UNIWERSYTET ZIELONOGÓRSKI
WYDZIAŁ MATEMATYKI INFORMATYKI I EKONOMETRII

PODZIAŁY DOMATYCZNE GRAFÓW I ICH PRODUKTÓW

MONIKA KIJEWSKA

ROZPRAWA DOKTORSKA NAPISANA POD KIERUNKIEM
DR HAB. MARII KWAŚNIK
PROF. NADZW POLITECHNIKI RZESZOWSKIEJ

Zielona Góra, Szczecin 2008

Serdecznie dziękuję

Pani prof. dr hab. Marii Kwaśnik

za życzliwość oraz pomoc i wskazówki

udzielone podczas przygotowywania rozprawy

Spis treści

Wstęp

Treścią niniejszej pracy są podziały domatyczne grafów prostych. Podział domatyczny grafu rozumiany jako podział zbioru wierzchołków na rozłączne zbiory dominujące został wprowadzony przez E. J. Cockayne'a i S. T. Hedetniemi w [4]. W literaturze znane są podziały, w których rolę zbiorów dominujących przejęły m. in. totalne zbiory dominujące, spójne zbiory dominujące, uzupełniające zbiory dominujące, k-te zbiory dominujące, k-krotne zbiory dominujące, zbiory ps-dominujące. Podziały te są przedmiotem rozważań w mojej pracy. Największa liczba zbiorów podziału domatycznego grafu nosi nazwę liczby domatycznej grafu. M. R. Garey oraz D. S. Johnson ([7]) ustalili, że wyznaczenie tej liczby jest NP$-$problemem. W latach 80-tych pojawiło się wiele prac dotyczących różnych liczb domatycznych grafu (tzn. liczb związanych z podziałami grafu na wyżej wymienione zbiory dominujące). Na przełomie lat 80-tych i 90-tych oraz póżniej m. in. B. Zelinka (m. in. [27], [28], [29], [30], [31], [32], [34], [35]), D. F. Rall ([21]), F. Harary, T. W. Haynes, H. Skovera ([10]), D. Rautenbach, L. Volkmann ([22]), J. E. Dunbar, T. W. Haynes, M. A. Henning ([6]), T. W. Haynes, M. A. Henning ([12]), B. L. Hartnell, D. F. Rall ([11]), P. Dankelmann, N. Calkin ([5]) opublikowali prace, których treścią były modyfikacje podziału domatycznego grafu związane z pojawianiem się coraz to nowych zbiorów dominujących grafu. Szacowano liczby domatyczne grafów, charakteryzowano grafy, dla których osiągane są ich górne lub dolne oszacowania, rozważano grafy domatycznie pełne oraz grafy domatycznie krytyczne, rozwiązywano również problemy typu Nordhausa-Gadduma.

Treść pracy nawiązuje do tej tematyki. Ponadto, rozważany jest problem zliczania podziałów domatycznych w pewnych klasach grafów. Liczba podziałów wyrażona została m. in. przy pomocy liczb Fibonacci'ego i liczb Lucasa. Zostały oszacowane lub podane dokładne wartości liczb domatycznych kilku produktów grafów i pewnych grafów specjalnych, tj. dopełnienia grafu, grafu zwanego duplikacją wierzchołka oraz grafu otrzymanego w wyniku operacji ściągnięcia podgrafu danego grafu do nowego wierzchołka.

Oto bardziej szczegółowy przegląd treści poszczególnych rozdziałów.

W rozdziale pierwszym wyznaczona została liczba podziałów domatycznych grafu P_n, $n \geq 2$, grafu C_n, $n \geq 3$, grafu $K_{m,n}$, $m, n \geq 2$ oraz liczba podziałów domatycznych grafów domatycznie pełnych. Liczby te zostały zdefiniowane rekurencyjnie, a następnie zostały podane ich jawne postacie. Ponadto, udowodnione zostały zależności między liczbą wszystkich możliwych podziałów domatycznych grafu P_n (C_n), a liczbami Fibonacci'ego (Lucasa). Liczby te mają swoją interpretację grafową.

Rozdział drugi zawiera oszacowania lub dokładne wartości liczby domatycznej, totalnej liczby domatycznej, uzupełniającej liczby domatycznej, spójnej liczby domatycznej oraz liczby ps-domatycznej wybranych produktów grafów, tzn. produktu kartezjańskiego dwóch grafów, produktu silnego dwóch grafów, złączenia grafów (w szczególności produktu leksykograficznego dwóch grafów), k-korony dwóch grafów (dla $k \geq 1$) oraz sklejenia dwóch grafów wierzchołkami i złączenia dwóch grafów krawędzią. Ponadto, udowodnione zostały warunki konieczne lub warunki wystarczające na to, aby dany produkt grafów był grafem domatycznie pełnym. Inspiracją do badania produktów grafów były prace [1], [4], [23], gdzie podano dokładną wartość liczby domatycznej produktu kartezjańskiego grafów P_n oraz P_m, liczby domatycznej złączenia grafu G i grafu K_n, oszacowano liczbę domatyczną oraz totalną liczbę domatyczną grafu zwanego sklejeniem grafów G i H wierzchołkami oraz grafu zwanego złączeniem grafów G i H krawędzią.

W podrozdziale 3.1 porównywane są ze sobą liczby domatyczne grafu dwudzielnego i jego dopełnienia. Motywacją do rozpatrywania tego problemu była praca [35] B. Zelinki, w której autor porównuje liczbę domatyczną oraz totalną liczbę domatyczną grafu dwudzielnego i jego dopełnienia. W podrozdziale 3.2 znalezione zostały dolne oszacowania k-tej liczby domatycznej, k-krotnej liczby domatycznej, spójnej liczby domatycznej oraz uzupełniającej liczby domatycznej grafu powstałego w wyniku ściągnięcia jego podgrafu K_m, $m \geq 2$, do nowego wierzchołka. W podrozdziale 3.3 została oszacowana liczba domatyczna oraz spójna liczba domatyczna grafu zwanego duplikacją wierzchołka. Ponadto, podano pewne klasy grafów, dla których osiągane są otrzymane oszacowania. Podana została również pełna charakteryzacja grafów, dla których osiągane są górne lub dolne oszacowania spójnej liczby domatycznej duplikacji wierzchołka. W podrozdziale 3.4 podane zostały pełne charakteryzacje grafów k-domatycznie krytycznych oraz grafów k-krotnie domatycznie krytycznych. Twierdzenia te są uogólnieniami klasycznych już rezultatów dotyczących grafów domatycznie krytycznych uzyskanych przez B. Zelinkę w [24].

Znane są w literaturze prace, w których rozwiązywane były problemy typu Nordhausa-Gadduma dla liczb domatycznych grafu ([4], [3], [13], [10]). W rozdziale czwartym zostały rozwiązane problemy typu Nordhausa-Gadduma dla liczby ps-domatycznej, k-tej liczby domatycznej oraz uzupełniającej liczby domatycznej grafu.

Część rezultatów zawartych w pracy była prezentowana na konferencjach naukowych. Rezultaty zawarte w podrozdziałach 1.1 oraz 1.2 stanowią treść artykułu przyjętego do druku w czasopiśmie Graph Theory Notes of New York ([18]). Wyniki z podrozdziałów 2.1, 2.2, 2.3 oraz 2.4 zostały opracowane w postaci artykułów [16], [17] i zostały przedłożone do recenzji w czasopismach Graph Theory Notes of New York oraz Journal of Mathematics and Applications.

Wykaz oznaczeń

G graf

$V(G)$ zbiór wierzchołków grafu G

$E(G)$ zbiór krawędzi grafu G

$G \simeq H$ grafy G i H są izomorficzne

$|G|$ rząd grafu G

$|D|$ moc zbioru D

$N_G(x)$ sąsiedztwo otwarte wierzchołka x w grafie G

$N_G(D)$ sąsiedztwo otwarte zbioru D w grafie G

$N_G[x]$ sąsiedztwo domknięte wierzchołka x w grafie G

$N_G[D]$ sąsiedztwo domknięte zbioru D w grafie G

$d_G(x)$ stopień wierzchołka x w grafie G

$\delta(G)$ minimalny stopień grafu G

$\Delta(G)$ maksymalny stopień grafu G

$d_G(x, y)$ odległość między wierzchołkami x i y w grafie G

$diam(G)$ średnica grafu G

$\overline{G}$ dopełnienie grafu G

$G - H$ różnica grafów G i H

$H \leq G$ $(H < G)$ H jest podgrafem (właściwym) grafu G

$\langle D \rangle_G$ podgraf grafu G indukowany przez zbiór D, $D \subseteq V(G)$

$G - D$ graf powstały z grafu G w wyniku usunięcia zbioru D, $D \subseteq V(G)$

$G - x$ graf powstały z grafu G w wyniku usunięcia wierzchołka x, $x \in V(G)$

$G - e$ graf powstały z grafu G w wyniku usunięcia krawędzi e, $e \in E(G)$

P_n droga o n wierzchołkach rozumiana jako graf

C_n cykl o n wierzchołkach rozumiany jako graf

K_n graf pełny o n wierzchołkach

$K_{m,n}$ graf pełny dwudzielny

$K_{1,n}$ gwiazda o n liściach

T drzewo

G^x duplikacja wierzchołka x w grafie G

G/H graf powstały w wyniku ściągnięcia podgrafu H grafu G

$G \Box H$ produkt kartezjański grafów G i H

$G \boxtimes H$ produkt silny grafów G i H

$G + (H_1, \ldots, H_n)$ złączenie grafu G i ciągu grafów $H_1, \ldots, H_n$, $n \geq 2$

$G[H]$ produkt leksykograficzny grafów G i H

$G \# H$ złączenie grafów G i H krawędzią

$G * H$ sklejenie grafów G i H wierzchołkami

$kG \circ H$ k-korona grafów G i H, $k \geq 1$

$\gamma(G)$ liczba dominowania grafu G

$\gamma_t(G)$ totalna liczba dominowania grafu G

$\gamma_{cp}(G)$ uzupełniająca liczba dominowania grafu G

$\gamma^k(G)$ k-ta liczba dominowania grafu G, $k \geq 1$

$\gamma_k(G)$ k-krotna liczba dominowania grafu G, $k \geq 1$

$\gamma_c(G)$ spójna liczba dominowania grafu G

$\gamma_p(G)$ liczba ps-dominowania grafu G (ang. the point-set domination number of G)

$d(G)$ liczba domatyczna grafu G

$d_t(G)$ totalna liczba domatyczna grafu G

$d_{cp}(G)$ uzupełniająca liczba domatyczna grafu G

$d^k(G)$ k-ta liczba domatyczna grafu G (ang. the k-ply domatic number of G)

$d_k(G)$ k-krotna liczba domatyczna grafu G

$d_c(G)$ spójna liczba domatyczna grafu G

$d_p(G)$ liczba ps-domatyczna grafu G (ang. the point-set domatic number of G)

Podstawowe definicje i oznaczenia

Symbol G oznaczać będzie graf prosty, to znaczy taki, który nie ma pętli ani krawędzi wielokrotnych. Przez $V(G)$ oraz $E(G)$ oznaczać będziemy odpowiednio zbiór wierzchołków oraz zbiór krawędzi grafu G, przy czym $V(G) \neq \emptyset$. Krawędzie grafu G będziemy oznaczać przez $x_i x_j$ lub $x_i y_j$. Mówimy, że wierzchołki x, y są sąsiednie w grafie G, jeżeli istnieje krawędź xy w grafie G. Podgraf grafu G indukowany przez zbiór V_0, $V_0 \subseteq V(G)$ będziemy oznaczać przez $\langle V_0 \rangle_G$. Symbolem $\overline{G}$ będziemy oznaczać graf zwany dopełnieniem grafu G.

Niech $D \subseteq V(G)$. Zbiór D nazywamy *zbiorem dominującym* grafu G jeżeli dla każdego wierzchołka $x \in V(G) \backslash D$ istnieje wierzchołek $y \in D$ taki, że $xy \in E(G)$. Mówimy wówczas, że zbiór D dominuje wierzchołek x lub wierzchołek y dominuje wierzchołek x. *Liczbą dominowania* grafu G nazywamy moc najmniejszego zbioru dominującego grafu G i oznaczamy ją symbolem $\gamma(G)$. Przez *podział domatyczny* $\{D_1, \ldots, D_m\}$ grafu G rozumiemy podział zbioru wierzchołków $V(G)$ na niepuste, parami rozłączne zbiory dominujące $D_1, \ldots, D_m$, $m \geq 1$ grafu G oraz $\bigcup_{i=1}^{m} D_i = V(G)$. *Liczbę domatyczną* $d(G)$ grafu G definiujemy jako moc największego podziału domatycznego grafu G. Dla dowolnego grafu G, mamy $d(G) \leq \delta(G) + 1$. Jeżeli $d(G) = \delta(G) + 1$, to graf G nazywamy *grafem domatycznie pełnym.*

Oprócz zbioru dominującego grafu G będą rozważane w pracy pewne jego modyfikacje, tzn. zbiory dominujące mające dodatkową własność.

Niech $k \geq 1$. Wówczas *k-tym zbiorem dominującym* D grafu G nazywamy podzbiór D zbioru wierzchołków $V(G)$ grafu G taki, że dla każdego wierzchołka $x \in V(G) \backslash D$ istnieje k wierzchołków $y_1, \ldots, y_k \in D$ oraz $xy_i \in E(G)$ dla $i = 1, \ldots, k$. Jeżeli $k = 1$, to D jest zbiorem dominującym grafu G. Z kolei, *k-krotnym zbiorem dominującym* D grafu G nazywamy podzbiór D zbioru wierzchołków $V(G)$ grafu G taki, że dla każdego wierzchołka $x \in V(G)$ istnieje k wierzchołków w zbiorze D, które są sąsiednie w grafie G do wierzchołka x. Ponieważ każdy wierzchołek grafu dominuje sam siebie, więc jeżeli $x \in D$ i D jest k-krotnym zbiorem dominującym grafu G, to x jest sąsiedni do co najmniej $k-1$ wierzchołków zbioru D różnych od wierzchołka x. Jeżeli $k = 1$, to D jest zbiorem dominującym grafu G.

Totalnym zbiorem dominującym D grafu G nazywamy podzbiór D zbioru wierzchołków $V(G)$ grafu G taki, że dla każdego wierzchołka $x \in V(G)$ istnieje wierzchołek $y \in D$, $y \neq x$ oraz $xy \in E(G)$.

Uzupełniającym zbiorem dominującym D grafu G nazywamy zbiór dominujący D taki, że dla każdego wierzchołka $x \in V(G) \backslash D$ istnieje wierzchołek $z \in D$, $xz \notin E(G)$.

Spójnym zbiorem dominującym D grafu G nazywamy zbiór dominujący D grafu G, który w grafie G indukuje podgraf spójny. Przy obliczaniu spójnej liczby domatycznej grafu G będziemy rozważać wierzchołki nasycone. *Wierzchołkiem nasyconym* w grafie G nazywamy wierzchołek, który jest sąsiedni do pozostałych wierzchołków tego grafu, a w przeciwnym przypadku wierzchołek taki nazywamy *wierzchołkiem nienasyconym*. Z kolei zbiorem *ps-dominującym* D (ang. the point-set dominating set) grafu G nazywamy zbiór dominujący D taki, że dla każdego zbioru $S \subseteq V(G) \backslash D$ istnieje wierzchołek $x \in D$ oraz $S \cup \{x\}$ w grafie G indukuje podgraf spójny.

Dla każdego z wyżej zdefiniowanych typów zbiorów dominujących można dokonać podziału zbioru wierzchołków grafu G na rozłączne zbiory dominujące ustalonego typu. Takie podziały będziemy nazywać podziałami domatycznymi grafu G. Moce największych podziałów grafu G będziemy nazywać: k-tą liczbą domatyczną grafu G i oznaczać symbolem $d^k(G)$, k-krotną liczbą domatyczną $d_k(G)$, totalną liczbą domatyczną $d_t(G)$, uzupełniającą liczbą domatyczną $d_{cp}(G)$, spójną liczbą domatyczną $d_c(G)$ i liczbą ps-domatyczną grafu G, którą oznaczamy symbolem $d_p(G)$.

Symbolami P_n $(n \geq 2)$, C_n $(n \geq 3)$, K_n $(n \geq 1)$, $G(A, B)$, $K_{m,n}$, T będziemy oznaczać odpowiednio: graf zwany drogą n-wierzchołkową, – cyklem n-wierzchołkowym, graf pełny n-wierzchołkowy, graf dwudzielny, graf pełny dwudzielny, drzewo.

Produktem kartezjańskim grafów G i H nazywamy graf $G \Box H$ taki, że $V(G \Box H) = \{(x, y) : x \in V(G) \wedge y \in V(H)\}$ oraz $E(G \Box H) = \{(x_1, y_1)(x_2, y_2) : x_1 = x_2 \wedge y_1 y_2 \in E(H) \vee y_1 = y_2 \wedge x_1 x_2 \in E(G)\}$. Graf $K_1 \Box H$ będziemy oznaczać przez xH, gdzie $\{x\} = V(K_1)$. Podobnie zapisujemy Gy zamiast $G \Box K_1$.
Dla danych grafów G i H definiujemy ich *produkt silny* jako graf $G \boxtimes H$, dla którego $V(G \boxtimes H) = V(G \Box H)$ oraz $E(G \boxtimes H) = E(G \Box H) \cup \{(x_1, y_1)(x_2, y_2) : x_1 x_2 \in E(G) \wedge y_1 y_2 \in E(H)\}$.

Niech będzie dany graf G taki, że $V(G) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $n \geq 2$ oraz ciąg grafów $H_1, \ldots, H_n$, gdzie $V(H_i) = \{y_1^i, \ldots, y_{m_i}^i\}$, $m_i \geq 1$ dla $i = 1 \ldots, n$. *Złączeniem* grafu G i ciągu grafów $H_1, \ldots, H_n$ nazywamy graf $G + (H_1, \ldots, H_n)$ taki, że $V(G + (H_1, \ldots, H_n)) = \{(x_i, y_j^i) : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m_i\}$ oraz $E(G + (H_1, \ldots, H_n)) = \{(x_i, y_j^i)(x_k, y_l^k) : x_i x_k \in E(G) \vee i = k \wedge y_j^i y_l^k \in E(H^i), 1 \leq i, k \leq n, 1 \leq j \leq m_i, 1 \leq l \leq m_k\}$. W szczególności, gdy $H_1 = \ldots = H_n = H$ otrzymujemy produkt leksykograficzny grafów G i H oznaczany symbolem $G[H]$. Z kolei, jeżeli $G = K_2$, to dostajemy graf nazywany złączeniem grafów H_1 i H_2, oznaczany przez $H_1 + H_2$.

Niech $x \in V(G)$. Grafem powstałym z grafu G w wyniku usunięcia wierzchołka x nazywamy graf $G - x$ taki, że $V(G - x) = V(G) \backslash \{x\}$ oraz $E(G - x) = E(G) \backslash \{xy : y \in N_G(x)\}$.

