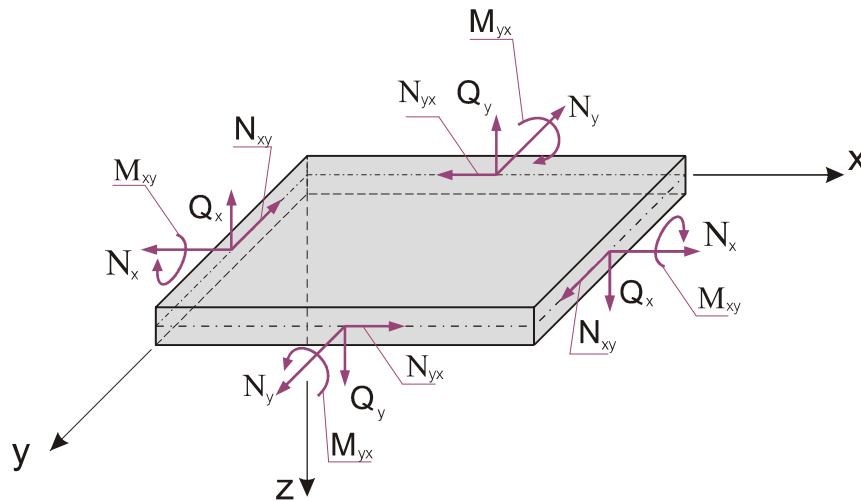
$$+ \frac{\partial v_0}{\partial y} - t \left\{ \zeta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial y} \sin(\pi \zeta) + \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \sin(2\pi \zeta) \cos^2(\pi \zeta) \right] \right\} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \left. \right\}, \quad (4.2)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \left\{ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} - t \left\{ 2\zeta \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{1}{\pi} \left[\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right) \sin(\pi \zeta) + \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right) \cdot \sin(2\pi \zeta) \cos^2(\pi \zeta) \right] + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right\} \right\}, \quad (4.3)$$

$$\tau_{xz} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \left[\psi_1(x, y) \cos(\pi \zeta) + \psi_2(x, y) [\cos(2\pi \zeta) + \cos(4\pi \zeta)] \right], \quad (4.4)$$

$$\tau_{yz} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \left[\phi_1(x, y) \cos(\pi \zeta) + \phi_2(x, y) [\cos(2\pi \zeta) + \cos(4\pi \zeta)] \right]. \quad (4.5)$$

Znając składowe naprężeń (4.1) - (4.5), zdefiniowano wewnętrzne siły normalne N_x, N_y i styczne S_{xy} , momenty gnące M_x, M_y i moment skręcający M_{xy} oraz siły poprzeczne Q_x, Q_y (Rys. 4.2):



Rys 4.2. Siły wewnętrzne i momenty w płycie.

Uwzględniając zależność (2.1), poszczególne siły wewnętrzne i momenty wyrażono w następującej postaci:

$$N_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x dz = \frac{E_1 t c_{24}}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \nu \frac{\partial v_0}{\partial x} + \nu \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right], \quad (4.6)$$

$$N_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y dz = \frac{E_1 t c_{24}}{1-\nu^2} \left[\nu \frac{\partial u_0}{\partial x} + \nu \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right], \quad (4.7)$$

$$S_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} dz = \frac{E_1 t c_{24}}{2(1+\nu)} \left[\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right], \quad (4.8)$$

$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz = \frac{E_1 t^3}{1-\nu^2} \left[-c_{01} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{\pi} \left[c_{02} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + c_{03} \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right] - c_{01} \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{\pi} \nu \left[c_{02} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + c_{03} \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right] \right], \quad (4.9)$$

$$M_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z dz = \frac{E_1 t^3}{1-\nu^2} \left[-c_{01} \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{\pi} \nu \left[c_{02} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + c_{03} \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right] - c_{01} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{\pi} \left[c_{02} \frac{\partial \phi_1}{\partial y} + c_{03} \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right] \right], \quad (4.10)$$

$$M_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z dz = \frac{E_1 t^3}{2(1+\nu)} \left[-2c_{01} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{1}{\pi} c_{02} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right) + \frac{1}{\pi} c_{03} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right) \right], \quad (4.11)$$

$$Q_x = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} dz = \frac{E_1 t}{2(1+\nu)} \left[\psi_1 c_{031} + \psi_2 c_{032} \right], \quad (4.12)$$

$$Q_y = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} dz = \frac{E_1 t}{2(1+\nu)} \left[\phi_1 c_{031} + \phi_2 c_{032} \right]. \quad (4.13)$$

Wykorzystanie znanych z mechaniki pojęć związanych z potencjałem wewnętrznych sił sprężystych, pozwoliło na zastosowanie w dalszych obliczeniach funkcji sił i funkcji przemieszczeń.

Siły normalne i styczne wyrażono za pomocą funkcji sił:

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \\ N_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \\ S_{xy} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

Przekształcając równania (3.14) i (3.15) oraz uwzględniając zależności (4.14) równanie (3.13) zapisano w następujący sposób

$$\delta w) \quad \frac{E_1 t}{(1-\nu^2)} \left[c_1 t^2 \nabla^4 w - c_2 t^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \psi_1) + \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 \phi_1) \right) - c_3 t^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \psi_2) + \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 \phi_2) \right) \right] - L(w, F) = p - t \rho_1 c_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}, \quad (4.15)$$

gdzie:

$$L(w, F) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} - \text{nieliniowy operator różniczkowy.}$$

Wyrażenia (4.6) - (4.8) zróżniczkowano odpowiednio względem x i y , a następnie wprowadzono do równań (3.14) i (3.15) poprzez zastąpienie takich samych części składowych. Dzięki tej operacji wykazano, że równania te są spełnione tożsamościowo:

$$\left. \begin{aligned} \delta u_0) \quad & \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} = \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} = 0, \\ \delta v_0) \quad & \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial x} = \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

Konsekwencją wprowadzenia funkcji sił było wyeliminowanie równań (3.14) i (3.15) oraz zredukowanie dwóch niewiadomych u_0 i v_0 .

Kolejnym etapem obliczeń było wprowadzenie dwóch funkcji przemieszczeń $\Phi_1(x, y), \Phi_2(x, y)$ w postaci zależności

$$\psi_1 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}, \quad \phi_1 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}, \quad \psi_2 = \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}, \quad \phi_2 = \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}. \quad (4.17)$$

Uwzględniając związki (4.16), równanie (4.15) oraz równania (3.16) - (3.19) zapisano w następującej postaci:

δw)

$$\frac{E_1 t}{(1-\nu^2)} \left[c_1 t^2 \nabla^4 w - c_2 t^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial x \partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial y^3} \right) \right) - \right. \\ \left. c_3 t^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 \Phi_2}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \Phi_2}{\partial x \partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^3 \Phi_2}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \Phi_2}{\partial y} \right) \right) \right] - L(w, F) = p - t \rho_1 c_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}, \quad (4.18)$$

$\delta \psi_1$)

$$c_2 \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) - c_4 \left[\frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial x \partial y^2} \right] - c_5 \left[\frac{\partial^3 \Phi_2}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \Phi_2}{\partial x \partial y^2} \right] + \frac{1-\nu}{2t^2} \left[c_7 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + c_8 \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \right] = 0, \quad (4.19)$$

$\delta \phi_1$)

$$c_2 \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w) - c_4 \left[\frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial x \partial y^2} \right] - c_5 \left[\frac{\partial^3 \Phi_2}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \Phi_2}{\partial x^2 \partial y} \right] + \frac{1-\nu}{2t^2} \left[c_7 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} + c_8 \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \right] = 0, \quad (4.20)$$

$\delta \psi_2$)

$$c_3 \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) - c_5 \left[\frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial x \partial y^2} \right] - c_6 \left[\frac{\partial^3 \Phi_2}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \Phi_2}{\partial x \partial y^2} \right] + \frac{1-\nu}{2t^2} \left[c_8 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + c_9 \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \right] = 0, \quad (4.21)$$

$\delta \phi_2$)

$$c_3 \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w) - c_5 \left[\frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial x^2 \partial y} \right] - c_6 \left[\frac{\partial^3 \Phi_2}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \Phi_2}{\partial x^2 \partial y} \right] + \frac{1-\nu}{2t^2} \left[c_8 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} + c_9 \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \right] = 0. \quad (4.22)$$

Upraszczając równanie (4.18), a także różniczkując równania (4.19) i (4.21) względem x oraz równania (4.20) i (4.22) względem y , po czym kolejno dodając stronami równania (4.19) i (4.20) oraz (4.21) i (4.22), otrzymano układ trzech równań różniczkowych czwartego rzędu:

$$\left. \begin{aligned} \frac{E_1 t^3}{(1-\nu^2)} \left[c_1 \nabla^4 w - c_2 \nabla^4 \Phi_1 - c_3 \nabla^4 \Phi_2 \right] - L(w, F) &= p - t \rho_1 c_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}, \\ c_2 \nabla^4 w - c_4 \nabla^4 \Phi_1 - c_5 \nabla^4 \Phi_2 + \frac{1-\nu}{2t^2} [c_7 \nabla^2 \Phi_1 + c_8 \nabla^2 \Phi_2] &= 0, \\ c_3 \nabla^4 w - c_5 \nabla^4 \Phi_1 - c_6 \nabla^4 \Phi_2 + \frac{1-\nu}{2t^2} [c_8 \nabla^2 \Phi_1 + c_9 \nabla^2 \Phi_2] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.23)$$

Układ składa się z trzech równań z czterema niewiadomymi, dlatego w celu jego rozwiązania wprowadzono dodatkowo znane z teorii równanie ciągłości odkształceń

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (4.24)$$

Odkształcenia wyrażone za pomocą sił wewnętrznych:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) = \frac{1}{c_0 E_1 t} (N_x - \nu N_y), \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) = \frac{1}{c_0 E_1 t} (N_y - \nu N_x), \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{c_0 E_1 t} S_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (4.25)$$

Biorąc pod uwagę zależność (4.25) równanie ciągłości odkształceń (4.24) można zapisać w następującej postaci:

$$\frac{1}{c_0 E_1 t} \left[\frac{\partial^2 N_x}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 N_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 N_y}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 N_x}{\partial x^2} - 2(1+\nu) \frac{\partial^2 S_{xy}}{\partial x \partial y} \right] = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (4.26)$$

Uwzględniając w równaniu (4.26) funkcje sił (4.14) otrzymano:

$$\frac{1}{c_0 E_1 t} \nabla^4 F = -\frac{1}{2} L(w, w), \quad (4.27)$$

gdzie:

$$L(w, w) = 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2.$$

W ten sposób z układu siedmiu równań ostatecznie otrzymano układ czterech podstawowych równań różniczkowych, opisujących stateczność płyty:

– równanie równowagi

$$\frac{E_1 t^3}{(1-\nu^2)} \left[c_1 \nabla^4 w - c_2 \nabla^4 \Phi_1 - c_3 \nabla^4 \Phi_2 \right] - L(w, F) = p - t \rho_1 c_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}, \quad (4.28)$$

– dwa równania zgodności przemieszczeń

$$c_2 \nabla^4 w - c_4 \nabla^4 \Phi_1 - c_5 \nabla^4 \Phi_2 + \frac{1-\nu}{2t^2} [c_7 \nabla^2 \Phi_1 + c_8 \nabla^2 \Phi_2] = 0, \quad (4.29)$$

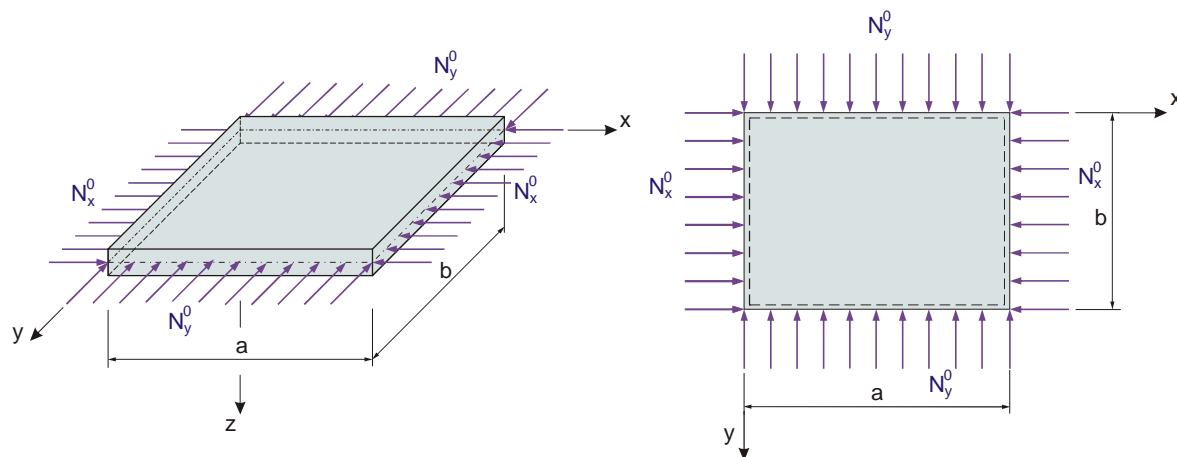
$$c_3 \nabla^4 w - c_5 \nabla^4 \Phi_1 - c_6 \nabla^4 \Phi_2 + \frac{1-\nu}{2t^2} [c_8 \nabla^2 \Phi_1 + c_9 \nabla^2 \Phi_2] = 0, \quad (4.30)$$

– równanie nierozdzielności odkształceń

$$\frac{1}{c_0 E_1 t} \nabla^4 F = -\frac{1}{2} L(w, w). \quad (4.31)$$

5. ROZWIĄZANIE UKŁADU RÓWNAŃ

Z równania wariacyjnego Hamiltona (3.1), poza równaniami różniczkowymi ruchu otrzymano także układ warunków brzegowych zagadnienia. Warunki brzegowe określono zgodnie z założeniem, że płyta jest przegubowo podparta na całym obwodzie (Rys. 5.1) i obciążona w płaszczyźnie siłami o intensywnościach N_x^0 i N_y^0 rozłożonymi równomiernie wzdłuż brzegów płyty.



Rys. 5.1. Schemat obciążenia i podparcia płyty.

Warunki brzegowe:

$$\left. \begin{array}{ll}
 0 \leq y \leq b & 0 \leq x \leq a \\
 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \Big|_{x=0,a} = N_x^0 & \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \Big|_{y=0,b} = N_y^0 \\
 M_x \Big|_{x=0,a} = 0 & M_y \Big|_{y=0,b} = 0 \\
 w \Big|_{x=0,a} = 0 & w \Big|_{y=0,b} = 0
 \end{array} \right\} \quad (5.1)$$

Układ równań różniczkowych (4.28) - (4.31) rozwiązano w sposób przybliżony stosując metodę ortogonalizacyjną Bubnowa - Galerkina. Przyjęto trzy nieznanne funkcje aproksymujące ugięcie i przemieszczenie w postaci :

$$w(x, y) = f_1(\tau) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (5.2)$$

$$\Phi_1(x, y) = f_1(\tau) \alpha_{\Phi_1} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (5.3)$$

$$\Phi_2(x, y) = f_1(\tau) \alpha_{\Phi_2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (5.4)$$

gdzie:

$f_1(\tau)$ – nieznanany parametr funkcji ugięcia,

m, n – liczby półfal odpowiednio w kierunku osi x i y .

Równania (5.2) - (5.4) spełniają warunki brzegowe (5.1) dla płyty prostokątnej swobodnie podpartej na całym obwodzie.

W pierwszej kolejności z układu dwóch równań zgodności przemieszczeń (4.29) i (4.30) wyznaczono parametry α_{Φ_1} i α_{Φ_2} . W tym celu do równań wprowadzono zależności (5.2) – (5.4) i po odpowiednich przekształceniach otrzymano:

$$\left[c_2 f_1 \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] - c_4 f_1 \alpha_{\Phi_1} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] - c_5 f_1 \alpha_{\Phi_2} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] + \right. \\ \left. + \frac{1-\nu}{2t^2} \left[c_7 f_1 \alpha_{\Phi_1} + c_8 f_1 \alpha_{\Phi_2} \right] \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = 0, \quad (5.5)$$

$$\left[c_3 f_1 \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] - c_5 f_1 \alpha_{\Phi_1} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] - c_6 f_1 \alpha_{\Phi_2} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] + \right. \\ \left. + \frac{1-\nu}{2t^2} \left[c_8 f_1 \alpha_{\Phi_1} + c_9 f_1 \alpha_{\Phi_2} \right] \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = 0. \quad (5.6)$$

Równania (5.5) i (5.6) rozwiązano kolejno metodą ortogonalizacyjną Bubnowa - Galerkina z uwzględnieniem warunku:

$$\int_0^a \int_0^b [\mathfrak{R}_i(x, y)] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy = 0, \quad (5.7)$$

gdzie $\mathfrak{R}_i(x, y)$, dla $i = 1, 2$ jest odpowiednio lewą stroną równania (5.5) i (5.6).

W wyniku przeprowadzonych operacji całkowania (załącznik 3), po uporządkowaniu, otrzymano układ dwóch równań algebraicznych

$$(c_2 - c_4 \alpha_{\phi_1} - c_5 \alpha_{\phi_2}) \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] + \frac{1-\nu}{2t^2} (c_7 \alpha_{\phi_1} + c_8 \alpha_{\phi_2}) = 0, \quad (5.8)$$

$$(c_3 - c_5 \alpha_{\phi_1} - c_6 \alpha_{\phi_2}) \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] + \frac{1-\nu}{2t^2} (c_8 \alpha_{\phi_1} + c_9 \alpha_{\phi_2}) = 0. \quad (5.9)$$

Z powyższych równań wyznaczono parametry

$$\alpha_{\phi_1} = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}, \quad \alpha_{\phi_2} = \frac{b_2 a_{11} - a_{21} b_1}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}, \quad (5.10)$$

gdzie:

$$a_{11} = c_4 k + c_7 \frac{1-\nu}{2t^2}, \quad a_{12} = c_5 k + c_8 \frac{1-\nu}{2t^2}, \quad a_{22} = c_6 k + c_9 \frac{1-\nu}{2t^2}$$

$$a_{12} = a_{21}, \quad b_1 = c_2 k, \quad b_2 = c_3 k, \quad k = \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{n}{m} \frac{a}{b} \right)^2 \right].$$

Następnie po wprowadzeniu związku (5.2) do równania nierozdzielności odkształceń (4.31) oraz po przeprowadzeniu stosownych przekształceń otrzymano równania różniczkowe cząstkowe liniowe czwartego rzędu:

$$\nabla^4 F = c_0 E_1 t f_1^2 \frac{1}{2} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \left[\cos \left(2 \frac{n\pi y}{b} \right) + \cos \left(2 \frac{m\pi x}{a} \right) \right]. \quad (5.11)$$

Rozwiązaniem równania (5.11) jest funkcja sił

$$F(x, y) = c_0 E_1 t \left\{ f_1^2 \left(\alpha_{k_1} \cos 2 \frac{n\pi y}{b} + \alpha_{k_2} \cos 2 \frac{m\pi x}{a} \right) \right\} + \frac{1}{2} N_x^0 y^2 + \frac{1}{2} N_y^0 x^2, \quad (5.12)$$

gdzie:

$$\alpha_{k_1} = \frac{1}{32} \left(\frac{m}{a} \right)^2 \left(\frac{b}{n} \right)^2, \quad \alpha_{k_2} = \frac{1}{32} \left(\frac{n}{b} \right)^2 \left(\frac{a}{m} \right)^2.$$

Podstawiając równania (5.2) - (5.4) i (5.6) do równania równowagi (4.28) otrzymano:

$$\begin{aligned} & \frac{E_1 t^3}{(1-\nu^2)} \left[f_1 (c_1 - c_2 \alpha_{\Phi_1} - c_3 \alpha_{\Phi_2}) \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right] - 4c_0 E_1 t f_1^3 \alpha_{k_1} \cdot \\ & \cdot \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \cos \left(2 \frac{n\pi y}{b} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} + N_x f_1 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} - \\ & - 4c_0 E_1 t f_1^3 \alpha_{k_2} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \cos \left(2 \frac{m\pi x}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} + N_y f_1 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \\ & \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} \left] + c_{11} \rho_1 t \frac{\partial^2 f_1}{\partial \tau^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} - p = 0. \end{aligned} \quad (5.13)$$

W celu rozwiązania powyższego równania zastosowano metodę ortogonalizacyjną Bubnova - Galerkina

$$\int_0^a \int_0^b [\mathfrak{R}_3(x, y)] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy = 0, \quad (5.14)$$

gdzie $\mathfrak{R}_3(x, y)$ jest lewą stroną równania (5.13).

Po obliczeniu poszczególnych całek (załącznik 3) i uporządkowaniu otrzymano następujące równanie

$$\begin{aligned} & \frac{E_1 t^3}{(1-\nu^2)} \left[f_1 (c_1 - c_2 \alpha_{\Phi_1} - c_3 \alpha_{\Phi_2}) \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 \left[1 + \left(\frac{n}{m} \frac{a}{b} \right)^2 \right]^2 \right] + 2c_0 E_1 t f_1^3 (\alpha_{k_1} + \alpha_{k_2}) \cdot \\ & \cdot \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + f_1 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left[N_x + N_y \left(\frac{n}{m} \frac{a}{b} \right)^2 \right] + c_{11} \rho_1 t \frac{\partial^2 f_1}{\partial \tau^2} - \frac{16}{\pi^2} p = 0. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Powyższe równanie jest równaniem ogólnym, zawierającym złożony przypadek obciążenia (ciśnienie i dwukierunkowe ściskanie osiowe), i z jego rozwiązania otrzymuje się ugięcie płyty lub obciążenia krytyczne.

Analizę stateczności płyt przeprowadza się jedynie w przypadku obciążenia przyłożonego na brzegach i w płaszczyźnie środkowej płyty, przy czym może to być obciążenie normalne (ściskające) lub styczne (ścinające) do konturu płyty.

Zgodnie z wcześniejszymi założeniami, w pracy przeprowadzona zostanie analiza stateczności porowatej płyty prostokątnej poddanej obciążeniu złożonemu w postaci dwukierunkowego ściskania wzdłuż krawędzi płyty. Do dalszych obliczeń przyjęto, że ciśnienie $p = 0$, a poszczególne intensywności obciążeń N_x i N_y opisano za pomocą całkowitego obciążenia N_0 oraz parametru k_0 :

$$N_x = k_0 N_0, \quad (5.16)$$

$$N_y = (1 - k_0) N_0, \quad (5.17)$$

gdzie:

k_0 – parametr obciążenia płyty ($0 \leq k_0 \leq 1$),

N_0 – całkowite obciążenie płyty.

W przypadku, gdy parametr $k_0 = 0$ występuje tylko ściskanie w kierunku osi y natomiast, gdy parametr $k_0 = 1$ ściskanie zgodnie z kierunkiem osi x .

Dodatkowo wprowadzono bezwymiarową postać ugięcia płyty

$$\tilde{f}_1 = \frac{f_1}{t}. \quad (5.18)$$

Po uwzględnieniu założeń (5.16) - (5.18) równanie ruchu płyty (5.15) zapisano w następującej formie

$$\begin{aligned} \frac{E_1 t^2}{(1 - \nu^2)} \left[(c_1 - c_2 \alpha_{\Phi_1} - c_3 \alpha_{\Phi_2}) \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{n}{m} \frac{a}{b} \right)^2 \right]^2 \right] \tilde{f}_1 + 2c_0 E_1 t^2 \tilde{f}_1^3 (\alpha_{k_1} + \alpha_{k_2}) \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 - \\ - \frac{N_0}{t} \left[k_0 + \left(\frac{n}{m} \frac{a}{b} \right)^2 (1 - k_0) \right] \tilde{f}_1 + c_{11} \rho_1 \frac{\partial^2 \tilde{f}_1}{\partial \tau^2} \left(\frac{a}{m\pi} \right)^2 = 0. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Przekształcając powyższe równanie otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{f}_1}{\partial \tau^2} = \frac{m^2 \pi^2}{a^2 c_{11} \rho_1} \left\{ -\frac{E_1 t^2}{(1-\nu^2)} \left[(c_1 - c_2 \alpha_{\Phi_1} - c_3 \alpha_{\Phi_2}) \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{n a}{m b} \right)^2 \right]^2 \right] \tilde{f}_1 + \right. \\ \left. + \tilde{f}_1 \frac{N_0}{t} \left[k_0 + \left(\frac{n a}{m b} \right)^2 (1 - k_0) \right] - 2c_0 E_1 \tilde{f}_1^3 (\alpha_{k_1} + \alpha_{k_2}) \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Obciążenie statyczne – opis liniowy

W przypadku, gdy w równaniu (5.19) pominięte zostaną czynniki, wynikające z geometrycznie nieliniowych związków pomiędzy przemieszczeniem i odkształceniem, krytyczne obciążenie płyty można zapisać w postaci:

$$\left(\frac{N_0}{t} \right)_{KR} = \min_{m,n} \frac{1}{k_0 + \left(\frac{n a}{m b} \right)^2 (1 - k_0)} \left[\frac{E_1 t^2}{(1-\nu^2)} (c_1 - c_2 \alpha_{\Phi_1} - c_3 \alpha_{\Phi_2}) \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{n a}{m b} \right)^2 \right]^2 \right] \quad (5.21)$$

Zakładając dodatkowo, że płyta jest wykonana z jednorodnego materiału izotropowego (czyli współczynnik porowatości $e_0 = 0$), obowiązuje hipoteza płaskich przekrojów ($\psi_i = \phi_i = 0$) oraz występuje jedynie obciążenie ściskające wzdłuż osi x , równanie (5.21) przyjmuje postać zgodną z klasycznym rozwiązaniem prezentowanym przykładowo w pracy Bażant i Cedolin [10]

$$N_{x,KR} = \min_m \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{1 a}{m b} \right)^2 \right]^2 \right] \frac{1}{D}, \quad (5.22)$$

gdzie:

$$D = \frac{E_1 t^3}{12(1-\nu^2)}.$$

Obciążenie statyczne – opis nieliniowy

W przypadku, gdy w równaniu (5.19) pominiemy czynnik dynamiczny, otrzymamy nieliniowe równanie algebraiczne, z którego można obliczyć wartość naprężeń krytycznych

$$\frac{N_0}{t} = \frac{t^2}{k_0 + \left(\frac{n}{m} \frac{a}{b}\right)^2 (1-k_0)} \left\{ \frac{E_1}{(1-\nu^2)} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{n}{m} \frac{a}{b}\right)^2 \right]^2 (c_1 - c_2 \alpha_{\Phi_1} - c_3 \alpha_{\Phi_2}) + \right. \\ \left. + 2c_0 E_1 \tilde{f}_1^2 (\alpha_{k_1} + \alpha_{k_2}) \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right\}. \quad (5.22)$$

Ostatecznie, równanie równowagi dynamicznej płyty, poddanej obciążeniu zmiennemu w czasie, przedstawiono w poniższej postaci

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}_1}{\partial \tau^2} = \frac{m^2 \pi^2}{a^2 c_{11} \rho_1} \left\{ \left[\frac{N_0(\tau)}{t} - \left(\frac{N_0}{t}\right)_{KR} \right] \left[k_0 + \left(\frac{n}{m} \frac{a}{b}\right)^2 (1-k_0) \right] \tilde{f}_1 - 2c_0 E_1 t^2 (\alpha_{k_1} + \alpha_{k_2}) \tilde{f}_1^3 \right\}. \quad (5.23)$$

6. PRZYKŁAD OBLICZEŃ

W pracy przyjęto założenie, że utrata stateczności płyty występuje w zakresie sprężystym, dlatego też powinien być spełniony podstawowy warunek wytrzymałościowy:

$$\sigma_{eq,max} \leq \sigma_{all} \quad (6.1)$$

gdzie:

$\sigma_{eq,max}$ – największe naprężenia zredukowane (naprężenia Hubera - Misesa),

σ_{all} – dopuszczalne naprężenia dla danego materiału.