Niech G i H będą grafami wierzchołkowo rozłącznymi oraz niech $x \in V(G)$, $y \in V(H)$, a u będzie nowym wierzchołkiem spoza grafów G i H. Wówczas *sklejeniem* grafów G i H wierzchołkami nazywamy graf $G * H$, dla którego $V(G * H) = V(G - x) \cup V(H - y) \cup \{u\}$ oraz $E(G * H) = E(G - x) \cup E(H - y) \cup \{zu : z \in N_G(x) \cup N_G(y)\}$. *Złączeniem* grafów G i H krawędzią nazywamy graf $G\#H$ taki, że $V(G\#H) = V(G) \cup V(H)$ oraz $E(G\#H) = E(G) \cup E(H) \cup \{xy\}$.

Niech G, H będą danymi grafami oraz $V(G) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $n \geq 1$ i $V(H) = \{y_1, \ldots, y_m\}$, $m \geq 1$. Niech i będzie dowolną, ustaloną liczbą naturalną. Mówimy, że graf G^i jest i-tą *kopią* grafu G jeżeli $V(G^i) = \{x_1^i, \ldots, x_n^i\}$ oraz $E(G^i) = \{x_j^i x_k^i : x_j x_k \in E(G), 1 \leq j, k \leq n\}$. Graf $kG \circ H$, $k \geq 1$, nazywamy k-koroną grafów G i H, jeżeli $V(kG \circ H) = \bigcup_{i=1}^{k} V(G^i) \cup \bigcup_{i=1}^{n} V(H^i)$ oraz $E(kG \circ H) = \bigcup_{i=1}^{k} E(G^i) \cup \bigcup_{i=1}^{n} E(H^i) \cup \{x_j^i y_t^j : 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n, 1 \leq t \leq m\}$. W szczególności, 1-korona grafów G i H jest nazywana *koroną* grafów G i H i oznaczana symbolem $G \circ H$.

Niech $x \in V(G)$, a u niech będzie nowym wierzchołkiem spoza grafu G. *Duplikacją* wierzchołka x w grafie G nazywamy graf G^x taki, że $V(G^x) = V(G) \cup \{u\}$ oraz $E(G^x) = E(G) \cup \{yu : y \in N_G(x)\}$. Wierzchołek u jest nazywany *kopią* wierzchołka x, a wierzchołek x nazywamy *oryginałem*.

Niech $K_m < G$, $m \geq 2$. Graf G/K_m taki, że $V(G/K_m) = (V(G) \backslash V(K_m)) \cup \{u\}$ oraz $E(G/K_m) = \{xy \in E(G) : \{x, y\} \cap V(K_m) = \emptyset\} \cup \{uy : y \in V(G) \backslash V(K_m)$ oraz istnieje $v \in V(K_m)$ taki, że $yv \in E(G)\}$ został otrzymany z grafu G w wyniku operacji ściągnięcia podgrafu K_m do nowego wierzchołka u.

Rozdział 1

ZLICZANIE PODZIAŁÓW DOMATYCZNYCH WYBRANYCH KLAS GRAFÓW

W rozdziale tym wyznaczona zostanie liczba podziałów domatycznych grafu P_n, $n \geq 2$, C_n, $n \geq 3$ i grafu $K_{m,n}$, $m, n \geq 2$ oraz dwóch wybranych klas grafów domatycznie pełnych. Liczby te zostaną zdefiniowane rekurencyjnie, a następnie zostaną podane postacie jawne ciągów tych liczb. Rezultaty zawarte w podrozdziałach 1.1 oraz 1.2 stanowią treść artykułu przyjętego do druku w czasopiśmie Graph Theory Notes of New York ([18]).

Najpierw zostanie wyznaczona liczba podziałów domatycznych grafu P_n oraz grafu C_n. Ponadto, podane zostaną zależności między tymi liczbami a liczbami Fibonacci'ego i Lucasa.

Niech $X = \{1, \ldots, n\}$, $n \geq 1$. Niech $Y \subseteq X$ takim, że $|Y| = k$, dla ustalonego k, $0 \leq k \leq n$ oraz Y nie zawiera dwóch kolejnych liczb całkowitych. Przez $f(n,k)$ oznaczmy liczbę wszystkich możliwych podzbiorów Y zbioru X mających dokładnie k elementów. Wówczas $f(n,k) = \binom{n-k+1}{k}$. Liczbę $F_n = \sum_k f(n,k)$ nazywamy *n-tą liczbą Fibonacci'ego*, $n \geq 1$. Dodatkowo przyjmijmy, że jeżeli $n = 0$, to $X = \emptyset$ i wówczas $F_0 = 1$.

Znane są równania rekurencyjne rzędu drugiego dla liczb Fibonacci'ego postaci

$$F_0 = 1,\ F_1 = 2$$

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1},\ \text{dla } n \geq 1.$$

Niech $X = \{1, \ldots, n\}$, $n \geq 1$. Niech $Y^* \subseteq X$ takim, że $|Y^*| = k$, dla ustalonego k, $0 \leq k \leq n$ oraz Y^* nie zawiera ani dwóch kolejnych liczb całkowitych ani jednocześnie 1 oraz n. Liczba wszystkich możliwych podzbiorów Y^* zbioru X mających dokładnie k elementów jest oznaczana przez $f^*(n, k)$. Ponadto dla $n \geq 3$, $f^*(n, k) = f(n-3, k-1) + f(n-1, k) = \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}$. Oczywiście, $f^*(n, k) = f(n, k)$ dla $n = 0, 1, 2$. Liczbę $F_n^* = \sum_k f^*(n, k)$ nazywamy *n-tą liczbą Lucasa*.
Liczby Lucasa zostały zdefiniowane następującym wzorem rekurencyjnym

$$F_0^* = 1,\ F_1^* = 2;$$

$$F_{n+1}^\star = F_n^\star + F_{n-1}^\star,\ \text{dla } n \geq 1.$$

W pracy [20] H. Prodinger i R. F. Tichy podali interpretację liczb Fibonacci'ego oraz liczb Lucasa w terminach teorii grafów. W tym celu wykorzystali oni pojęcie zbioru niezależnego grafu, tzn. takiego, który indukuje w danym grafie podgraf bezkrawędziowy. Ponadto, przyjmuje się, że zbiór pusty jest również zbiorem niezależnym grafu. Wówczas n-ta liczba Fibonacci'ego F_n , dla $n \geq 1$ jest liczbą wszystkich możliwych zbiorów niezależnych grafu P_n (,przy czym $P_1 = K_1$). Dodatkowo, P_0 oznaczać będzie graf pusty ($V(P_0) = \emptyset$), którego jedynym zbiorem niezależnym jest zbiór pusty. Tak więc liczba F_0 ma również swoją interpretację grafową. Mianowicie, odpowiada ona liczbie zbiorów niezależnych grafu P_0. Z kolei dla $n \geq 0$, n-ta liczba Lucasa F_n^* jest równa liczbie wszystkich możliwych zbiorów niezależnych grafu C_n (, przy czym $C_n = P_n$ dla $n = 0, 1, 2$).

Zauważmy, że jeżeli $\mathcal{W} = \{D_1, \ldots, D_k\}$ jest podziałem domatycznym grafu G, to $k \leq d(G)$. Ponadto, jeżeli $k = 1$, wówczas $\mathcal{W} = \{V(G)\}$ jest jedynym podziałem domatycznym grafu G. Niech $i^r(G)$ oznacza liczbę podziałów domatycznych o mocy r grafu G. Liczba wszystkich możliwych podziałów domatycznych grafu G będzie oznaczana przez $i_c(G)$.

1.1 LICZBA PODZIAŁÓW DOMATYCZNYCH GRAFU P_n

Liczba podziałów domatycznych grafu P_n, $n \geq 2$ zostanie podana za pomocą równania rekurencyjnego rzędu drugiego. Ponadto, liczbę tę wyrazimy za pomocą liczb Fibonacci'ego. Podamy też jawną postać ciągu liczb podziałów domatycznych grafu P_n, $n \geq 2$ wykorzystując funkcje tworzące [8].

Niech $\mathcal{W} = \{D_1, \ldots, D_k\}$ będzie podziałem domatycznym grafu P_{n+1}, $n \geq 1$. Nie jest trudno sprawdzić, że $d(P_{n+1}) = 2$ dla $n \geq 1$. Zatem $k \leq 2$. Ponieważ $\{V(P_{n+1})\}$ jest jedynym podziałem domatycznym o mocy 1 grafu P_{n+1}, więc $i_c(P_{n+1})$ $= i^2(P_{n+1}) + 1$. Wobec tego obliczymy liczbę $i^2(P_{n+1})$ podziałów domatycznych o mocy 2 grafu P_{n+1}.

Można zauważyć, że wierzchołki x_n, x_{n+1} grafu P_{n+1} należą do różnych zbiorów podziału domatycznego $\mathcal{W}$. Ponadto, wierzchołek x_{n-1} należy do tego samego zbioru podziału $\mathcal{W}$, do którego należy wierzchołek x_{n+1} albo do tego zbioru podziału $\mathcal{W}$, do którego należy wierzchołek x_n. Wobec tego otrzymujemy następującą własność.

Własność 1.1.1. *$i^2(P_2) = 1$, $i^2(P_3) = 1$*
oraz $i^2(P_{n+1}) = i^2(P_n) + i^2(P_{n-1})$ dla $n \geq 3$.

Wniosek 1.1.2. *Dla $n \geq 3$, $i^2(P_n) = F_{n-3}$.*

Podamy teraz postać jawną n-tego wyrazu ciągu $(i^2(P_n))_{n\geq 2}$ opisanego wzorem rekurencyjnym we Własności 1.1.1. W tym celu wykorzystamy funkcje tworzące [8]. Wprowadzimy najpierw pomocnicze oznaczenie.

Niech S będzie dowolnym wyrażeniem logicznym mającym wartość logiczną 0 lub 1. Fakt ten zapisujemy

$$[S] = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } S \text{ jest prawdziwe lub} \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Twierdzenie 1.1.3. *Dla $n \geq 2$, $i^2(P_n) = B\phi^n + (1-B)(1-\phi)^n$, gdzie $B = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$ oraz $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.*

Dowód. Z Własności 1.1.1 wynika, że

$$i^2(P_n) = i^2(P_{n-1}) + i^2(P_{n-2}) + [n=2],$$

przy czym n jest dowolną liczbą całkowitą, bowiem definiujemy $i^2(P_{-n}) = 0$, dla $n \geq -1$. Zamiast $i^2(P_n)$ będziemy pisać i_n. Rozważmy funkcję tworzącą $I(z) = \sum_n i_n z^n$. Wówczas

$$\begin{gathered} I(z) = \textstyle\sum_n i_{n-1}z^n + \sum_n i_{n-2}z^n + \sum_n [n=2]z^n = \\ \textstyle\sum_n i_n z^{n+1} + \sum_n i_n z^{n+2} + z^2 = \\ zI(z) + z^2 I(z) + z^2. \end{gathered}$$

W konsekwencji,

$$I(z) = -1 + \tfrac{-z+1}{(1-\phi z)(1-\widehat{\phi}z)},$$

gdzie ϕ jest złotym podziałem ($\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$) i $\widehat{\phi} = 1-\phi$.

Rozkładając tę funkcję wymierną na sumę ułamków prostych mamy

$$I(z) = -1 + \tfrac{B}{1-\phi z} + \tfrac{1-B}{1-\widehat{\phi}z}, \text{ gdzie } B = \tfrac{5-\sqrt{5}}{10}.$$

Zatem wykorzystując następujące elementarne funkcje tworzące

$$\sum_{n\geq 0}[n=0]z^n = 1 \text{ oraz } \sum_{n\geq 0} c^n z^n = \frac{1}{1-cz}$$

otrzymujemy

$$I(z) = \sum_{n\geq 0}\{-[n=0] + B\phi^n + (1-B)\widehat{\phi}^n\}z^n.$$

Ostatecznie jeżeli $n \geq 1$, to $i^2(P_n) = i_n = B\phi^n + (1-B)\widehat{\phi}^n$, gdzie $B = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$ i $\phi = 1 - \widehat{\phi} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Tym samym twierdzenie zostało udowodnione. □

1.2 LICZBA PODZIAŁÓW DOMATYCZNYCH GRAFU C_n

W tej części rozdziału zdefiniujemy rekurencyjnie liczbę podziałów domatycznych grafu C_{n+1}, dla $n \geq 2$. Liczby te wyrazimy za pomocą liczb Lucasa. Ponadto znajdziemy postać jawną ciągu tych liczb wykorzystując funkcje tworzące.

Nie jest trudno sprawdzić, że jeżeli $n \not\equiv 2(\text{mod } 3)$, to $d(C_{n+1}) = 2$; w przeciwnym przypadku $d(C_{n+1}) = 3$. Niech $\mathcal{W} = \{D_1, \ldots, D_k\}$ będzie podziałem domatycznym grafu C_{n+1}. Zatem jeżeli $n \not\equiv 2(\text{mod } 3)$, to $k \leq 2$, a przeciwnie $k \leq 3$. Jeżeli $k = 1$, to $W = \{V(C_{n+1})\}$ jest jedynym podziałem domatycznym grafu C_{n+1}. Co więcej, nie jest trudno zauważyć, że jeżeli $n \equiv 2(\text{mod } 3)$, to istnieje dokładnie jeden podział domatyczny $\mathcal{W}$ grafu C_{n+1} taki, że $\mathcal{W} = \{D_1, D_2, D_3\}$, gdzie $D_1 = \{x_1, x_4, \ldots, x_{n-1}\}$, $D_2 = \{x_2, x_5, \ldots, x_n\}$ oraz $D_3 = \{x_3, x_6, \ldots, x_{n+1}\}$. Z tych powodów jeżeli $n \not\equiv 2(\text{mod } 3)$, to $i_c(C_n) = i^2(C_n) + 1$, a w przeciwnym przypadku $i_c(C_n) = i^2(C_n) + 2$. Wobec tego wystarczy rozważyć podział domatyczny $\mathcal{W}$ z dwoma zbiorami dominującymi grafu C_{n+1}. Niech $\mathcal{W} = \{D_1, D_2\}$ i dla $n \geq 3$ oznaczmy

$$I(C_{n+1}) = \{\mathcal{W} : \mathcal{W}-\text{ podział domatyczny grafu } C_{n+1} \wedge |\mathcal{W}| = 2\},$$

$$I_1(C_{n+1}) = \{\mathcal{W} : \mathcal{W} = \{D_1, D_2\}, x_1, x_3, x_{n+1} \in D_1, x_2 \in D_2\},$$

$$I_2(C_{n+1}) = \{\mathcal{W} : \mathcal{W} = \{D_1, D_2\}, x_2, x_3, x_{n+1} \in D_1, x_1 \in D_2\},$$

$$I_3(C_{n+1}) = \{\mathcal{W} : \mathcal{W} = \{D_1, D_2\}, x_1, x_{n+1} \in D_1, x_2, x_3 \in D_2\},$$

$$I_4(C_{n+1}) = \{\mathcal{W} : \mathcal{W} = \{D_1, D_2\}, x_3, x_{n+1} \in D_1, x_1, x_2 \in D_2\},$$

$$I_5(C_{n+1}) = \{\mathcal{W} : \mathcal{W} = \{D_1, D_2\}, x_2, x_{n+1} \in D_1, x_1, x_3 \in D_2\}.$$

Można zaobserwować, że nie istnieje żaden podział domatyczny $\mathcal{W} = \{D_1,D_2\}$ grafu C_{n+1} taki, że $x_1, x_2, x_{n+1} \in D_1$ oraz $x_3 \in D_2$. Ponadto, nie istnieje żaden podział domatyczny grafu C_4 należący do zbioru $I_1(C_4)$, $I_2(C_4)$ oraz nie istnieje żaden podział domatyczny grafu C_5, który należałby do $I_3(C_5)$. Zatem w dalszych rozważaniach $I_1(C_4) = I_2(C_4) = I_3(C_5) = \emptyset$. Pozostałe zbiory $I_i(C_k) \neq I_j(C_4), I_3(C_5)$ dla $j = 1, 2$ są dobrze zdefiniowane. Wówczas
$i_s(C_{n+1}) \overset{df}{=} |I_s(C_{n+1})|$, dla $s = 1, \ldots, 5$ i $n \geq 3$.
Zatem

$$i^2(C_{n+1}) = \sum_{s=1}^{5} i_s(C_{n+1}), \text{ dla } n \geq 3. \tag{1.2.1}$$

Równanie rekurencyjne rzędu drugiego dla ciągu $(i^2(C_n))$, $n = 3, 4, \ldots$ jest postaci

Twierdzenie 1.2.1.

$$i^2(C_3) = i^2(C_4) = 3 \tag{1.2.2}$$

oraz dla $n \geq 4$

$$i^2(C_{n+1}) = \begin{cases} i^2(C_n) + i^2(C_{n-1}) + 2, & \textit{gdy } n \equiv 2 \pmod 3 \textit{ lub} \\ i^2(C_n) + i^2(C_{n-1}) - 1, & \textit{w przeciwnym przypadku.} \end{cases} \tag{1.2.3}$$

Dowód. Nie jest trudno zauważyć, że $i^2(C_3) = i^2(C_4) = 3$. Załóżmy, że $n = 4$. Skonstruujemy podziały domatyczne, które należą do zbioru $I_i(C_5)$, dla $i = 1, 2, 4, 5$ (przypomnijmy, że $I_3(C_5) = \emptyset$). Mianowicie, zbiory te są postaci: $I_1(C_5) = \{\{\{x_1, x_3, x_5\}, \{x_2, x_4\}\}\}$, $I_2(C_5) = \{\{\{x_2, x_3, x_5\}, \{x_1, x_4\}\}\}$, $I_4(C_5) = \{\{\{x_3, x_5\},$

$\{x_1, x_2, x_4\}\}\}$ oraz $I_5(C_5) = \{\{\{x_2, x_4, x_5\}, \{x_1, x_3\}\}, \{\{x_2, x_5\}, \{x_1, x_3, x_4\}\}\}$. Oznacza to, że $i_1(C_5) = i_2(C_5) = i_4(C_5) = 1$, $i_3(C_5) = 0$, a $i_5(C_5) = 2$. W konsekwencji, wobec wzoru w (1.2.1) oraz ze wzoru w (1.2.2) otrzymujemy $i^2(C_5) = 5 = i^2(C_4) + i^2(C_3) - 1$.

Załóżmy, że $n \geq 5$. Przyjmijmy, że $\mathcal{W} = \{D_1, D_2\}$ jest podziałem domatycznym grafu C_{n+1}. Rozważmy przypadki.

1. Niech $x_1, x_3, x_{n+1} \in D_1$ oraz $x_2 \in D_2$. Ponieważ $x_1, x_{n+1} \in D_1$ oraz D_2 jest zbiorem dominującym grafu C_{n+1}, stąd $x_n \in D_2$. Zatem podział $\{D_1 \backslash \{x_1\}, D_2\}$ grafu $\langle A \rangle_{C_{n+1}}$, gdzie $A = V(C_{n+1}) \backslash \{x_1\}$, jest podziałem domatycznym grafu H_1 takiego, że $V(H_1) = A$ oraz $E(H_1) = (E(C_{n+1}) \backslash \{x_1x_2,\ x_1x_{n+1}\}) \cup \{x_2x_{n+1}\}$ (tzn. $H_1 \simeq C_n$). Co więcej, $\{D_1 \backslash \{x_1\}, D_2\} \in I_5(H_1)$. Oznacza to, że

$$i_1(C_{n+1}) = i_5(H_1) = i_5(C_n), \text{ dla } n = 5, 6, ... \tag{1.2.4}$$

2. Niech $x_2, x_3, x_{n+1} \in D_1$ oraz $x_1 \in D_2$. Stąd wynika, że $x_4 \in D_2$. Wówczas podział $\{D_1 \backslash \{x_2\}, D_2\}$ grafu $\langle B \rangle_{C_{n+1}}$, gdzie $B = V(C_{n+1}) \backslash \{x_2\}$, jest podziałem domatycznym grafu H_2 takiego, że $V(H_2) = B$ oraz $E(H_2) = (E(C_{n+1}) \backslash \{x_1x_2, x_2x_3\}) \cup \{x_1x_3\}$ (tzn. $H_2 \simeq C_n$). Zatem $\{D_1 \backslash \{x_2\}, D_2\} \in I_5(H_2)$, czyli

$$i_2(C_{n+1}) = i_5(H_2) = i_5(C_n), \text{ dla } n = 5, 6, ... \tag{1.2.5}$$

3. Niech $x_1, x_{n+1} \in D_1$ oraz $x_2, x_3 \in D_2$. Ponieważ $x_1, x_{n+1} \in D_1$, to $x_n \in D_2$, a ponieważ $x_2, x_3 \in D_2$, więc $x_4 \in D_1$. Zatem podział $\{D_1 \backslash \{x_1\}, D_2 \backslash \{x_2\}\}$ grafu $\langle L \rangle_{C_{n+1}}$, gdzie $L = V(C_{n+1}) \backslash \{x_1, x_2\}$, jest podziałem domatycznym grafu H_3, gdzie $V(H_3) = L$ oraz $E(H_3) = (E(C_{n+1}) \backslash \{x_1x_{n+1},\ x_1x_2, x_2x_3\}) \cup \{x_3x_{n+1}\}$ (tzn. $H_3 \simeq C_{n-1}$). Oznacza to, że $\{D_1 \backslash \{x_1\}, D_2 \backslash \{x_2\}\} \in I_5(H_3)$. Stąd

$$i_3(C_{n+1}) = i_5(H_3) = i_5(C_{n-1}). \tag{1.2.6}$$

4. Niech $x_3, x_{n+1} \in D_1$ oraz $x_1, x_2, x_4 \in D_2$. Nie jest trudno wykazać, że podział $\{D_1, D_2 \backslash \{x_2\}\}$ grafu $\langle B \rangle_{C_{n+1}}$ jest podziałem domatycznym grafu H_2, $H_2 \simeq C_n$. Stąd $\{D_1, D_2 \backslash \{x_2\}\} \in I_5(H_2)$.

5. Niech $x_3, x_4, x_{n+1} \in D_1$ oraz $x_1, x_2 \in D_2$. Ponieważ $x_3, x_4 \in D_1$, to $x_5 \in D_2$. Zatem podział $\{D_1 \backslash \{x_3\}, D_2 \backslash \{x_2\}\}$ grafu $\langle R \rangle_{C_{n+1}}$, gdzie $R = V(C_{n+1}) \backslash \{x_2, x_3\}$ jest podziałem domatycznym grafu H_4, gdzie $V(H_4) = R$ oraz $E(H_4) = (E(C_{n+1}) \backslash \{x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4\}) \cup \{x_1x_4\}$ (tzn. $H_4 \simeq C_{n-1}$). W konsekwencji, $\{D_1 \backslash \{x_3\}, D_2 \backslash \{x_2\}\} \in I_5(H_4)$.

Reasumując oba powyższe przypadki,

$$i_4(C_{n+1}) = i_5(H_2) + i_5(H_4) = i_5(C_n) + i_5(C_{n-1}), \text{ dla } n = 5, 6, ... \tag{1.2.7}$$

6. Niech $x_2, x_{n+1} \in D_1$ oraz $x_1, x_3, x_4 \in D_2$. Ponieważ $x_3, x_4 \in D_2$, to $x_5 \in D_1$ i podział $\{D_1 \backslash \{x_2\}, D_2 \backslash \{x_3\}\}$ grafu $\langle R \rangle_{C_{n+1}}$ jest podziałem domatycznym grafu H_4, $H_4 \simeq C_{n-1}$. Zatem $\{D_1 \backslash \{x_2\}, D_2 \backslash \{x_3\}\} \in I_4(H_4)$.

7. Niech $x_2, x_4, x_{n+1} \in D_1$ oraz $x_1, x_3 \in D_2$. Wtedy podział $\{D_1 \backslash \{x_2\}, D_2\}$ grafu $\langle B \rangle_{C_{n+1}}$ jest podziałem domatycznym grafu H_2, $H_2 \simeq C_n$. Wówczas $\{D_1 \backslash \{x_2\}, D_2\} \in I_4(H_2)$.

Reasumując przypadki 6 i 7 mamy

$$i_5(C_{n+1}) = i_4(H_2) + i_4(H_4) = i_4(C_n) + i_4(C_{n-1}), \text{ dla } n = 5, 6, ... \tag{1.2.8}$$

Podstawiając do wzoru w (1.2.1) wyrażenia z (1.2.4)$-$(1.2.8) otrzymujemy, że

$$i^2(C_{n+1}) = 3i_5(C_n) + 2i_5(C_{n-1}) + i_4(C_n) + i_4(C_{n-1}). \tag{1.2.9}$$

Przez zastąpienie liczb $i_5(C_n)$, $i_5(C_{n-1})$ i $i_5(C_{n-1})$ we wzorze w (1.2.9) przez wyrażenia z (1.2.8), (1.2.5) i (1.2.4), odpowiednio otrzymujemy, że

$$i^2(C_{n+1}) = 2i_5(C_n) + i_4(C_n) + 2i_4(C_{n-1}) + i_4(C_{n-2}) + i_2(C_n) + i_1(C_n), \tag{1.2.10}$$

przy czym przyjmujemy, że $i_4(C_{n-2}) = 1$ dla $n = 5$.

Z kolei w (1.2.10) zastępując $i_4(C_{n-1})$ przez wyrażenie z (1.2.7), a następnie zastępując $i_5(C_{n-2})$ przez wyrażenie z (1.2.6) i stosując wzór z (1.2.1) otrzymujemy

$$i^2(C_{n+1}) = i^2(C_n) + i_5(C_n) + i_5(C_{n-3}) + i_4(C_{n-1}) + i_4(C_{n-2}), \tag{1.2.11}$$

przy czym przyjmujemy, że $C_2 = P_2$ oraz $i_5(C_{n-3}) = 1$ dla $n = 5$ i $i_5(C_{n-3}) = 0$ dla $n = 6$.

Podstawiając wyrażenie z (1.2.6) pod $i_5(C_{n-3})$ w (1.2.11), a następnie dodając i jednocześnie odejmując $i_1(C_{n-1})$, $i_2(C_{n-1})$, $i_5(C_{n-1})$ do wyrażenia w (1.2.11) i stosując wzór z (1.2.1) dostajemy prawą stronę wyrażenia w (1.2.11) w postaci

$$i^2(C_n) + i^2(C_{n-1}) + i_5(C_n) - i_5(C_{n-1}) + i_4(C_{n-2}) - i_2(C_{n-1}) - i_1(C_{n-1}). \tag{1.2.12}$$

W (1.2.12) zastępując $i_1(C_{n-1})$, $i_2(C_{n-1})$ przez wyrażenia z (1.2.4), (1.2.5), odpowiednio, a następnie zastępując wyrażenie $i_5(C_{n-1})+i_5(C_{n-2})$ przez liczbę $i_4(C_n)$ wobec (1.2.7) mamy

$$i^2(C_{n+1}) = i^2(C_n) + i^2(C_{n-1}) + i_5(C_n) - i_5(C_{n-2}) + i_4(C_{n-2}) - i_4(C_n). \tag{1.2.13}$$

Dodając i odejmując $i_4(C_{n-1})$, $i_5(C_{n-1})$ do prawej strony wyrażenia w (1.2.13) otrzymujemy

$$i^2(C_{n+1}) = i^2(C_n) + i^2(C_{n-1}) + i_5(C_n) - i_5(C_{n+1}) + i_4(C_{n+1}) - i_4(C_n) \tag{1.2.14}$$

wobec równości z (1.2.7) i (1.2.8).

Aby zakończyć dowód wystarczy wykazać, że

$$i_5(C_n) - i_5(C_{n+1}) + i_4(C_{n+1}) - i_4(C_n) = \begin{cases} 2, & \text{jeżeli } \ n \equiv 2 \pmod 3 \ \text{ lub} \\ -1, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases} \tag{1.2.15}$$

Stosując metodę indukcji matematycznej ze względu na liczbę n, $n \equiv 2(\mathrm{mod}\ 3)$ udowodnimy, że

$$i_5(C_n) - i_5(C_{n+1}) + i_4(C_{n+1}) - i_4(C_n) = 2. \tag{1.2.16}$$

Jeżeli $n = 5$, wówczas nie jest trudno pokazać, że $i_5(C_5) = i_5(C_6) = 2$, $i_4(C_6) = 3$, $i_4(C_5) = 1$, a zatem równość w (1.2.16) zachodzi. Załóżmy prawdziwość równości w (1.2.16) dla $n = k$, gdzie $k \equiv 2(\mathrm{mod}\ 3)$. Pokażemy, że równość w (1.2.16) jest prawdziwa dla $n = k + 3$, czyli

$$i_5(C_{k+3}) - i_5(C_{k+4}) + i_4(C_{k+4}) - i_4(C_{k+3}) = 2. \tag{1.2.17}$$

Stosując (1.2.8) do liczb $i_5(C_{k+3})$ oraz $i_5(C_{k+4})$ i jednocześnie stosując (1.2.7) do liczb $i_4(C_{k+4})$ oraz $i_4(C_{k+3})$ otrzymujemy, że lewa strona równości w (1.2.17) wynosi

$$i_4(C_{k+1}) - i_4(C_{k+3}) + i_5(C_{k+3}) - i_5(C_{k+1}). \tag{1.2.18}$$

Z kolei stosując odpowiednio (1.2.7) i (1.2.8) do liczb $i_4(C_{k+3})$ i $i_5(C_{k+3})$ otrzymujemy, że wyrażenie w (1.2.18) ma postać

$$2i_4(C_{k+1}) - 2i_5(C_{k+1}) - i_5(C_{k+2}) + i_4(C_{k+2}). \tag{1.2.19}$$

Na mocy wzorów z (1.2.8) i (1.2.7) zastępujemy w (1.2.19) liczby $i_5(C_{k+2})$ oraz $i_4(C_{k+2})$, odpowiednio i wówczas wyrażenie z (1.2.19) jest równe $i_5(C_k) - i_5(C_{k+1}) + i_4(C_{k+1}) - i_4(C_k) = 2$, co wynika z założenia indukcyjnego. Zatem z twierdzenia o indukcji matematycznej wynika, że dla $n \equiv 2(\mathrm{mod}\ 3)$ równość w (1.2.16) jest prawdziwa. Nie jest trudno zauważyć, że dowód dla $n \not\equiv 2(\mathrm{mod}\ 3)$ jest analogiczny, co kończy dowód. $\square$

Następnie wyrazimy wyrazy ciągu $(i^2(C_n))$, $n = 3, 4, ...$ za pomocą liczb Lucasa.

Twierdzenie 1.2.2. *Niech* $0 \leq k \leq 2$. *Dla* $n \geq 5$, $n \equiv k (\mathrm{mod}\ 3)$,

$$i^2(C_{n+1}) = 3F^\star_{n-3} + (2[k=2] - [k \neq 2])F^\star_0 + 2 \sum_{i \in A_{n-4,k}} F^\star_i - \sum_{i \in B_{n-4,k}} F^\star_i,$$

gdzie $A_{n-4,k} = \{i \in N : i \equiv k(\mathrm{mod}\ 3) \wedge i < n-4\}$,
$B_{n-4,k} = \{i \in N : i < n-4\} \backslash A_{n-4,k}$.

Dowód. Rozważymy przypadek $k = 2$. W pozostałych przypadkach sposób dowodzenia jest analogiczny.

Na początek stosując indukcję względem p wykażemy, że

$$i^2(C_{n+1}) = F^\star_p i^2(C_{n-p}) + F^\star_{p-1} i^2(C_{n-p-1}) + 2F^\star_0 + 2 \sum_{i \in A_{p,2}} F^\star_i - \sum_{i \in B_{p,2}} F^\star_i, \quad (1.2.20)$$

gdzie $A_{p,2} = \{i \in N : i \equiv 2(\mathrm{mod}\ 3) \wedge i < p\}$, $B_{p,2} = \{i \in N : i < p\} \backslash A_{p,2}$ dla $p = 1, \ldots, n-4$ oraz $n \equiv 2(\mathrm{mod}\ 3)$.

Niech $p = 1$ oraz $n \equiv 2(\mathrm{mod}\ 3)$. Zatem wobec wzoru z (1.2.3), $i^2(C_{n+1}) = i^2(C_n) + i^2(C_{n-1}) + 2$. Stosując dalej wzór z (1.2.3) do liczby $i^2(C_n)$ otrzymujemy, że prawa strona powyższej równości jest postaci $2i^2(C_{n-1}) + i^2(C_{n-2}) + 1 = F^*_1 i^2(C_{n-1}) + F^*_0 i^2(C_{n-2}) + F^*_0$, na mocy definicji rekurencyjnej liczb Lucasa. Oznacza to, że dla $p = 1$ równość w (1.2.20) jest prawdziwa, bowiem $A_{1,2} = \emptyset$, $B_{1,2} = \{0\}$.

Załóżmy, że równość w (1.2.20) jest prawdziwa dla $p = l$. Pokażemy, że jest ona prawdziwa dla $p = l+1$. Z założenia indukcyjnego otrzymujemy, że

$$i^2(C_{n+1}) = F^\star_l i^2(C_{n-l}) + F^\star_{l-1} i^2(C_{n-l-1}) + 2F^\star_0 + 2 \sum_{i \in A_{l,2}} F^\star_i - \sum_{i \in B_{l,2}} F^\star_i, \quad (1.2.21)$$

gdzie $A_{l,2} = \{i \in N : i \equiv 2(\mathrm{mod}\ 3) \wedge i < l\}$, $B_{l,2} = \{i \in N : i < l\} \backslash A_{l,2}$.

Załóżmy, że $l \equiv 2(\mathrm{mod}\ 3)$. Wówczas $n - l \equiv 0(\mathrm{mod}\ 3)$. Zatem wobec wzoru z (1.2.3) $i^2(C_{n-l}) = i^2(C_{n-l-1}) + i^2(C_{n-l-2}) + 2$ i prawa strona równości z (1.2.21) jest postaci $(F^*_l + F^*_{l-1}) i^2(C_{n-l-1}) + F^*_l i^2(C_{n-l-2}) + 2F^*_0 + 2(F^*_l + \sum_{i \in A_{l,2}} F^*_i) - \sum_{i \in B_{l,2}} F^*_i$. Ponieważ $F^*_l + F^*_{l-1} = F^*_{l+1}$ na mocy definicji rekurencyjnej liczb Lucasa oraz poprzez prostą obserwację, że $F_l^* + \sum_{i \in A_{l,2}} F_i^* = \sum_{i \in A_{l+1,2}} F_i^*$ oraz $\sum_{i \in B_{l,2}} F_i^* = \sum_{i \in B_{l+1,2}} F_i^*$, więc w tym przypadku teza indukcyjna jest prawdziwa.

Dowód tezy indukcyjnej dla $l \not\equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3)$ zostanie pominięty, bowiem jest on analogiczny do powyższego dowodu.

Zatem z twierdzenia o indukcji matematycznej wynika, że równość w (1.2.20) jest prawdziwa dla $p = 1, \ldots, n-4$.

Wobec tego zastępujemy p przez $n-4$ w równości w (1.2.20). Na koniec w tak otrzymanej równości zastępujemy $i^2(C_3)$ oraz $i^2(C_4)$ przez 3 wobec wzoru w (1.2.2) oraz na mocy definicji rekurencyjnej liczb Lucasa wyrażenie $F^\star_{n-4} + F^\star_{n-5}$ zastępujemy przez liczbę $F^\star_{n-3}$, co kończy dowód. □

Podamy teraz postać liczby $i^2(C_n)$, $n \geq 3$ wykorzystując funkcje tworzące.

Twierdzenie 1.2.3. *Dla $n \geq 2$, $i^2(C_{n+1}) = \frac{1}{2}(\alpha^{n+1} + \widehat{\alpha}^{n+1} + \phi^{n+1} + \widehat{\phi}^{n+1})$, gdzie $\alpha = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$, $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ oraz $\widehat{\alpha} = -1-\alpha$, $\widehat{\phi} = 1-\phi$.*

Dowód. Z Twierdzenia 1.2.1 wynika równość

$$i^2(C_n) = i^2(C_{n-1}) + i^2(C_{n-2}) - [n > 4] + 3[3 \backslash n, n > 0], \tag{1.2.22}$$

która jest spełniona również dla wszystkich liczb całkowitych jeżeli $i^2(C_n) = 0$, dla $n \leq 2$. Zamiast $i^2(C_n)$ będziemy pisać i_n. Rozważmy funkcję tworzącą $I(z) = \sum_n i_n z^n$. Wówczas wykorzystując równość z (1.2.22) otrzymujemy

$$I(z) = \sum_n i_{n-1} z^n + \sum_n i_{n-2} z^n - \sum_{n>4} z^n + 3 \sum_{n>0} [3 \backslash n] z^n =$$
$$\sum_n i_n z^{n+1} + \sum_n i_n z^{n+2} - \sum_{n \geq 0} z^n + \sum_{n=0}^{4} z^n + 3 \sum_{n \geq 0} [3 \backslash n] z^n - 3 \sum_{n=0} [3 \backslash n] z^n.$$

Z kolei wykorzystując następujące funkcje elementarne $\sum_{n \geq 0} c^n z^n = \frac{1}{1-cz}$, $\sum_{n \geq 0} [m \backslash n] z^n = \frac{1}{1-z^m}$ otrzymujemy, że

$$I(z) = zI(z) + z^2 I(z) - \frac{1}{1-z} + \frac{3}{1-z^3} + z^4 + z^3 + z^2 + z - 2.$$

Ostatecznie,

$$I(z) = -z^2 - 2 + \tfrac{z^4 - z^2 - 2z + 2}{(1-z)(1+z+z^2)(1-z-z^2)}.$$

Przypomnijmy, że $1 - z - z^2 = (1 - \phi z)(1 - \widehat{\phi} z)$, gdzie $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ oraz $\widehat{\phi} = 1 - \phi$ (oznaczenia jak w dowodzie Twierdzenia 1.1.3). Ponadto, $z^2 + z + 1 = (1 - \alpha z)(1 - \widehat{\alpha} z)$, gdzie $\alpha = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$, $\widehat{\alpha} = -1 - \alpha$. Wówczas

$$I(z) = -z^2 - 2 + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{1-\alpha z} + \tfrac{1}{1-\widehat{\alpha} z} + \tfrac{1}{1-\phi z} + \tfrac{1}{1-\widehat{\phi} z}\right).$$

Ponieważ $\sum_{n\geq 0} [n = m] z^n = z^m$ oraz $\sum_{n\geq 0} c^n z^n = \frac{1}{1-cz}$, to

$$I(z) = \textstyle\sum_{n\geq 0} \{-[n = 2] - 2[n = 0] + \frac{1}{2}(\alpha^n + \widehat{\alpha}^n + \phi^n + \widehat{\phi}^n)\} z^n.$$

W konsekwencji,

$$i_n = \tfrac{1}{2}(\alpha^n + \widehat{\alpha}^n + \phi^n + \widehat{\phi}^n),$$

co kończy dowód. □

Na mocy Twierdzenia 1.2.3 oraz równości $\alpha^{n+1} = \widehat{\alpha}^{n+1} = 1$ dla $n \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3)$ otrzymujemy

Wniosek 1.2.4. *Jeżeli* $n \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3)$, *wówczas* $i^2(C_{n+1}) = 1 + \frac{1}{2}(\phi^{n+1} + \widehat{\phi}^{n+1})$, *gdzie* $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *oraz* $\widehat{\phi} = 1 - \phi$.