W celu określenia obszaru dopuszczalnych rozwiązań, naprężenia zredukowane zdefiniowano przy założeniu płaskiego stanu naprężeń:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_\varphi + \sigma_\varphi^2} . \quad (6.2)$$

Wprowadzając do powyższego równania zależności (2.1), (2.2), (2.4), (4.6), (4.7), (5.16), (5.17) otrzymano:

$$\sigma_{eq} = \left(\frac{N_0}{t} \right)_{KR} \frac{1}{C_0} [1 - e_0 \cos(\pi \zeta)] \sqrt{1 - 3k_0(1 - k_0)} . \quad (6.3)$$

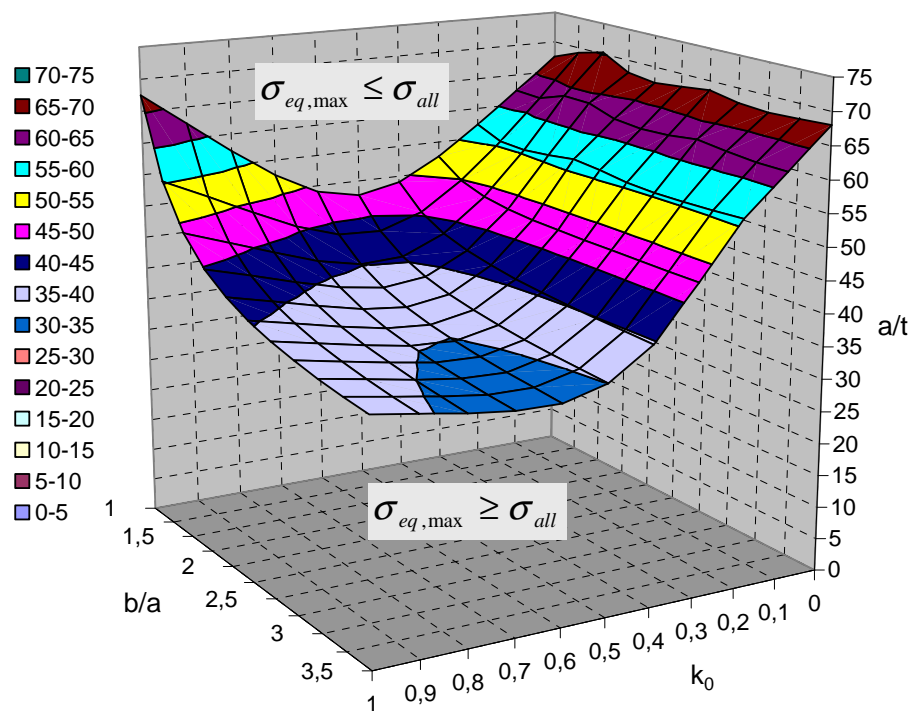
Maksymalne naprężenia występują na powierzchniach zewnętrznych płyty $\sigma_{eq,max} = \sigma_{eq} \Big|_{\zeta=\pm 1/2}$, tak więc równanie (6.3) przyjmuje postać:

$$\sigma_{eq} = \left(\frac{N_0}{t} \right)_{KR} \frac{1}{C_0} \sqrt{1 - 3k_0(1 - k_0)} . \quad (6.4)$$

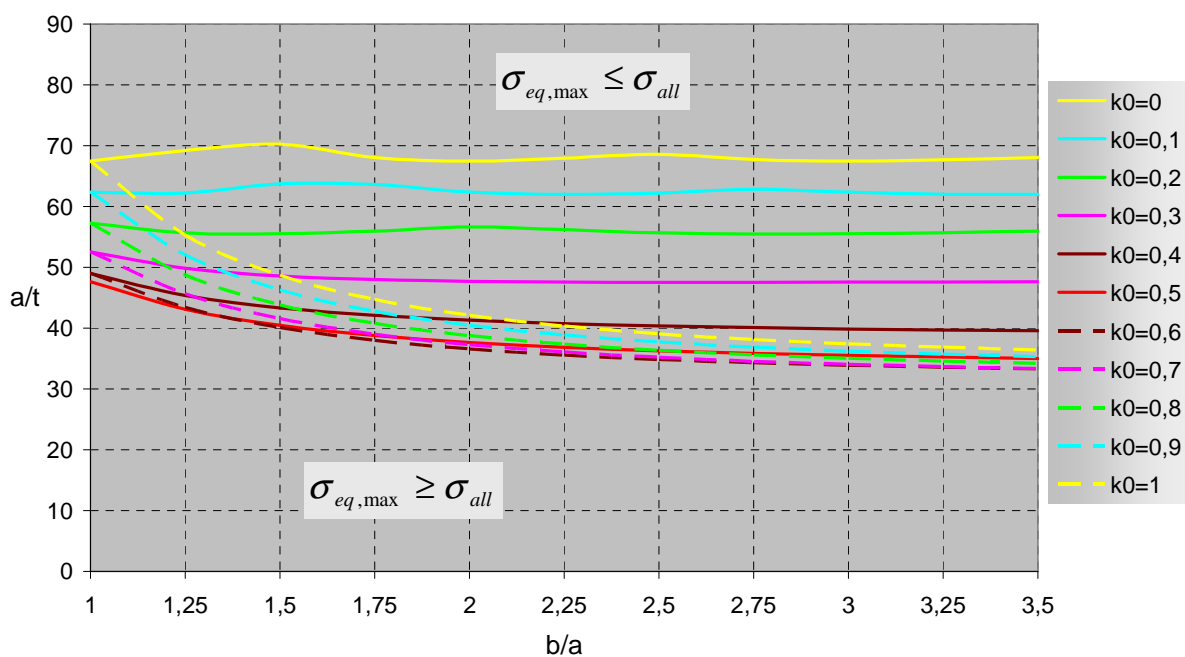
Obliczenia numeryczne przeprowadzono dla płyty prostokątnej wykonanej ze stopu aluminium charakteryzującego się następującymi własnościami: $E_1 = 7,06 \cdot 10^4 \text{ MPa}$, $\nu = 0,33$, $\rho_1 = 2,8 \cdot 10^{-6} \text{ kg/mm}^3$, $\sigma_{all} = 90 \text{ MPa}$.

Na podstawie kryterium wytrzymałościowego (6.1) określono obszar dopuszczalnych rozwiązań dla badanej rodziny płyt prostokątnych. Obliczenia przeprowadzono przy uwzględnieniu zmian parametrów: obciążenia k_0 , porowatości e_0 , proporcji długości boków b/a oraz proporcji długości krótszego z boków do grubości a/t .

Wyniki obliczeń dla ustalonej wartości parametru porowatości $e_0 = 0.9$ przedstawiono w postaci dwóch wykresów: powierzchni 3D na rysunku 6.1a oraz za pomocą krzywych 2D na rysunku 6.1b. Obszar rozwiązań dopuszczalnych znajduje się nad powierzchnią 3D lub nad poszczególnymi krzywymi 2D.



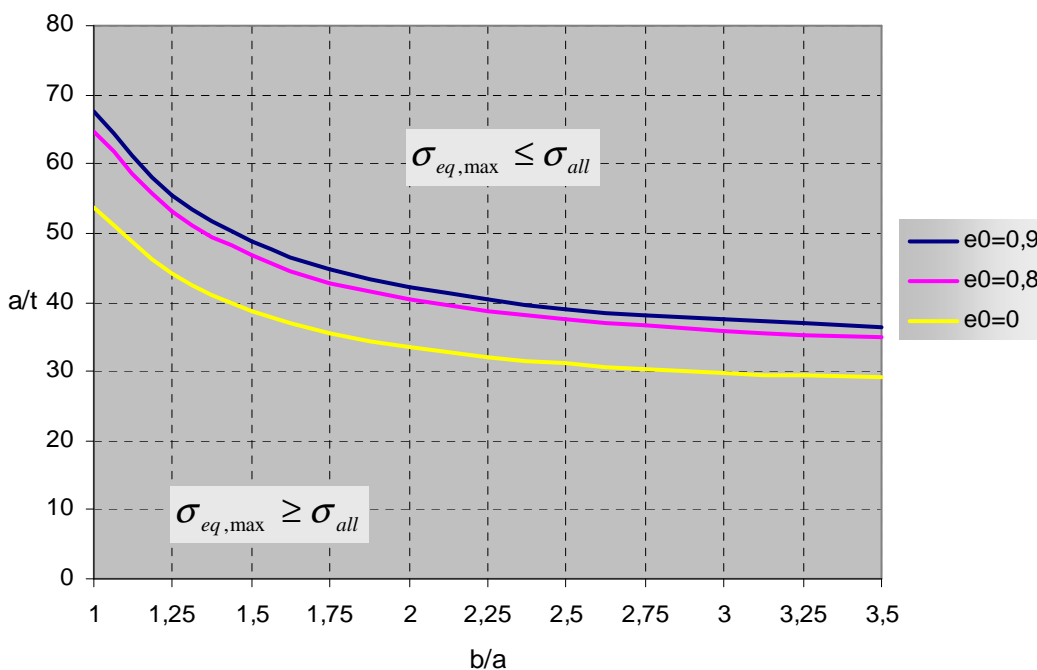
Rys. 6.1 a. Obszar rozwiązań dopuszczalnych dla $e_0 = 0,9$.



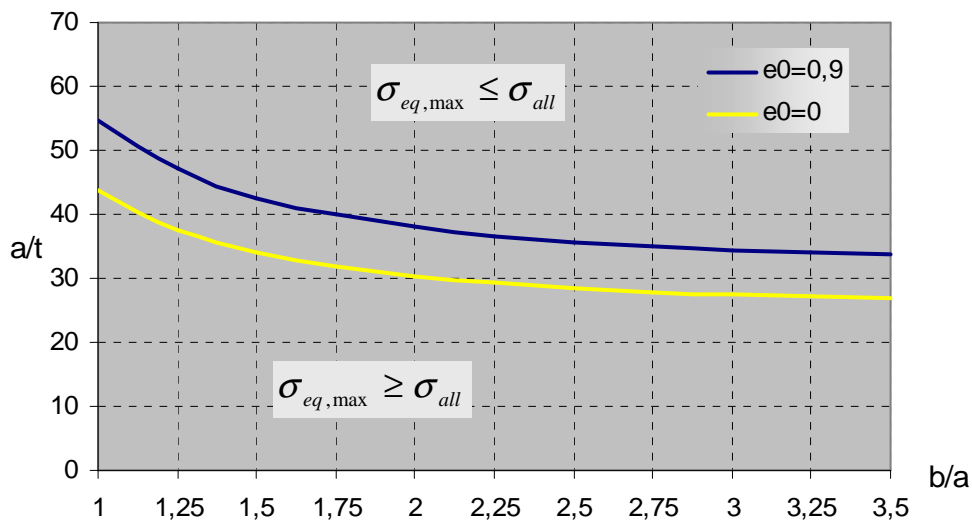
Rys. 6.1 b. Obszar rozwiązań dopuszczalnych dla $e_0 = 0,9$.

Na podstawie prezentowanych wyników zauważono, że zarówno wzrost proporcji długości boków b/a oraz długości krótszego z boków do grubości a/t , powoduje zwiększenie badanego obszaru rozwiązań dopuszczalnych. W przypadku zmiany parametru obciążenia można zaobserwować tendencję do zmniejszania obszaru rozwiązań dopuszczalnych w miarę zbliżania się do jego skrajnych wartości $k_0 = \langle 1, 0 \rangle$. Jednak gwałtowne zmiany można zauważyć przede wszystkim w zakresie $k_0 = \langle 0.5, 0 \rangle$, gdzie zaczyna dominować obciążenie siłą ścisającą N_y . Jednocześnie w tych przypadkach zaobserwowano niewielki wpływ wzrostu proporcji długości boków b/a na wielkość obszaru rozwiązań dopuszczalnych.

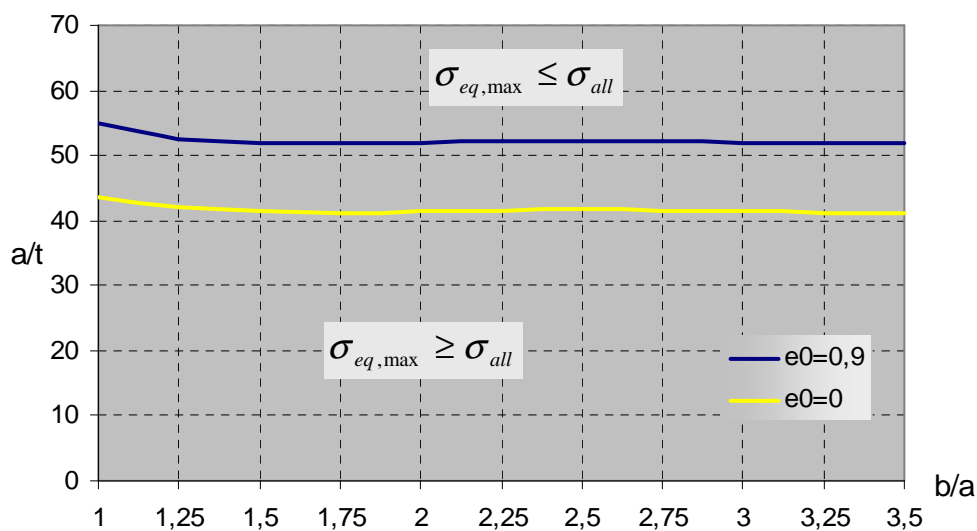
Wyniki badań mających na celu określenie obszaru rozwiązań dopuszczalnych z uwzględnieniem wpływu parametru porowatości e_0 przy ustalonych wartościach parametru k_0 przedstawiono na rysunkach 6.2 - 6.9.



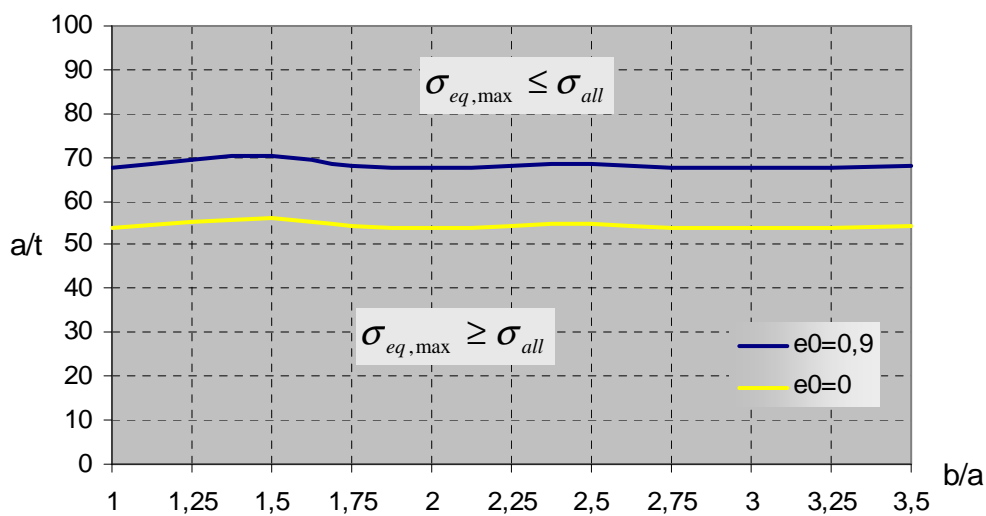
Rys. 6.2. Obszar rozwiązań dopuszczalnych dla $k_0 = 1$.



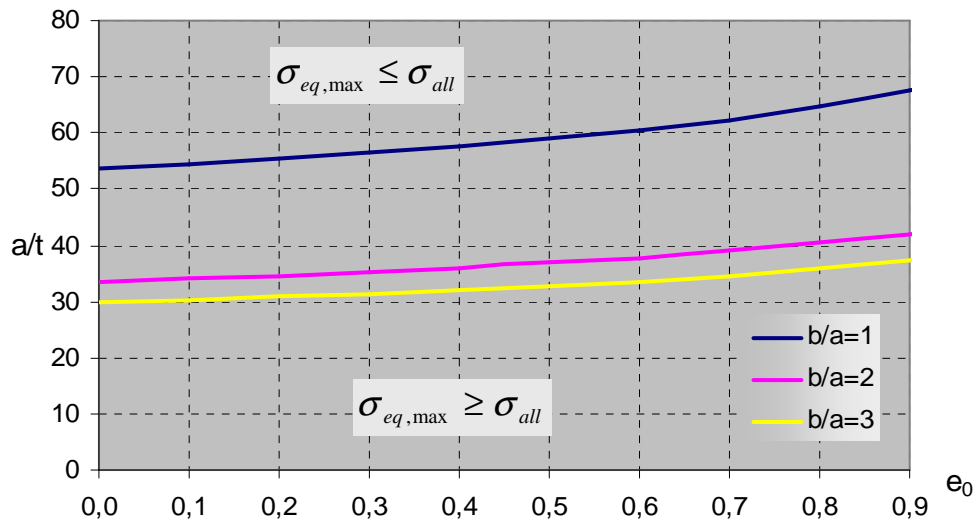
Rys. 6.3. Obszar rozwiązań dopuszczalnych dla $k_0 = 0,75$.



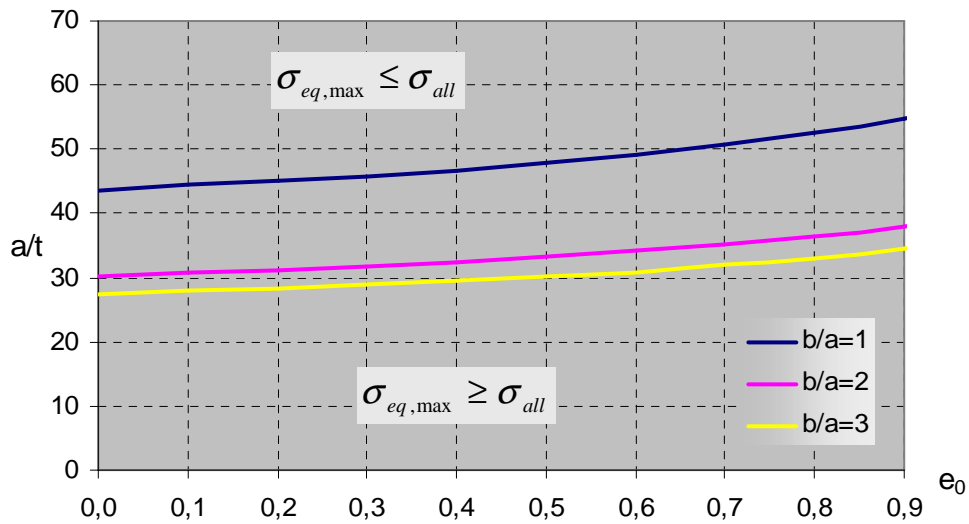
Rys. 6.4. Obszar rozwiązań dopuszczalnych dla $k_0 = 0,25$.



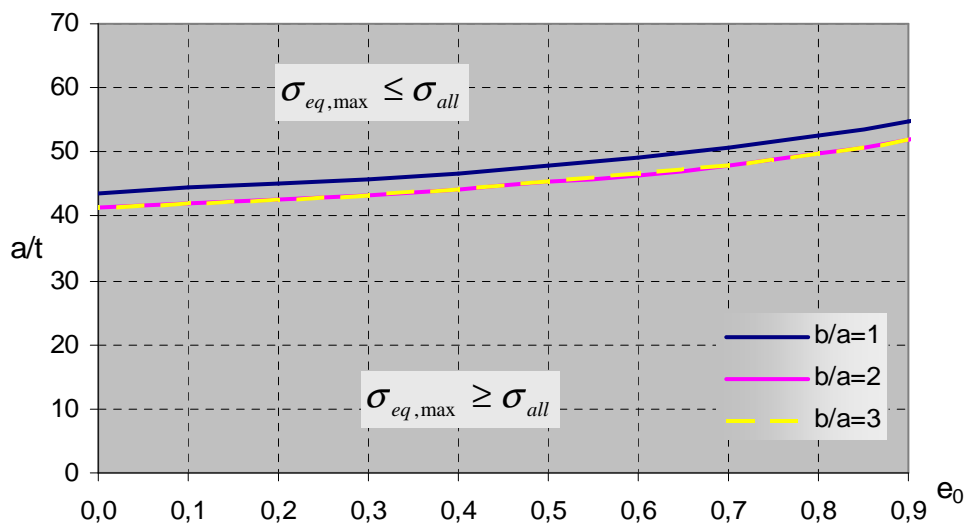
Rys. 6.5. Obszar rozwiązań dopuszczalnych dla $k_0 = 0$.



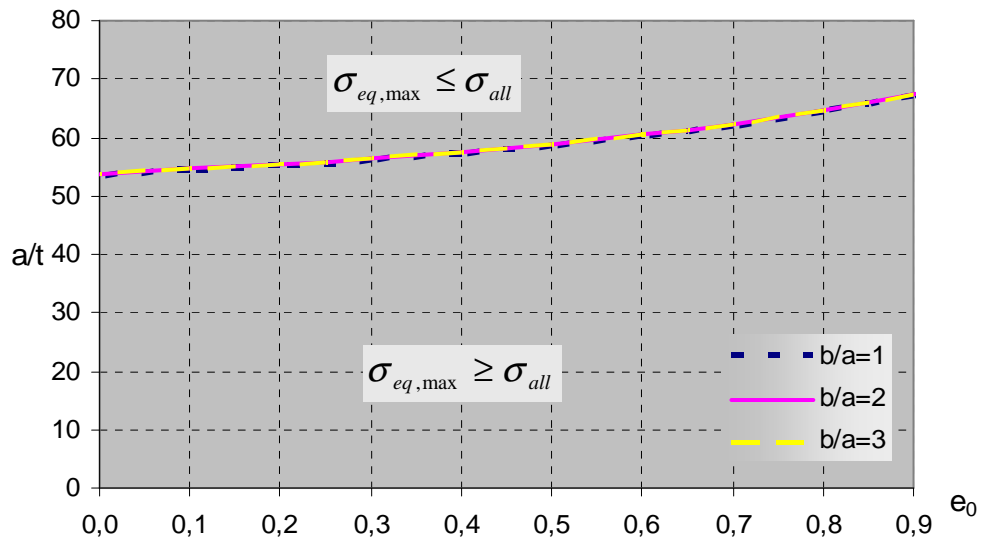
Rys. 6.6. Obszar rozwiązań dopuszczalnych dla $k_0 = 1$.



Rys. 6.7. Obszar rozwiązań dopuszczalnych dla $k_0 = 0,75$.



Rys. 6.8. Obszar rozwiązań dopuszczalnych dla $k_0 = 0,25$.



Rys. 6.9. Obszar rozwiązań dopuszczalnych dla $k_0 = 0$.

Na podstawie wyników prezentowanych na wykresach 6.2 - 6.5 można zauważyć, że zwiększenie porowatości materiału powoduje zmniejszenie obszaru rozwiązań dopuszczalnych. Analizując rozwiązania prezentowane na wykresach 6.6 - 6.9 daje się zauważyć wpływ proporcji geometrycznych płyty i sposobu obciążenia na wielkość rozwiązań dopuszczalnych.

6.1 Zagadnienie stateczności statycznej płyty prostokątnej

Zagadnienia stateczności należą do najtrudniejszych, a zarazem kluczowych problemów mechaniki konstrukcji. W zależności od rodzaju obciążenia zewnętrznego badanego układu stateczność dzielimy na statyczną i dynamiczną. O stateczności dynamicznej mówimy wówczas, gdy układ obciążony jest siłami zmiennymi w czasie. Natomiast w przypadku, gdy obciążenie nie zależy od czasu mówimy o stateczności statycznej układu.

Statyczne kryterium stateczności oznacza istnienie równowagi w położeniu sąsiednim od położenia badanego, wtedy tworzy się bądź nowa postać równowagi, bądź też parametr obciążenia osiąga lokalne maksimum [Życzkowski 125].

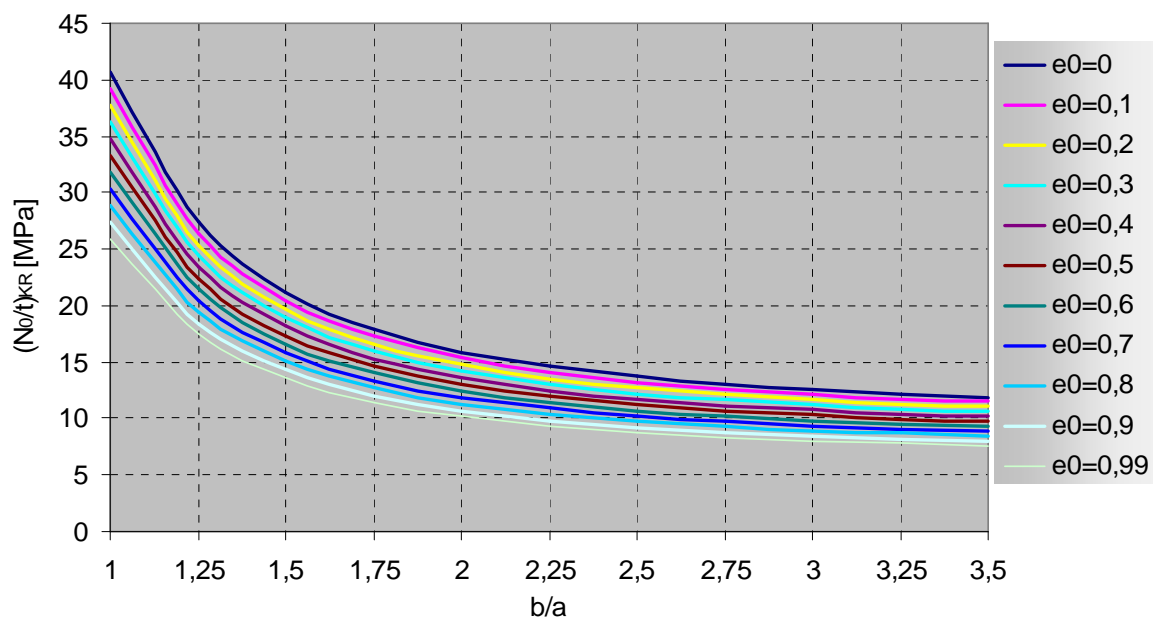
W przypadku bifurkacji najczęściej podstawowa postać równowagi przestaje być stateczna, natomiast nowa postać może być stateczna (stateczny punkt bifurkacji) lub nie (niestateczny punkt bifurkacji) [Volmir 110]. Jeżeli podstawowe położenie równowagi opisane jest funkcją przemieszczeń z jednorodnymi warunkami brzegowymi, to bifurkację opisuje układ liniowych równań różniczkowych. Rozwiązanie układu jest problemem wartości własnych i pozwala na określenie wartości krytycznych parametru obciążenia, nie określając pokrytycznego zachowania się układu.

Energetyczna postać kryterium statycznego bazuje na warunku stacjonarności energii potencjalnej – znikaniu pierwszej wariacji. W stanie równowagi statecznej energia potencjalna musi osiągać wartość minimalną, tzn. zmiana energii w wyniku dowolnego zaburzenia powinna być nieujemna. Jeżeli zmianę energii potencjalnej przedstawimy jako sumę wariacji, to w stanie równowagi pierwsza wariacja jest równa zero. Stateczność stanów równowagi zależy przede wszystkim od drugiej wariacji. Jeśli jest ona dodatnio określona – stan równowagi jest stateczny, jeśli się zeruje – stanowi kryterium równowagi obojętnej a więc kryterium stanu krytycznego [125]. Kryterium bifurkacji można sformułować jako zerowanie się pierwszej wariacji w nowym położeniu. Jeżeli przyjmiemy, że dla małych odchyłeń od stanu równowagi energia potencjalna jest stała, to zgodnie z metodą energetyczną Timoshenki zerowy poziom tej energii odpowiada sile krytycznej [110].

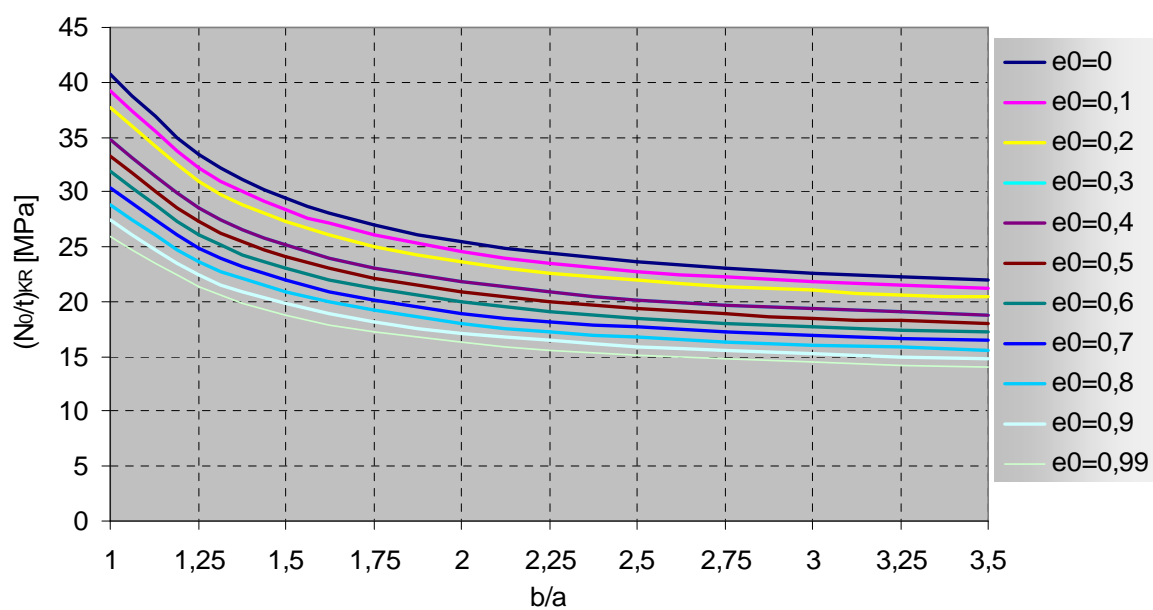
Zagadnienie stateczności cienkiej sprężystej płyty w zakresie teorii liniowej sprowadza się do rozwiązania płaskiego zadania z teorii sprężystości w celu znalezienia dokrytycznego rozkładu naprężeń.