1.3 LICZBA PODZIAŁÓW DOMATYCZNYCH GRAFU $K_{m,n}$

W tej części pracy rozważamy graf pełny dwudzielny $K_{m,n+l}$ taki, że $V(K_{m,n+l}) = A \cup B$, gdzie $A = \{x_1, \ldots, x_m\}$, $m \geq 2$ oraz $B = R \cup S$, przy czym $R = \{y_1, \ldots, y_n\}$, $S = \{y_{n+1}, \ldots, y_{n+l}\}$, $n \geq 2$, $l \geq 1$. Bez straty ogólności rozważań załóżmy, że $m \leq n+l$. Wtedy $d(K_{m,n+l}) = m$. Obliczymy liczbę $i^m(K_{m,n+l})$ podziałów domatycznych o mocy m grafu $K_{m,n+l}$.

W dowodach poniższych twierdzeń wykorzystamy rezultat z [26].

Własność 1.3.1. [26] *Niech* $V(K_{m,n}) = A \cup B$. *Jeżeli* D *jest zbiorem dominującym grafu* $K_{m,n}$, *to albo* $D = A$ *albo* $D = B$ *albo* $D \cap A \neq \emptyset$ *oraz* $D \cap B \neq \emptyset$.

Twierdzenie 1.3.2. $i^2(K_{2,2}) = 3$ *oraz*
$i^2(K_{2,n+1}) = 2i^2(K_{2,n}) + 1$ *dla* $n \geq 2$.

Dowód. Ponieważ $K_{2,2} \simeq C_4$, więc na mocy Twierdzenia 1.2.1 $i^2(K_{2,2}) = 3$.

Wyprowadzimy teraz wzór rekurencyjny dla liczby $i^2(K_{2,n+1})$ podziałów domatycznych o mocy 2 grafu $K_{2,n+1}$, przy czym $n \geq 2$. Na mocy Własności 1.3.1 $\{A, B\}$ jest jednym z podziałów domatycznych o mocy 2 grafu $K_{2,n+1}$. Zatem wobec Własności 1.3.1 wystarczy, że zliczymy podziały domatyczne $\{D_1, D_2\}$ grafu $K_{2,n+1}$ takie, że $D_i \cap A \neq \emptyset$ oraz $D_i \cap B \neq \emptyset$, dla $i = 1, 2$. Rozważmy przypadki.

1. Załóżmy, że wierzchołki zbioru R należą do tego samego zbioru podziału $\{D_1, D_2\}$ grafu $K_{2,n+1}$. Bez straty ogólności rozważań niech $R \subset D_1$. Wówczas $y_{n+1} \in D_2$. Ponadto, ponieważ $A \cap D_i \neq \emptyset$ dla $i = 1, 2$, więc albo $x_1 \in D_1$ oraz $x_2 \in D_2$ albo $x_1 \in D_2$ oraz $x_2 \in D_1$. Oznacza to, że w tym przypadku mamy dwa następujące podziały domatyczne grafu $K_{2,n+1}$: $\{R \cup \{x_1\}, \{x_2, y_{n+1}\}\}$ oraz $\{R \cup \{x_2\}, \{x_1, y_{n+1}\}\}$.

2. Załóżmy, że wierzchołki zbioru R należą do różnych zbiorów podziału domatycznego $\{D_1, D_2\}$ grafu $K_{2,n+1}$. Niech $y_{n+1} \in D_1$. Wówczas $\{D_1 \backslash \{y_{n+1}\}, D_2\}$ jest podziałem domatycznym grafu $K_{2,n}$ takim, że $(D_1 \backslash \{y_{n+1}\}) \cap R \neq \emptyset$ oraz $D_2 \cap R \neq \emptyset$. Takich podziałów mamy $i^2(K_{2,n}) - 1$ (pomijamy podział $\{A, R\}$ grafu $K_{2,n}$). Jeżeli $y_{n+1} \in D_2$, to liczba podziałów domatycznych o mocy 2 grafu $K_{2,n+1}$ wynosi również $i^2(K_{2,n}) - 1$.

Reasumując, $i^2(K_{2,n+1}) = 1 + 2 + 2(i^2(K_{2,n}) - 1) = 2i^2(K_{2,n}) + 1$. □

Wniosek 1.3.3. *Dla* $n \geq 2$, $i^2(K_{2,n}) = 2^n - 1$.

Nie jest trudno zauważyć, że $i^m(K_{m,m}) = m!$ dla $m \geq 3$. Podamy teraz równanie rekurencyjne dla ciągu $(i^m(K_{m,n+l}))$, gdy $n \geq m \geq 3$ oraz $l \geq 1$. Przypomnijmy, że $\{V(K_{m,n})\}$ jest jedynym podziałem domatycznym o mocy 1 grafu $K_{m,n}$, czyli $i^1(K_{m,n}) = 1$ dla każdych m, n.

Twierdzenie 1.3.4. *Dla $n \geq 2$, $i^2(K_{2,n}) = 2^n - 1$.*
Niech $n \geq m \geq 3$ oraz niech $l \geq 1$. Wtedy
$i^m(K_{m,n+l}) = \sum_{r=1}^{min\{l,m\}} \sum_{k=0}^{n-m+r} (\binom{m}{r}\binom{n}{k} r!(i^r(K_{r,l}) - [r=2])(i^{m-r}(K_{m-r,n-k}) - [m-r=2])([k=0] + [k \neq 0](\sum_{s=1}^{min\{r,k\}}(\binom{r}{s}(i^s(K_{s,k}) - [s=2])))))$.

Dowód. Na mocy Wniosku 1.3.3 warunek początkowy zachodzi. Niech $n \geq m \geq 3$. Ponieważ $d(K_{m,n+l}) = m$ dla $m \leq n$, więc niech $\{D_1, \ldots, D_m\}$ będzie podziałem domatycznym o mocy m grafu $K_{m,n+l}$. Załóżmy, że wierzchołki ze zbioru S należą do r ($1 \leq r \leq min\{l,m\}$) zbiorów, powiedzmy $D_{m-r+1}, \ldots, D_m$ z podziału $\{D_1, \ldots, D_m\}$. Rozmieszczenie wierzchołków zbioru S w zbiorach $D_{m-r+1}, \ldots, D_m$ możemy ustalić na $i^r(K_{r,l}) - [r=2]$ sposobów. Ponadto, do zbiorów $D_{m-r+1}, \ldots, D_m$ należy dokładnie r wierzchołków, powiedzmy $x_{m-r+1}, \ldots, x_m$ ze zbioru A na mocy Własności 1.3.1 oraz założenia $m \geq 3$. Wierzchołki te możemy wybrać na $\binom{m}{r}$ sposobów, a rozmieszczenie tych wierzchołków w zbiorach $D_{m-r+1}, \ldots, D_m$ możemy ustalić na $r!$ sposobów. Rozważmy przypadki.

1. Załóżmy, że istnieje dokładnie k ($1 \leq k \leq n-m+r$) wierzchołków, powiedzmy $y_{n-k+1}, \ldots, y_n$ w zbiorze R należących do s ($1 \leq s \leq min\{r,k\}$) spośród r zbiorów $D_{m-r+1}, \ldots, D_m$. Niech tymi s zbiorami będą zbiory $D_{m-s+1} \ldots, D_m$; zbiory te możemy wybrać na $\binom{r}{s}$ sposobów. Z kolei wierzchołki $y_{n-k+1}, \ldots, y_n$ ze zbioru R możemy wybrać na $\binom{n}{k}$ sposobów. Wtedy rozmieszczenie wierzchołków $y_{n-k+1}, \ldots, y_n$ w zbiorach $D_{m-s+1}, \ldots, D_m$ możemy ustalić na $i^s(K_{s,k}) - [s=2]$ sposobów. Wówczas $(A \backslash \{x_{m-r+1}, \ldots, x_m\}) \cup (R \backslash \{y_{n-k+1}, \ldots, y_n\}) = \bigcup_{j=1}^{m-r} D_j$ oraz $\langle (A \backslash \{x_{m-r+1}, \ldots, x_m\}) \cup (R \backslash \{y_{n-k+1}, \ldots, y_n\}) \rangle_{K_{m,n+l}} \simeq K_{m-r,n-k}$. Oznacza to, że $\{D_1, \ldots, D_{m-r}\}$ jest podziałem domatycznym grafu $K_{m-r,n-k}$ takim, że $D_j \cap (A \backslash \{x_{m-r+1}, \ldots, x_m\}) \neq \emptyset$ oraz $D_j \cap (R \backslash \{y_{n-k+1}, \ldots, y_n\}) \neq \emptyset$ dla $j = 1, \ldots, m-r$. Takich podziałów mamy $i^{m-r}(K_{m-r,n-k}) - [m-r=2]$ (pomijamy podział

$\{A\backslash\{x_{m-r+1},\dots,x_m\},R\backslash\{y_{n-k+1},\dots,y_n\}\}$ grafu $K_{m-r,n-k}$, jeżeli $m-r=2$). W konsekwencji, w tym przypadku mamy $\sum_{r=1}^{min\{l,m\}}\sum_{k=1}^{n-m+r}\sum_{s=1}^{min\{r,k\}}(\binom{m}{r}\binom{n}{k}\binom{r}{s}r!$ $(i^r(K_{r,l})-[r=2])(i^s(K_{s,k})-[s=2])(i^{m-r}(K_{m-r,n-k})-[m-r=2]))$ podziałów domatycznych o mocy m grafu $K_{m,n+l}$.

2. Załóżmy, że żaden z wierzchołków ze zbioru R nie należy do żadnego ze zbiorów $D_{m-r+1},\dots,D_m$. Stąd $R\subset\bigcup_{j=1}^{m-r}D_j$. Zatem $(A\backslash\{x_{m-r+1},\dots,x_m\})\cup R=\bigcup_{j=1}^{m-r}D_j$ oraz $\langle(A\backslash\{x_{m-r+1},\dots,x_m\})\cup R\rangle_{K_{m,n+l}}\simeq K_{m-r,n}$. Oznacza to, że $\{D_1,\dots,D_{m-r}\}$ jest podziałem domatycznym grafu $K_{m-r,n}$ takim, że $D_j\cap(A\backslash\{x_{m-r+1},\dots,x_m\})\neq\emptyset$ oraz $D_j\cap R\neq\emptyset$ dla $j=1,\dots,m-r$. Takich podziałów mamy $i^{m-r}(K_{m-r,n})-[m-r=2]$ (pomijamy podział $\{A\backslash\{x_{m-r+1},\dots,x_m\},R\}$ grafu $K_{m-r,n}$, jeżeli $m-r=2$). Reasumując, w tym przypadku mamy $\sum_{r=1}^{min\{l,m\}}(\binom{m}{r}r!$ $(i^r(K_{r,l})-[r=2])(i^{m-r}(K_{m-r,n})-[m-r=2]))$ podziałów domatycznych o mocy m grafu $K_{m,n+l}$.

Ostatecznie, $i^m(K_{m,n+l})=\sum_{r=1}^{min\{l,m\}}\sum_{k=1}^{n-m+r}\sum_{s=1}^{min\{r,k\}}(\binom{m}{r}\binom{n}{k}\binom{r}{s}r!(i^r(K_{r,l})-[r=2])(i^s(K_{s,k})-[s=2])(i^{m-r}(K_{m-r,n-k})-[m-r=2]))+\sum_{r=1}^{min\{l,m\}}(\binom{m}{r}r!(i^r(K_{r,l})-[r=2])(i^{m-r}(K_{m-r,n})-[m-r=2]))=\sum_{r=1}^{min\{l,m\}}\sum_{k=0}^{n-m+r}(\binom{n}{k}\binom{m}{r}r!(i^r(K_{r,l})-[r=2])(i^{m-r}(K_{m-r,n-k})-[m-r=2])([k=0]+[k\neq 0](\sum_{s=1}^{min\{r,k\}}(\binom{r}{s}(i^s(K_{s,k})-[s=2]))))))$. □

Wniosek 1.3.5. *Niech $l\geq 1$. Niech $\mathcal{W}$ będzie podziałem domatycznym grafu $K_{m,n+l}$, do którego należy zbiór D_i taki, że $S\subset D_i$. Wówczas ilość takich podziałów jest równa liczbie $i^m(K_{m,n+1})$.*

Wniosek 1.3.6. *Dla $n\geq 2$, $i^2(K_{2,n})=2^n-1$.*
$i^3(K_{3,n+1})=3\sum_{k=0}^{n-2}(\binom{n}{k}(i^2(K_{2,n-k})-1))$.

Wniosek 1.3.7. *Dla $n\geq 3$, $i^3(K_{3,n})=3(3^{n-1}-2^n+1)$.*

Wniosek 1.3.8. *Dla $n\geq m-1\geq 3$, $i^3(K_{3,n})=3(3^{n-1}-2^n+1)$.*
$i^m(K_{m,n+1})=m\sum_{k=0}^{n-m+1}(\binom{n}{k}i^{m-1}(K_{m-1,n-k}))$.

Stosując $m-3$ krotnie równanie rekurencyjne z Wniosku 1.3.8 do liczby $i^m(K_{m,n+1})$, a następnie wykorzystując warunek początkowy tego równania rekurencyjnego otrzymujemy postać jawną liczby $i^m(K_{m,n+1})$, dla każdych n, m takich, że $n \geq m-1 \geq 3$.

Wniosek 1.3.9. *Dla* $n \geq m-1 \geq 3$, $i^m(K_{m,n+1}) = \frac{m!}{2}\sum_{k_1=0}^{n-m-k_0+1}\sum_{k_2=0}^{n-m-k_0-k_1+1} \ldots \sum_{k_{m-3}=0}^{n-m-k_0-k_1-\ldots-k_{m-4}+1}\{\prod_{l=1}^{m-3}\binom{n-\sum_{p=0}^{l-1}k_p-l+1}{k_l}(3^{n-\sum_{r=1}^{m-3}k_r-m+3}-2^{n-\sum_{r=1}^{m-3}k_r-m+4}+1)\}$, *przy czym* $k_0 = 0$.

Na koniec rozważmy graf pełny dwudzielny $K_{m+l,n}$ taki, że $V(K_{m+l,n}) = P \cup Q$, gdzie $P = T \cup U$, $T = \{x_1, \ldots, x_m\}$, $m \geq 3$, $U = \{x_{m+1}, \ldots, x_{m+l}\}$, $l \geq 1$ oraz $Q = \{y_1, \ldots, y_n\}$, $n \geq m + l$.

Twierdzenie 1.3.10. *Dla* $n \geq 3$, $i^3(K_{3,n}) = 3(3^{n-1} - 2^n + 1)$.
Niech $n \geq m+l$, $m \geq 3$ *oraz* $l \geq 1$. *Wtedy* $i^{m+l}(K_{m+l,n}) =$

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n-m}(\binom{n}{k}i^m(K_{m,n-k})), & dla\ \ l=1\ \ lub \\ \sum_{k=l}^{n-m}\sum_{k_1=1}^{a_1}\sum_{k_2=1}^{a_2}\cdots\sum_{k_{l-1}=1}^{a_{l-1}}\{\prod_{p=1}^{l}(\binom{n}{k}\binom{\sum_{r=p}^{l}k_r}{k_p})i^m(K_{m,n-k})\}, & dla\ \ l \geq 2, \end{cases}$$

gdzie $a_i = \sum_{j=i}^{l}k_j - (l-i)$ *dla* $i = 1, \ldots, l-1$.

Dowód powyższego twierdzenia jest analogiczny do dowodu Twierdzenia 1.3.4.

1.4 LICZBA PODZIAŁÓW DOMATYCZNYCH WYBRANYCH KLAS GRAFÓW DOMATYCZNIE PEŁNYCH

W tej części rozdziału pierwszego zliczamy podziały domatyczne wybranych klas grafów domatycznie pełnych. Graf G nazywamy grafem *domatycznie pełnym*, jeżeli $d(G) = \delta(G) + 1$. Rozważmy najpierw ciąg $(G_p)_{p\geq 0}$ grafów taki, że:

a) G_0 jest grafem domatycznie pełnym oraz

b) Dla każdego $p \geq 1$, $V(G_p) = V(G_{p-1}) \cup \{w_p\}$, gdzie w_p jest nowym wierzchołkiem spoza grafów $G_0, \ldots, G_{p-1}$ oraz $E(G_p) = E(G_{p-1}) \cup \{w_p y : y \in N_{G_0}(x_0)\}$, przy czym $d_{G_0}(x_0) = \delta(G_0)$.

Z definicji ciągu $(G_p)_{p\geq 0}$ wynika, że wszystkie jego wyrazy są grafami domatycznie pełnymi oraz $d(G_p) = d(G_0)$. Podamy teraz liczbę podziałów domatycznych o mocy

r grafu G_p oznaczaną przez $i^r(G_p)$, $p \geq 0$, jeżeli $r = d(G_0)$.

Twierdzenie 1.4.1. *Dla każdego $p \geq 1$, $i^r(G_p) = i^r(G_0)$, gdzie $r = d(G_0) \geq 1$.*

Dowód. Jeżeli $d(G_0) = 1$, to $\{V(G_p)\}$ jest jedynym podziałem domatycznym o mocy 1 grafu G_p dla $p \geq 0$ i $i^r(G_p) = i^r(G_0) = 1$ dla $r = d(G_0) = 1$. Niech teraz $d(G_0) \geq 2$. Ponieważ $d(G_p) = d(G_0)$ dla każdego $p \geq 1$, więc istnieje podział domatyczny $\{D_1, \ldots, D_r\}$ grafu G_p, gdzie $r = d(G_0)$. Bez straty ogólności rozważań niech $x_0 \in D_1$. Wówczas $N_{G_p}(x_0) \subseteq \bigcup_{j=2}^{r} D_j$, bowiem $d_{G_p}(x_0) = \delta(G_p)$ i G_p jest grafem domatycznie pełnym. Ponieważ $N_{G_p}(w_i) = N_{G_p}(x_0) \subseteq \bigcup_{j=2}^{r} D_j$ oraz D_1 jest zbiorem dominującym grafu G_p, to $w_i \in D_1$, dla $i = 1, \ldots, p$. Oznacza to, że wierzchołki $w_1, \ldots, w_p$ zawsze należą do tego samego zbioru z podziału domatycznego o mocy $r = d(G_0)$ grafu G_p, do którego należy wierzchołek x_0. Zatem $i^r(G_p) = i^r(G_0)$, jeżeli $r = d(G_0)$, co należało wykazać. □

Wniosek 1.4.2. *Dla każdego $p \geq 1$, $i^r(G_p) = i^r(G_0)$, gdzie $r = d(G_0)$.*

W pracy [15] autorzy zdefiniowali rodzinę grafów $\mathfrak{F} = \{H_k : k \geq 1\}$. Mianowicie, niech $H_1 = P_6$ oraz dla $k \geq 2$ niech H_k będzie drzewem otrzymanym z rozłącznej sumy gwiazdy $K_{1,k+1}$ oraz gwiazdy podzielonej (ang. subdivided star) $K^*_{1,k}$ poprzez połączenie za pomocą krawędzi liścia gwiazdy z centrum gwiazdy podzielonej.

Załóżmy, że $V(K_{1,k+1}) = \{x_1, \ldots, x_{k+1}\} \cup \{x_a\}$, gdzie x_a jest centrum gwiazdy $K_{1,k+1}$.

Niech $V(K^*_{1,k}) = \{y_1, \ldots, y_{2k}\} \cup \{y_b\}$, gdzie y_b jest centrum podzielonej gwiazdy $K^*_{1,k}$. Wiadomo, że $d_{K^*_{1,k}}(y_b, y_i) = \begin{cases} 1, & \text{dla } 1 \leq i \leq k, \\ 2, & \text{dla } k+1 \leq i \leq 2k \end{cases}$ oraz $d_{K^*_{1,k}}(y_j, y_l) = 1$ dla $j \equiv l (\text{mod } k)$.

Bardziej formalnie, $H_1 = P_6$ ($V(H_1) = \{x_1, x_a, x_2, y_b, y_1, y_2\}$, $E(H_1) = \{x_1x_a, x_ax_2, x_2y_b, y_by_1, y_1y_2\}$) oraz dla $k \geq 2$ H_k jest grafem takim, że $V(H_k) = V(H_{k-1}) \cup \{x_{k+1}, y_k, y_{2k}\}$ oraz $E(H_k) = E(H_{k-1}) \cup \{x_ax_{k+1}, y_by_k, y_ky_{2k}\}$.

Jest oczywiste, że $\delta(H_k) = 1$ oraz $d(H_k) = 2$, dla $k \geq 1$.

Twierdzenie 1.4.3. *$i^2(H_1) = 5$ oraz*
$i^2(H_k) = 2i^2(H_{k-1})$, dla $k \geq 2$.

Dowód. Ponieważ $H_1 = P_6$ oraz na mocy Własności 1.1.1 mamy $i^2(H_1) = i^2(P_6) = 5$. Rozważmy graf H_k, dla dowolnego, ustalonego $k \geq 2$. Ponieważ $d(H_k) = 2$, więc niech $\{D_1, D_2\}$ będzie podziałem domatycznym grafu H_k. Oznaczmy przez $I(H_k)$ zbiór podziałów domatycznych $\{D_1, D_2\}$ grafu H_k. Bez straty ogólności niech $x_a \in D_1$. Wtedy $x_{k+1} \in D_2$. Przyjmijmy, że $I_s(H_k) = \{\{D_1, D_2\} : y_b \in D_s\}$, dla $s = 1, 2$. Zatem $I(H_k) = I_1(H_k) \cup I_2(H_k)$ oraz $i^2(H_k) = |I(H_k)|$. Niech $i_s(H_k) \stackrel{df}{=} |I_s(H_k)|$, dla $s = 1, 2$. Rozważmy przypadki.

1. Załóżmy, że $y_b \in D_1$. Wtedy $x_2 \in D_2$. Zatem $y_k \in D_1$ i $y_{2k} \in D_2$ lub $y_k \in D_2$ i $y_{2k} \in D_1$. Jeżeli $y_k \in D_1$ i $y_{2k} \in D_2$, to podział $\{D_1 \backslash \{y_k\}, D_2 \backslash \{x_{k+1}, y_{2k}\}\}$ grafu $\langle A \rangle_{H_k}$, gdzie $A = V(H_k) \backslash \{x_{k+1}, y_k, y_{2k}\}$, jest podziałem domatycznym grafu Q takim, że $V(Q) = A$ oraz $E(Q) = E(H_k) \backslash \{x_{k+1}x_a, y_b y_k, y_k y_{2k}\}$ (tzn. $Q \simeq H_{k-1}$). Co więcej, $\{D_1 \backslash \{y_k\}, D_2 \backslash \{x_{k+1},\ y_{2k}\}\} \in I_1(Q)$. Jeżeli $y_k \in D_2$ i $y_{2k} \in D_1$, to podział $\{D_1 \backslash \{y_{2k}\}, D_2 \backslash \{x_{k+1},\ y_k\}\}$ grafu $\langle A \rangle_{H_k}$ jest podziałem domatycznym grafu Q, $Q \simeq H_{k-1}$. Ponadto, $\{D_1 \backslash \{y_{2k}\}, D_2 \backslash \{x_{k+1},\ y_k\}\} \in I_1(Q)$. Oznacza to, że $i_1(H_k) = 2|I_1(Q)| = 2|I_1(H_{k-1})| = 2i_1(H_{k-1})$.

2. Załóżmy, że $y_b \in D_2$. Wtedy istnieje wierzchołek $w \in N_{H_k}(y_b)$ taki, że $w \in D_1$. Przyjmijmy, że $I_{2,l}(H_k) = \{\{D_1, D_2\} \in I_2(H_k) : x_2 \in D_l\}$, dla $l = 1, 2$. Zatem $I_2(H_k) = I_{2,1}(H_k) \cup I_{2,2}(H_k)$. Niech $i_{2,l}(H_k) \stackrel{df}{=} |I_{2,l}(H_k)|$, dla $l = 1, 2$.
Załóżmy, że $x_2 \in D_1$. Wówczas dalej rozważając analogicznie jak w przypadku 1 otrzymujemy $i_{2,1}(H_k) = 2i_{2,1}(H_{k-1})$.
Niech teraz $x_2 \notin D_1$, tzn. $x_2 \in D_2$. Wtedy istnieje $k_0 \in \{1, \ldots, k\}$ takie, że $y_{k_0} \in D_1$. Zatem $y_p \in D_1$ i $y_{2p} \in D_2$ lub $y_p \in D_2$ i $y_{2p} \in D_1$, dla pewnego $p \in \{1, \ldots, k\}$, $p \neq k_0$. Dalej rozważając jak w przypadku 1 otrzymujemy $i_{2,2}(H_k) = 2i_{2,2}(H_{k-1})$. To

wszystko gwarantuje, że $i_2(H_k) = i_{2,1}(H_k) + i_{2,2}(H_k) = 2(i_{2,1}(H_{k-1}) + i_{2,2}(H_{k-1})) = 2i_2(H_{k-1})$.

Ostatecznie, $i^2(H_k) = i_1(H_k) + i_2(H_k) = 2(i_1(H_{k-1}) + i_2(H_{k-1})) = 2i^2(H_{k-1})$, co kończy dowód. $\square$

Wniosek 1.4.4. *Dla* $k \geq 1$, $i^2(H_k) = 5 \cdot 2^{k-1}$.

Rozdział 2

LICZBY DOMATYCZNE PRODUKTÓW GRAFÓW

W tym rozdziale będą oszacowane liczby domatyczne wybranych produktów grafów, tzn. produktu kartezjańskiego dwóch grafów, produktu silnego dwóch grafów, złączenia grafów oraz k-korony dwóch grafów. Ponadto, podane zostaną pełne lub częściowe charakteryzacje grafów, dla których uzyskane oszacowania liczb domatycznych są osiągane. Inspiracją do badania produktów grafów były prace [1], [4], [23], gdzie podano dokładną wartość liczby domatycznej produktu kartezjańskiego grafów P_n oraz P_m, liczby domatycznej złączenia grafu G i grafu K_n, oszacowano liczbę domatyczną oraz totalną liczbę domatyczną grafu zwanego sklejeniem grafów G i H wierzchołkami oraz grafu zwanego złączeniem grafów G i H krawędzią.

2.1 LICZBY DOMATYCZNE PRODUKTU KARTEZJAŃSKIEGO DWÓCH GRAFÓW

W tej części pracy podamy oszacowania dla wybranych liczb domatycznych produktu kartezjańskiego $G_1 \Box G_2$ grafów G_1 i G_2. Ponadto, wyznaczymy te liczby dla wybranych klas grafów. Jedną z rozważanych klas grafów jest klasa grafów domatycznie pełnych. Przypomnimy, że graf G nazywamy grafem *domatycznie pełnym*, jeżeli $d(G) = \delta(G) + 1$.

Własność 2.1.1. [4] *Dla dowolnego grafu G rzędu n, $n \geq 1$*
a) $d(G) \leq \delta(G) + 1$,
b) $d(G) \leq n/\gamma(G)$.

Własność 2.1.2. [4], [2]
a) $d(P_n) = 2$ oraz P_n jest grafem domatycznie pełnym dla $n \geq 2$,
b) Dla $n \geq 3$, $d(C_n) = \begin{cases} 2, & \text{jeżeli } n \neq 0 (\text{mod } 3) \text{ lub} \\ 3, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$
oraz C_n jest grafem domatycznie pełnym jeżeli $n \equiv 0(\text{mod } 3)$,
c) $d(K_n) = n$ oraz K_n jest grafem domatycznie pełnym dla $n \geq 1$,
d) $d(K_{m,n}) = \min\{m, n\}$ dla $m, n \geq 2$,
e) $d(K_{1,n}) = 2$ oraz $K_{1,n}$ jest grafem domatycznie pełnym dla $n \geq 1$.

Własność 2.1.3. [1] *Dla $n, m \geq 2$,*

$$d(P_n \Box P_m) = \begin{cases} 2, & \text{jeżeli } m = n = 2 \text{ lub } n = 4 \text{ oraz } m = 2 \text{ lub} \\ & n = 2 \text{ oraz } m = 4, \text{ lub} \\ 3, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Powyższe własności będą wykorzystane w dalszych rozważaniach. Nie jest trudno zauważyć, że

Własność 2.1.4. *Dla dwóch dowolnych grafów G_1, G_2 mamy*

$$\max\{d(G_1), d(G_2)\} \leq d(G_1 \Box G_2) \leq \delta(G_1) + \delta(G_2) + 1.$$

Wniosek 2.1.5. *Jeżeli $\delta(G_1) = 1$, $\delta(G_2) \geq 1$ oraz G_2 jest grafem domatycznie pełnym, wówczas $d(G_2) \leq d(G_1 \Box G_2) \leq d(G_2) + 1$.*

Twierdzenie 2.1.6. *Niech G_1 będzie grafem takim, że w jego drzewie spinającym odległość między każdymi dwoma liśćmi jest liczbą parzystą. Jeżeli G_2 jest grafem domatycznie pełnym oraz $\delta(G_i) = 1$ dla $i = 1, 2$, to $d(G_1 \Box G_2) = 3$.*

Dowód. Z Wniosku 2.1.5 wynika, że $d(G_1 \Box G_2) \leq 3$. Zatem aby dowieść tezę twierdzenia wystarczy znaleźć podział domatyczny tego grafu na trzy zbiory W_1, W_2, W_3. Ponieważ $\delta(G_2) = 1$ oraz G_2 jest grafem domatycznie pełnym, to istnieje podział domatyczny $\{D_1, D_2\}$ grafu G_2. Niech $y \in V(G_2)$. Ponadto, niech T będzie drzewem spinającym grafu G_1 takim, że odległość między jego każdymi dwoma liśćmi jest parzysta. Wybierzmy liść $r \in V(T)$. Jeżeli $y \in D_1$, to $(r, y) \in W_1$; w przeciwnym razie $(r, y) \in W_2$. Załóżmy teraz, że $u \in V(T)$, $u \neq r$. Jeżeli $d_T(u, r) \equiv 2 \pmod 4$ oraz $y \in D_1$, to $(u, y) \in W_2$, a jeżeli $d_T(u, r) \equiv 2 \pmod 4$ oraz $y \in D_2$, to $(u, y) \in W_1$. Jeżeli natomiast $d_T(u, r) \equiv 0 \pmod 4$ oraz $y \in D_i$, to $(u, y) \in W_i$, dla $i = 1, 2$. W pozostałych przypadkach $(u, y) \in W_3$. Nie jest trudno zauważyć, że zbiory W_1, W_2, W_3 tworzą podział domatyczny grafu $G_1 \Box G_2$, co kończy dowód. □

Wniosek 2.1.7. *a) Dla $n, m \geq 1$,*

$$d(K_{1,n} \Box K_{1,m}) = \begin{cases} 2, & \text{jeżeli } n = m = 1 \text{ lub} \\ 3, & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

b) $d(P_n \Box K_{1,m}) = 3$, dla $n \geq 2$, $m \geq 1$.

Twierdzenie 2.1.8. *Jeżeli G jest grafem rzędu m, wówczas $d(K_n \Box G) = n$, dla $n \geq m \geq 2$.*

Dla dowodu twierdzenia udowodnimy następujący lemat.

Lemat 2.1.9. *Niech G będzie grafem rzędu m, $m \geq 2$. Jeżeli D jest zbiorem dominującym grafu $K_n \Box G$, to $|D| \geq m$, $n \geq m$.*

Dowód. Weźmy dowolny graf G rzędu m, $m \geq 2$. Załóżmy, że istnieje zbiór dominujący D grafu $K_n \Box G$ taki, że $|D| = k < m$. Zatem istnieje wierzchołek $x \in V(K_n)$ taki, że $A = \{(x, y_j) \in V(K_n \Box G) : j = 1, \ldots, m\}$ oraz $A \cap D = \emptyset$. Co więcej, jest wierzchołek $y \in V(G)$ taki, że $B = \{(x_i, y) \in V(K_n \Box G) : i = 1, \ldots, n\}$ i $B \cap D = \emptyset$. Wobec tego wierzchołek $(x, y) \in A \cap B \subseteq V(K_n \Box G)$ nie jest sąsiedni do żadnego wierzchołka ze zbioru D, co jest sprzeczne z założeniem, że D jest zbiorem dominującym grafu $K_n \Box G$. □

Dowód tw. 2.1.8. Z Własności 2.1.4 i Własności 2.1.2c) $d(K_n \Box G) \geq \max\{n, d(G)\} = n$, gdzie $n \geq m \geq d(G)$. Pozostaje dowieść, że $d(K_n \Box G) \leq n$. Zauważmy, że $D = \{(x_1, y_j) \in V(K_n \Box G) : j = 1, \ldots, m\}$ jest zbiorem dominującym grafu $K_n \Box G$. Istotnie: $K_n y_j$ jest podgrafem pełnym grafu $K_n \Box G$, dla każdego $y_j \in V(G)$. Wtedy każdy wierzchołek $(x_i, y_j) \in V(K_n \Box G) \setminus D$ jest sąsiedni do wierzchołka

$(x_1, y_j) \in D$. Ponieważ $|D| = m$, to $\gamma(K_n \Box G) \leq m$. Stąd i na mocy Lematu 2.1.9 $\gamma(K_n \Box G) = m$. Dlatego $d(K_n \Box G) \leq n$ wobec Własności 2.1.1b). W konsekwencji, $d(K_n \Box G) = n$, co kończy dowód. □

Na mocy Wniosku 2.1.5 i poprzez prostą obserwację nie jest trudno wykazać, że zachodzi

Własność 2.1.10. *Jeżeli G jest grafem $r(r \geq 1)$-regularnym i domatycznie pełnym, to $d(K_2 \Box G) = d(G)$.*

Wniosek 2.1.11. *Dla $n, m \geq 2$,*

$$d(P_n \Box K_m) = \begin{cases} 2, & \textit{jeżeli } n \in \{2,4\},\ m = 2 \textit{ lub} \\ 3, & \textit{jeżeli } n = 2,\ m = 3 \textit{ lub} \\ & n \in \{3\} \cup \{5,6,\ldots\},\ m = 2 \textit{ lub} \\ & n > 2,\ m = 3 \textit{ lub} \\ m, & \textit{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Dowód. Z Twierdzenia 2.1.8 mamy $d(P_n \Box K_m) = m$, dla $m \geq n \geq 2$. Co więcej, z Własności 2.1.3 wynika, że $d(P_4 \Box K_2) = 2$ oraz $d(P_n \Box K_2) = 3$, jeżeli $n \in \{3,5,6,7,8,\ldots\}$.