6.1.1 Rozwiązanie dla liniowych związków geometrycznych

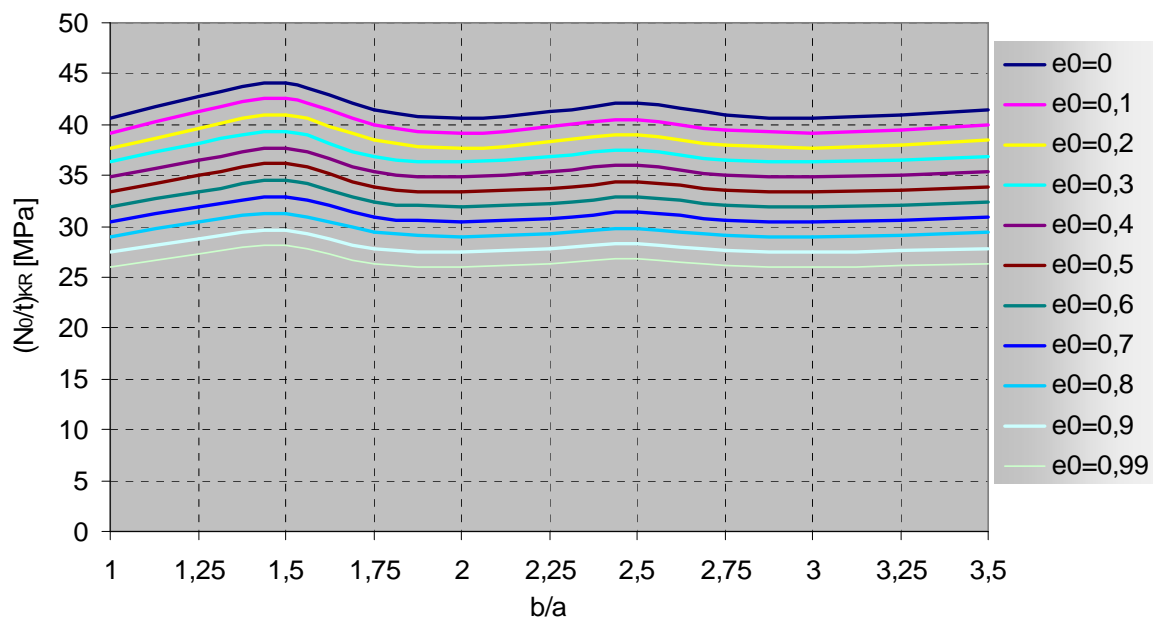
Obliczenia przeprowadzono na podstawie wyprowadzonej w poprzednim rozdziale zależności, określającej wartość krytycznego obciążenia płyty (5.21). Na wykresach przedstawiono wyniki obliczeń przy różnych wartościach parametrów porowatości e_0 oraz obciążenia k_0 w odniesieniu do proporcji geometrycznych płyty.



Rys. 6.10. Obciążenie krytyczne płyty w zależności od proporcji b/a dla $k_0 = 1$ i $a/t = 80$.



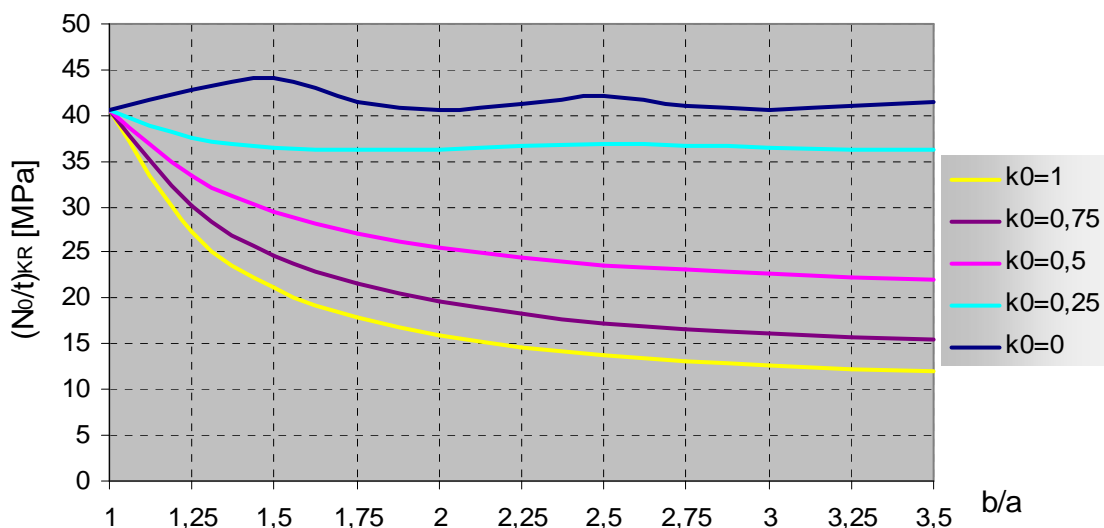
Rys. 6.11. Obciążenie krytyczne płyty w zależności od proporcji b/a dla $k_0 = 0,5$ i $a/t = 80$.



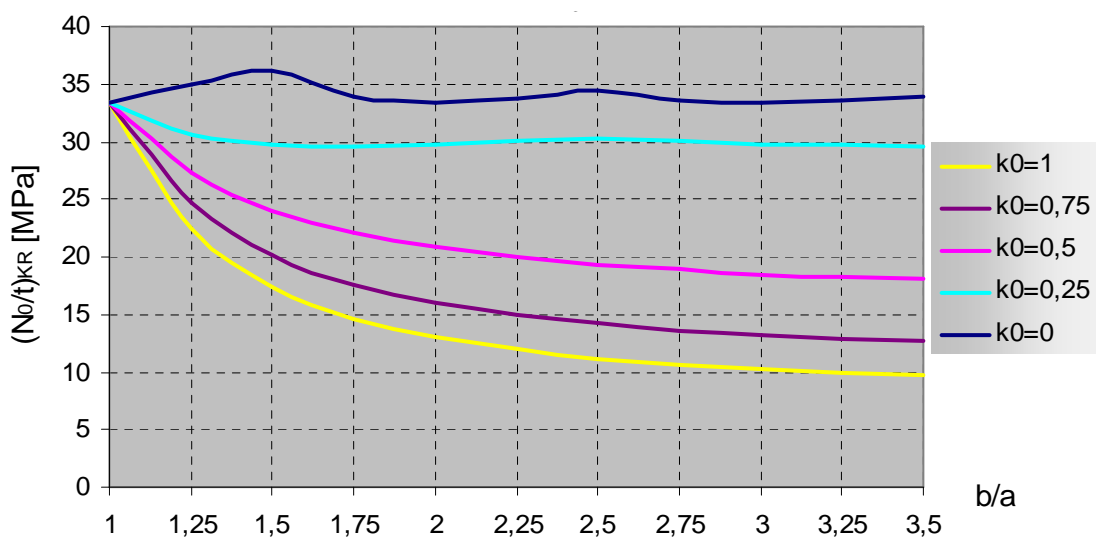
Rys. 6.12. Obciążenie krytyczne płyty w zależności od proporcji b/a dla $k_0 = 0$ i $a/t = 80$.

Na rysunkach 6.10, 6.11 i 6.12 zaprezentowano wpływ zwiększenia proporcji długości boków na obciążenie krytyczne płyty w przypadku zmiany porowatości i stałej proporcji długości krótszego z boków do grubości płyty. W przypadku jednokierunkowego działania siły ściskającej w kierunku osi x (Rys.6.10) zaobserwowano zmniejszenie wartości obciążenia krytycznego wraz ze wzrostem proporcji długości boków b/a . Podobne zachowanie zaobserwowano dla płyt obciążonych dwukierunkowo (Rys.6.11). W każdym z tych przypadków minimalną wartość obciążenia krytycznego otrzymano dla ugięcia w postaci jednej półfali wzdłuż osi x i jednej wzdłuż osi y ($m = n = 1$). W przypadku działania siły ściskającej wyłącznie w kierunku osi y (Rys.6.12) otrzymano niewielkie różnice wartości obciążeń krytycznych dla całego badanego zakresu proporcji b/a . Przypadek ten można wyjaśnić dzięki zaobserwowanej w badaniu zmianie postaci ugięcia w kierunku osi y gdzie liczba półfal wzrosła do wartości $n = 2$.

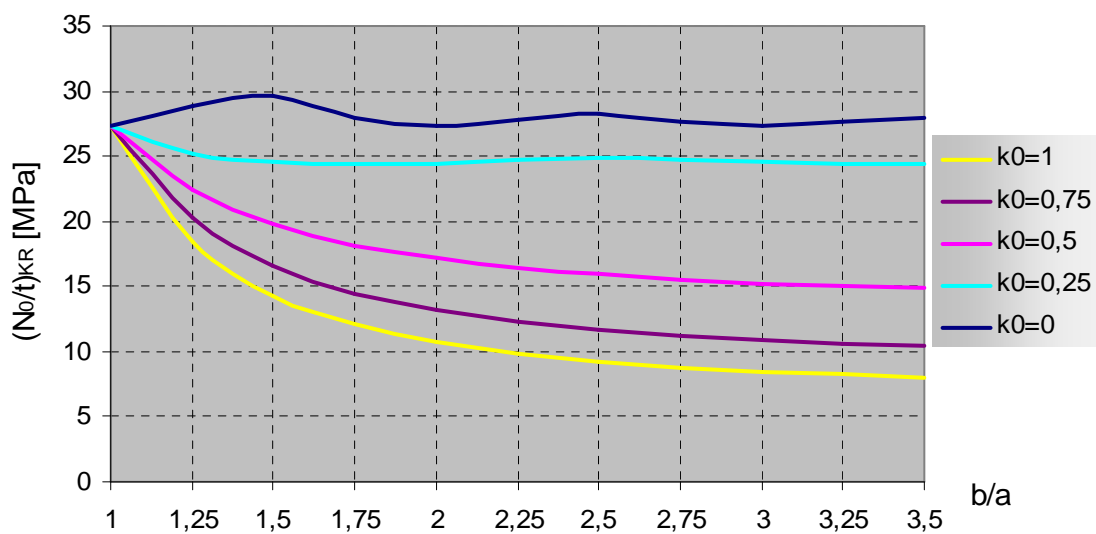
Na rysunkach 6.13, 6.14 i 6.15 przedstawiono wpływ zwiększenia proporcji długości boków na obciążenie krytyczne płyty w przypadku zmiany proporcji obciążenia przy stałej porowatości. Wpływ grubości płyty t na obciążenie krytyczne przedstawiono na wykresach 6.16, 6.17 i 6.18.



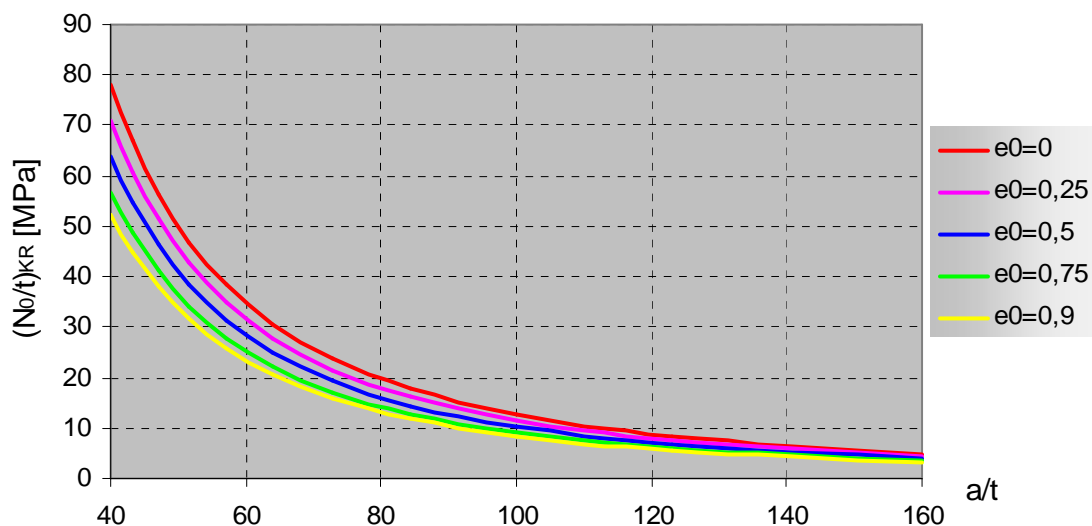
Rys. 6.13. Obciążenie krytyczne płyty w zależności od proporcji b/a dla $e_0 = 0$ i $a/t = 80$.



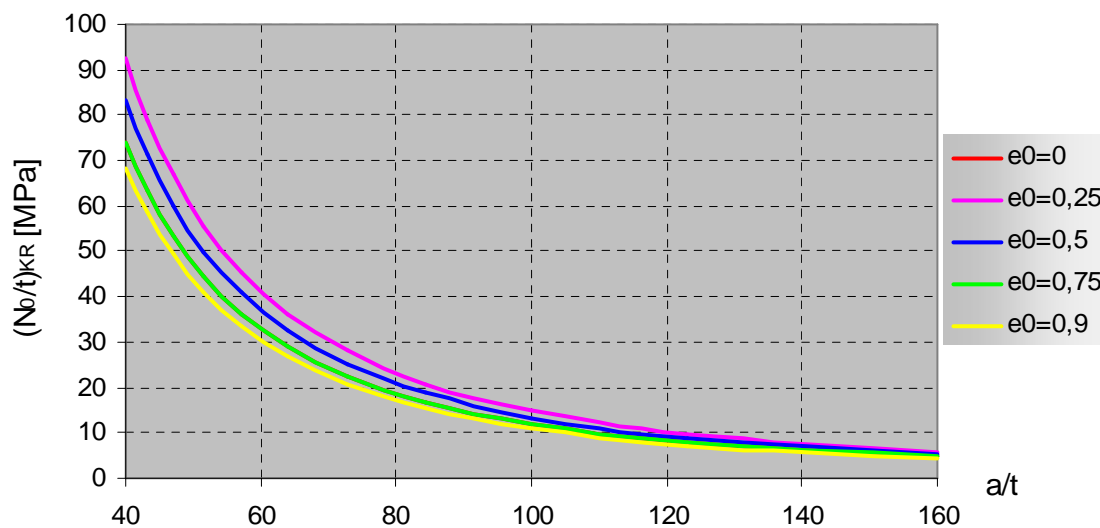
Rys. 6.14. Obciążenie krytyczne płyty w zależności od proporcji b/a dla $e_0 = 0,5$ i $a/t = 80$.



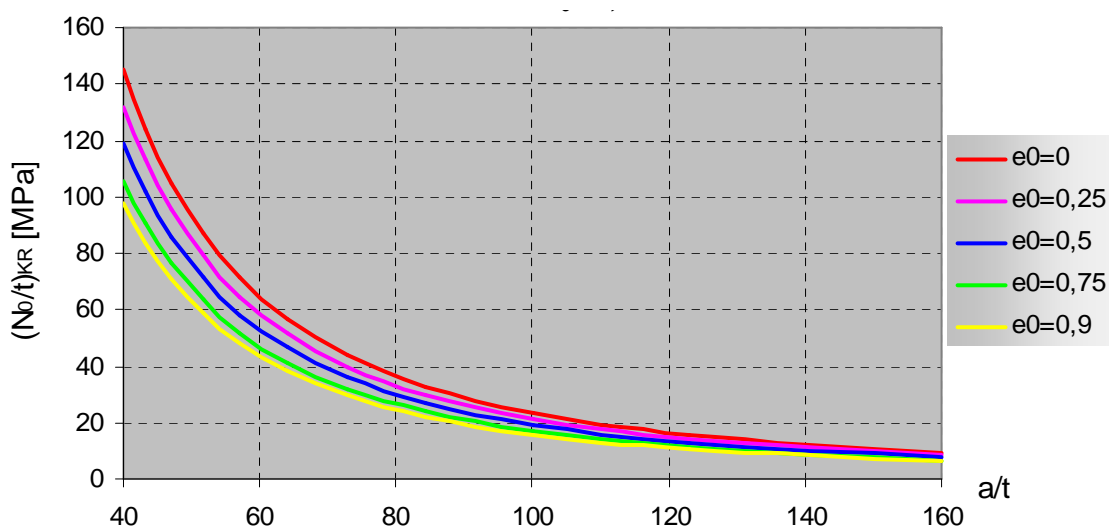
Rys. 6.15. Obciążenie krytyczne płyty w zależności od proporcji b/a dla $e_0 = 0,9$ i $a/t = 80$.



Rys. 6.16. Obciążenie krytyczne płyty w zależności od proporcji a/t dla $k_0 = 0,75$ i $b/a = 2$.



Rys. 6.17. Obciążenie krytyczne płyty w zależności od proporcji a/t dla $k_0 = 0,5$ i $b/a = 2$.

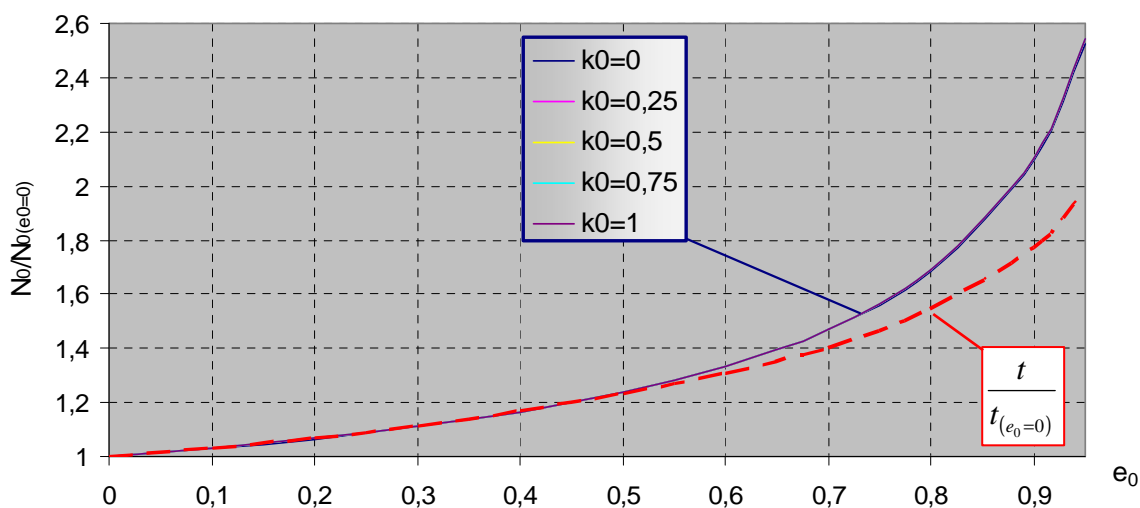


Rys. 6.18. Obciążenie krytyczne płyty w zależności od proporcji a/t dla $k_0 = 0,25$ i $b/a = 2$.

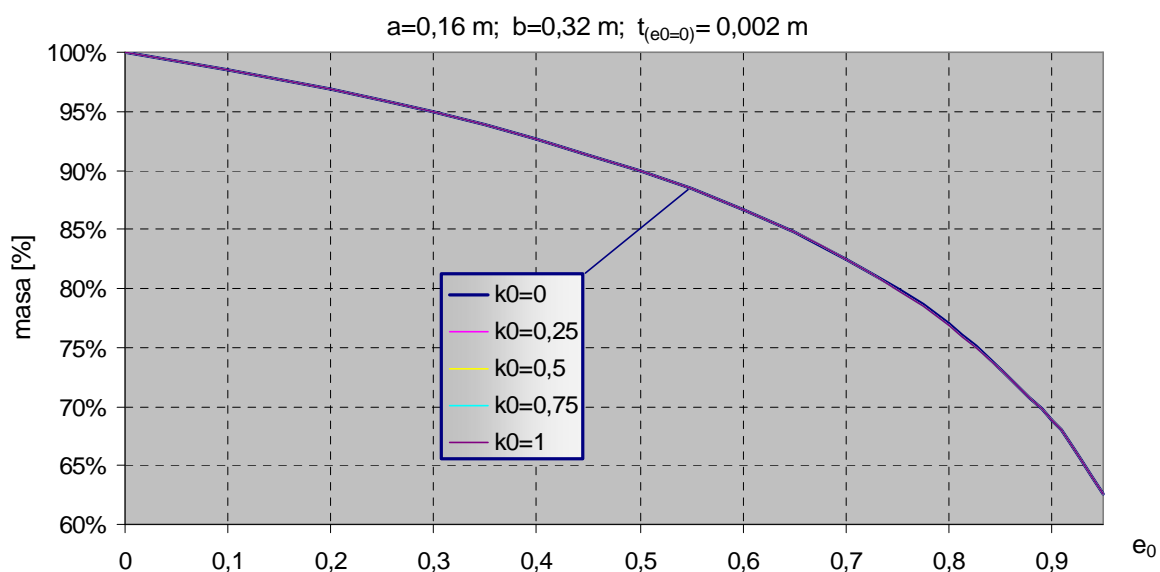
We wszystkich analizowanych powyżej przypadkach zaobserwowano spadek obciążeń krytycznych wraz ze wzrostem porowatości. Prezentowane wyniki potwierdzają powszechnie znaną zależność, że przy założeniu stałej geometrii konstrukcji, zmiana gęstości zastosowanego materiału spowoduje różnice w jej całkowitej masie. Aby wykazać korzyści wynikające z zastosowania materiałów porowatych przeprowadzono analizę wpływu porowatości na wartość obciążenia krytycznego przy założeniu stałej masy konstrukcji. W tym celu przyjęto zmienny parametr grubości opisany następującą zależnością:

$$t = \frac{t_{(e_0=0)}}{c_{11}}. \quad (6.5)$$

$$a=0,16 \text{ m}; \quad b=0,32 \text{ m}; \quad t_{(e_0=0)}= 0,002 \text{ m}$$



Rys. 6.19. Obciążenie krytyczne w zależności od parametru e_0 przy stałej masie płyty.

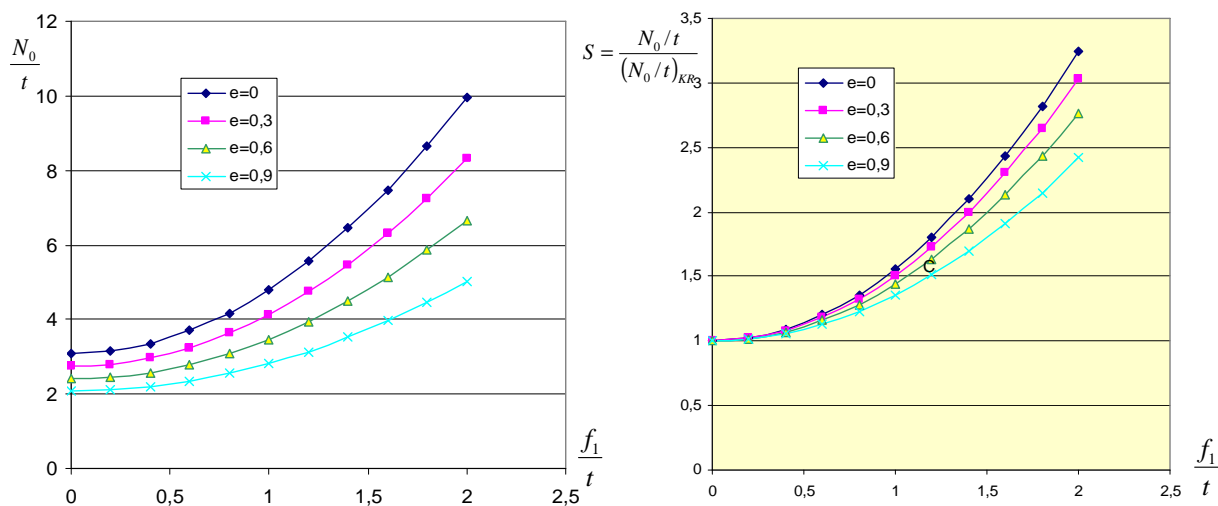


Rys. 6.20. Masa płyty w zależności od parametru e_0 przy ustalonym obciążeniu krytycznym.

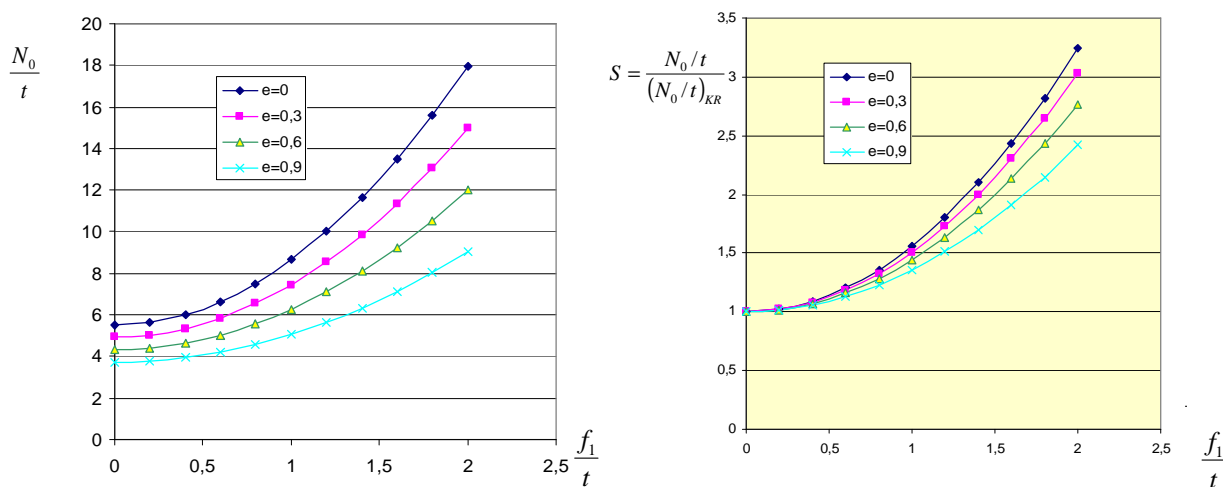
Analizując wyniki prezentowane na rysunku 6.19 zauważono, że wraz ze wzrostem porowatości wzrasta nośność płyty. Jednocześnie zaobserwowano, że w przypadku wzrostu porowatości, analizowane przypadki różnych kombinacji obciążenia płyty nie wykazują prawie żadnej różnicy w zdolności przenoszonych obciążeń. Na rysunku 6.20 przedstawiono wyraźną korzyść w postaci obniżenia masy konstrukcji w analizowanym przypadku nawet o 47 %.

6.1.2 Rozwiązanie dla nieliniowych związków geometrycznych

Na wykresach poniżej przedstawiono zależność obciążenia krytycznego od ugięcia płyty dla zadanych wielkości współczynnika porowatości e_0 :



Rys. 6.21. Obciążenie krytyczne w zależności od ugięcia.



Rys. 6.22. Obciążenie krytyczne w zależności od ugięcia.

Na podstawie prezentowanych wyników można stwierdzić, iż wraz ze wzrostem porowatości płyty zmniejsza się wartość obciążenia krytycznego. Wykazana została spójność między wynikami wymiarowymi dla różnych grubości płyty, przedstawiając ich wartości bezwymiarowo.