Niech $n > m \geq 3$. Na mocy Wniosku 2.1.5 i Własności 2.1.2c), $m \leq d(P_n \Box K_m) \leq m+1$. Załóżmy, że $d(P_n \Box K_m) = m+1$ i niech $\{W_1, \ldots, W_{m+1}\}$ będzie podziałem domatycznym grafu $P_n \Box K_m$. Bez straty ogólności rozważań przypuśćmy, że $(x_1, y_1) \in W_1$. Ponieważ $d_{P_n \Box K_m}((x_1, y_1)) = m$, więc przyjmijmy, że $(x_1, y_j) \in W_j$ dla $j = 2, \ldots, m$ oraz $(x_2, y_1) \in W_{m+1}$. Wynika stąd, że $V(x_2 K_m) \subset W_{m+1}$, bowiem zbiór W_{m+1} musi dominować każdy z wierzchołków ze zbioru $V(x_1 K_m)$. Zatem $N_{P_n \Box K_m}[(x_2, y_1)] \backslash \{(x_3, y_1)\} \subset W_1 \cup W_{m+1}$. Wobec tego wierzchołek (x_3, y_1) musi należeć do zbioru W_2, bowiem W_2 jest zbiorem dominującym grafu $P_n \Box K_m$. Wtedy dla $k = 3, \ldots, m$ $N_{P_n \Box K_m}[(x_2, y_1)] \cap W_k = \emptyset$ i zbiory $W_3, \ldots, W_m$ nie dominują wierzchołka (x_2, y_1). Ponieważ $m \geq 3$, więc co najmniej jeden taki zbiór istnieje. Doszliśmy zatem do sprzeczności z założeniem. W konsekwencji, $d(P_n \Box K_m) = m$, co kończy dowód. □

Własność 2.1.12. *Niech* $n \geq 2$*,* $m \geq 3$*. Jeżeli* $m \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 4)$*, to* $d(P_n \Box C_m) = 4$*.*

Dowód. Na mocy Własności 2.1.4 otrzymujemy $d(P_n \Box C_m) \leq \delta(P_n) + \delta(C_m) + 1 = 4$. Niech $m \equiv 0(\mathrm{mod}\ 4)$. Wówczas zbiór $V(P_n \Box C_m)$ może być podzielony na cztery podzbiory: $D_k = \{(x_i, y_j) : i \equiv k(\mathrm{mod}\ 4)$ oraz $j \equiv 1(\mathrm{mod}\ 2),\ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m\} \cup \{(x_i, y_j) : i \equiv (k+2)(\mathrm{mod}\ 4)$ oraz $j \equiv 0(\mathrm{mod}\ 2),\ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m\}$, $k = 1, 2, 3, 4$. Zbiory D_1, D_2, D_3, D_4 są parami rozłączne, $\bigcup_{i=1}^{4} D_i = V(P_n \Box C_m)$ oraz każdy z nich jest zbiorem dominującym grafu $P_n \Box C_m$. W konsekwencji, $\{D_1, D_2, D_3, D_4\}$ jest podziałem domatycznym grafu $P_n \Box C_m$. $\Box$

Własność 2.1.13. *Niech* $m \geq 3$*. Wówczas* $d(P_2 \Box C_m) = 4$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $m \equiv 0(\mathrm{mod}\ 4)$*, a w przeciwnym przypadku* $d(P_2 \Box C_m) = 3$*.*

Dowód. Wobec Własności 2.1.12 dowiedziemy tylko warunek konieczny na to, aby $d(P_2 \Box C_m) = 4$. Załóżmy, że $d(P_2 \Box C_m) = 4$ i niech $\{D_1, D_2, D_3, D_4\}$ będzie podziałem domatycznym grafu $P_2 \Box C_m$. Bez straty ogólności rozważań załóżmy, że $(x_1, y_1) \in D_1$. Wówczas dokładnie jeden z wierzchołków (x_1, y_2), (x_1, y_m), (x_2, y_1) jest w D_2, dokładnie jeden w D_3 oraz dokładnie jeden w D_4, bowiem $P_2 \Box C_m$ jest grafem kubicznym. Przyjmijmy, że $(x_1, y_2) \in D_2$, $(x_2, y_1) \in D_3$ oraz $(x_1, y_m) \in D_4$. Wówczas $(x_i, y_j) \in D_k$ wtedy i tylko wtedy, gdy $i = 1$ oraz $j \equiv k(\mathrm{mod}\ 4)$ lub $i = 2$ oraz $j \equiv (k+2)(\mathrm{mod}\ 4)$, dla $k = 1, 2, 3, 4$. Tak więc ponieważ $(x_1, y_m) \in D_4$, to $m \equiv 0(\mathrm{mod}\ 4)$ i warunek konieczny zachodzi.

Pokażemy teraz, że jeżeli $m \not\equiv 0(\mathrm{mod}\ 4)$, to $d(P_2 \Box C_m) = 3$. Zauważmy, że wystarczy znaleźć podział domatyczny grafu $P_2 \Box C_m$ na trzy niepuste, rozłączne zbiory dominujące. Najpierw załóżmy, że $m \not\equiv 0(\mathrm{mod}\ 4)$ oraz m jest liczbą nieparzystą. Skonstruujemy podział domatyczny $\{D_1, D_2, D_3\}$ grafu $P_2 \Box C_m$. Niech

$D_1 = \{(x_i, y_j) : i = 1$ oraz $j \equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)$ albo $i = 2$ oraz $j \equiv 3(\mathrm{mod}\ 4),\ 1 \leq j \leq m\}$,

$D_2 = \{(x_i, y_j) : i = 1$ oraz $j \equiv 3(\mathrm{mod}\ 4)$ albo $i = 2$ oraz $j \equiv 1(\mathrm{mod}\ 4),\ 1 \leq j \leq m\}$,

$D_3 = \{(x_i, y_j) : i \in \{1, 2\}$ oraz $j \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2),\ 1 \leq j \leq m\}$.

Załóżmy, że $m \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 4)$ oraz m jest liczbą parzystą. Wówczas podział domatyczny grafu $P_2 \Box C_m$ jest postaci

$D_1 = \{(x_i, y_j) : i = 1$ oraz $j \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$ oraz $1 \leq j \leq m/2$ albo $i = 1$ oraz $j \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 4)$ oraz $m/2 < j \leq m$ albo $i = 2$ oraz $j \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)$ oraz $1 \leq j \leq m/2$ albo $i = 2$ oraz $j \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 4)$ oraz $m/2 < j \leq m\}$,

$D_2 = \{(x_i, y_j) : i = 1$ oraz $j \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)$ oraz $1 \leq j \leq m/2$ albo $i = 1$ oraz $j \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 4)$ oraz $m/2 < j \leq m$ albo $i = 2$ oraz $j \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$ oraz $1 \leq j \leq m/2$ albo $i = 2$ oraz $j \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 4)$ oraz $m/2 < j \leq m\}$,

$D_3 = \{(x_i, y_j) : i \in \{1, 2\}$ oraz $(j \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$ oraz $1 \leq j \leq m/2$ albo $j \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)$ oraz $m/2 < j \leq m)\}$. □

Podsumowując dla $n \geq 2$, $m \geq 3$ zachodzą nierówności $3 \leq d(P_n \Box C_m) \leq 4$ na mocy Własności 2.1.3, bowiem $P_n \Box P_m$ jest podgrafem rozpinającym grafu $P_n \Box C_m$ oraz na mocy Własności 2.1.12 oraz Własności 2.1.4. Co więcej, wartości 4 oraz 3 są osiągane.

Rozważymy teraz produkt kartezjański dwóch grafów pełnych dwudzielnych.

Twierdzenie 2.1.14. [24] *Istnieje graf regularny, domatycznie pełny G rzędu n oraz $d(G) = d$ wtedy i tylko wtedy, gdy d dzieli n. Zbiorem wierzchołków $V(G)$ grafu G jest zbiór $V(G) = \bigcup_{i=1}^{d} V_i$, $V_i \cap V_j = \emptyset$, $|V_i| = n/d$ oraz podgraf G_{ij} grafu G indukowany przez zbiór $V_i \cup V_j$ jest regularny stopnia 1 (dla $i = 1, \ldots, d$; $j = 1, \ldots, d$; $i \neq j$).*

Własność 2.1.15. *Niech $n \geq 2$. Wówczas $d(K_{n,n} \Box K_{n,n}) = 2n$.*

Dowód. Ponieważ $\delta(K_{n,n} \Box K_{n,n}) = 2n$, więc $d(K_{n,n} \Box K_{n,n}) \leq 2n + 1$ na mocy Własności 2.1.1a). Z Twierdzenia 2.1.14 otrzymujemy, że $d(K_{n,n} \Box K_{n,n}) \leq 2n$. Aby zakończyć dowód skonstruujemy podział domatyczny grafu $K_{n,n} \Box K_{n,n}$ z $2n$ zbiorami. Załóżmy, że $M_p = \{(x_i, y_j) \in V(K_{n,n} \Box K_{n,n}) : j \equiv (i + p) (\mathrm{mod}\ n)$ oraz

$1 \leq i \leq 2n$ oraz $1 \leq j \leq n\}$ oraz $D_p = \{(x_i, y_j) \in V(K_{n,n} \Box K_{n,n}) : j \equiv (i+p) \pmod n$ oraz $1 \leq i \leq 2n$ oraz $n+1 \leq j \leq 2n\}$, dla $p = 0, 1, \ldots, n-1$. Postać zbiorów $M_0, \ldots, M_{n-1}$, $D_0, \ldots, D_{n-1}$ gwarantuje, że są to parami rozłączne zbiory dominujące grafu $K_{n,n} \Box K_{n,n}$ oraz $\bigcup_{i=0}^{n-1}(M_i \cup D_i) = V(K_{n,n} \Box K_{n,n})$. Ostatecznie, $\{M_0, \ldots, M_{n-1}, D_0, \ldots, D_{n-1}\}$ jest podziałem domatycznym grafu $K_{n,n} \Box K_{n,n}$, co kończy dowód. $\Box$

Wyniki przedstawione w powyższej części tego podrozdziału stanowią część artykułu [16], który został przesłany do recenzji do czasopisma Journal of Mathematics and Applications.

Podamy teraz oszacowania lub dokładne wartości totalnej liczby domatycznej (def. str. 13) produktu kartezjańskiego dwóch grafów. Z definicji totalnej liczby domatycznej grafu wynika, że

Własność 2.1.16. [3] *Jeżeli* $\delta(G) \geq 1$, *to* $d_t(G) \leq \delta(G)$.

Nie jest trudno znaleźć totalny podział domatyczny grafu $G_1 \Box G_2$ o mocy $d_t(G_1)$ lub $d_t(G_2)$. Stąd oraz na mocy Własności 2.1.16 otrzymujemy

Własność 2.1.17. *Niech* $\delta(G_1) \geq 1$ *oraz* $\delta(G_2) \geq 1$. *Wówczas*

$$\max\{d_t(G_1), d_t(G_2)\} \leq d_t(G_1 \Box G_2) \leq \delta(G_1) + \delta(G_2).$$

Ponieważ $\{\{(x_1, y_i), (x_2, y_i)\} : i = 1, \ldots, n\}$ jest totalnym podziałem domatycznym grafu $K_2 \Box K_n$, więc na mocy Własności 2.1.17 otrzymujemy

Wniosek 2.1.18. *Dla* $n \geq 1$, $d_t(K_2 \Box K_n) = n$.

Mówimy, że G jest grafem *totalnie domatycznie pełnym*, jeżeli $d_t(G) = \delta(G)$.

Wniosek 2.1.19. *Niech* $\delta(G) \geq 1$. *Jeżeli* G *jest grafem totalnie domatycznie pełnym, to* $d_t(G) \leq d_t(K_2 \Box G) \leq d_t(G) + 1$.

Wniosek 2.1.20. *Niech* $\delta(G) = 1$. *Wówczas* $d_t(K_2 \Box G) = 2$.

Powyższy wniosek wynika z Wniosku 2.1.19, Własności 2.1.16 oraz z obserwacji, że $\{V(x_1G), V(x_2G)\}$ jest podziałem domatycznym grafu $K_2\Box G$.

Twierdzenie 2.1.21. *Niech G będzie grafem totalnie domatycznie pełnym. Wówczas $d_t(K_2\Box G) = d(G) = d_t(G) + 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy G jest grafem domatycznie pełnym.*

Dowód. Przypuśćmy, że G jest grafem totalnie domatycznie pełnym, czyli $d_t(G) = \delta(G)$ oraz że $d(G) = d_t(G) + 1$. Wówczas $d(G) = \delta(G) + 1$, a zatem G jest grafem domatycznie pełnym.

Jeżeli graf G jest totalnie domatycznie pełny oraz domatycznie pełny ($d_t(G) = \delta(G)$ i $d(G) = \delta(G) + 1$), to $d(G) = d_t(G) + 1$. Skąd $d_t(K_2\Box G) \leq 1 + \delta(G) = d(G)$ na mocy Własności 2.1.17. Zauważmy, że $d_t(K_2\Box G) \geq d(G)$. Przyjmijmy, że $\{D_1, \ldots, D_{d(G)}\}$ jest podziałem domatycznym grafu G. Niech $V(K_2) = \{x_1, x_2\}$ oraz niech $y \in V(G)$. Wówczas definiujemy zbiory $W_1, \ldots, W_{d(G)}$ w następujący sposób: jeżeli $y \in D_j$, to $(x_1, y), (x_2, y) \in W_j$, dla $j = 1, \ldots, d(G)$. Nie jest trudno zauważyć, że zbiory $W_1, \ldots, W_{d(G)}$ tworzą totalny podział domatyczny grafu $K_2\Box G$. Oznacza to, że $d_t(K_2\Box G) \geq d(G)$, a zatem $d_t(K_2\Box G) = d(G) = d_t(G) + 1$, co kończy dowód.

$\Box$

Wniosek 2.1.22. *Niech $n \geq 2$. $d_t(K_2\Box P_n) = 2$.*

Prowadząc rozumowanie tak jak w dowodzie Własności 2.1.12 oraz Własności 2.1.13 otrzymujemy

Własność 2.1.23. *Niech $n \geq 2$. Wtedy*

$$d_t(K_2\Box C_n) = \begin{cases} d_t(C_n) + 1 = 3, & \textit{jeżeli } n \equiv 0 \pmod 3 \textit{ lub} \\ d_t(C_n) = 2, & \textit{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Wykorzystując idee dowodu Twierdzenia 2.1.21 otrzymujemy

Twierdzenie 2.1.24. *Niech G będzie grafem domatycznie pełnym. Wówczas $d_t(K_2\Box G) = d(G)$.*

Oszacujemy teraz uzupełniającą liczbę domatyczną (def. str. 13) $d_{cp}(G_1\Box G_2)$. W tym celu wykorzystamy następujące własności

Własność 2.1.25. [28] *Dla dowolnego grafu G,*
a) $d_{cp}(G) \leq \min\{\delta(G)+1, |V(G)|-\Delta(G)\}$,
b) $d_{cp}(G) \leq |V(G)|/\gamma_{cp}(G)$.

Ponieważ nie jest trudno znaleźć uzupełniający podział domatyczny grafu $G_1\Box G_2$ o mocy $d_{cp}(G_1)$ lub $d_{cp}(G_2)$ i na mocy Własności 2.1.25a) dostajemy, że

Własność 2.1.26. *Dla dowolnych grafów G_1, G_2,*

$$\max\{d_{cp}(G_1), d_{cp}(G_2)\} \leq d_{cp}(G_1\Box G_2) \leq$$

$$\min\{\delta(G_1)+\delta(G_2)+1, |V(G_1)|\cdot|V(G_2)|-\Delta(G_1)-\Delta(G_2)\}.$$

Własność 2.1.27. *Dla dowolnego grafu G,*

$$d_{cp}(G) \leq d_{cp}(K_2\Box G) \leq |V(G)|.$$

Dowód. Dolne oszacowanie wynika bezpośrednio z Własności 2.1.26. Ponieważ z definicji uzupełniającego zbioru dominującego grafu mamy $\gamma_{cp}(G) \geq 2$, więc na mocy Własności 2.1.25b) zachodzi $d_{cp}(K_2\Box G) \leq \frac{2|V(G)|}{\gamma_{cp}(G)} \leq |V(G)|$, co kończy dowód. □

Własność 2.1.28. *Jeżeli w grafie G istnieje wierzchołek nasycony (sąsiedni z wszystkimi pozostałymi wierzchołkami grafu), to $d_{cp}(K_2\Box G) \geq 2$.*

Dowód. Jeżeli y_1 jest wierzchołkiem nasyconym w grafie G, to $W_1 = \{(x_1,y_1),(x_2,y_1)\}$ oraz $W_2 = V(K_2\Box G)\backslash W_1$ tworzą uzupełniający podział domatyczny grafu $K_2\Box G$. Zatem $d_{cp}(K_2\Box G) \geq 2$. □

Własność 2.1.29. *Niech $|V(G)| \geq 3$, $V(K_2) = \{x_1,x_2\}$ oraz niech $\{W_1,\ldots,W_{|V(G)|}\}$ będzie uzupełniającym podziałem domatycznym grafu $K_2\Box G$. Wówczas*
(i) $|W_p \cap V(x_iG)| = 1$ *dla* $p = 1,\ldots,|V(G)|$ *oraz* $i = 1,2$ *oraz*
(ii) jeżeli $(x_1,y_p) \in W_r$ *i* $(x_2,y_p) \in W_s$ *i* $r \neq s$, *to istnieje* $q \neq p$ *takie, że* $(x_1,y_q) \in W_s$ *i* $(x_2,y_q) \in W_r$ $(1 \leq p,r,s \leq |V(G)|)$.

Dowód. Przyjmijmy, że $\{W_1,\ldots,W_{|V(G)|}\}$ jest uzupełniającym podziałem domatycznym grafu $K_2\Box G$, przy czym $|V(G)| \geq 3$.

(i) Z definicji uzupełniającego zbioru dominującego grafu wynika, że $|W_p| \geq 2$ dla $p = 1, \ldots, |V(G)|$. Tak więc, ponieważ zbiory $W_1, \ldots, W_{|V(G)|}$ tworzą podział domatyczny grafu $K_2 \Box G$ oraz $|V(K_2 \Box G)| = 2|V(G)|$, to $|W_p| = 2$ dla $p = 1, \ldots, |V(G)|$. Pokażemy teraz, że $W_p \cap V(x_j G) \neq \emptyset$ dla $p = 1, \ldots, |V(G)|$, $j = 1, 2$. Bez straty ogólności rozważań niech $j = 1$. Załóżmy, że istnieje $d \in \{1, \ldots, |V(G)|\}$ takie, że $W_d \cap V(x_1 G) = \emptyset$, czyli $W_d \subseteq V(x_2 G)$. Niech $W_d = \{(x_2, y_1), (x_2, y_2)\}$. Wówczas wierzchołki $(x_1, y_3), \ldots, (x_1, y_{|V(G)|})$ nie są dominowane przez zbiór W_d. Ponieważ $|V(G)| \geq 3$, więc co najmniej jeden taki wierzchołek istnieje, co jest sprzeczne z założeniem, że W_d jest uzupełniającym zbiorem dominującym grafu $K_2 \Box G$.

(ii) Załóżmy, że $(x_1, y_p) \in W_r$ i $(x_2, y_p) \in W_s$ oraz $r \neq s$, przy czym $1 \leq p, r, s \leq |V(G)|$. Z warunku (i) wynika, że istnieje $q \neq p$ takie, że $(x_1, y_q) \in W_s$. Co więcej, istnieje $l \neq p$ takie, że $(x_2, y_l) \in W_r$. Pokażemy, że $l = q$. Załóżmy, że $l \neq q$. Ponieważ W_r jest uzupełniającym zbiorem dominującym grafu $K_2 \Box G$, to $(x_1, y_p)(x_1, y_q) \in E(K_2 \Box G)$. Zatem $(x_2, y_p)(x_2, y_q) \in E(K_2 \Box G)$ na mocy definicji grafu $K_2 \Box G$. Ponadto, $(x_1, y_q), (x_2, y_q) \in E(K_2 \Box G)$. Zatem wierzchołek $(x_2, y_q) \in V(K_2 \Box G) \backslash W_s$ jest sąsiedni do wierzchołków $(x_1, y_q), (x_2, y_p) \in W_s$ (Rys. 1). Stąd i na mocy warunku (i) dostajemy, że w zbiorze W_s nie ma wierzchołka, który nie byłby sąsiedni do wierzchołka (x_2, y_q), co daje sprzeczność bowiem W_s jest uzupełniającym zbiorem dominującym grafu $K_2 \Box G$. Tym samym dowód został zakończony. $\Box$

Wniosek 2.1.30. *Niech $|V(G)| \geq 3$ oraz niech $\{W_1, \ldots, W_{|V(G)|}\}$ będzie uzupełniającym podziałem domatycznym grafu $K_2 \Box G$. Wówczas $G = K_{|V(G)|}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $W_i = \{(x_1, y_i), (x_2, y_i)\}$, dla $i = 1, \ldots, |V(G)|$.*

Podamy teraz oszacowania dla uzupełniającej liczby domatycznej grafu $P_n \Box G$. Jeśli $G = K_1$, to $d_{cp}(P_n \Box K_1) = d_{cp}(P_n)$. Załóżmy zatem, że $|V(G)| \geq 2$.