6.2 Zagadnienie stateczności dynamicznej płyty prostokątnej

6.2.1 Stateczność dynamiczna w ujęciu liniowym

W zagadnieniach dynamiki konstrukcji ruch układu fizycznego często opisany jest równaniem lub układem równań różniczkowych zwyczajnych o zmiennych współczynnikach okresowych. W takich przypadkach mówimy, że podczas ruchu układu zachodzi tzw. wzbudzenie parametryczne drgań. Jednym z równań, o szczególnym znaczeniu w teorii stateczności dynamicznej, opisującym to zjawisko jest tzw. równanie Mathieu. W przypadku, gdy na układ działa siła wymuszająca w postaci:

$$N_y(\tau) = N_0 + N_a \cos(\theta\tau), \quad (6.6)$$

gdzie:

N_0 – wartość średnia siły ściskającej,

N_a – amplituda drgań,

θ – częstość siły wymuszającej,

to równanie Mathieu można zapisać za pomocą zależności:

$$\frac{d^2 \tilde{f}_1}{d\tau^2} + \Omega^2 [1 - 2\mu \cos(\theta\tau)] \tilde{f}_1(\tau) = 0, \quad (6.7)$$

gdzie:

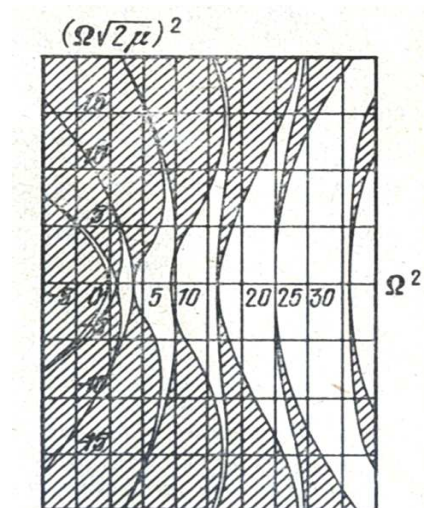
$$\Omega = \omega \sqrt{1 - \frac{N_0}{(N_0)_{KR}}},$$

$$\omega = \frac{m\pi}{a} \sqrt{\frac{(N_0)_{KR}}{C_{11}\rho_1 t}} \quad \text{częstość drgań poprzecznych przy obecności siły ściskającej,}$$

$$\mu = \frac{1}{2} \frac{N_a}{(N_0)_{KR} - N_0} \quad \text{– współczynnik wymuszenia.}$$

Powyższe równanie jest dobrze znane i opisane w wielu pracach naukowych i książkach (można tutaj wymienić między innymi prace Bolotina [11], Doyle'a [30], Grybosia [45] oraz Życzkowskiego [125]). W rozwiązywaniu tego typu zagadnienia nie jest ważna dokładna postać krzywych całkowych, lecz ich zachowanie się przy $\tau \rightarrow \infty$. Niestateczność dynamiczna w ujęciu liniowym wystąpi w przypadku, gdy rozwiązanie okaże się nieograniczenie wzrastające wraz z czasem.

Teoria liniowa nie może dać odpowiedzi co do ustalenia się amplitud drgań oraz co do ich wielkości. Ich dokładną analizę można uzyskać tylko w oparciu o nieliniowe równania drgań. Nie mniej jednak, bez znajomości wielkości amplitud teoria liniowa daje pełny i dokładny pogląd na kwestię niestateczności. Określenie stateczności lub niestateczności rozwiązań równania Mathieu uzyskujemy na podstawie tzw. mapy Ince'a-Strutta (Rys. 6.23), dzielącego płaszczyznę na obszary rozwiązań rosnących nieograniczenie oraz ograniczonych.



Rys. 6.23. Wykres Ince'a-Strutta [125].

Na podstawie literatury przedstawiono obszary niestateczności w następującej postaci:

pierwszy obszar niestateczności:

$$2\omega\sqrt{1-\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)} < \theta < 2\omega\sqrt{1+\frac{1}{2}(\alpha_1-3\alpha_2)}; \quad (6.8)$$

drugi obszar niestateczności:

$$\frac{\omega}{\sqrt{1-\alpha_2}}\sqrt{(1-\alpha_2)^2-\frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2)^2} < \theta < \frac{\omega}{\sqrt{1-\alpha_2}}\sqrt{(1-\alpha_2)^2+\frac{1}{12}(\alpha_1-\alpha_2)^2}, \quad (6.9)$$

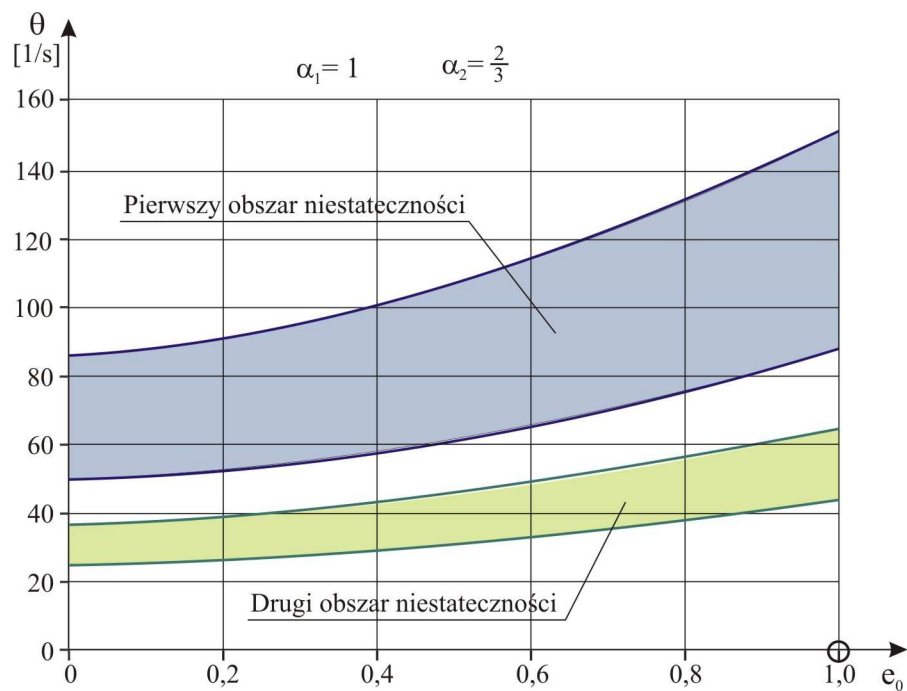
gdzie:

$$\alpha_1 = \frac{N_0 + N_a}{(N_0)_{KR}}, \quad \alpha_2 = \frac{N_0}{(N_0)_{KR}}.$$

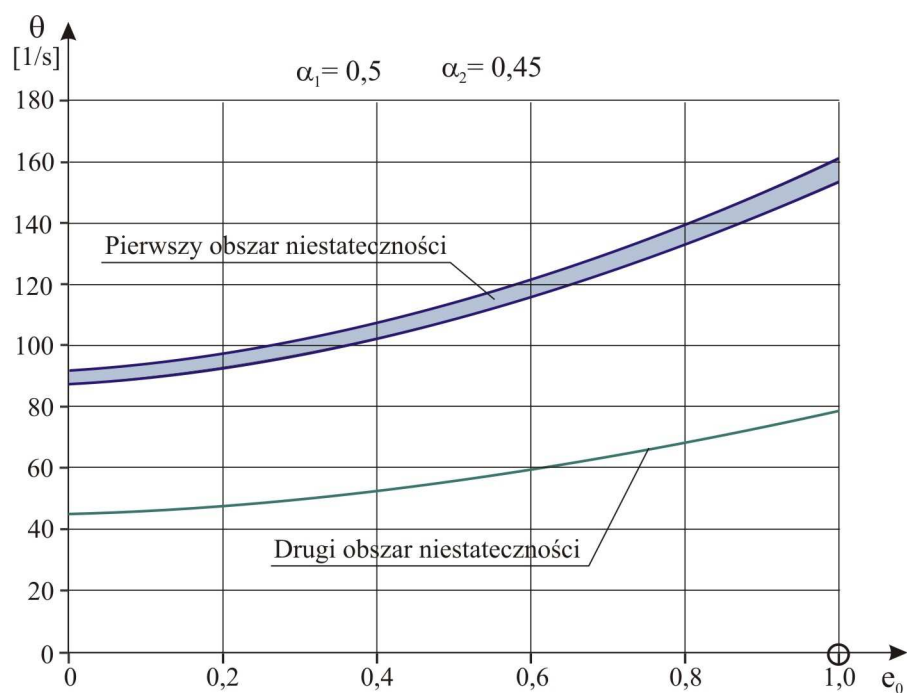
Obliczenia numeryczne przeprowadzono dla przypadku jednoosiowego działania sił ściskających równomiernie rozłożonych na krawędzi a płyty. W tym celu założono, że parametr obciążenia $k_0 = 0$. Wówczas równanie (5.22) przyjmuje postać:

$$N_0 = \frac{t^3}{\left(\frac{n a}{m b}\right)^2} \left\{ \frac{E_1}{(1-\nu^2)} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{n a}{m b}\right)^2 \right]^2 (c_1 - c_2\alpha_{\Phi_1} - c_3\alpha_{\Phi_2}) + \right. \\ \left. + 2c_0 E_1 \tilde{f}_1^2 t (\alpha_{k_1} + \alpha_{k_2}) \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right\}.$$

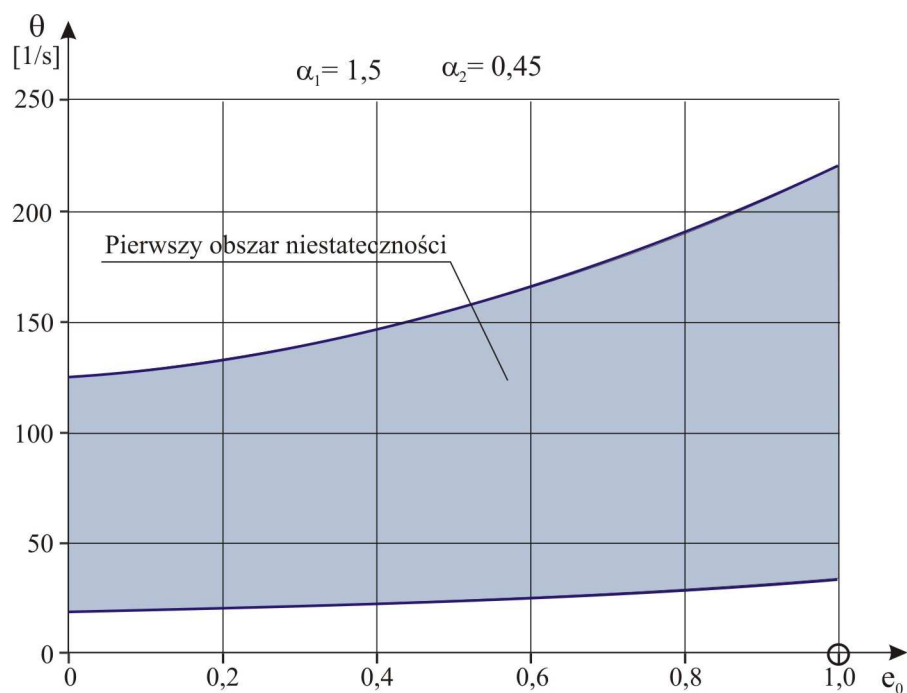
Do badań przyjęto konstrukcję o wymiarach geometrycznych $a=0,160$, $b=0,320$, $t=0,001[m]$ wykonaną ze stopu aluminium, charakteryzującego się następującymi własnościami: $E_1 = 7,06 \cdot 10^4 MPa$, $\nu = 0,33$, $\rho_1 = 2,8 \cdot 10^{-6} kg/mm^3$, $\sigma_{all} = 90 MPa$.



Rys. 6.24. Obszary niestateczności dla $\alpha_1 = 1$ i $\alpha_2 = 2/3$.



Rys. 6.25. Obszary niestateczności dla $\alpha_1 = 0,5$ i $\alpha_2 = 0,45$.



Rys. 6.26. Obszary niestateczności dla $\alpha_1 = 1,5$ i $\alpha_2 = 0,45$.

Na podstawie przeprowadzonych badań i ich analizie oraz porównaniu wyników z pracami wielu autorów można stwierdzić, że dla płyt praktyczne znaczenie ma przede wszystkim pierwszy obszar niestateczności, odpowiadający najniższej częstości drgań własnych i najmniejszej sile krytycznej.

6.2.2 Stateczność dynamiczna w ujęciu nieliniowym

Na podstawie numerycznego rozwiązania zależności (5.23) przeprowadzono analizę stateczności płyty poddanej obciążeniom dynamicznym. Obliczenia oparto o algorytm metody Rungego - Kuty. Całkowanie numeryczne równań różniczkowych drugiego rzędu wykonano przy użyciu programu Matlab. Równanie rozwiązano przy następujących warunkach początkowych:

$$\text{dla: } \tau = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 \tilde{f}_1}{\partial \tau^2} = 0. \quad (6.10)$$

Otrzymana w ten sposób postać równania różniczkowego pozwala przyjąć dowolną, zależną od czasu, funkcję obciążenia. Początkowo przyjęto, że obciążenie zewnętrzne rośnie w czasie w sposób liniowy z ustaloną prędkością. Następnie badano stateczność płyty poddanej obciążeniu quasi-impulsowemu z założeniem, że jego przebieg ma charakter sinusoidalny. We wszystkich rozważanych przypadkach przyjęto stałą w danej chwili proporcję obciążeń zewnętrznych k_0 .

Obliczenia przeprowadzono dla rodziny płyt prostokątnych o następujących parametrach geometrycznych:

$$t = 2 \text{ mm}, a = 160 \text{ mm}, b = 320 \text{ mm}, \rightarrow b/a = 2, a/t = 80;$$

$$t = 2 \text{ mm}, a = 160 \text{ mm}, b = 480 \text{ mm}, \rightarrow b/a = 3, a/t = 80;$$

$$t = 1 \text{ mm}, a = 160 \text{ mm}, b = 480 \text{ mm}, \rightarrow b/a = 3, a/t = 160.$$

Przyjęto parametr dwukierunkowego obciążenia płyty $k_0 = 0,75$ oraz $k_0 = 0,25$.

– Obciążenie rosnące proporcjonalnie do czasu

Obciążenie zewnętrzne płyty narasta liniowo od wartości początkowej $\tau = 0$.

$$\frac{N_0(\tau)}{t} = c \cdot \tau \quad (6.11)$$

gdzie:

$$c \left[\frac{\text{MPa}}{\text{s}} \right] - \text{prędkość narastania obciążenia zewnętrznego.}$$

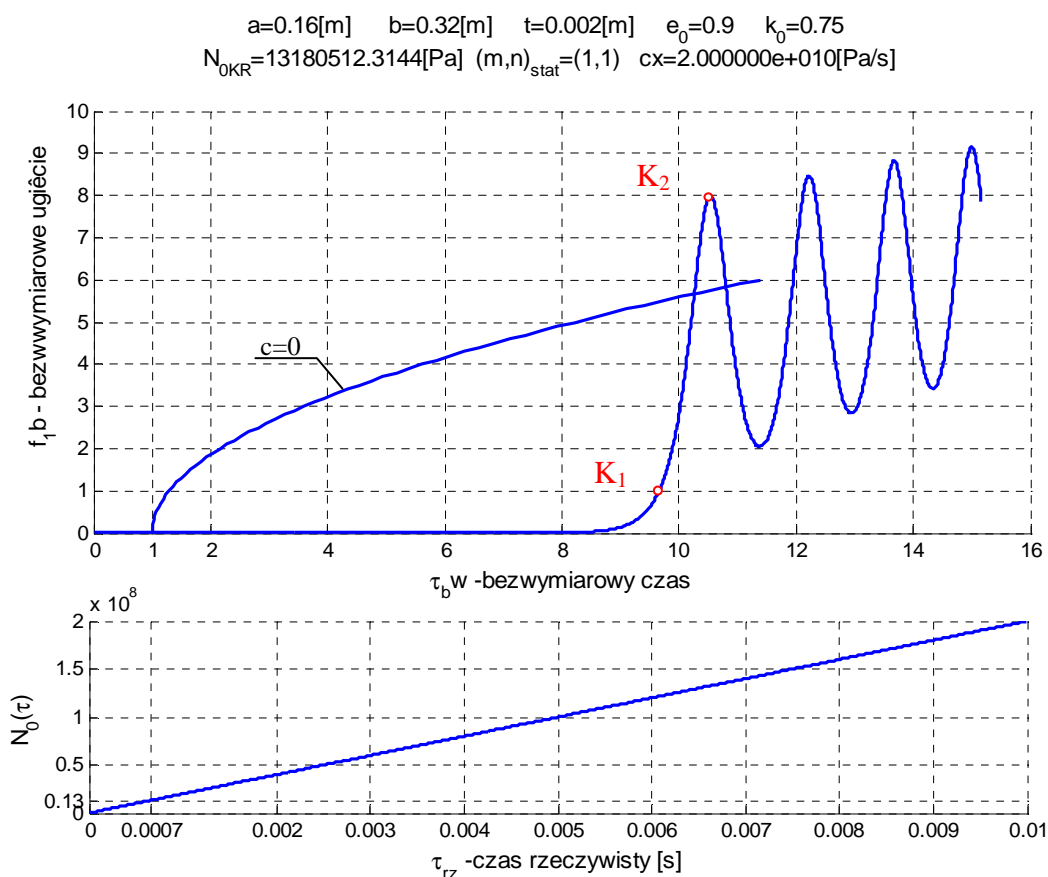
Na rysunkach 6.27 – 6.34 przedstawiono przykładowe wyniki obliczeń dla rodziny płyt prostokątnych. Wprowadzono bezwymiarowy parametr czasu $\tilde{\tau}$, będący stosunkiem wartości obciążenia bieżącego do górnego obciążenia krytycznego w zagadnieniu statycznym. Pełni on jednocześnie funkcję współczynnika obciążenia dynamicznego.

$$\tilde{\tau} = \frac{\tau}{\tau_{kr}} = \frac{N_0(\tau)}{N_{0_{KR}}} \quad (6.12)$$

gdzie:

τ_{kr} – czas, po którym obciążenie $N_0(\tau)$ osiągnie wartość $N_{0_{KR}}$.

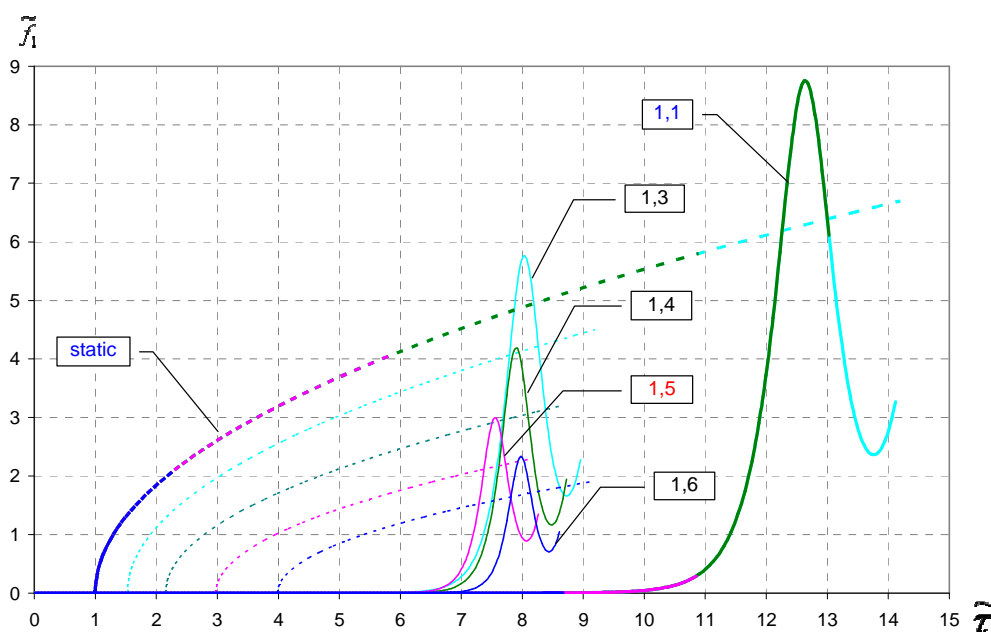
Przykładowy przebieg ugięcia płyty pod wpływem wzrostu obciążenia zewnętrznego przedstawia rysunek 6.27. Prezentowana krzywa $c=0$ jest rozwiązaniem zagadnienia statycznego.



Rys. 6.27. Ugięcie płyty w funkcji parametru $\tilde{\tau}$.

Początkowo wraz ze wzrostem obciążenia znacznie maleje ugięcie płyty. Po osiągnięciu wartości krytycznej (punkt K_1 na krzywej), następuje gwałtowny wzrost ugięcia aż do osiągnięcia lokalnej maksymalnej wartości (punkt K_2 na krzywej). Dalej płyta przechodzi w stan nieliniowych drgań wokół nowego położenia równowagi, wyznaczonego przez krzywą będącą rozwiązaniem statycznym. Utrata stateczności płyty następuje wówczas, gdy niewielki wzrost obciążenia powoduje bardzo szybki wzrost ugięć (przebieg krzywej od punktu K_1 do K_2). Punkty te określają granice przedziału dynamicznych obciążeń krytycznych.

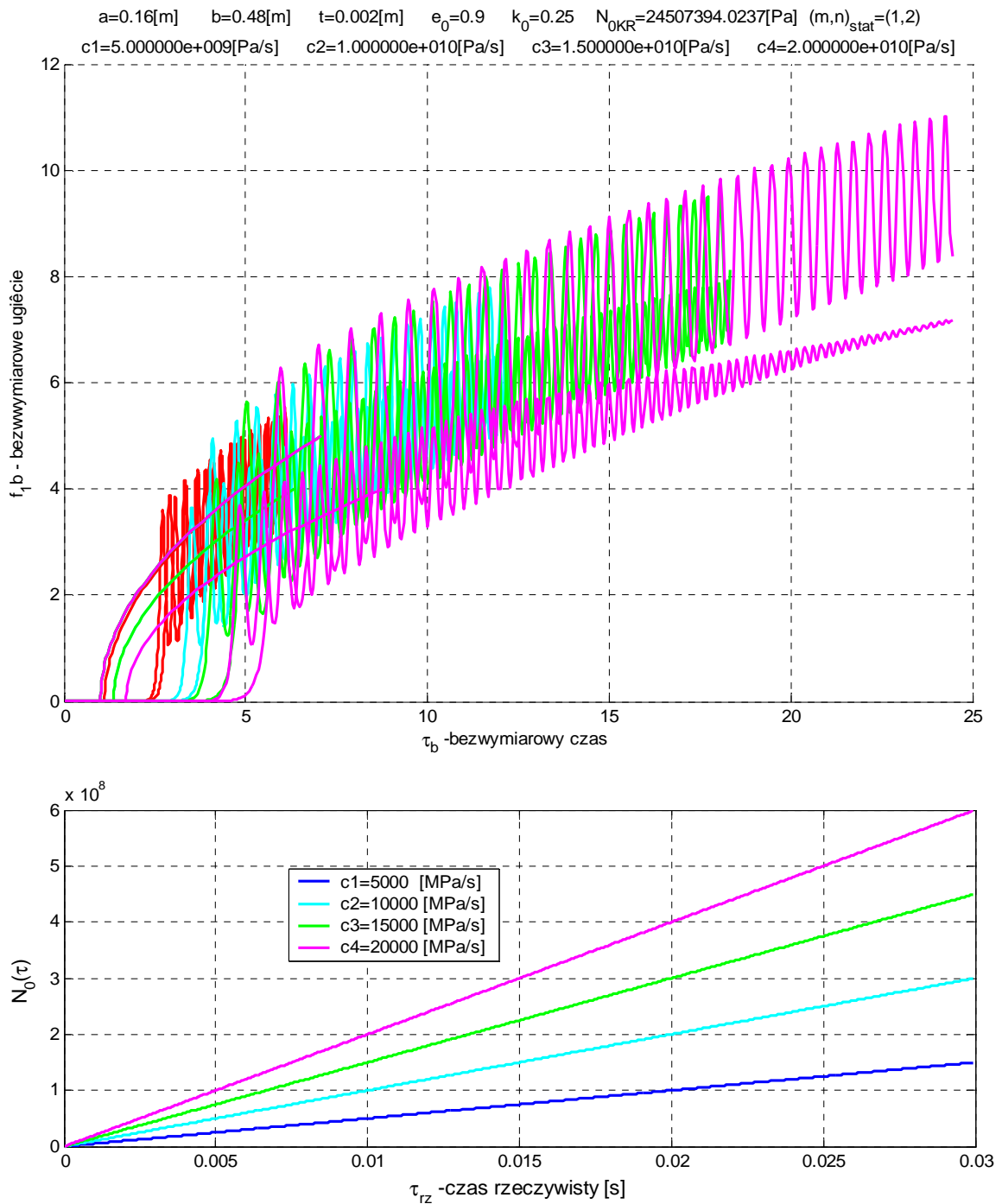
Należy przewidzieć także możliwość wystąpienia utraty stateczności przy innej niż statyczna, postaci wyboczenia płyty. Takie zdarzenie ma miejsce przy większych prędkościach narastania obciążenia zewnętrznego. Przykładowe przebiegi utraty stateczności płyty (statycznej i dynamicznej) w zależności od liczby m i n przedstawia rysunek 6.28.



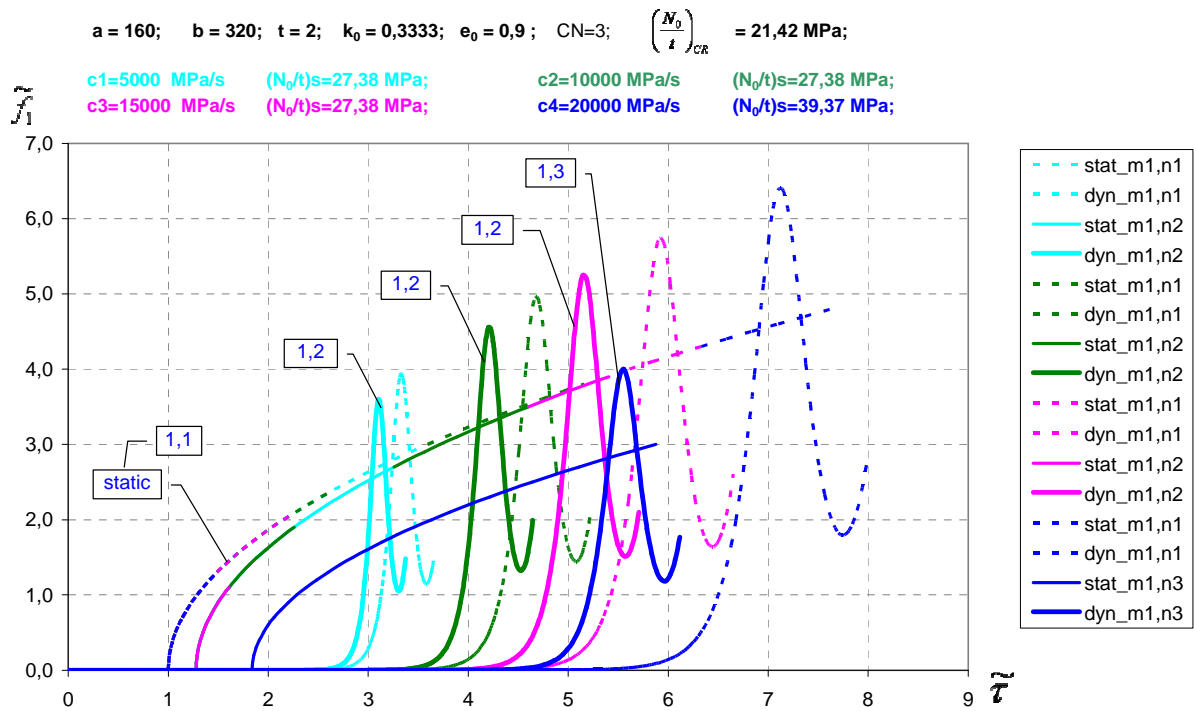
Rys. 6.28. Ugięcie płyty w funkcji parametru $\tilde{\tau}$ w zależności od postaci wyboczenia.

W zagadnieniu statycznym utrata stateczności występuje przy jednej półfali w kierunku osi x i y ($m=n=1$), natomiast w zagadnieniu dynamicznym, przy danej szybkości obciążenia, płyta odkształca się najszybciej przy $m=1$ i $n=5$. Wzrost liczby fal powoduje zmniejszenie wartości lokalnego maksimum krzywej.

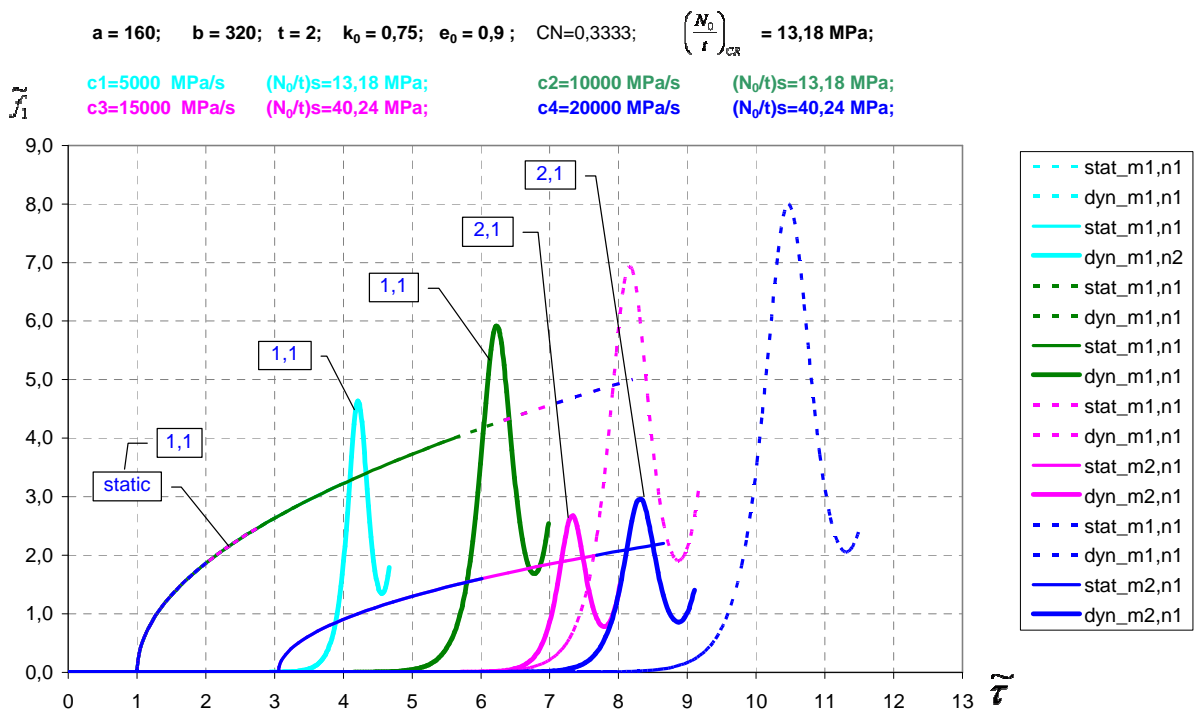
Przebieg utraty stateczności oraz zmianę postaci wybożenia płyty dla różnych prędkości obciążenia przedstawiono na rysunkach 6.29 – 6.33.



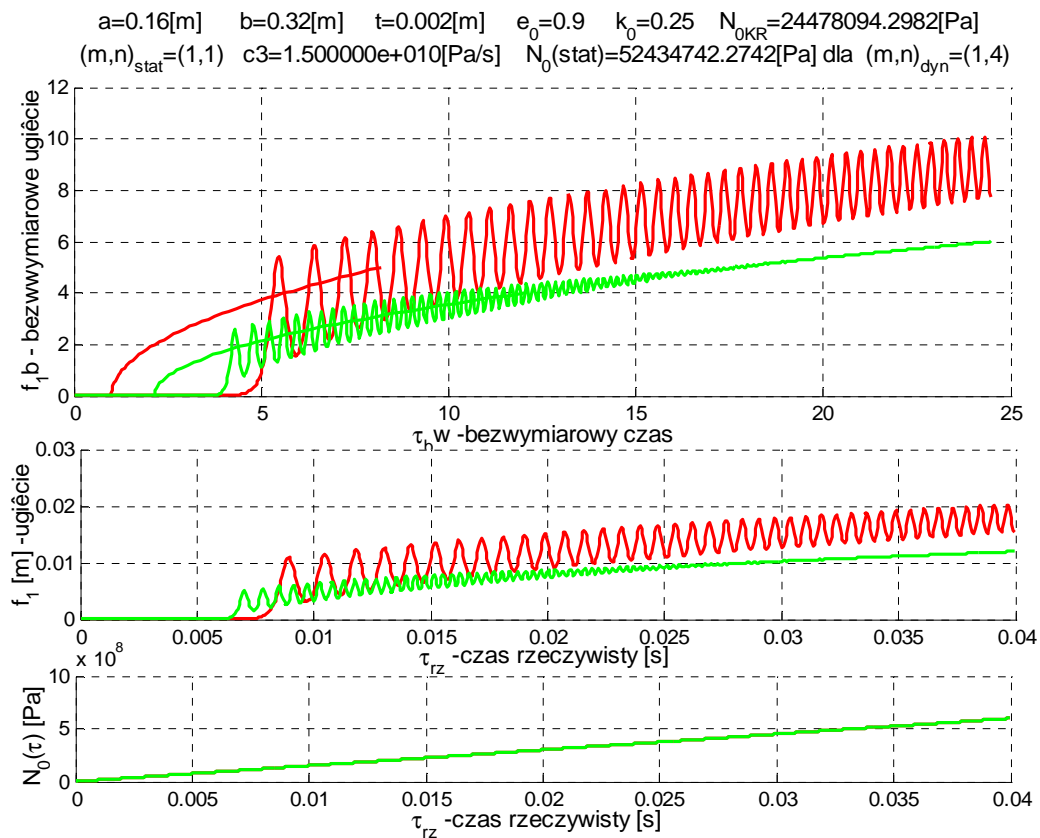
Rys. 6.29. Ugięcie płyty w funkcji parametru $\tilde{\tau}$ dla $k_0 = 0,25$ i $e_0 = 0,9$.



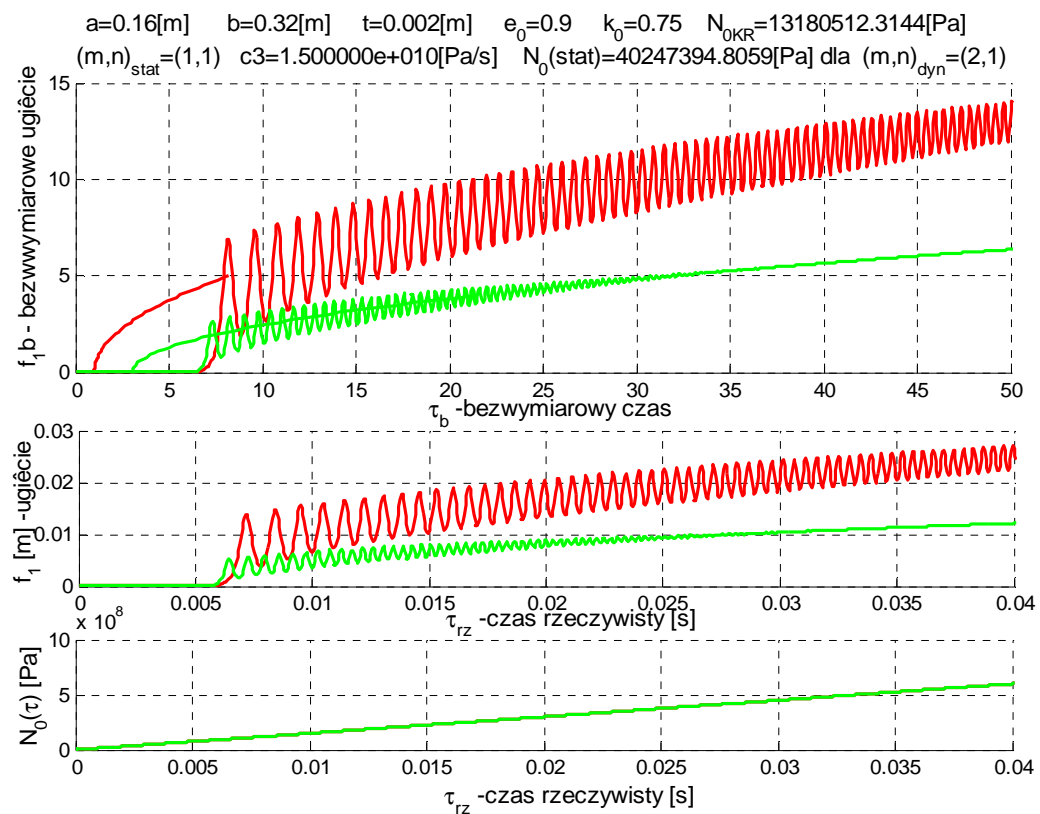
Rys. 6.30. Ugięcie płyty w funkcji parametru $\tilde{\tau}$ w zależności od postaci wyboczenia.



Rys. 6.31. Ugięcie płyty w funkcji parametru $\tilde{\tau}$ w zależności od postaci wyboczenia.

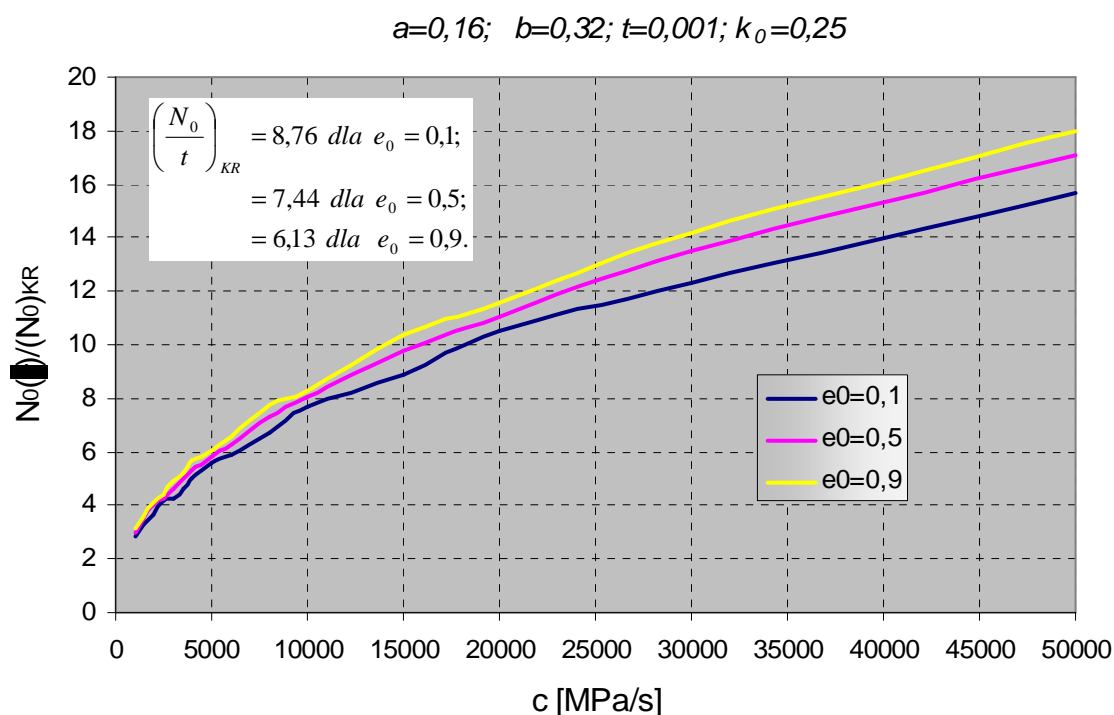


Rys. 6.32. Ugięcie płyty w funkcji czasu dla $k_0 = 0,25$ i $c = 15000MPa/s$.



Rys. 6.33. Ugięcie płyty w funkcji czasu dla $k_0 = 0,75$ i $c = 15000MPa/s$.

Wzrost prędkości obciążenia powoduje wzrost dynamicznej odporności płyty na wyboczenie. Na wykresach 6.30 i 6.31 linią przerywaną oznaczono krzywe odpowiadające statycznej postaci wyboczenia, natomiast linią ciągłą, krzywe odpowiadające dynamicznej postaci wyboczenia. Na pozostałych wykresach statyczna postać wyboczenia oznaczona jest kolorem czerwonym. Wraz ze wzrostem prędkości obciążenia, płyta utraci stateczność szybciej, w odniesieniu do czasu rzeczywistego, ale przy większej wartości obciążenia zewnętrznego. Aby określić dynamiczne obciążenia krytyczne przyjęto kryterium Volmira [111]. Zgodnie z tym kryterium dynamiczne obciążenie krytyczne określa czas, podczas którego ugięcie płyty osiąga wartość równą jej grubości $\tilde{f}_1 = 1$. W chwili osiągnięcia tej wartości następuje gwałtowny wzrost ugięcia, wynikający z utraty stateczności płyty. Wpływ prędkości c na dynamiczne obciążenia krytyczne płyty przedstawia rysunek 6.34. Wyniki obliczeń przedstawiono dla różnych parametrów porowatości e_0 . Większy przyrost dynamicznych obciążeń krytycznych obserwuje się przy wzroście prędkości. Wynika to ze zmiany postaci wyboczenia płyty przy dużych prędkościach. Zależność tą obserwujemy szczególnie przy dominującym ściskaniu osiowym (Rys. 6.30).



Rys. 6.34. Wpływ prędkości c na dynamiczne obciążenie krytyczne płyty.

Przedstawiona na powyższych wykresach wyższa odporność płyty porowatej wynika z mniejszej wartości siły krytycznej.

– Obciążenie o charakterze quasi - impulsowym

Obciążenie zewnętrzne płyty o charakterze quasi – impulsowym oraz przebiegu sinusoidalnym zmienia się w czasie wg następujących warunków:

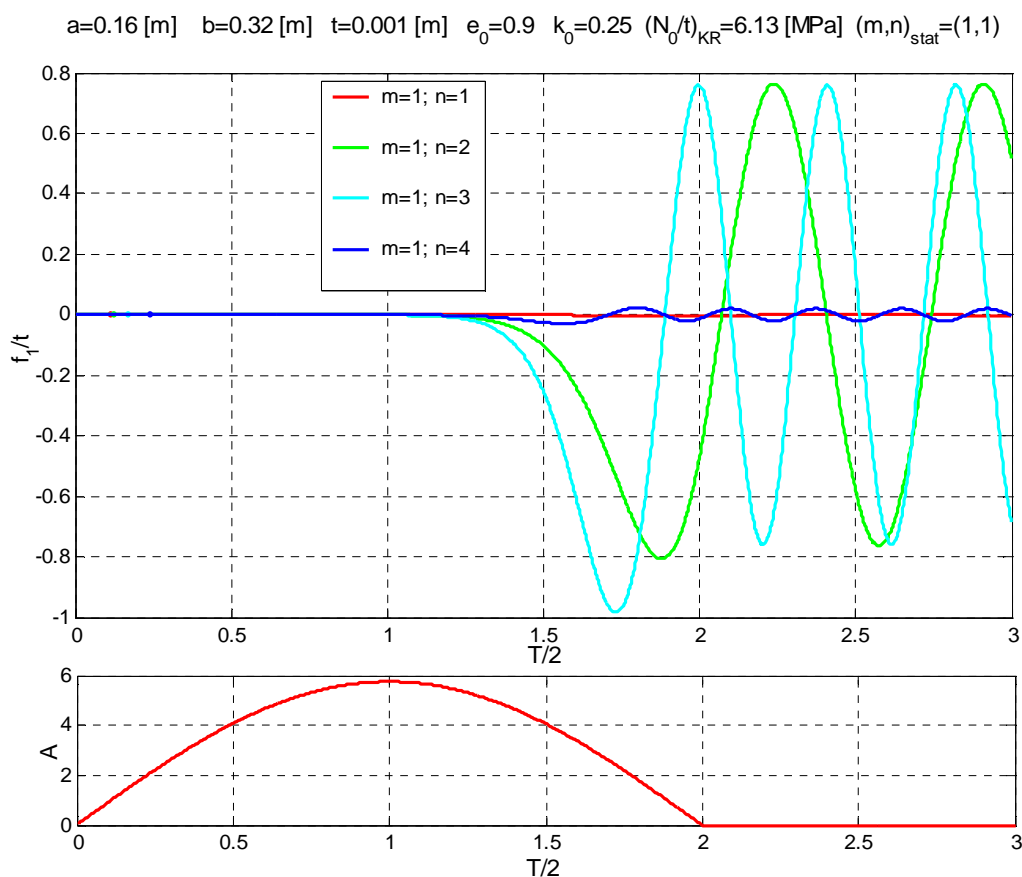
$$0 \leq \tau \leq T \rightarrow N_0(\tau) = A \cdot N_0 \cdot \sin \frac{\pi \tau}{T},$$

$$\tau > T \rightarrow N_0(\tau) = 0,$$
(6.13)

gdzie T - czas trwania impulsu.

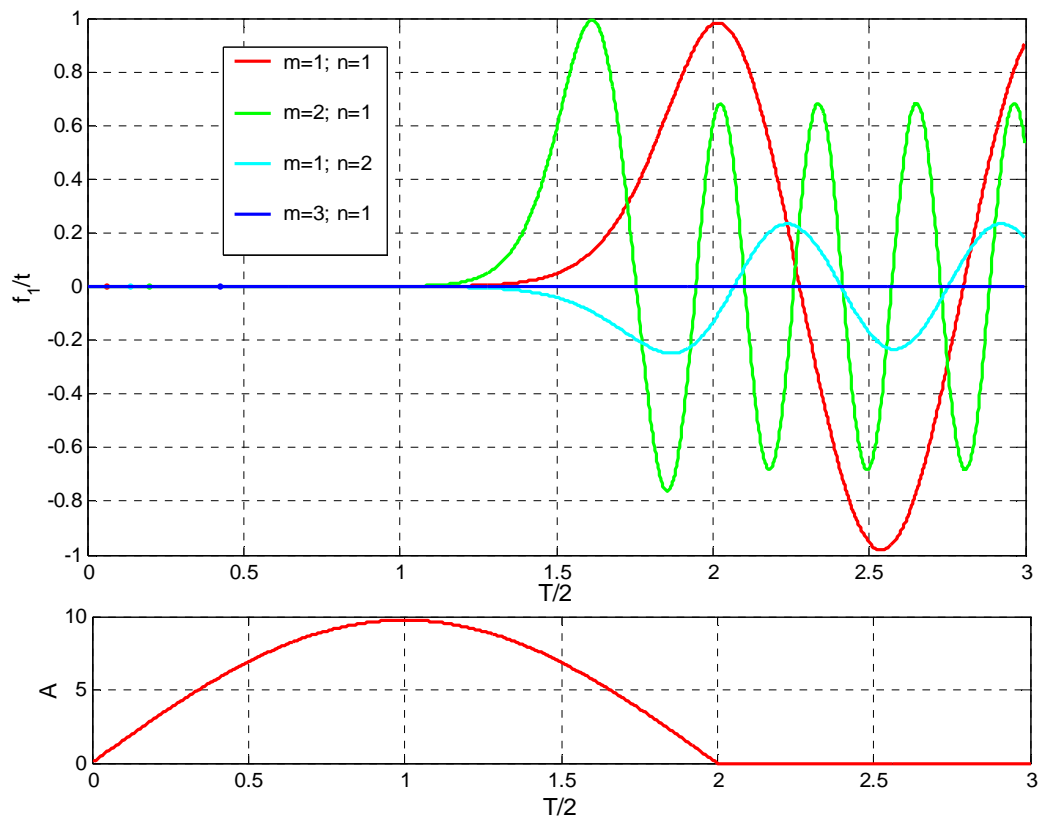
Wielkość impulsu ustalona jest parametrem A określającym stopień podwyższenia obciążenia krytycznego.

Badania przeprowadzono przy założeniu stałego czasu trwania impulsu $T=0,015$ [s]. Na rysunkach 6.35 – 6.36 przedstawiono przebieg obciążenia oraz ugięcie płyty w zależności od rodzaju obciążenia.



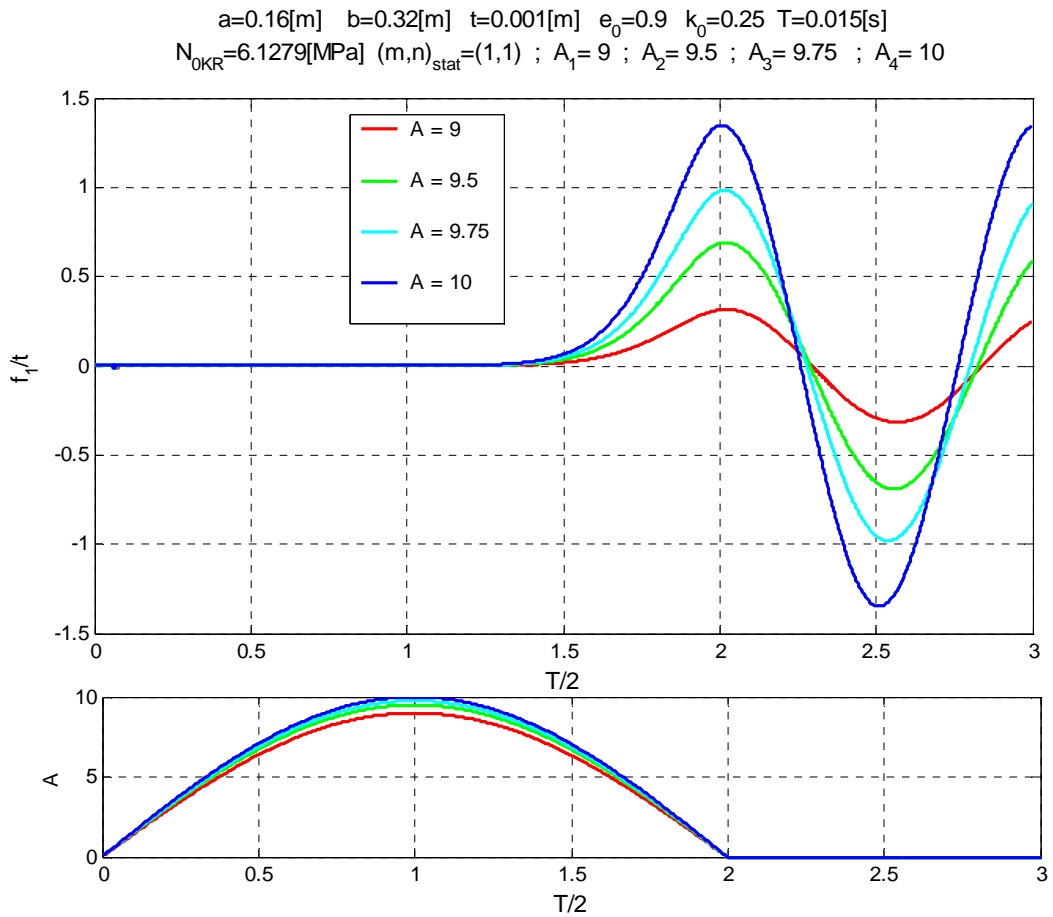
Rys. 6.35. Ugięcie płyty w zależności od postaci wyboczenia przy $T=0,015$ [s] i $k_0=0,25$.

$a=0.16[m]$ $b=0.32[m]$ $t=0.001[m]$ $e_0=0.9$ $k_0=0.75$ $T=0.015[s]$ $N_{OKR}=3.2996[MPa]$ $(m,n)_{stat}=(1,1)$ $A=9.75$

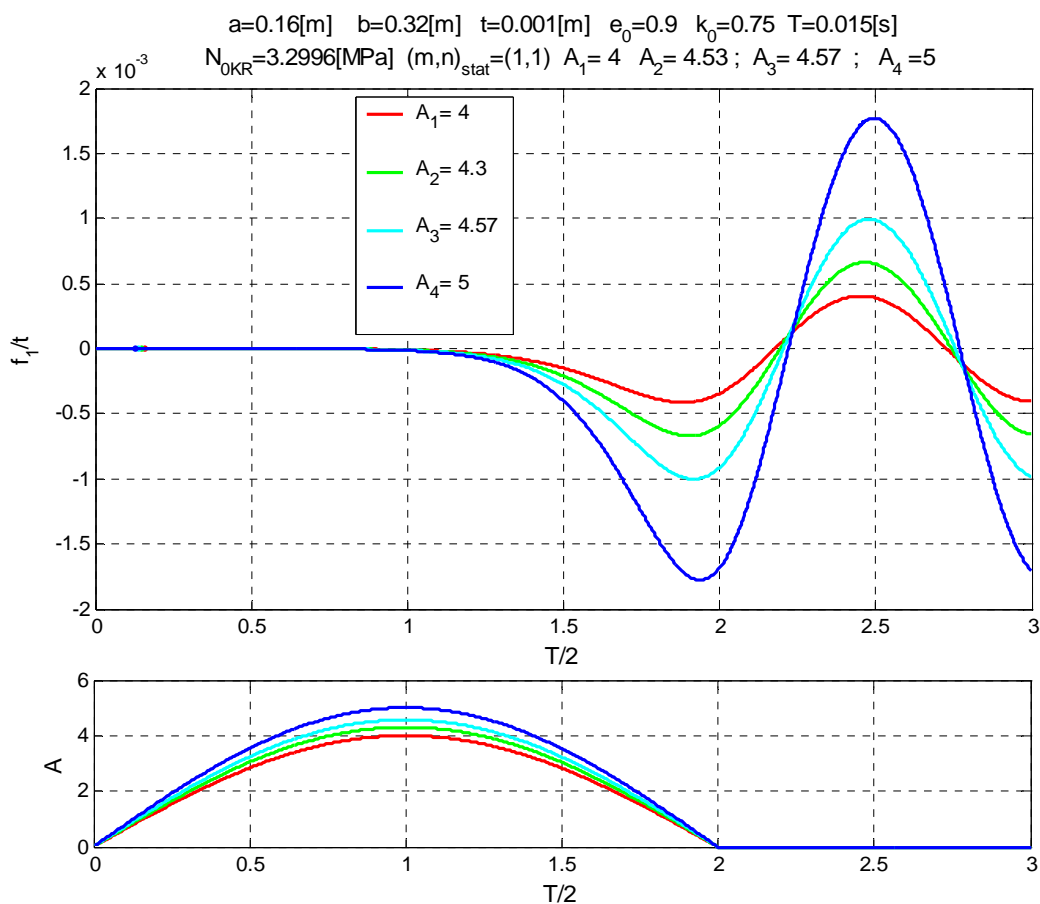


Rys. 6.36. Ugięcie płyty w zależności od parametru obciążenia A dla $k_0=0,75$.

Na rysunkach 6.37 oraz 6.38 zaprezentowano przykładowe przebiegi ugięcia płyty pod wpływem wzrostu obciążenia zewnętrznego. Przyjęto odpowiednio $k_0=0,25$ oraz $k_0=0,75$. Początkowo wzrost wielkości impulsu nie powoduje utraty stateczności płyty. Zaobserwowano tylko drgania o małej amplitudzie. Dalszy nieznaczny przyrost obciążenia powoduje gwałtowny wzrost ugięcia. Następuje tutaj dynamiczna utrata stateczności płyty.

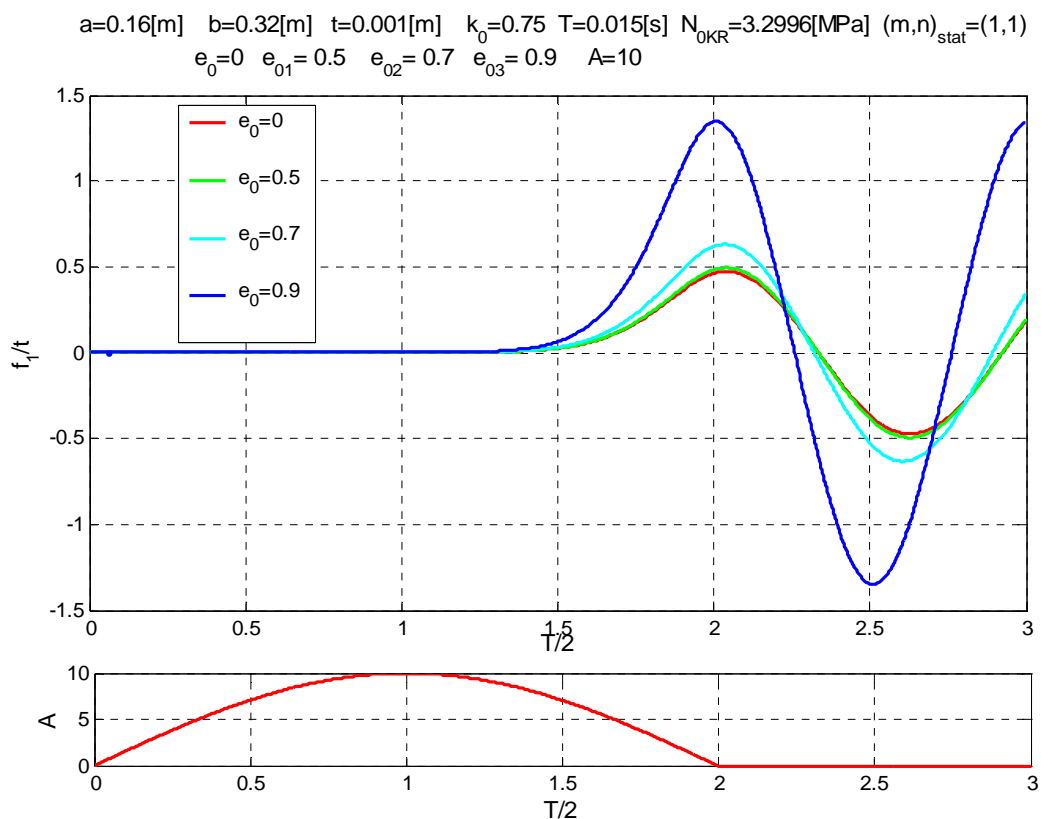


Rys. 6.37. Ugięcie płyty w zależności od postaci wyboczenia przy $T=0,015 [s]$ i $k_0=0,25$.