Własność 2.1.31. *Niech $n \geq 3$ oraz $|V(G)| \geq 2$. Wówczas $d(G) \leq d_{cp}(P_n \Box G) \leq \delta(G) + 2$.*

Dowód. Niech $\{D_1, \ldots, D_{d(G)}\}$ będzie podziałem domatycznym grafu G. Załóżmy, że $\{D_1^i, \ldots, D_{d(G)}^i\}$ jest podziałem domatycznym grafu x_iG takim, że jeżeli $y \in D_j$, to $(x_i, y) \in D_j^i$, dla $i = 1, \ldots, n$ oraz $j = 1, \ldots, d(G)$. Wówczas zbiory $W_1, \ldots, W_{d(G)}$, gdzie $W_k = \bigcup_{i=1}^n D_k^i$ dla $k = 1, \ldots, d(G)$, tworzą uzupełniający podział domatyczny grafu $P_n \Box G$ i $d_{cp}(P_n \Box G) \geq d(G)$.

Z Własności 2.1.25a) wynika, że $d_{cp}(P_n \Box G) \leq \min\{\delta(G)+2, n|V(G)| - \Delta(G) - 2\}$. Jest oczywiste, że $\delta(G) + 1 \leq |V(G)|$, czyli $\delta(G) + 2 \leq |V(G)| + 1$. Ponadto, $\Delta(G) + 1 \leq |V(G)|$. Stąd i wobec założenia $|V(G)| \geq 2$ otrzymujemy $2|V(G)| - \Delta(G) - 2 \geq 1$. Zatem jeżeli $n \geq 3$, więc $n|V(G)| - \Delta(G) - 2 \geq 3|V(G)| - \Delta(G) - 2 \geq |V(G)| + 1$. Ostatecznie, $d_{cp}(P_n \Box G) \leq \delta(G) + 2$. □

Własność 2.1.32. *Niech $n \geq 3$. Jeżeli istnieją wierzchołki y_1, y_2, y_3 w grafie G takie, że $N_G[y_1] = N_G[y_2] = N_G[y_3]$, to $d_{cp}(P_n \Box G) \leq d_G(y_1) + 1$.*

Dowód. Przyjmijmy, że $d_G(y_1) = r \geq 2$ oraz $N_G(y_1) = \{y_2, y_3, \ldots, y_{r+1}\}$ i załóżmy, że $d_{cp}(P_n \Box G) \geq r+2$. Zatem $d_{cp}(P_n \Box G) = r+2$ na mocy Własności 2.1.31. Oznacza to, że istnieje uzupełniający podział domatyczny, powiedzmy $\{W_1, \ldots, W_{r+2}\}$ grafu $P_n \Box G$. Ponieważ podział ten jest mocy $r+2$ oraz $|N_{P_n \Box G}[(x_1, y_1)]| = r+2$, więc bez straty ogólności rozważań przypuśćmy, że $(x_1, y_j) \in W_j$, dla $j = 1, \ldots, r+1$. Stąd wynika, że $(x_2, y_1), (x_2, y_2), (x_2, y_3) \in W_{r+2}$, bowiem $N_G[y_1] = N_G[y_2] = N_G[y_3]$ oraz W_{r+2} jest zbiorem dominującym grafu $P_n \Box G$. Wobec tego dla $k = 2, \ldots, r+1$ co najmniej jeden z wierzchołków ze zbioru $N_{P_n \Box G}((x_2, y_1)) \setminus \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_2, y_3)\}$ musi należeć do zbioru W_k. Zatem $|N_{P_n \Box G}((x_2, y_1))| \geq r + 3$. Ponieważ $n \geq 3$, to $|N_G(y_1)| \geq r+1$, co przeczy założeniu, że $d_G(y_1) = r$. W konsekwencji, $d_{cp}(P_n \Box G) \leq d_G(y_1) + 1$, co należało wykazać. □

Wniosek 2.1.33. *Niech G będzie grafem $r(r \geq 2)$-regularnym i domatycznie pełnym rzędu co najmniej 3. Jeżeli istnieją wierzchołki y_1, y_2, y_3 w grafie G takie, że $N_G[y_1] = N_G[y_2] = N_G[y_3]$, to $d_{cp}(P_n \Box G) = d(G) = r + 1$.*

Fakt ten wynika bezpośrednio z Własności 2.1.31 i Własności 2.1.32 oraz z definicji grafu domatycznie pełnego.

Ponadto, nie jest trudno wykazać, że

Wniosek 2.1.34. *Niech* $n \geq 3$.
a) $d_{cp}(P_n \Box K_m) = \delta(K_m) + 1 = d(K_m) = m$, *dla* $m \geq 2$.
b) $d_{cp}(P_n \Box K_{1,m}) = \delta(K_{1,m}) + 1 = d(K_{1,m}) = 2$, *dla* $m \geq 1$.
c) $d_{cp}(P_n \Box C_m) = \delta(C_m) + 2 = 4$, *jeżeli* $m \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 4)$.
d) $d_{cp}(P_n \Box P_m) = \delta(P_n) + 2 = 3$, *dla* $n \geq 4$.
e) Jeżeli G *ma wierzchołek izolowany lub wierzchołek nasycony, to* $d_{cp}(G \Box \overline{G}) = 1$.
f) Jeżeli $\overline{G}$ *ma wierzchołek izolowany lub wierzchołek nasycony, to* $d_{cp}(G \Box \overline{G}) = 1$.
g) $d_{cp}(K_n \Box \overline{K_n}) = 1$.
h) $d_{cp}(K_{1,n} \Box \overline{K_{1,n}}) = 1$.

2.2 LICZBY DOMATYCZNE PRODUKTU SILNEGO DWÓCH GRAFÓW

W tej części rozdziału szacujemy najpierw liczbę domatyczną produktu silnego dwóch grafów. Ponadto, podana zostanie dokładna wartość tej liczby dla produktu silnego dwóch wybranych klas grafów. Zauważmy, że

Własność 2.2.1. [1] *Jeżeli* H *jest podgrafem spinającym grafu* G*, to* $d(H) \leq d(G)$.

Powyższą własność wykorzystamy do wykazania następującej własności.

Własność 2.2.2. *Dla dwóch dowolnych grafów* G_1*,* G_2 *mamy*

$$\max\{d(G_1), d(G_2)\} \leq d(G_1 \boxtimes G_2) \leq \delta(G_1) + \delta(G_2) + \delta(G_1)\delta(G_2) + 1.$$

Dowód. Na mocy definicji produktu $G_1 \boxtimes G_2$ wnioskujemy natychmiast, że $\delta(G_1 \boxtimes G_2) = \delta(G_1) + \delta(G_2) + \delta(G_1)\delta(G_2)$. Stąd i wobec Własności 2.1.1a) otrzymujemy, że $d(G_1 \boxtimes G_2) \leq \delta(G_1) + \delta(G_2) + \delta(G_1)\delta(G_2) + 1$.

Ponieważ $G_1 \Box G_2$ jest podgrafem spinającym grafu $G_1 \boxtimes G_2$ oraz na mocy Własności 2.2.1 i Własności 2.1.4 otrzymujemy, że $d(G_1 \boxtimes G_2) \geq \max\{d(G_1), d(G_2)\}$. □

Podamy teraz kilka dokładnych wartości liczby domatycznej produktu silnego dwóch grafów należących do kilku wybranych klas.

Twierdzenie 2.2.3. *Niech G_1 będzie grafem, dla którego $\delta(G_1) = 1$. Niech G_2 będzie grafem domatycznie pełnym. Wówczas $d(G_1 \boxtimes G_2) = 2d(G_2)$.*

Dowód. Na mocy Własności 2.2.2 oraz wobec założenia otrzymujemy, że $d(G_1 \boxtimes G_2) \leq 2d(G_2)$. Skonstruujemy podział domatyczny grafu $G_1 \boxtimes G_2$ z $2d(G_2)$ zbiorami dominującymi. Niech $\{D_1, \ldots, D_{d(G_2)}\}$ będzie podziałem domatycznym grafu G_2. Załóżmy, że T jest drzewem spinającym grafu G_1 i niech r będzie jego liściem. Dla $i = 1, \ldots, d(G_2)$ zdefiniujemy zbiory: $W_i = \{(x, y) \in V(G_1 \boxtimes G_2) : d_{G_1}(r, x) \equiv 0 \pmod 2 \wedge y \in D_i\}$ oraz $W_{i+d(G_2)} = \{(x, y) \in V(G_1 \boxtimes G_2) : d_{G_1}(r, x) \not\equiv 0 \pmod 2 \wedge y \in D_i\}$. Nie jest trudno sprawdzić, że $\{W_1, \ldots, W_{2d(G_2)}\}$ jest podziałem domatycznym grafu $G_1 \boxtimes G_2$. $\square$

Wniosek 2.2.4. *a) Dla $n, m \geq 2$, $d(P_n \boxtimes P_m) = 4$.*
b) Dla $n \geq 2, m \geq 1$, $d(P_n \boxtimes K_{1,m}) = 4$.
c) Dla $n, m \geq 1$, $d(K_{1,n} \boxtimes K_{1,m}) = 4$.

Twierdzenie 2.2.5. *Jeżeli G jest grafem domatycznie pełnym, to $d(G \boxtimes K_m) = m \cdot d(G)$, dla $m \geq 2$.*

Dowód. Wobec Własności 2.2.2 otrzymujemy $d(G \boxtimes K_m) \leq m(\delta(G)+1)$. Ponieważ G jest grafem domatycznie pełnym, czyli $\delta(G) = d(G)-1$, więc $d(G \boxtimes K_m) \leq m \cdot d(G)$. Niech $V(G) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ oraz $V(K_m) = \{y_1, \ldots, y_m\}$. Przypomnijmy, że Gy_i oznacza podgraf grafu $G \boxtimes K_m$ indukowany przez zbiór $V(G) \times \{y_i\}$, dla każdego $1 \leq i \leq m$. Zatem $d(Gy_i) = d(G)$, bowiem $Gy_i \simeq G$. Wobec tego niech $\{V_1^i, V_2^i, \ldots, V_{d(G)}^i\}$ będzie podziałem domatycznym grafu Gy_i. Oznaczmy $\mathcal{P} = \{V_1^1, V_2^1, \ldots, V_{d(G)}^1, V_1^2, V_2^2, \ldots, V_{d(G)}^2, \ldots, V_1^m, V_2^m, \ldots, V_{d(G)}^m\}$. Wykażemy, że $\mathcal{P}$ jest podziałem domatycznym grafu $G \boxtimes K_m$. Ponieważ $\{V_1^i, V_2^i, \ldots, V_{d(G)}^i\}$ jest podziałem domatycznym grafu Gy_i, dla $i = 1, \ldots, m$ oraz $V(Gy_i) \cap V(Gy_j) = \emptyset$, dla każdego $i, j \in \{1, \ldots, m\}$, $i \neq j$, więc $V_k^i \cap V_l^j = \emptyset$, dla $i \neq j$ albo $k \neq l$, gdzie $i, j = 1, \ldots, m$; $k, l = 1, \ldots, d(G)$.

Co więcej, $\bigcup_{i=1}^{m}\bigcup_{k=1}^{d(G)} V_k^i = V(G \boxtimes K_m)$. Stąd wynika, że $\mathcal{P}$ jest podziałem grafu $G \boxtimes K_m$. Pozostaje dowieść, że V_k^i jest zbiorem dominującym grafu $G \boxtimes K_m$. Niech $(x_p, y_q) \in V(G \boxtimes K_m) \backslash V_k^i$, $p \in \{1, \ldots, n\}$, $q \in \{1, \ldots, m\}$ dla ustalonego i, $1 \leq i \leq m$ oraz k, $1 \leq k \leq d(G)$. Rozważmy przypadki.

1. Jeżeli $q = i$ oraz $(x_p, y_i) \in V(Gy_i) \backslash V_k^i$, to wierzchołek (x_p, y_i) jest dominowany przez wierzchołek ze zbioru V_k^i.

2. Jeżeli $q \neq i$ oraz $(x_p, y_q) \in V_k^q$, gdzie $q \in \{1, \ldots, m\}$, wówczas wierzchołek $(x_p, y_i) \in V_k^i$ dominuje wierzchołek (x_p, y_q), ponieważ $y_i y_q \in E(K_m)$ oraz istnieje krawędź $(x_p, y_i)(x_p, y_q)$ w grafie $G \boxtimes K_m$.

3. Niech $(x_p, y_q) \in V_z^q$, $z \neq k$ oraz $q \neq i$. Wtedy wierzchołek $(x_p, y_i) \in V_z^i \subset V(Gy_i) \subset V(G \boxtimes K_m)$ jest dominowany przez wierzchołek, powiedzmy (x_r, y_i) ze zbioru V_k^i, (rys. 2) ponieważ V_k^i jest zbiorem dominującym grafu Gy_i. Ponadto, istnieje wierzchołek, powiedzmy (x_r, y_q) w zbiorze $V(Gy_q)$, który jest sąsiedni do $(x_r, y_i) \in V_k^i$, bowiem $y_q y_i \in E(K_m)$. Ponieważ $x_r x_p \in E(G)$ oraz $y_q y_i \in E(K_m)$, wówczas na mocy definicji produktu silnego dwóch grafów wynika, że wierzchołek (x_p, y_q) jest dominowany przez wierzchołek (x_r, y_i) ze zbioru V_k^i.

Reasumując zbiór V_k^i, dla $i = 1, \ldots, m$ oraz $k = 1, \ldots, d(G)$ jest zbiorem dominującym grafu $G \boxtimes K_m$. W rezultacie, $\mathcal{P}$ jest podziałem domatycznym grafu $G \boxtimes K_m$. Stąd $d(G \boxtimes K_m) \geq m \cdot d(G)$, co kończy dowód. □

Wniosek 2.2.6. *a) Dla $n, m \geq 2$, $d(P_n \boxtimes K_m) = 2m$.*
b) Dla $n \geq 1$, $m \geq 2$, $d(K_{1,n} \boxtimes K_m) = 2m$.
c) Niech $n \geq 3$, $m \geq 2$. Wówczas $d(C_n \boxtimes K_m) = 3m$ wtedy i tylko wtedy, gdy $n \equiv 0 \pmod 3$.
d) Dla $n, m \geq 2$, $d(K_n \boxtimes K_m) = nm$.

Wyniki przedstawione w powyższej części tego podrozdziału stanowią część artykułu [16], który został przesłany do recenzji do czasopisma Journal of Mathematics and Applications.

Podamy teraz oszacowania dla totalnej liczby domatycznej (def. str. 13) produktu silnego grafu K_n oraz dowolnego grafu G.

Własność 2.2.7. *Niech* $\delta(G) \geq 1$ *oraz* $n \geq 3$. *Wtedy*

$$n \cdot d_t(G) \leq d_t(K_n \boxtimes G) \leq n\delta(G) + n - 2,$$

a jeżeli $n = 2$, *to*

$$2d_t(G) \leq d_t(K_2 \boxtimes G) \leq 2\delta(G) + 1.$$

Dowód. Załóżmy, że $\{D_1, \ldots, D_{d(G)}\}$ jest totalnym podziałem domatycznym grafu G. Wówczas zbiory $D_j^i = \{(x_i, y) \in V(K_n \boxtimes G) : y \in D_j\}$ dla $i = 1, \ldots, n$ oraz $j = 1, \ldots, d_t(G)$ tworzą totalny podział domatyczny grafu $K_n \boxtimes G$ i stąd $d_t(K_n \boxtimes G) \geq n \cdot d_t(G)$.

Jeżeli $n = 2$, to nierówność $d_t(K_2 \boxtimes G) \leq 2\delta(G) + 1$ wynika bezpośrednio z Własności 2.1.16 oraz z definicji grafu $K_2 \boxtimes G$. Niech $n \geq 3$. Załóżmy, że $d_t(K_n \boxtimes G) \geq n\delta(G) + n - 1$. Wobec tego istnieje totalny podział domatyczny $\{W_1, \ldots, W_{n\delta(G)+n-1}\}$ grafu $K_n \boxtimes G$. Przypuśćmy, że $d_G(y_1) = \delta(G)$ oraz $N_G(y_1) = \{y_2, \ldots, y_{\delta(G)+1}\}$. Bez straty ogólności rozważań niech $(x_1, y_1) \in W_1$. Ponieważ W_1 jest totalnym zbiorem dominującym grafu $K_n \boxtimes G$, więc wierzchołek (x_1, y_1) jest sąsiedni do pewnego wierzchołka ze zbioru W_1. Rozważmy przypadki.

1. Załóżmy, że $(x_j, y_1) \in W_1$ dla pewnego j, $2 \leq j \leq n$. Bez straty ogólności rozważań niech $j = 2$. Zatem możemy przyjąć, że $(x_p, y_q) \in W_{(p-1)\delta(G)+q}$ dla $p = 1, \ldots, n$ oraz $q = 2, \ldots, \delta(G) + 1$ i że $(x_r, y_1) \in W_{n\delta(G)+r-1}$ dla $r = 3, \ldots, n$. Wówczas $N_{K_n \boxtimes G}[(x_3, y_1)] = N_{K_n \boxtimes G}[(x_1, y_1)]$. Oznacza to, że wierzchołek (x_3, y_1) nie jest sąsiedni do żadnego wierzchołka ze zbioru $W_{n\delta(G)+2}$. Zatem zbiór $W_{n\delta(G)+2}$ nie jest totalnym zbiorem dominującym grafu $K_n \boxtimes G$, co jest sprzeczne z założeniem.

2. Załóżmy, że $(x_k, y_l) \in W_1$ dla pewnych k, l, $1 \leq k \leq n$, $2 \leq l \leq \delta(G) + 1$. Bez straty ogólności rozważań niech $k = 1$, $l = 2$. Wówczas możemy przyjąć, że

$(x_1, y_s) \in W_{s-1}$ dla $s = 3, \ldots, \delta(G)+1$ oraz że $(x_t, y_u) \in W_{(t-1)(\delta(G)+1)+u-1}$ dla $t = 2, \ldots, n$ i $u = 1, \ldots, \delta(G)+1$. Wówczas jednak zbiór $W_{\delta(G)+1}$ nie dominuje wierzchołka (x_2, y_1), sprzeczność.