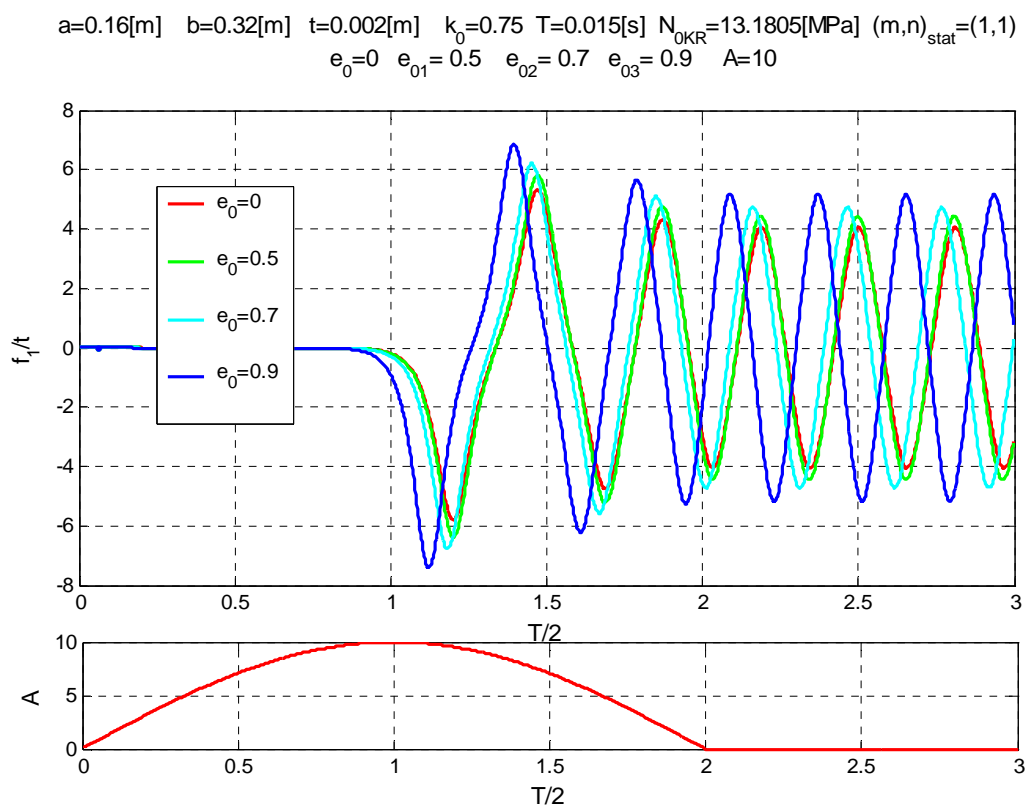


Rys. 6.38. Ugięcie płyty w zależności od postaci wyboczenia przy $T=0,015 [s]$ i $k_0=0,75$.

Rysunki 6.39 – 6.40 przedstawiają ugięcie płyty w zależności od parametru porowatości dla różnych grubości płyty. Wraz ze wzrostem współczynnika porowatości rośnie amplituda ugięcia płyty. Przebieg utraty stateczności jest bardziej gwałtowny w przypadku materiału porowatego.



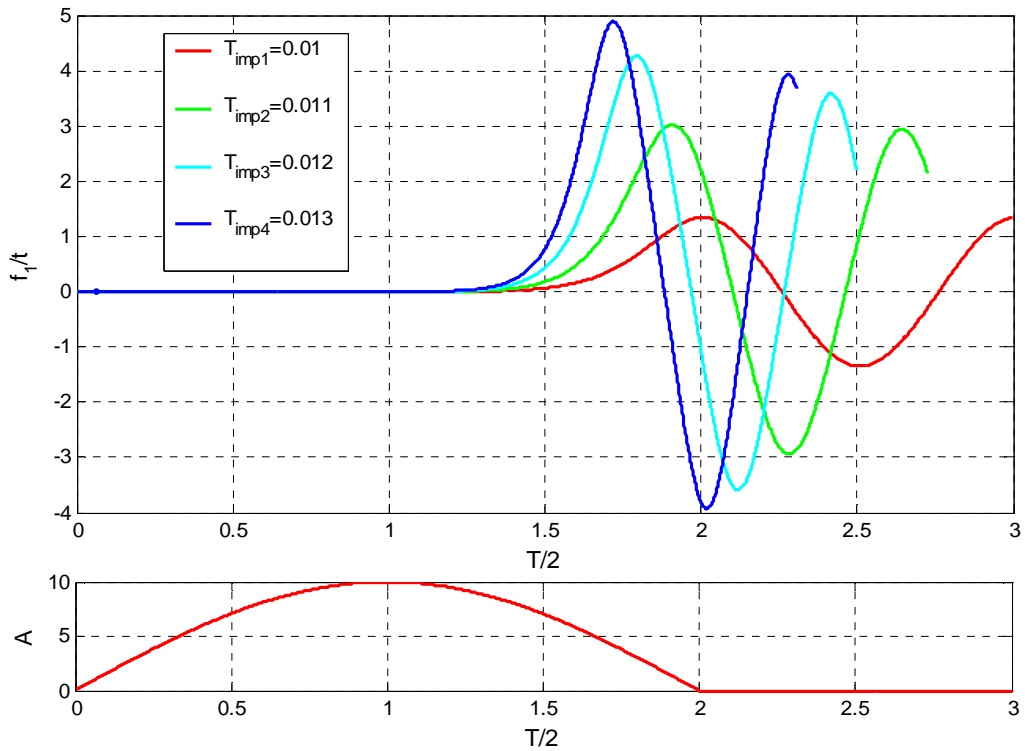
Rys. 6.39. Ugięcie płyty w zależności od porowatości przy $t=0,001 [m]$ i $k_0=0,75$.



Rys. 6.40. Ugięcie płyty w zależności od porowatości przy $t=0,002 [m]$ i $k_0=0,75$.

Przeprowadzono również analizę wpływu czasu trwania impulsu na ugięcie płyty. Zaobserwowano, że wraz ze zwiększeniem czasu trwania impulsu maleje amplituda przebiegu ugięcia płyty.

$$a=0.16[\text{m}] \quad b=0.32[\text{m}] \quad t=0.001[\text{m}] \quad k_0=0.25 \quad T=0.015[\text{s}] \quad N_{OKR}=6.1279[\text{MPa}] \quad (m,n)_{\text{stat}}=(1,1) \quad e_0=0.9$$
$$T_{\text{imp}1}=0.01[\text{s}] \quad T_{\text{imp}2}=0.011[\text{s}] \quad T_{\text{imp}3}=0.012[\text{s}] \quad T_{\text{imp}4}=0.013[\text{s}]$$



Rys. 6.41. Ugięcie płyty w zależności czasu trwania impulsu T_{imp} .

6.3 Badania porównawcze MES

Badania wykonano metodą elementów skończonych w programie ANSYS 5.7. Zastosowano element skończony SHELL181, który ma cztery węzły oraz sześć stopni swobody w każdym węźle (trzy składowe przemieszczenia oraz trzy składowe obrotowe stopnie swobody). Element ten uwzględnia duże obroty, duże odkształcenia (w tym także plastyczne) i może być stosowany w nieliniowych zadaniach. Model dyskretny płyty zawierał w sumie 200 elementów skończonych.

Do badań wybrano dwa przypadki obciążenia płyt: $k_0 = 0,25$ oraz $k_0 = 0,75$. Wymiary płyty wynoszą: $t = 0,002m$; $a = 0,16m$; $b = 0,32m$, wskaźniki mechaniczne i fizyczne: $E_1 = 7,06 \cdot 10^4 MPa$, $\nu = 0,33$, $\rho_1 = 2800 kg/m^3$, $e_0 = 0,9$.

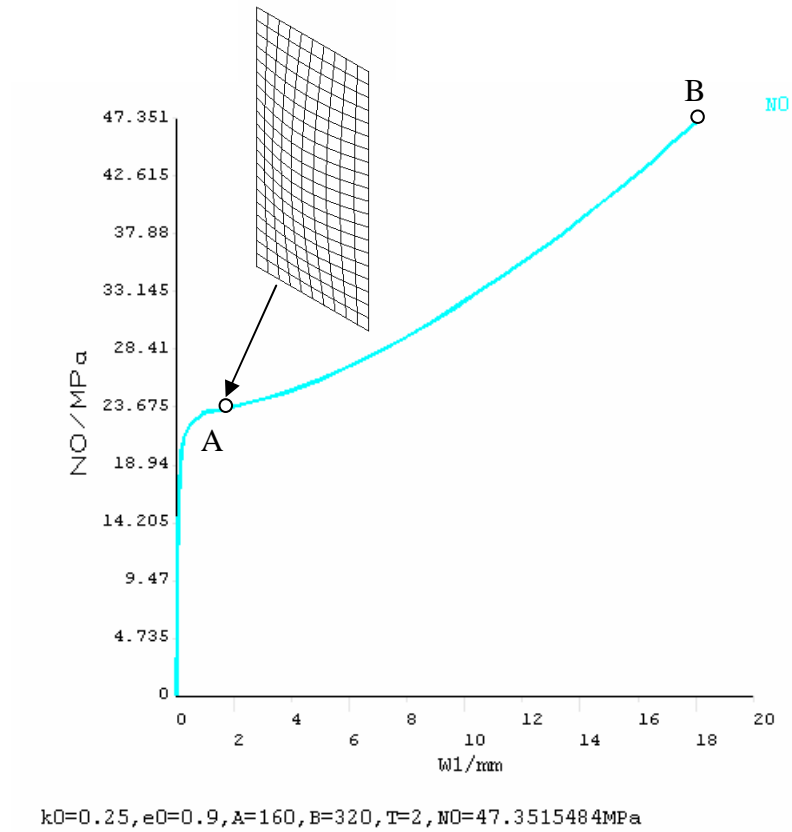
Badania przeprowadzono dla dwóch stanów:

stateczność statyczna – rozwiązanie w oparciu o związki geometrycznie nieliniowe,

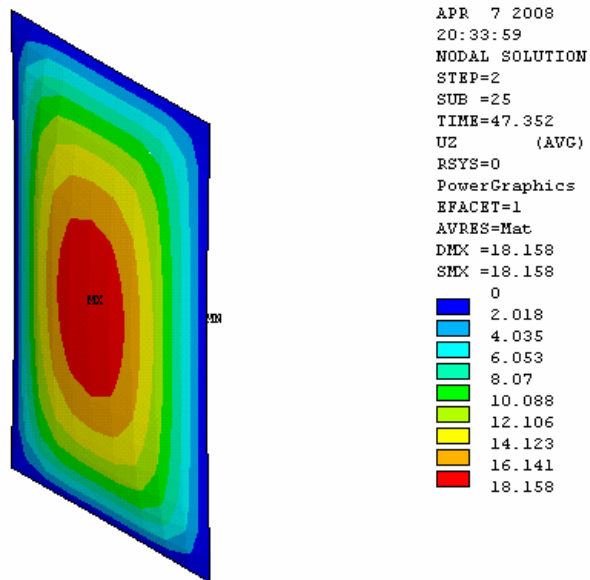
stateczność dynamiczna – liniowa zależność obciążenia od czasu, prędkość narastania naprężenia wynosi $c_x = 20000 MPa/s$.

Na rysunku 6.42 przedstawiono ścieżkę równowagi płyty w zakresie do- oraz zakrytycznym. W analizowanym przypadku przyjęto parametr $k_0 = 0,25$, a współczynnik porowatości $e_0 = 0,9$. Naprężenie krytyczne obliczone za pomocą MES wynosi $N_{0kr} = 23,696 MPa$. Punkt bifurkacji A oraz odpowiadająca mu postać utraty stateczności zaznaczono na rysunku 6.42. Liczba półfal wynosi $m = 1$, $n = 1$. Porównując wyniki w oparciu o MES z wynikami rozwiązania analitycznego otrzymano naprężenie krytyczne mniejsze o 3,3% ($23,696 MPa / 24,488 MPa$). Postać wyboczenia jest identyczna, gdyż zgodna jest liczba półfal m oraz n w obu rozwiązaniach. Na rysunku 6.43 przedstawiono deformację płyty w stanie zakrytycznym.

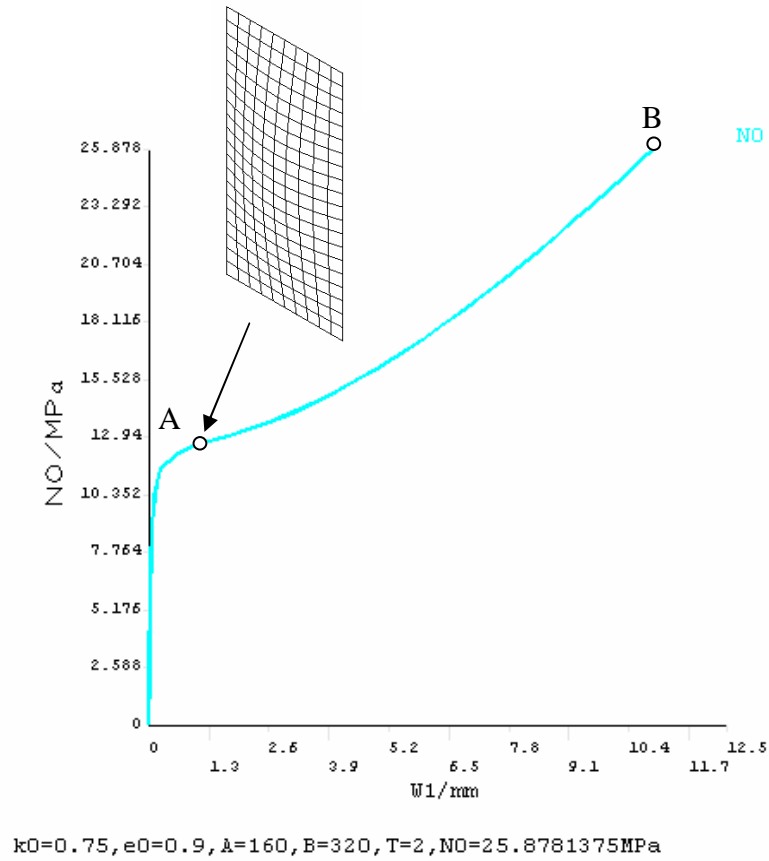
Dla przypadku pokazanego na rysunku 6.44 ($k_0 = 0,75$) otrzymano naprężenie krytyczne mniejsze o 3,7% ($12,693 MPa / 13,18 MPa$). Postać utraty stateczności także w tym przypadku odpowiada rozwiązaniu analitycznemu jak pokazano na rysunku 6.45 ($m = 1$, $n = 1$).



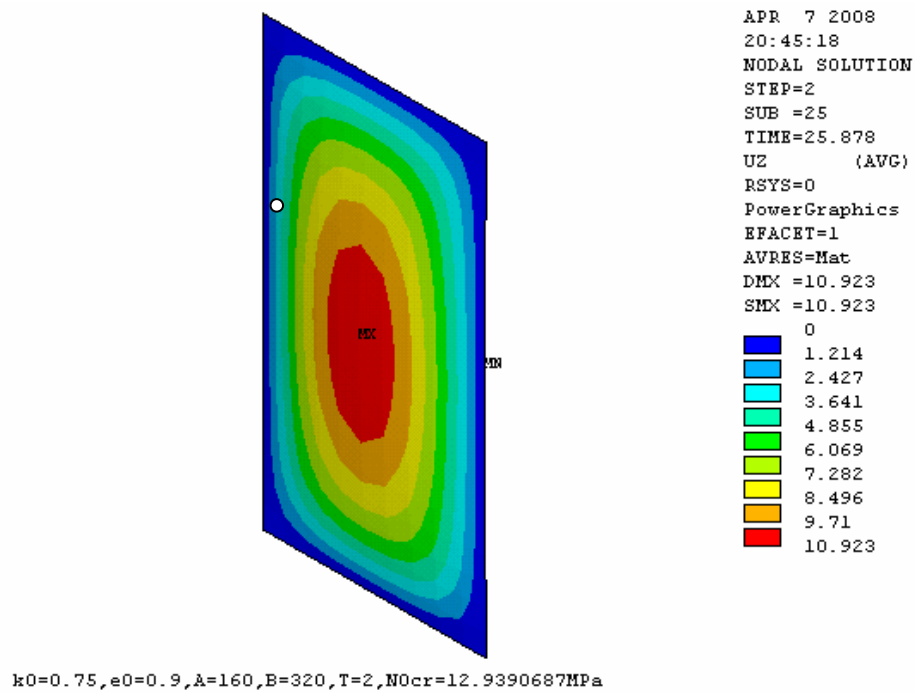
Rys. 6.42. Ugięcie płyty [m] w funkcji naprężenia N_0 [MPa] dla $k_0=0,25$; $e_0=0,9$.



Rys. 6.43. Ugięcie płyty [mm] w stanie zakrytycznym [m] (punkt B na rys.1), $k_0=0,25$; $e_0=0,9$.

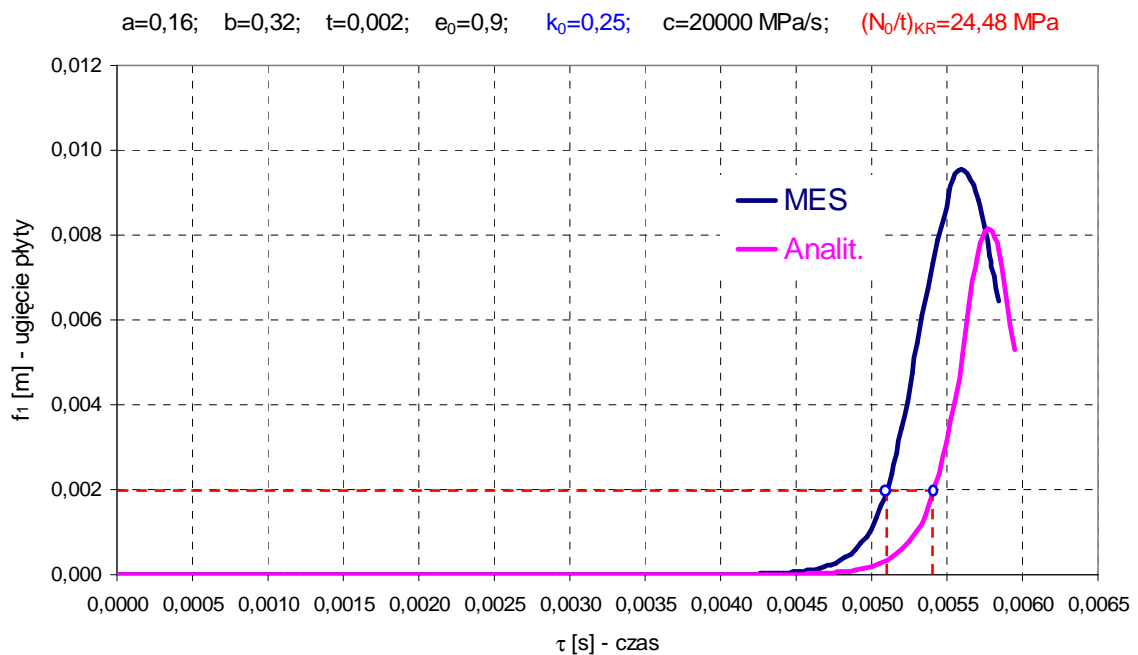


Rys. 6.44. Ugięcie płyty [m] w funkcji naprężenia N_0 [MPa] dla $k_0=0,75$; $e_0=0,9$.

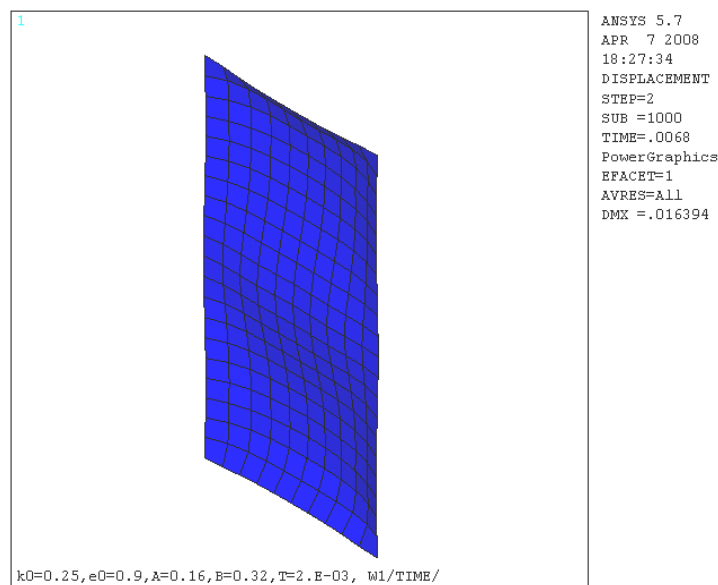


Rys. 6.45. Ugięcie płyty w stanie zakrytycznym [m] (punkt B na rys.3), dla $k_0=0,75$; $e_0=0,9$.

Rozwiązanie zadania stateczności dynamicznej MES, dla kombinacji obciążeń z parametrem $k_0 = 0,25$, przedstawiono na rysunku 6.46. Deformację płyty po czasie $\tau = 0,0068s$ zamieszczono na rysunku 6.47. Czas, po którym następuje dynamiczne ugięcie płyty, wynosi $\tau = 0,0051s$. W przypadku rozwiązania analitycznego otrzymano około $\tau = 0,0054s$, co stanowi o 5,5 % dłuższy czas w stosunku do czasu wynikającego z obliczeń opartych o MES.

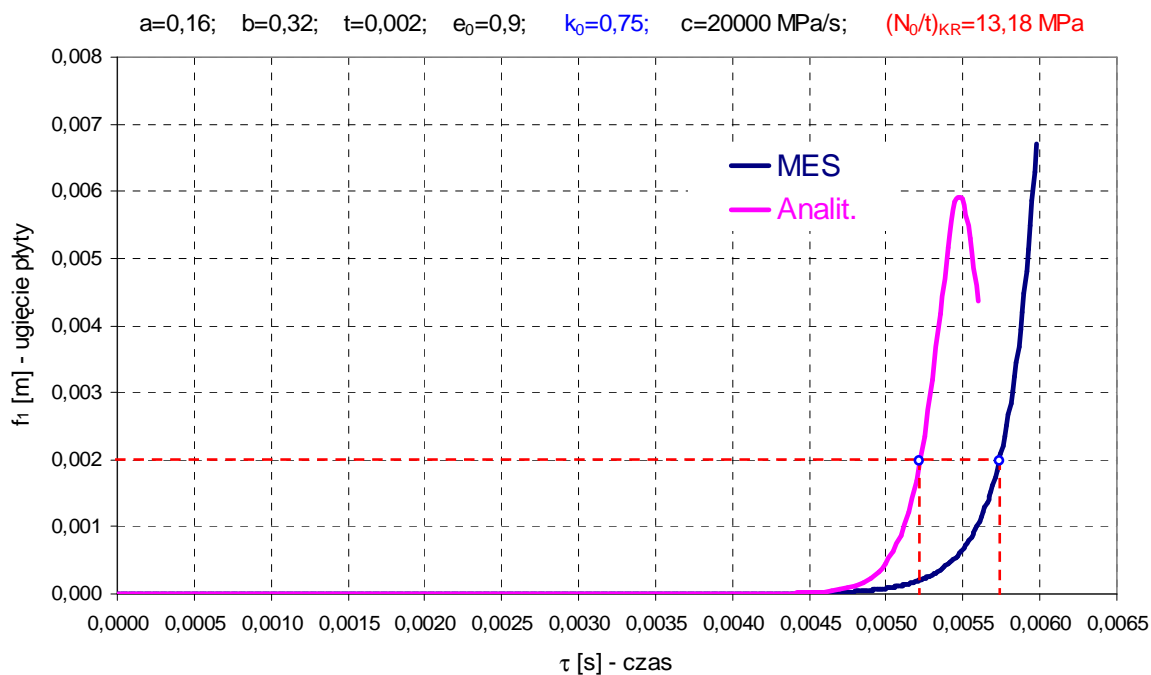


Rys. 6.46. Dynamiczne ugięcie płyty w funkcji czasu dla $c=20000$ MPa/s; $k_0=0,25$; $e_0=0,9$.

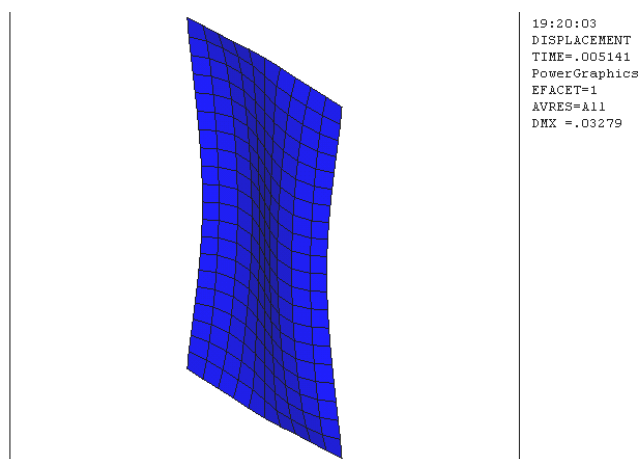


Rys. 6.47. Deformacja płyty po czasie $\tau=0,0068s$ dla $c=20000$ MPa/s, $k_0=0,25$; $e_0=0,9$.

Analogicznie, rozwiązanie zadania stateczności dynamicznej MES, dla kombinacji obciążeń z parametrem $k_0 = 0,75$, przedstawiono na rysunku 6.48. Deformację płyty po czasie $\tau = 0,0051s$ zamieszczono na rysunku 6.49. Czas, po którym następuje dynamiczne ugięcie płyty wynosi $\tau = 0,0057s$. W przypadku rozwiązania analitycznego otrzymano około $\tau = 0,0053s$, co stanowi o 7,02 % krótszy czas w stosunku do czasu wynikającego z obliczeń opartych o MES



Rys. 6.48. Dynamiczne ugięcie płyty w funkcji czasu dla $c=20000$ MPa/s, $k_0=0,75$; $e_0=0,9$



Rys. 6.49. Deformacja płyty po czasie $\tau=0,0051s$ dla $c=20000$ MPa/s, $k_0=0,75$; $e_0=0,9$.

Otrzymane w obu przypadkach wyniki dynamicznego ugięcia w funkcji czasu wskazują, że płyta po przekroczeniu wartości naprężenia krytycznego doznaje gwałtownych ugięć.

7. ZAKOŃCZENIE

Rozprawa dotyczyła zagadnienia stateczności statycznej i dynamicznej porowatych płyt prostokątnych. Analizowano zachowania płyt poddanych obciążeniu złożonemu w postaci dwukierunkowego ściskania wzdłuż ich wzajemnie prostopadłych krawędzi.

Nieliniowy opis deformacji przekroju poprzecznego płyty pozwolił uzyskać zależności pomiędzy parametrami ugięcia i obciążenia z uwzględnieniem efektu ścinania w przekroju poprzecznym. Uwzględniono tym samym warunek niewystępowania efektu ścinania na powierzchniach zewnętrznych płyty, pozostawiając je jako powierzchnie swobodne. Wyprowadzone w rozprawie równania mają charakter uniwersalny zarówno w zakresie zmiany właściwości fizycznych płyty (parametr e_0) jak i kombinacji obciążenia zewnętrznego (parametr k_0). Dobór parametru e_0 umożliwia badanie płyt o strukturze jednorodnej, jak również porowatej. Przy odpowiednich założeniach, możliwe jest również badanie płytowych konstrukcji wielowarstwowych. Warunkiem jest tutaj odpowiedni dobór ilości warstw oraz rozkładu właściwości fizycznych poszczególnych warstw na grubości płyty. Zmiana parametru k_0 pozwala na analizowanie płyt poddanych obciążeniu dwukierunkowego ściskania oraz w przypadkach szczególnych ściskania jednokierunkowego wzdłuż osi x lub y .

W oparciu o przedstawione wyniki można wysunąć następujące wnioski:

- Wzrost prędkości narastania obciążenia powoduje wzrost dynamicznej odporności płyty na wyboczenie.
- Zmniejszenie wartości obciążenia krytycznego jest spowodowane wzrostem proporcji długości boków b/a , w odniesieniu do ich rzeczywistych wartości.
- Wraz ze wzrostem porowatości płyty następuje spadek obciążeń krytycznych.
- Wzrost prędkości zwiększania się obciążenia powoduje szybszą utratę stateczności płyty, w odniesieniu do czasu rzeczywistego, ale przy większej wartości obciążenia zewnętrznego.

Dalsze rozważania przeprowadzone zostaną w następujących kierunkach:

- uwzględnienie w modelu analitycznym wstępnych imperfekcji,
- uwzględnienie w energii kinetycznej składowych przemieszczeń w płaszczyźnie płyty,
- uszczegółowienie nieliniowych składników pola odkształceń,
- interakcja stateczności lokalnej i globalnej,
- badanie wpływu przebiegu obciążenia na dynamiczną utratę stateczności,
- badania płyt o zmiennej sztywności poprzecznej.

Literatura

1. Abramovich H., Grunwald A.: *Stability of axially impacted composite plates*. Composite Structures, 1995, vol.32, pp.151-158.
2. Ari-Gur J., Simonetta S.: *Dynamic pulse buckling of rectangular composite plates*. Composites Part B 28B, 1997, pp.301-308.
3. Ashby M.F., Evans A.G., Fleck N.A., Gibson L.J., Hutchinson J.W., Wadley H.N.G.: *Metal foams: a design guide*. Boston: Butterworth-Heinemann, 2000.
4. Awrejcewicz J., Andrianov I.V.: *Płyty i powłoki w przyrodzie, mechanice i biomechanice*. Wyd. WNT, Warszawa, 2001.
5. Awrejcewicz J., Krysko V.A.: *Dynamika chaotyczna belek, płyt i powłok*. WNT, Warszawa 2005.
6. Aydogdu A., Ece M.C.: *Buckling and vibration of non-ideal simply supported rectangular isotropic plates*. Mechanics Research Communications, 2006, vol.33, pp.532-540.
7. Bakker M.C.M., Rosmanit M., Hofmeyer H.: *Elastic post-buckling analysis of compressed plates using a two-strip model*. Thin-Walled Structures (in Print).
8. Banhart J.: *Manufacture, characterisation and application of cellular metals and metal foams*. Progress in Materials Science, 2001, vol.46, pp.559-632.
9. Bart-Smith H., Hutchinson J.W., Evans A.G.: *Measurement and analysis of the structural performance of cellular metal sandwich construction*. International Journal of Mechanical Sciences, 2001, vol.43, pp.1945-1963.
10. Bažant Z.P., Cedolin L.: *Stability of structures*. New York, Oxford 1991.
11. Bolotin V.V.: *Dinamicheskaya ustoichivost uprugikh sistem*. Moskva: Gostekhizdat, 1956.
12. Brzoska Z.: *Statyka i stateczność konstrukcji*. PWN, Warszawa 1965.
13. Bryan G.H.: *On the stability of a plate under thrusts in its own plate*. Proc. London Math. Soc., t.22, London 1891.
14. Bugajny D.: *Nieliniowe równania ruchu małowyniosłej sprężystej trójwarstwowej powłoki*. Rozprawy Inżynierskie, PAN, 1976, pp.15-31.
15. Carrera E.: *An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered orthotropic plates*. Composite Structures, 2000; vol.50, pp.183-198.
16. Carrera E.: *Developments, ideas, and evaluations based upon Reissner's mixed variational theorem in the modeling of multilayered plates and shells*. Applied Mechanics Reviews, 2001; vol.54, pp.301-329.
17. Carrera E.: *Historical review of Zig-Zag theories for multilayered plates and shells*. Applied Mechanics Reviews, 2003; vol.56, pp.287-308.
18. Cheong H.K., Hao H. Cui S.: *Experimental investigation of dynamic post-buckling characteristics of rectangular plates under fluid-solid slamming*. Engineering Structures, 2000, vol.22, pp.947-960.

19. Choi J.B., Lakes R.S.: *Analysis of elastic modulus of conventional foams and of re-entrant foam materials with a negative Poisson's ratio*. Int. J. Mech. Sci., 1995, vol.37, no.1, pp.51-59.
20. Cui S., Cheong H.K., Hao H.: *Experimental study of dynamic buckling of plates under fluid-solid slamming*. International Journal of Impact Engineering, 1999, vol.22, pp.675-691.
21. Cui S., Hao H., Cheong H.K.: *Dynamic buckling and Collapse of rectangular plates under intermediate velocity impact*. Third International Conference on Thin-Walled Structures J. Zaráś, K. Kowal-Michalska and J.Rhodes, 2001, pp.365-372.
22. Cui S., Hao H., Cheong H.K.: *Numerical analysis of dynamic buckling of rectangular plates subjected to intermediate-velocity impact*. International Journal of Impact Engineering, 2001, vol.25, pp.147-167.
23. Czechowski L., Kowal-Michalska K.: *Stateczność dynamiczna ortotropowych płyt prostokątnych poddanych impulsowemu obciążeniu złożonemu*. XI Sympozjum Stateczności Konstrukcji – Zakopane 2006, s.86-94.
24. Deolasi P.J., Datta P.K.: *Parametric instability characteristics of rectangular plater subjected to localized edge loading (compression or tension)*. Computers & Structures, 1995, vol.54, no.1. pp.73-82.
25. Dębowski D.: *Problems of dynamic stability of rectangular plates*. 4th Conference Thin-Walled Vessels and Beams. Poznań-Kołoźbrzeg 2007, pp.17-26.
26. Dębowski D., Magnucki K.: *Dynamic stability of a porous plate*. PAMM Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics, 2006, vol.6, pp.207-208.
27. Dębowski D., Magnucki K.: *Stability of porous-cellular rectangular plates*. 4th Conference Thin-Walled Vessels and Beams, Poznań-Kołoźbrzeg, 2007, pp.27-36.
28. Dobrzański L.A.: *Metalowe materiały inżynierskie*. Wyd. WNT, Warszawa, 2004, 888 s.
29. Donnell L.H.: *Beams, plates and shells*. McGraw-Hill Book Comp., 1976.
30. Doyle J. F.: *Nonlinear Analysis of Thin – Walled Structures, Statistic, Dynamics, and Stability*. Springer – Verlag, New York 2001.
31. Ekstrom R.E.: *Dynamic buckling of a rectangular orthotropic plate*. AIAA Journal, 1973, vol.11, no.12, pp.1655-1665.
32. Eshmatov B. Kh.: *Dynamic stability of viscoelastic plates under increasing compressing loads*. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 2006, vol.42, no.2, pp.289-297.
33. Eshmatov B. Kh.: *Nonlinear vibrations and dynamic stability of viscoelastic orthotropic rectangular plates*. Journal of Sound and Vibration, 2007, pp.709-726.
34. Evans A.G., Hutchinson J.W., Ashby M.F.: *Mulifunctionality of cellular metal system*. Progress in Materials Science, 1999, vol.43, pp.171-221.
35. Evans A.G., Hutchinson J.W., Fleck N.A., Ashby M.F., Wadley H.N.G.: *The topological design of multifunctional cellular metals*. Progress in Materials Science, 2001, vol.46, pp.309-327.
36. Fares M.E., Elmarghany M.Kh.: *A refined zigzag nonlinear first-order shear deformation theory of composite laminated plates*. Composite Structures, 2008, vol.82, pp.71-83.

37. Fares M.E., Zenkour A.M.: *Buckling and free vibration of non-homogeneous composite cross-ply laminated plates with various plate theories*. Composite Structures 1999, vol.44, pp.279-287.
38. Gan Y. X., Chen C., Shen Y. P.: *Three – dimensional modeling of the mechanical property of linearly elastic open cell foams*. International Journal of Solids and Structures, 2005, vol.42, pp. 6628-6642.
39. Gbadeyan J.A., Dada M.S.: *Dynamic response of a Mindlin elastic rectangular plate under a distributed moving mass*. International Journal of Mechanical Sciences, 2006, vol.48, pp.323-340.
40. Gibson L.J., Ashby M.F.: *The Mechanics of Three-Dimensional Cellular Materials*. Proceedings of the Royal Society of London, Series A, Mathematical and Physical Sciences, 1982, vol.382, no.1782, pp.43-59.
41. Gilbert R.P.(ed): *Theories of plates and shells*. New York: J. Wiley& Sons.
42. Girkmann K.: *Dźwigary powierzchniowe. Wstęp do elastostatyki tarcz, płyt, powłok i tarczownic*. (tłum. z wyd. 4), Arkady, Warszawa 1957.
43. Gorman D.J.: *Free vibration analysis of rectangular plates*. New York: Elsevier, 1982.
44. Grądzki R.: *Stability of plater In the elasto-plastic range subjected to eccentric compression*. Archiwum Budowy Maszyn, 1994, vol.XLI, zeszyt 1, str. 5-17.
45. Gryboś R.: *Stateczność konstrukcji pod obciążeniem uderzeniowym*. Warszawa, PWN 1980.
46. Gu H., Chattopadhyay A.: *An experimental investigation of delamination buckling and postbuckling of composite laminates*. Composites Science and Technology, 1999, vol.59, pp.903-910.
47. Gu H., Chattopadhyay A.: *Thre-dimensional elasticity solution for buckling of composite laminates*. Composite Structures, 2000, vol.50, pp.29-35.
48. Huber M.T.: *Teoria sprężystości – część 1 i 2*. Wyd. PWN, Warszawa 1954.
49. Idlbi A., Karama M., Touratier M.: *Comparison of various laminated plate theories*. Composite Structures, 1997, vol.37, pp.173-184.
50. Jemielita G.: *Meandry teorii płyt*. Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej. Budownictwo, 1991, z.117, s.3-22.
51. Kaczmarek M., Goueygou M.: *Dependence of Elastic Properties of Materials on Their Porosity: Review of Models*, Journal of Porous Media, 2006, 9 (4), pp.1-21.
52. Kang J., Leissa A.W.: *Exact solutions for the buckling of rectangular plates having linearly varying in-plane loading on two opposite simply supported edges*. International Journal of Solid and Structures, 2005, vol.42, pp.4220-4238.
53. Kant T. Swaminathan K.: *Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory*. Composite Structures, vol. 56, 2002, pp. 329-344.
54. Karman Th., Sechler E.E., Donnell L.H.: *The strength of thin plates in compression*. Trans. ASME, 1932, vol.54, pp.53-57.
55. Kączkowski Z.: *Płyty, Obliczenia statyczne*. Arkady, Warszawa, 2000.

56. Kim J.H., Park J.H.: *On the dynamic stability of rectangular plates subjected to intermediate follower forces*. Journal of Sound and Vibration, 1998, vol.209, no.5, pp.882-888.
57. Kim Y.S., Hoa S.V.: *Bi-axial buckling behavior of composite rectangular plate*. Composite Structures, 1995, vol.31, pp.247-252.
58. Kłosowski P.: *Nieliniowa analiza numeryczna i badania doświadczalne drgań sprężysto-lepkoplastycznych płyt i powłok*. Wyd. Politechniki Gdańskiej, 1999, 201s.
59. Kolakowski Z., Kubiak T.: *Interactive dynamic buckling of orthotropic thin-walled channels subjected to in-plane pulse loading*. Composite Structures, 2007, vol.81, pp.222-232.
60. Kovacik J.: *Correlation between shear modulus and porosity in porous materials*. Journal of Materials Science Letters, 2001, vol.20, pp.1953-1955.
61. Kovacik J.: *Correlation between Young's modulus and porosity in porous materials*. Journal of Materials Science Letters, 1999, vol. 18, pp.1007-1010.
62. Koval'chenko M.S.: *Elasticity and viscosity of isotropic porous materials*. Powder Metallurgy and Metal Ceramics, 2003, vol.42, pp.81-87.
63. Kowal-Michalska K.: *Czynniki determinujące stateczność dynamiczną konstrukcji płytowych przy obciążeniach impulsowych*. XI Sympozjum Stateczności Konstrukcji, Zakopane 2006.
64. Kowal-Michalska K.: *Stateczność dynamiczna kompozytowych konstrukcji płytowych*. Wyd. WNT, Łódź 2007.
65. Kozłowski T.: *Zarys teorii sprężystości*. Arkady, Warszawa 1968.
66. Królak M.: *Stany zakrytyczne i nośność graniczna cienkościennych dźwigarów o ścianach płaskich*. PWN, Warszawa-Łódź, 1990.
67. Kubiak T.: *Criteria of dynamic buckling estimation of thin-walled structures*. Thin-Walled Structures, 2007, vol.45, pp.888-892.
68. Kubiak T.: *Dynamic buckling of thin-walled composite plates with varying widthwise material properties*. International Journal of Solid and Structures, 2005, vol.42, pp.5555-5567.
69. Leissa A.W.: *The historical bases of the Rayleigh and Ritz methods*. Journal of Sound and Vibration, 2005, vol.287, pp.961-978.
70. Leissa A.W.: *Vibration of plates*. Washington D.C. NASA., 1969. Reprinted by the Acoustical Society of America, Ohio State Univ., 1993.
71. Li L-Y.: *Dynamic instability criteria for structures subjected to sudden step loads*. Int. J. Pres. Ves. & Piping, 1997, vol.70, pp.121-126.
72. Lin Z., Zhang J.: *Buckling and Postbuckling of Shear – Deformable Rectangular Plates of Composite Construction*. Thin – Walled Structures, 1996, vol.26, nr 3, pp.213-221.
73. Magnucka-Blandzi E., Malinowski M., Magnucki K.: *Elastic buckling of a sandwich rectangular plate simply-supported by three edges and one edge free*. The Third Int. Conf. on Structural Engineering, Mechanics and Computations, Cape Town, South Africa, SEMC 2007, w A. Zingoni (ed.), Recent Developments in Structural

- Engineering, Mechanics and Computations, Millpress Science Publishers, Rotterdam, 2007, s. 355-356, (CD-ROM, s. 940-945).
74. Magnucka-Bładzi E., Magnucki K.: *Axi-symmetrical deflection and buckling of circular porous plate*. Thin-Walled Structures, (In Press).
 75. Magnucka-Bładzi E., Magnucki K.: *Dynamic stability of a porous circular plate*. Proceedings, The 8th Conference, Dynamical Systems, Theory and Applications, J. Awrejcewicz (Ed.), Lodz University of Technology, 2005, pp.353-360.
 76. Magnucka-Bładzi E., Magnucki K.: *Effective design of sandwich beam with a metal foam core*. Thin-Walled Structures, 2007, vol.45, pp.432-438.
 77. Magnucki K., Magnucka-Bładzi E.: *Strength and stability of a sandwich beam with a porous-cellular core*. In: Kowal-Michalska K., Mania R.J. editors. 11-th Symposium Stability of Structures, Zakopane, Chair of Strength of Materials and Structures, Lodz University of Technology, 2006, pp.259-266.
 78. Magnucki K.: *Lower critical stress analysis of axially compressed cylindrical shells*. Proceedings of the Tenth International Conference on Civil, Structural and Environmental Engineering Computing, B.H.V. Topping (Editor), Civil-Comp Press, Stirling, Scotland, 2005, pp. 1-10.
 79. Magnucki K., Malinowski M., and Kasprzak J.: *Bending and buckling of rectangular porous plate*. Steel and Composite Structures, 2006, vol.6, nr 4, pp.319-333.
 80. Magnucki K., Mielniczuk J., Ostwald M.: *Wybrane zagadnienia projektowania porowatych konstrukcji powierzchniowych*. Instytut Pojazdów Szynowych „TABOR”, Poznań, 2007.
 81. Magnucki K., Stasiewicz P.: *Elastic bending of an isotropic porous beam*. Int. Journal of Applied Mechanics and Engineering, 2004, vol.9, nr 2, pp.351-360.
 82. Magnucki K., Stasiewicz P.: *Elastic buckling of a porous beam*. Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2004, vol.42, nr 4, pp.859-868.
 83. Magnucki K., Ostwald M. (Red): *Stateczność i optymalizacja konstrukcji trójwarstwowych*. Instytut Technologii Eksploatacji w Radomiu, Poznań, Zielona Góra, 2001.
 84. Markiaki A.E., Clyne T.W.: *The effect of cell Wall microstructure on the deformation and fracture of aluminium-based foams*. Acta Materialia, 2001, vol.49, pp.1677-1686.
 85. Mc Lachnan N.W.: *Theory and Application of Mathieu Functions*. Oxford, 1947.
 86. Mielniczuk J.: *Plasticity of porous materials. Theory and the limit load capacity*. Wyd. Politechniki Poznańskiej, 2000.
 87. Mindlin R.D.: *An introduction to the mathematical theory of vibrations of elastic plates*. US Army Signal Corps Eng. Labor. Ford Monmouth. New York 1955.
 88. Muc A.: *Stateczność płyt kompozytowych*. XI Sympozjum Stateczności Konstrukcji, Zakopane 2006.
 89. Nowacki W.: *Dynamika budowli*. Warszawa: Arkady. Dynamics of elastic systems, London: Chapman & Hall, 1963
 90. Petry D., Fahlbusch G.: *Dynamic buckling of thin isotropic plates subjected to in-plane impact*. Thin-Walled Structures, 2000, vol.38, pp.267-283.

91. Qatu M.S.: *Vibration of laminated shells and plates*. Elsevier, Amsterdam, Boston, Heidelberg, London, New York, Oxford, Paris, San Francisco, Singapore, Sydney, Tokyo, 2004.
92. Ramamurty U., Paul A.: *Variability in mechanical properties of a metal foam*. Acta Materialia, 2004, vol.52, pp.869-876.
93. Romanów F.: *Binieliniowa teoria obliczania konstrukcji warstwowych*. Archiwum motoryzacji, 2001, vol.4, s.163-176.
94. Romanów F.: *Wytrzymałość konstrukcji warstwowych – statyka, stateczność, drgania, badania doświadczalne*. Wydawnictwo Wyższej Szkoły Inżynierskiej w Zielonej Górze, Zielona Góra 1995.
95. Romanów F., Najdychor P.: *Determination of the post-critical state of compressed plater with in the Bi-nonlinear theory*. Journal of Theoretical and Applied Mechanics, Warsaw, 2004, vol.42, no.4, pp.827-839.
96. Romanów F., Najdychor P.: *Post-critical states in compressed homogeneous plate with stiffened outer layers (Sandwich Plates)*. Studia Geotechnica et Mechanica, 2003, vol.XXV, no.3-4.
97. Sahu S.K., Datta P.K.: *Research Advances in the dynamic stability behavior of plates and shells: 1987 – 2005 – Part I: Conservative Systems*. Applied Mechanics Reviews, 2007, vol.60, pp.65-75.
98. Shahabian F., Roberts T.M.: *Buckling of slender web plates subjected to combinations of in-plane loading*. Journal of Constructional Steel Research, 1999, vol.51, pp.99-121.
99. Shimpi R.P., Patel H.G.: *Free vibrations of plate using two variable refined plate theory*. International Journal of Sound and Vibration, 2006, vol.296, pp.979-999.
100. Simone A.E., Gibson L.J.: *Efficient structural components using porous metals*. Materials Science and Engineering, 1997, vol.A229, pp.55-62.
101. Szcześniak W.: *Wybrane zagadnienia z dynamiki płyt*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2000.
102. Szyc W., Twardosz F.: *Dynamiczna stateczność trójwarstwowej otwartej powłoki walcowej poddanej ścinaniu*. Archiwum Budowy Maszyn, 1977, vol.XXIV, nr 1, pp.57-67.
103. Szyc W., Twardosz F.: *O pewnym dynamicznym zagadnieniu stateczności powłoki walcowej*. Archiwum Budowy Maszyn, 1972, vol.XIX, nr 1, pp.25-41.
104. Timoshenko S.: *Historia wytrzymałości materiałów*. Arkady, Warszawa, 1966.
105. Timoshenko S., Gere J.M.: *Teoria stateczności sprężystej*. Arkady, Warszawa, 1963.
106. Timoshenko S., Goodier J.N.: *Teoria sprężystości*. Arkady, Warszawa, 1962.
107. Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S.: *Teoria płyt i powłok*. Arkady, Warszawa, 1962.
108. Tereszowski Z.: *Praca płyty po lokalnej utracie stateczności*. Archiwum Budowy Maszyn, 1969, tom XVI, zeszyt 3, s.369-378.
109. Vasiliev V.V.: *Modern conceptions of plate theory*. Composite Structures, 2000, vol.48, pp.39-48.
110. Volmir A.S.: *Stability of deformation systems*. Moscow: Nauka, Fizmatlit, 1967 (in Russian).

111. Volmir A.C.: *Nonlinear dynamic of plates and shells*. Nauka, Moscow, 1972. (in Russian).
112. Walczak W.: *Analiza stanu naprężenia tarczy prostokątnej po utracie stateczności wywołanej zginaniem w płaszczyźnie tarczy*. Archiwum Budowy Maszyn, 1965, tom XII, zeszyt 1, s.3-30.
113. Walczak W., Mania R.: *Stateczność prostokątnej płyty trójwarstwowej, poddanej działaniu jednokierunkowego, liniowo zmiennego ściskania przy różnych warunkach podparcia krawędzi płyty*. Archiwum Budowy Maszyn, 1982, tom XXIX, zeszyt 3-4, s. 327-341.
114. Wang C.M., Reddy J.N., Lee K.H.: *Shear deformable beams and plates*. Amsterdam, Laussane, New York, Oxford, Shannon, Singapore, Tokyo: Elsevier; 2000.
115. Wang Z-M., Zhou Y-F, Wang Y.: *Dynamic stability of a non-conservative viscoelastic rectangular plate*. International Journal of Sound and Vibration, 2007, vol. 307, pp.250-264.
116. Wilde R., Zawodny P., Magnacki K.: *Stan krytyczny osiowo ściskanej płyty prostokątnej i paneli walcowej swobodnie podpartej na trzech krawędziach i z jedną krawędzią swobodną*. XI Sympozjum Stateczności Konstrukcji – Zakopane 2006, pp. 479-484.
117. Wilde R., Zborąła P.: *Review of basic "Broken-Line" hypothesis for composite plates and shells*. 4th Conference Thin-walled Vessels and Beams, Kołobrzeg, 2007, pp.175-186.
118. Wilde R., Zborąła P.: *Review of different theories of laminated composite plates and shells for pressure vessels*. 4th Conference Thin-walled Vessels and Beams, Kołobrzeg, 2007, pp.187-198.
119. Winter G.: *Strength of thin Stell compression flanges*. Cornrl Univ. Eng. Exp. Stn., Reprint no.32, 1947.
120. Włodarczyk J., Niezgoda T., Barnat W., Dziewulski P.: *Validation of numerical models of metallic foams from the aspect of energy absorption*. Journal of KONES Powertrain and Transport, 2007, vol.14, nr 2, s.561-569.
121. Woźniak Cz.(red): *Mechanika sprężystych płyt i powłok*. Wyd. PWN, Warszawa 2001.
122. Woźniak Cz.: *Podstawy dynamiki ciał odkształcalnych*. Wyd. PWN, Warszawa 1969.
123. Yang J., Liew K.M., Kitipornchai S.: *Imperfection sensitivity of the post-buckling behavior of higher-order shear deformable functionally graded plates*. International Journal of Solids and Structures, 2006, vol.43, pp.5247-5266.
124. Zhang T., Liu T. Luo J.: *Nonlinear dynamic buckling of stiffened plates under in-plane impact load*. Journal of Zhejiang University Science, 2004, vol.5, no.5, pp.609-617.
125. Życzkowski M.: *Stateczność prętów i ustrojów prętowych*. Mechanika Techniczna, tom IX: Wytrzymałość elementów konstrukcyjnych, PWN, Warszawa 1988.

ZAŁĄCZNIK 1

Uwzględniając związki (2.4) równanie (3.3) zapisano w postaci:

$$U_\varepsilon = \frac{t}{2} \iint_{\Omega} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{E(z)}{1-\nu^2} \left[(\varepsilon_x^2 + 2\nu\varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y^2) + \frac{1}{2}(1-\nu)(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2) \right] dx dy d\zeta \quad (3.4)$$

Podstawiając związki (2.6) do równania (3.4) oraz dokonując stosownych przekształceń otrzymano:

$$\begin{aligned} U_\varepsilon = & \frac{E_1 t}{2(1-\nu^2)} \iint_{\Omega} \int_{-1/2}^{1/2} [1 - e_0 \cos(\pi\zeta)] \left\{ \left[t^2 \zeta^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 - \frac{2t^2}{\pi} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \zeta \sin(\pi\zeta) + \right. \right. \right. \\ & + \left. \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \zeta \sin(2\pi\zeta) \cos^2(\pi\zeta) \right] + \frac{t^2}{\pi^2} \left[\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right)^2 \sin^2(\pi\zeta) + 2 \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \cdot \right. \\ & \cdot \sin(\pi\zeta) \cdot \sin(2\pi\zeta) \cos^2(\pi\zeta) + \left. \left. \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right)^2 \sin^2(2\pi\zeta) \cos^4(\pi\zeta) \right] - t \zeta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \right. \\ & + \frac{t}{\pi} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \sin(\pi\zeta) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \sin(2\pi\zeta) \cos^2(\pi\zeta) \right] + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^4 + \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 - \\ & - 2t \zeta \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{2t}{\pi} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \sin(\pi\zeta) + \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \sin(2\pi\zeta) \cos^2(\pi\zeta) \right] + \\ & + \left. \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + 2\nu \left[t^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \zeta^2 - \frac{t^2}{\pi} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial \phi_1}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right) \zeta \sin(\pi\zeta) + \right. \right. \\ & + \left. \left. \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial \phi_2}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right) \zeta \sin(2\pi\zeta) \cos^2(\pi\zeta) \right] + \frac{t^2}{\pi} \left[\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \sin^2(\pi\zeta) + \right. \right. \\ & + \left. \left. \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial \phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right) \sin(\pi\zeta) \sin(2\pi\zeta) \cos^2(\pi\zeta) + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \sin^2(2\pi\zeta) \cos^4(\pi\zeta) \right] - \\ & - \frac{t}{2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \zeta + \frac{t}{2\pi} \left[\left(\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right) \sin(\pi\zeta) + \right. \\ & + \left. \left(\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial \psi_2}{\partial x} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right) \sin(2\pi\zeta) \cos^2(\pi\zeta) \right] + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial y} - \\ & - t \zeta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{t}{\pi} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \sin(\pi\zeta) + \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \sin(2\pi\zeta) \cos^2(\pi\zeta) \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial u_0}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \\ & - t \zeta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{t}{2} \left[\frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \sin(\pi\zeta) + \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \sin(2\pi\zeta) \cos^2(\pi\zeta) \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial v_0}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \left. \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[t^2 \zeta^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - \frac{2t^2}{\pi} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \zeta \sin(\pi \zeta) + \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \zeta \sin(2\pi \zeta) \cos^2(\pi \zeta) \right] + \right. \\
 & + \frac{1}{\pi^2} \left[\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right)^2 \sin^2(\pi \zeta) + 2 \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \sin(\pi \zeta) \sin(2\pi \zeta) \cos^2(\pi \zeta) + \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right)^2 \sin^2(2\pi \zeta) \cdot \right. \\
 & \cdot \cos^4(\pi \zeta) \left. \right] - t \zeta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \frac{t}{\pi} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \sin(\pi \zeta) + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \sin(2\pi \zeta) \cdot \right. \\
 & \cdot \cos^2(\pi \zeta) + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^4 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} \right)^2 - 2t \zeta \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{2t}{\pi} \left[\frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \sin(\pi \zeta) + \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \cdot \right. \\
 & \cdot \sin(2\pi \zeta) \cos^2(\pi \zeta) \left. \right] + \frac{\partial v_0}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \left. \right] + \frac{1-\nu}{2} \left[\left[4t^2 \zeta^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{4t^2}{\pi} \left[\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right) \cdot \right. \right. \right. \\
 & \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \zeta \sin(\pi \zeta) + \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \zeta \sin(2\pi \zeta) \cos^2(\pi \zeta) \left. \right] + \frac{t^2}{\pi^2} \left[\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right)^2 \cdot \right. \\
 & \cdot \sin^2(\pi \zeta) + 2 \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right) \sin(\pi \zeta) \sin(2\pi \zeta) \cos^2(\pi \zeta) + \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right)^2 \cdot \left. \right. \\
 & \cdot \sin^2(2\pi \zeta) \cos^4(\pi \zeta) \left. \right] - 4t \zeta \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{2t}{\pi} \left[\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right) \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \sin(\pi \zeta) + \right. \\
 & + \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right) \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \sin(2\pi \zeta) \cos^2(\pi \zeta) \left. \right] + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 + \\
 & + 2 \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial v_0}{\partial x} - 4t \zeta \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{2t}{\pi} \frac{\partial u_0}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right) \sin(\pi \zeta) + \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right) \cdot \right. \\
 & \cdot \sin(2\pi \zeta) \cos^2(\pi \zeta) \left. \right] + 2 \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - 4t \zeta \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{2t}{\pi} \frac{\partial v_0}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right) \sin(\pi \zeta) + \right. \\
 & + \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right) \sin(2\pi \zeta) \cos^2(\pi \zeta) \left. \right] + 2 \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \left. \right] + \left[\psi_1^2 \cos^2(\pi \zeta) + 2\psi_1 \psi_2 \cdot \right. \\
 & \cdot \left[\cos(\pi \zeta) \cos(2\pi \zeta) + \cos(\pi \zeta) \cos(4\pi \zeta) \right] + \psi_2^2 \left[\cos(2\pi \zeta) + \cos(4\pi \zeta) \right]^2 \left. \right] \\
 & + \left[\phi_1^2 \cos^2(\pi \zeta) + 2\phi_1 \phi_2 \left[\cos(\pi \zeta) \cos(2\pi \zeta) + \cos(\pi \zeta) \cos(4\pi \zeta) \right] + \right. \\
 & \left. + \phi_2^2 \left[\cos(2\pi \zeta) + \cos(4\pi \zeta) \right]^2 \right] \left. \right\} dx dy d\zeta
 \end{aligned}$$

Stałe całkowania:

$$c_{01} = \int_{-1/2}^{1/2} [1 - e_0 \cos(\pi\zeta)] \zeta^2 d\zeta = \frac{1}{12} - \frac{\pi^2 - 8}{2\pi^3} e_0,$$

$$c_{02} = \int_{-1/2}^{1/2} [1 - e_0 \cos(\pi\zeta)] \zeta \sin(\pi\zeta) d\zeta = \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{4} e_0 \right),$$

$$c_{03} = \int_{-1/2}^{1/2} [1 - e_0 \cos(\pi\zeta)] \zeta \sin(2\pi\zeta) \cos^2(\pi\zeta) d\zeta = \frac{1}{\pi} \left(\frac{3}{16} - \frac{32}{75\pi} e_0 \right),$$

$$c_{04} = \int_{-1/2}^{1/2} [1 - e_0 \cos(\pi\zeta)] \sin^2(\pi\zeta) d\zeta = \frac{1}{2} - \frac{2}{3\pi} e_0,$$

$$c_{05} = \int_{-1/2}^{1/2} [1 - e_0 \cos(\pi\zeta)] \sin(\pi\zeta) \sin(2\pi\zeta) \cos^2(\pi\zeta) d\zeta = \frac{8}{15\pi} - \frac{1}{8} e_0,$$

$$c_{06} = \int_{-1/2}^{1/2} [1 - e_0 \cos(\pi\zeta)] \sin^2(2\pi\zeta) \cos^4(\pi\zeta) d\zeta = \frac{5}{32} - \frac{128}{315\pi} e_0,$$

$$c_{07} = \int_{-1/2}^{1/2} [1 - e_0 \cos(\pi\zeta)] \cos^2(\pi\zeta) d\zeta = \frac{1}{2} - \frac{4}{3\pi} e_0,$$

$$c_{08} = \int_{-1/2}^{1/2} [1 - e_0 \cos(\pi\zeta)] \cos(\pi\zeta) [\cos(2\pi\zeta) + \cos(4\pi\zeta)] d\zeta = \frac{8}{15\pi} - \frac{1}{4} e_0,$$

$$c_{09} = \int_{-1/2}^{1/2} [1 - e_0 \cos(\pi\zeta)] [\cos(2\pi\zeta) + \cos(4\pi\zeta)]^2 d\zeta = 1 - \frac{832}{315\pi} e_0,$$

$$c_{021} = \int_{-1/2}^{1/2} [1 - e_0 \cos(\pi\zeta)] \zeta d\zeta = 0$$

$$c_{022} = \int_{-1/2}^{1/2} [1 - e_0 \cos(\pi\zeta)] \sin(\pi\zeta) d\zeta = 0$$

$$c_{023} = \int_{-1/2}^{1/2} [1 - e_0 \cos(\pi\zeta)] \sin(2\pi\zeta) \cos^2(\pi\zeta) d\zeta = 0$$

$$c_{024} = \int_{-1/2}^{1/2} [1 - e_0 \cos(\pi\zeta)] d\zeta = 1 - \frac{2}{\pi} e_0$$

W pracy przyjęto oznaczenia:

$$c_1 = c_{01},$$

$$c_2 = \frac{1}{\pi} c_{02},$$

$$c_3 = \frac{1}{\pi} c_{03},$$

$$c_4 = \frac{1}{\pi^2} c_{04},$$

$$c_5 = \frac{1}{\pi^2} c_{05},$$

$$c_6 = \frac{1}{\pi^2} c_{06},$$

$$c_7 = c_{07},$$

$$c_8 = c_{08},$$

$$c_9 = c_{09},$$

$$c_{24} = c_{024}$$

ZAŁĄCZNIK 2

Stosując odpowiednie przekształcenia do równania wariacji energii sprężystej (3.6) otrzymano równanie:

$$\begin{aligned}
 \delta U_\varepsilon = & \frac{E_1 t}{(1-\nu^2)} \int_0^a \int_0^b \left\{ c_1 t^2 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) (\delta w) - c_2 t^2 \left[\left(\frac{\partial^3 \psi_1}{\partial x^3} + \nu \left(\frac{\partial^3 \phi_1}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial x \partial y^2} \right) \right) \right. \right. \\
 & + \frac{\partial^4 \phi_1}{\partial y^4} + (1-\nu) \left(\frac{\partial^3 \psi_1}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 \phi_1}{\partial x^2 \partial y} \right) \left. \left. (\delta w) - \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \nu \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - (1-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) (\delta \psi_1) - \right. \right. \\
 & - \left. \left. \left(\nu \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (1-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) (\delta \phi_1) \right] + c_3 t^2 \left[\left(\frac{\partial^3 \psi_2}{\partial x^3} + \nu \left(\frac{\partial^3 \phi_2}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial x \partial y^2} \right) \right) \frac{\partial^3 \phi_2}{\partial x^2 \partial y} \right. \right. \\
 & + (1-\nu) \left(\frac{\partial^3 \psi_2}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 \phi_2}{\partial x^2 \partial y} \right) \left. \left. (\delta w) - \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \nu \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + (1-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) (\delta \psi_2) - \left(\nu \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right. \right. \right. \\
 & + \left. \left. \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (1-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) (\delta \phi_2) \right] - c_4 t^2 \left[\left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x \partial y} + \frac{(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x \partial y} \right) \right) \delta \psi_1 + \right. \\
 & + \left. \left(\nu \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} + \frac{(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} \right) \right) (\delta \phi_1) \right] - c_5 t^2 \left[\left(\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x \partial y} \right. \right. \\
 & + \left. \left. \frac{(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x \partial y} \right) \right) \delta \psi_1 + \left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x \partial y} + \frac{(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x \partial y} \right) \right) \delta \psi_2 + \right. \\
 & + \left. \left(\nu \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} + \frac{(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} \right) \right) (\delta \phi_2) + \left(\nu \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y^2} + \frac{(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial y} \right. \right. \right. \\
 & + \left. \left. \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} \right) (\delta \phi_1) \right] - c_6 t^2 \left[\left(\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x \partial y} + \frac{(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x \partial y} \right) \right) (\delta \psi_2) + \left(\nu \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial y} \right. \right. \\
 & + \left. \left. \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y^2} + \frac{(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} \right) \right) (\delta \phi_2) \right] + \frac{1-\nu}{2} \left[(c_7 \psi_1 + c_8 \psi_2) \delta \psi_1 + (c_7 \phi_1 + c_8 \phi_2) \delta \phi_1 + \right. \\
 & + (c_8 \psi_1 + c_9 \psi_2) \delta \psi_2 + (c_8 \phi_1 + c_9 \phi_2) \delta \phi_2 \left. \right] - c_{24} \left[\left(\frac{3}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + \right. \right. \\
 & + \left. \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \nu \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \right. \right. \\
 & + \left. \left. \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{3}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \Big) \delta w + \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \right. \\
& + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \nu \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \delta u_0 + \\
& + \left(\nu \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial y} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \delta v_0 \right) \Big] \Big\} dx dy + \frac{E_1 t}{(1-\nu^2)} \Big|_0^a \left\{ c_1 t^2 \left[\left(\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) + \left((\nu-2) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right) \delta w \right] - c_2 t^2 \left[\left(\nu \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} \right) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) - \left((1-\nu) \left(\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} \right) + \nu \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 \phi_1}{\partial y^3} \right) \delta w + \right. \\
& + \left(\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \delta \phi_1 + (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \delta \psi_1 \Big] + c_3 t^2 \left[\nu \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) - \left(\nu \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial y} + (1-\nu) \cdot \right. \right. \\
& \cdot \left. \left. \left(\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} \right) \right) \delta w + \left(\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \delta \phi_2 + (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \delta \psi_2 \Big] + c_4 t^2 \left[\left(\nu \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right) \delta \phi_1 + \right. \\
& + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right) \delta \psi_1 \Big] + c_5 t^2 \left[\left(\nu \frac{\partial \psi_2}{\partial x} + \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right) \delta \phi_1 + \left(\nu \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right) \delta \phi_2 + \right. \\
& + \frac{1-\nu}{2} \left(\left(\frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right) \delta \psi_1 + \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right) \delta \psi_2 \right) \Big] + c_6 t^2 \left[\left(\nu \frac{\partial \psi_2}{\partial x} + \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right) \delta \phi_2 + \right. \\
& \left. \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right) \delta \psi_2 \right] + c_{24} \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial y} + \nu \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^3 + \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) \delta w + \left(\nu \frac{\partial u_0}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) \partial v_0 + \right. \\
& \left. + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \partial u_0 \right] \Big\} dx \Big|_0^b + \frac{E_1 t}{(1-\nu^2)} \Big|_0^a \left\{ c_1 t^2 \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + \right. \right. \\
& + \left. \left. \left((\nu-2) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \delta w \right] - c_2 t^2 \left[\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} \right) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) - \left((1-\nu) \cdot \right. \right. \\
& \cdot \left. \left. \left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} \right) + \nu \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} \right) \delta w + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \delta \psi_1 + (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \delta \phi_1 \right] + \\
& + c_3 t^2 \left[\left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x} + \nu \frac{\partial \phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) - \left(\nu \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x \partial y} + (1-\nu) \left(\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} - \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x \partial y} \delta w + \left(\nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \delta \psi_2 + (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \delta \phi_2 \Big] + c_4 t^2 \left[\left(\nu \frac{\partial \phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right) \delta \psi_1 + \right. \\
 & + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right) \delta \phi_1 \Big] + c_5 t^2 \left[\left(\nu \frac{\partial \phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right) \delta \psi_1 + \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \nu \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right) \delta \psi_2 + \right. \\
 & + \frac{1-\nu}{2} \left(\left(\frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right) \delta \phi_1 + \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right) \delta \phi_2 \right) \Big] + c_6 t^2 \left[\left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x} + \nu \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right) \delta \psi_2 + \right. \\
 & \left. \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right) \delta \phi_2 \right] + c_{24} \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 + \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \right. \right. \\
 & + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \Big] \delta w + \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \nu \frac{\partial v_0}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) \partial u_0 + \\
 & + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) \partial v_0 \Big] \Big] dy \Big|_0^a + \frac{E_1 t}{(1-\nu^2)} \left\{ t^2 (1-\nu) \left(2c_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - c_2 \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} \right) + c_3 \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} \right) \right) \right\} \Big] \Big|_0^a
 \end{aligned}$$

Przekształcenia Greena:

1. $\int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\delta w) dx dy = \int_0^a \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) \Big|_0^a - \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} (\delta w) \Big|_0^a \right] dy + \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} (\delta w) dx dy$
2. $\int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\delta w) dx dy = \int_0^a \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) \Big|_0^a - \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} (\delta w) \Big|_0^a \right] dy + \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} (\delta w) dx dy$
3. $\int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\delta w) dx dy = \int_0^a \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial y} (\delta w) \Big|_0^b - \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} (\delta w) \Big|_0^b \right] dx + \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} (\delta w) dx dy$
4. $\int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\delta w) dx dy = \int_0^a \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial}{\partial y} (\delta w) \Big|_0^b - \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} (\delta w) \Big|_0^b \right] dx + \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} (\delta w) dx dy$
5. $\int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\delta w) dx dy = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (\delta w) \Big|_0^a \right) \Big|_0^b - \int_0^a \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} (\delta w) \Big|_0^b dx - \int_0^b \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} (\delta w) \Big|_0^a dy + \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} (\delta w) dx dy$
6. $\int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x} (\delta \psi_1) dx dy = \int_0^a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (\delta \psi_1) \Big|_0^a dy - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} (\delta \psi_1) dx dy$

7.
$$\int_0^a \int_0^b \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\delta w) dx dy = \int_0^b \left[\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) \right]_0^a - \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} (\delta w) \Big|_0^a dy + \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial x^3} (\delta w) dx dy$$
8.
$$\int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial y} (\delta \phi_1) dx dy = \int_0^a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (\delta \phi_1) \Big|_0^b dx - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} (\delta \phi_1) dx dy$$
9.
$$\int_0^a \int_0^b \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\delta w) dx dy = \int_0^b \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) \right]_0^a - \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x \partial y} (\delta w) \Big|_0^a dy + \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^3 \phi_1}{\partial x^2 \partial y} (\delta w) dx dy$$
10.
$$\int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial}{\partial x} (\delta \psi_1) dx dy = \int_0^a \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} (\delta \psi_1) \Big|_0^b dy - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} (\delta \psi_1) dx dy$$
11.
$$\int_0^a \int_0^b \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\delta w) dx dy = \int_0^a \left[\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} (\delta w) \right]_0^b - \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y} (\delta w) \Big|_0^b dx + \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial x \partial y^2} (\delta w) dx dy$$
12.
$$\int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial}{\partial y} (\delta \phi_1) dx dy = \int_0^a \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} (\delta \phi_1) \Big|_0^b dx - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} (\delta \phi_1) dx dy$$
13.
$$\int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\delta w) dx dy = \int_0^a \left[\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} \frac{\partial}{\partial y} (\delta w) \right]_0^b - \frac{\partial^3 \phi_1}{\partial y^3} (\delta w) \Big|_0^b dx + \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^4 \phi_1}{\partial y^4} (\delta w) dx dy$$
14.
$$\int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial}{\partial y} (\delta \psi_1) dx dy = \int_0^a \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (\delta \psi_1) \Big|_0^b dx - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} (\delta \psi_1) dx dy$$
15.
$$\int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial}{\partial x} (\delta \phi_1) dx dy = \int_0^a \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (\delta \phi_1) \Big|_0^b dy - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} (\delta \phi_1) dx dy$$
16.
$$\int_0^a \int_0^b \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\delta w) dx dy = \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} (\delta w) \Big|_0^a \right) \Big|_0^b - \int_0^b \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y} (\delta w) \Big|_0^a dy - \int_0^a \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} (\delta w) \Big|_0^b dy + \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial x \partial y^2} (\delta w) dx dy$$
17.
$$\int_0^a \int_0^b \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\delta w) dx dy = \left(\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} (\delta w) \Big|_0^b \right) \Big|_0^a - \int_0^a \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x \partial y} (\delta w) \Big|_0^b dx - \int_0^a \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} (\delta w) \Big|_0^b dx + \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^3 \phi_1}{\partial x^2 \partial y} (\delta w) dx dy$$
18.
$$\int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x} (\delta \psi_2) dx dy = \int_0^a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (\delta \psi_2) \Big|_0^b dy - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} (\delta \psi_2) dx dy$$
19.
$$\int_0^a \int_0^b \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\delta w) dx dy = \int_0^b \left[\frac{\partial \psi_2}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) \right]_0^a - \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} (\delta w) \Big|_0^a dy + \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial x^3} (\delta w) dx dy$$
20.
$$\int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial y} (\delta \phi_2) dx dy = \int_0^a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (\delta \phi_2) \Big|_0^b dx - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} (\delta \phi_2) dx dy$$
21.
$$\int_0^a \int_0^b \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\delta w) dx dy = \int_0^b \left[\frac{\partial \phi_2}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) \right]_0^a - \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x \partial y} (\delta w) \Big|_0^a dy + \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^3 \phi_2}{\partial x^2 \partial y} (\delta w) dx dy$$

22.
$$\int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial}{\partial x} (\delta \psi_2) dx dy = \int_0^a \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} (\delta \psi_2) \Big|_0^a dy - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} (\delta \psi_2) dx dy$$
23.
$$\int_0^a \int_0^b \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\delta w) dx dy = \int_0^a \left[\frac{\partial \psi_2}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} (\delta w) \Big|_0^b - \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial y} (\delta w) \Big|_0^b \right] dx + \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial x \partial y^2} (\delta w) dx dy$$
24.
$$\int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial}{\partial y} (\delta \phi_2) dx dy = \int_0^a \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} (\delta \phi_2) \Big|_0^b dx - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} (\delta \phi_2) dx dy$$
25.
$$\int_0^a \int_0^b \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\delta w) dx dy = \int_0^b \left[\frac{\partial \phi_2}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) \Big|_0^a - \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x \partial y} (\delta w) \Big|_0^a \right] dy + \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^3 \phi_2}{\partial x^2 \partial y} (\delta w) dx dy$$
26.
$$\int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial}{\partial y} (\delta \psi_2) dx dy = \int_0^a \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (\delta \psi_2) \Big|_0^b dx - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} (\delta \psi_2) dx dy$$
27.
$$\int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial}{\partial x} (\delta \phi_2) dx dy = \int_0^b \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (\delta \phi_2) \Big|_0^a dy - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} (\delta \phi_2) dx dy$$
28.
$$\int_0^a \int_0^b \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\delta w) dx dy = \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial y} (\delta w) \Big|_0^a \right) \Big|_0^b - \int_0^b \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial y} (\delta w) \Big|_0^a dy - \int_0^b \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} (\delta w) \Big|_0^a dy + \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial x \partial y^2} (\delta w) dx dy$$
29.
$$\int_0^a \int_0^b \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\delta w) dx dy = \left(\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} (\delta w) \Big|_0^b \right) \Big|_0^a - \int_0^a \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x \partial y} (\delta w) \Big|_0^b dx - \int_0^a \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} (\delta w) \Big|_0^b dx + \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^3 \phi_2}{\partial x^2 \partial y} (\delta w) dx dy$$
30.
$$\int_0^a \int_0^b \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta \psi_1) dx dy = \int_0^a \frac{\partial \psi_1}{\partial x} (\delta \psi_1) \Big|_0^b dy - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} (\delta \psi_1) dx dy$$
31.
$$\int_0^a \int_0^b \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} (\delta \psi_1) dx dy = \int_0^a \frac{\partial \phi_1}{\partial y} (\delta \psi_1) \Big|_0^b dy - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x \partial y} (\delta \psi_1) dx dy$$
32.
$$\int_0^a \int_0^b \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} (\delta \phi_1) dx dy = \int_0^a \frac{\partial \psi_1}{\partial x} (\delta \phi_1) \Big|_0^b dx - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y} (\delta \phi_1) dx dy$$
33.
$$\int_0^a \int_0^b \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (\delta \phi_1) dx dy = \int_0^a \frac{\partial \phi_1}{\partial y} (\delta \phi_1) \Big|_0^b dx - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} (\delta \phi_1) dx dy$$
34.
$$\int_0^a \int_0^b \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (\delta \psi_1) dx dy = \int_0^a \frac{\partial \psi_1}{\partial y} (\delta \psi_1) \Big|_0^b dx - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} (\delta \psi_1) dx dy$$
35.
$$\int_0^a \int_0^b \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} (\delta \phi_1) dx dy = \int_0^b \frac{\partial \psi_1}{\partial y} (\delta \phi_1) \Big|_0^a dy - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y} (\delta \phi_1) dx dy$$
36.
$$\int_0^a \int_0^b \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} (\delta \psi_1) dx dy = \int_0^a \frac{\partial \phi_1}{\partial x} (\delta \psi_1) \Big|_0^b dx - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x \partial y} (\delta \psi_1) dx dy$$

55.
$$\int_0^a \int_0^b \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} (\delta \psi_2) dx dy = \int_0^b \frac{\partial \phi_2}{\partial y} (\delta \psi_2) \Big|_0^a dy - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x \partial y} (\delta \psi_2) dx dy$$
56.
$$\int_0^a \int_0^b \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} (\delta \phi_2) dx dy = \int_0^a \frac{\partial \psi_2}{\partial x} (\delta \phi_2) \Big|_0^b dx - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial y} (\delta \phi_2) dx dy$$
57.
$$\int_0^a \int_0^b \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (\delta \phi_2) dx dy = \int_0^a \frac{\partial \phi_2}{\partial y} (\delta \phi_2) \Big|_0^b dx - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y^2} (\delta \phi_2) dx dy$$
58.
$$\int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) dx dy = \int_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 (\delta w) \Big|_0^a dy - 3 \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (\delta w) dx dy$$
59.
$$\int_0^a \int_0^b \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta u_0) dx dy = \int_0^b \frac{\partial u_0}{\partial x} (\delta u_0) \Big|_0^a dy - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} (\delta u_0) dx dy$$
60.
$$\int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial}{\partial x} (\delta u_0) dx dy = \int_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 (\delta u_0) \Big|_0^a dy - 2 \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (\delta u_0) dx dy$$
61.
$$\int_0^a \int_0^b \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) dx dy = \int_0^b \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u_0}{\partial x} (\delta w) \Big|_0^a dy - \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right) (\delta w) dx dy$$
62.
$$\int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) dx dy = \int_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial x} (\delta w) \Big|_0^a dy -$$

$$- \int_0^a \int_0^b \left[2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \frac{\partial w}{\partial x} + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] (\delta w) dx dy$$
63.
$$\int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial y} (\delta w) dx dy = \int_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial y} (\delta w) \Big|_0^a dx -$$

$$- \int_0^a \int_0^b \left[2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \frac{\partial w}{\partial y} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] (\delta w) dx dy$$
64.
$$\int_0^a \int_0^b \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} (\delta v_0) dx dy = \int_0^b \frac{\partial u_0}{\partial x} (\delta v_0) \Big|_0^a dx - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} (\delta v_0) dx dy$$
65.
$$\int_0^a \int_0^b \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} (\delta u_0) dx dy = \int_0^a \frac{\partial v_0}{\partial y} (\delta u_0) \Big|_0^b dy - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} (\delta u_0) dx dy$$
66.
$$\int_0^a \int_0^b \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (\delta w) dx dy = \int_0^b \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} (\delta w) \Big|_0^a dx - \int_0^a \int_0^b \left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] (\delta w) dx dy$$
67.
$$\int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial}{\partial x} (\delta u_0) dx dy = \int_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 (\delta u_0) \Big|_0^a dx - 2 \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (\delta u_0) dx dy$$
68.
$$\int_0^a \int_0^b \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) dx dy = \int_0^b \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} (\delta w) \Big|_0^a dy - \int_0^a \int_0^b \left[\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] (\delta w) dx dy$$
69.
$$\int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial}{\partial y} (\delta v_0) dx dy = \int_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 (\delta v_0) \Big|_0^a dx - 2 \int_0^a \int_0^b \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (\delta v_0) dx dy$$

70.
$$\int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^3 \frac{\partial}{\partial y} (\delta w) dx dy = \int_0^a \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^3 (\delta w) \Big|_0^b dx - 3 \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} (\delta w) dx dy$$
71.
$$\int_0^a \int_0^b \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (\delta v_0) dx dy = \int_0^a \frac{\partial v_0}{\partial y} (\delta v_0) \Big|_0^b dx - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} (\delta v_0) dx dy$$
72.
$$\int_0^a \int_0^b \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (\delta w) dx dy = \int_0^a \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} (\delta w) \Big|_0^b dx - \int_0^a \int_0^b \left[\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] (\delta w) dx dy$$
73.
$$\int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial}{\partial y} (\delta v_0) dx dy = \int_0^a \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 (\delta v_0) \Big|_0^b dx - 2 \int_0^a \int_0^b \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} (\delta v_0) dx dy$$
74.
$$\int_0^a \int_0^b \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (\delta u_0) dx dy = \int_0^a \frac{\partial u_0}{\partial x} (\delta u_0) \Big|_0^b dx - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} (\delta u_0) dx dy$$
75.
$$\int_0^a \int_0^b \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta v_0) dx dy = \int_0^b \frac{\partial v_0}{\partial x} (\delta v_0) \Big|_0^a dy - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} (\delta v_0) dx dy$$
76.
$$\int_0^a \int_0^b \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} (\delta v_0) dx dy = \int_0^b \frac{\partial u_0}{\partial y} (\delta v_0) \Big|_0^a dy - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} (\delta v_0) dx dy$$
77.
$$\int_0^a \int_0^b \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} (\delta u_0) dx dy = \int_0^b \frac{\partial v_0}{\partial x} (\delta u_0) \Big|_0^a dy - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} (\delta u_0) dx dy$$
78.
$$\int_0^a \int_0^b \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} (\delta w) dx dy = \int_0^a \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} (\delta w) \Big|_0^b dx - \int_0^a \int_0^b \left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] (\delta w) dx dy$$
79.
$$\int_0^a \int_0^b \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) dx dy = \int_0^b \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} (\delta w) \Big|_0^a dy - \int_0^a \int_0^b \left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] (\delta w) dx dy$$
80.
$$\int_0^a \int_0^b \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (\delta u_0) dx dy = \int_0^a \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} (\delta u_0) \Big|_0^b dx - \int_0^a \int_0^b \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] (\delta u_0) dx dy$$
81.
$$\int_0^a \int_0^b \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} (\delta w) dx dy = \int_0^a \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} (\delta w) \Big|_0^b dx - \int_0^a \int_0^b \left[\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] (\delta w) dx dy$$
82.
$$\int_0^a \int_0^b \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) dx dy = \int_0^b \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} (\delta w) \Big|_0^a dy - \int_0^a \int_0^b \left[\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] (\delta w) dx dy$$
83.
$$\int_0^a \int_0^b \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} (\delta v_0) dx dy = \int_0^a \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} (\delta v_0) \Big|_0^b dx - \int_0^a \int_0^b \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] (\delta v_0) dx dy$$

ZAŁĄCZNIK 3

$$\int_0^a \int_0^b [\mathfrak{R}_i(x, y)] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy = 0$$

gdzie $\mathfrak{R}_i(x, y)$, dla $i = 1, 2$ jest odpowiednio lewą stroną równania (5.5) i (5.6)

$$\int_0^a \int_0^b \sin^2 \frac{m\pi x}{a} \sin^2 \frac{n\pi y}{b} dx dy = \frac{ab}{4}$$

$$\int_0^a \int_0^b [\mathfrak{R}_3(x, y)] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy = 0$$

gdzie $\mathfrak{R}_3(x, y)$ jest lewą stroną równania (5.13)

$$\int_0^a \int_0^b \sin^2 \frac{m\pi x}{a} \sin^2 \frac{n\pi y}{b} dx dy = \frac{ab}{4}$$

$$\int_0^a \int_0^b \cos \frac{2m\pi x}{a} \sin^2 \frac{m\pi x}{a} \sin^2 \frac{n\pi y}{b} dx dy = \frac{3ab}{8}$$

$$\int_0^a \int_0^b \cos \frac{2n\pi y}{b} \sin^2 \frac{m\pi x}{a} \sin^2 \frac{n\pi y}{b} dx dy = \frac{3ab}{8}$$

$$\int_0^a \int_0^b \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy = \frac{4ab}{\pi^2}$$