Reasumując, $d_t(K_n \boxtimes G) \leq n\delta(G) + n - 2$. □

Twierdzenie 2.2.8. *Niech G będzie grafem $r(r \geq 1)$-regularnym i totalnie domatycznie pełnym. Wówczas $d_t(K_2 \boxtimes G) = 2d_t(G)$.*

Dowód. Wobec Własności 2.2.7, $d_t(K_2 \boxtimes G) \geq 2d_t(G)$. Zatem wystarczy dowieść, że $d_t(K_2 \boxtimes G) \leq 2d_t(G)$. Przypuśćmy, że $d_t(K_2 \boxtimes G) \geq 2d_t(G) + 1$. Ponieważ G jest grafem r-regularnym i totalnie domatycznie pełnym, czyli $d_t(G) = r$, więc $d_t(K_2 \boxtimes G) \geq 2r+1$. Stąd wynika, że istnieje totalny podział domatyczny, powiedzmy $\{W_1, \ldots, W_{2r+1}\}$ grafu $K_2 \boxtimes G$. Załóżmy, że $V(K_2) = \{x_1, x_2\}$ i $V(G) = \{y_1, \ldots, y_{|V(G)|}\}$ oraz $N_G(y_i) = \{y_{i1}, \ldots, y_{ir}\}$ dla $i = 1, \ldots, |V(G)|$. Niech i będzie dowolną, ustaloną liczbą ze zbioru $\{1, \ldots, |V(G)|\}$. Bez straty ogólności rozważań przyjmijmy, że $(x_1, y_i) \in W_1$. Ponieważ W_1 jest totalnym zbiorem dominującym grafu $K_2 \boxtimes G$, więc wierzchołek (x_1, y_i) musi być sąsiedni do pewnego wierzchołka należącego do zbioru W_1.

Jeżeli $(x_2, y_i) \notin W_1$, to bez straty ogólności rozważań załóżmy, że $(x_1, y_{i1}) \in W_1$ oraz $(x_1, y_{is}) \in W_s$ dla $s = 2, \ldots, r$ i $(x_2, y_i) \in W_{r+1}$ oraz $(x_2, y_{ip}) \in W_{r+p+1}$ dla $p = 1, \ldots, r$. To jednak oznacza, że wierzchołek $(x_2, y_i) \in W_{r+1}$ nie jest sąsiedni do żadnego wierzchołka należącego do zbioru W_{r+1}, sprzeczność bowiem W_{r+1} jest totalnym zbiorem dominującym grafu $K_2 \boxtimes G$. Zatem $(x_2, y_i) \in W_1$. Reasumując, dla każdego $i \in \{1, \ldots, |V(G)|\}$ wierzchołki $(x_1, y_i), (x_2, y_i)$ należą do tego samego zbioru z podziału $\{W_1, \ldots, W_{2r+1}\}$. Wobec tego $d_{K_2 \boxtimes G}((x_1, y_i)) \geq 4r + 1$. Skąd $d_G(y_i) \geq 2r$, co jest sprzeczne z założeniem. W konsekwencji, $d_t(K_2 \boxtimes G) \leq 2d_t(G)$, co kończy dowód.

Wniosek 2.2.9. *a) Niech n będzie liczbą parzystą. Wówczas $d_t(K_2 \boxtimes \frac{n}{2}K_2) =$*

$2d_t(\frac{n}{2}K_2) = 2$.
b) $d_t(K_2 \boxtimes C_{2n}) = 2d_t(C_{4n}) = 4$, *dla* $n \geq 1$.

Na mocy Własności 2.2.7 oraz przez skonstruowanie odpowiednich podziałów domatycznych grafów $P_n \boxtimes K_3$, $C_{4n} \boxtimes K_3$, $K_n \boxtimes K_m$ nie jest trudno sprawdzić, że zachodzą następujące rezultaty.

Wniosek 2.2.10. *a)* $d_t(P_n \boxtimes K_3) = 3\delta(P_n) + 1 = 4$, *dla* $n \geq 4$.
b) $d_t(C_{4n} \boxtimes K_3) = 3d_t(C_{4n}) = 6$, *dla* $n \geq 1$.
c) $d_t(K_n \boxtimes K_m) = d_t(K_{nm}) = \lfloor \frac{nm}{2} \rfloor$, *dla* $n \geq 2$ *lub* $m \geq 2$.

Prowadząc dowód w sposób analogiczny do dowodu Własności 2.2.7 otrzymujemy

Własność 2.2.11. *Niech* $\delta(G) \geq 1$ *oraz* $n \geq 2$. *Wówczas* $2d_t(G) \leq d_t(P_n \boxtimes G) \leq 2\delta(G) + 1$.

Wniosek 2.2.12. *a)* $d_t(P_n \boxtimes P_m) = 2\delta(P_m) + 1 = 3$, *jeżeli* $m \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3)$ *i* $n \not\equiv 0$ $(\mathrm{mod}\ 3)$, $n, m \geq 4$.
b) $d_t(P_n \boxtimes K_{1,m}) = 2\delta(K_{1,m}) + 1 = 3$.

Wykorzystując Własność 2.2.11 i prowadząc dowód niewprost otrzymujemy

Własność 2.2.13. *Niech* G *będzie grafem totalnie domatycznie pełnym. Jeżeli istnieją wierzchołki* y_1, y_2, y_3 *w grafie* G *takie, że* $d_G(y_i) = \delta(G)$ *dla* $i = 1, 2, 3$ *oraz* $N_G[y_1] = N_G[y_2] = N_G[y_3]$, *to* $d_t(P_n \boxtimes G) = 2d_t(G)$.

Własność 2.2.14. *Niech* G *będzie grafem* $r(r \geq 3)$*-regularnym i totalnie domatycznie pełnym. Jeżeli istnieją wierzchołki* y_1, y_2 *w grafie* G *takie, że* $N_G[y_1] = N_G[y_2]$, *to* $d_t(P_n \boxtimes G) = 2d_t(G) = 2r$.

Na koniec tej części rozdziału podane zostaną warunki wystarczające na to, aby uzupełniające liczby domatyczne (def. str. 13) grafów $P_n \boxtimes G$ i $K_n \boxtimes G$ były równe $n \cdot d(G)$, dla ustalonych n. Graf G, dla którego zachodzi równość $d_{cp}(G) = \delta(G) + 1$ będziemy nazywali grafem *uzupełniająco domatycznie pełnym.*

Twierdzenie 2.2.15. *Niech* $n \geq 5$. *Jeżeli* G *jest grafem uzupełniająco domatycznie pełnym, to* $d_{cp}(P_n \boxtimes G) = 2d(G)$.

Dowód. Załóżmy, że $\{D_1, \ldots, D_{d_{cp}(G)}\}$ jest uzupełniającym podziałem domatycznym grafu G. Wówczas $\{D_1^i, \ldots, D_{d_{cp}(G)}^i\}$ jest uzupełniającym podziałem domatycznym grafu x_iG, gdzie $D_j^i = \{(x_i, y) \in V(x_iG) : y \in D_j\}$ dla $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, d_{cp}(G)$. Oznaczmy $W_j = \bigcup_{1 \le i \le n, i-\text{nieparz.}} D_j^i$ oraz $W_{d_{cp}(G)+j} = \bigcup_{1 \le i \le n, i-\text{parz.}} D_j^i$ dla każdego j. Zatem

$$d_{cp}(P_n \boxtimes G) \ge 2d_{cp}(G), \tag{2.2.1}$$

bowiem zbiory $W_1, \ldots, W_{2d_{cp}(G)}$ tworzą uzupełniający podział domatyczny grafu $P_n \boxtimes G$, $n \ge 5$.

Na mocy Własności 2.1.25a) mamy $d_{cp}(P_n \boxtimes G) \le \min\{2(\delta(G) + 1), n|V(G)| - 3\Delta(G) - 2\} = 2(\delta(G) + 1)$, dla $n \ge 5$. Stąd i wobec założenia, że G jest grafem uzupełniająco domatycznie pełnym, czyli $d_{cp}(G) = \delta(G) + 1$, otrzymujemy, że

$$d_{cp}(P_n \boxtimes G) \le 2d_{cp}(G). \tag{2.2.2}$$

Wobec nierówności w (2.2.1) i w (2.2.2) otrzymujemy $d_{cp}(P_n \boxtimes G) = 2d_{cp}(G)$.

Ponieważ $d_{cp}(G) \le d(G)$ dla dowolnego grafu G i na mocy założenia, że G jest grafem uzupełniająco domatycznie pełnym wnioskujemy, że $d(G) \ge \delta(G) + 1$. Stąd na mocy Własności 2.1.1a) mamy $d(G) = \delta(G) + 1$. Zatem $d(G) = d_{cp}(G)$ wobec założenia i ostatecznie $d_{cp}(P_n \boxtimes G) = 2d(G)$. □

Z nierówności z (2.2.1) oraz na mocy Twierdzenia 2.1.25a) otrzymujemy następującą własność.

Własność 2.2.16. *Niech G będzie grafem uzupełniająco domatycznie pełnym. Jeżeli $\delta(G) + \Delta(G) + k = |V(G)|$, gdzie $k \ge 1$, to $d_{cp}(P_4 \boxtimes G) = 2d(G)$.*

Prowadząc dowód analogicznie jak dowód Twierdzenia 2.2.15 otrzymujemy

Własność 2.2.17. *Niech $n \ge 3$ oraz niech G będzie grafem uzupełniająco domatycznie pełnym. Jeżeli istnieje uzupełniający podział domatyczny o mocy $d_{cp}(G)$ grafu G, dla którego każdy jego zbiór w grafie G indukuje podgraf bez wierzchołków nasyconych oraz jeżeli $\delta(G) + \Delta(G) + k = |V(G)|$, gdzie $k \ge 1$, to $d_{cp}(K_n \boxtimes G) = n \cdot d(G)$.*

2.3 LICZBY DOMATYCZNE ZŁĄCZENIA GRAFÓW

W tym podrozdziale szacujemy liczbę domatyczną złączenia grafu G i ciągu grafów $H_1, \ldots, H_n$, $n \geq 2$. Z uzyskanych oszacowań wynikają oszacowania liczb domatycznych $d(G+H)$ oraz $d(G[H])$. Ponadto, zostaną podane warunki wystarczające na to, aby graf $K_n + (H_1, \ldots, H_n)$ był grafem domatycznie pełnym. Zostanie również podana pełna charakteryzacja grafów H, dla których graf $K_n[H]$ jest grafem domatycznie pełnym, dla $n \geq 2$. Dodatkowo, wyznaczone zostaną liczby domatyczne produktu leksykograficznego oraz złączenia dwóch grafów.

Załóżmy, że $V(G) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $n \geq 1$, $V(H) = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$, $m = |V(H)| \geq 1$ oraz $V(H_i) = \{y_1^i, y_2^i, \ldots, y_{m_i}^i\}$, $m_i \geq 1$ dla $i = 1, \ldots, n$. Czasami dla uproszczenia zapisu zamiast (x_i, y_j^i) będziemy pisać z_j^i. Niech $\{V_1, \ldots, V_{d(G)}\}$ będzie podziałem domatycznym grafu G i niech $\{U_1^i, \ldots, U_{d(H_i)}^i\}$ będzie podziałem domatycznym grafu H_i, dla $i = 1, \ldots, n$.

Własność 2.3.1. *Dla dowolnego grafu G rzędu $n \geq 2$ oraz dowolnego ciągu $(H_1, \ldots, H_n)$,*

$$\sum_{1 \leq j \leq d(G)} \min_{k \in B_j} d(H_k) \leq d(G + (H_1, \ldots, H_n)) \leq \min_{1 \leq i \leq n} \{\delta(H_i) + \sum_{k \in A_i} |V(H_k)|\} + 1,$$

gdzie $A_i = \{j : x_i x_j \in E(G), j \neq i, 1 \leq j \leq n\}$ oraz $B_j = \{i : x_i \in V_j\}$.

Dowód. Bez straty ogólności rozważań niech $d_{H_i}(y_1^i) = \delta(H_i)$, dla $i = 1, \ldots, n$. Na mocy definicji grafu $G+(H_1, \ldots, H_n)$, $d_{G+(H_1,\ldots,H_n)}((x_i, y_1^i)) = \delta(H_i) + \sum_{k \in A_i} |V(H_k)|$, gdzie $A_i = \{j : x_i x_j \in E(G), j \neq i, 1 \leq j \leq n\}$. Wówczas, $\delta(G + (H_1, \ldots, H_n)) = \min_{1 \leq i \leq n} d_{G+(H_1,\ldots,H_n)}((x_i, y_1^i)) = \min_{1 \leq i \leq n}\{\delta(H_i) + \sum_{k \in A_i} |V(H_k)|\}$. Zatem na mocy Własności 2.1.1a) dostajemy, że $d(G + (H_1, \ldots, H_n)) \leq \min_{1 \leq i \leq n}\{\delta(H_i) + \sum_{k \in A_i} |V(H_k)|\} + 1$.

Niech j będzie liczbą całkowitą taką, że $1 \leq j \leq d(G)$. Przyjmijmy, że $B_j = \{i : x_i \in V_j\}$ oraz $a_j = \min_{k \in B_j} d(H_k)$ i $a_0 = 0$. Załóżmy, że $z_j = \sum_{i=0}^{j-1} a_i$ dla

$j = 1, \ldots, d(G)$. Wówczas dla $j = 1, \ldots, d(G)$ oznaczmy $W_{z_j+l_j} = \bigcup_{k \in B_j} U^k_{l_j}$, $l_j = 1, \ldots, a_j - 1$ oraz $W_{z_j+a_j} = \bigcup_{k \in B_j} \bigcup_{p=a_j}^{d(H_k)} U^k_p$. Zbiory $W_1, \ldots, W_{a_1}, W_{a_1+1}, \ldots, W_{a_1+a_2}, \ldots, W_{a_1+\ldots+a_{d(G)-1}+1}, \ldots, W_{a_1+\ldots+a_{d(G)}}$ tworzą podział domatyczny grafu $G + (H_1, \ldots, H_n)$. Oznacza to, że $d(G + (H_1, \ldots, H_n)) \geq \sum_{1 \leq j \leq d(G)} a_j =$ $\sum_{1 \leq j \leq d(G)} \min_{k \in B_j} d(H_k)$, co kończy dowód. □

Wniosek 2.3.2. *Dla dowolnych grafów H_1 oraz H_2,*

$$d(H_1) + d(H_2) \leq d(H_1 + H_2) \leq \min\{\delta(H_1) + |V(H_2)|, \delta(H_2) + |V(H_1)|\} + 1.$$

Wniosek 2.3.3. *Niech $n \geq 1$ oraz niech H będzie grafem domatycznie pełnym. Wówczas $d(K_n + H) = d(H) + n$.*

Powyższy wniosek jest szczególnym przypadkiem znanego twierdzenia.

Twierdzenie 2.3.4. [4] *Dla dowolnego grafu G, $d(G + K_n) = d(G) + n$.*

Wniosek 2.3.5. *Dla dowolnych grafów G oraz H,*

$$d(G)d(H) \leq d(G[H]) \leq \delta(G)|V(H)| + \delta(H) + 1.$$

Z Wniosku 2.3.5 otrzymujemy

Wniosek 2.3.6. *Niech G będzie grafem domatycznie pełnym oraz $m \geq 1$. Wtedy $d(G[K_m]) = m \cdot d(G)$.*

Własność 2.3.7. *Jeżeli G jest grafem spójnym, to $d(G + (H_1, \ldots, H_n)) \geq \min_{1 \leq i \leq n} \{|V(H_i)|\}$, dla $n \geq 2$.*

Dowód. Z założenia, że G jest grafem spójnym rzędu co najmniej 2 i na mocy definicji grafu $G + (H_1, \ldots, H_n)$ otrzymujemy, że $V(G) \times \{y^i_j\}$ jest zbiorem dominującym grafu $G + (H_1, \ldots, H_n)$, dla $i = 1, \ldots, n$ oraz $j = 1, \ldots, min_{1 \leq i \leq n} m_i$. Czyli $d(G + (H_1, \ldots, H_n)) \geq \min_{1 \leq i \leq n} m_i$, gdzie $m_i = |V(H_i)|$. □

Z Własności 2.3.1 oraz Własności 2.3.7 wynikają następujące wnioski.

Wniosek 2.3.8. *Dla dowolnych grafów H_1 oraz H_2,*

$$d(H_1 + H_2) \geq \max\{d(H_1) + d(H_2), \min\{|V(H_1)|, |V(H_2)|\}\}.$$

Wniosek 2.3.9. *Dla dowolnego grafu spójnego G rzędu co najmniej 2 oraz dla dowolnego grafu H, $d(G[H]) \geq \max\{2d(H), |V(H)|\}$.*

Z Wniosku 2.3.8 oraz z Własności 2.1.1b) otrzymujemy

Wniosek 2.3.10. *Niech H_1, H_2 będą grafami tego samego rzędu bez wierzchołków nasyconych. Wówczas $d(H_1 + H_2) = |V(H_1)|$.*

Własność 2.3.11. *Jeżeli H_1 jest grafem domatycznie pełnym rzędu $m \geq 1$ (niekoniecznie $H_1 \neq K_m$), to $d(K_n + (H_1, K_m^i \ldots, K_m^i)) = d(H_1) + (n-1)m$, dla $n \geq 2$, gdzie K_m^i jest i-tą kopią grafu K_m.*

Dowód. Przypomnijmy, że $\{U_1^1, \ldots, U_{d(H_1)}^1\}$ jest podziałem domatycznym grafu H_1. Wówczas $\{U_1^1, \ldots, U_{d(H_1)}^1\} \cup \{\{(x_i, y_j^i)\} : j = 1, \ldots, m; i = 2, \ldots, n\}$ jest podziałem domatycznym grafu $K_n + (H_1, K_m^i \ldots, K_m^i)$ i

$$d(K_n + (H_1, K_m^i \ldots, K_m^i)) \geq d(H_1) + (n-1)m. \tag{2.3.1}$$

Z definicji grafu $K_n + (H_1, K_m^i \ldots, K_m^i)$ mamy, że $\delta(K_n + (H_1, K_m^i \ldots, K_m^i)) = \delta(H_1) + (n-1)m$. Ponieważ H_1 jest grafem domatycznie pełnym, czyli $\delta(H_1) + 1 = d(H_1)$, więc $\delta(K_n + (H_1, K_m^i \ldots, K_m^i)) = d(H_1) + (n-1)m - 1$. Stąd i na mocy Własności 2.1.1a) otrzymujemy, że

$$d(K_n + (H_1, K_m^i \ldots, K_m^i)) \leq d(H_1) + (n-1)m, \text{ a} \tag{2.3.2}$$

równość wynika z nierówności w (2.3.1). □

Wniosek 2.3.12. *Niech $n \geq 2$. $d(K_n[H]) = \delta(H) + (n-1)|V(H)| + 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy H jest izomorficzny z grafem K_m.*

Dowód. Na mocy Własności 2.3.11 warunek wystarczający zachodzi.

Nie jest trudno zauważyć, że jeżeli F jest grafem domatycznie pełnym, to dla każdego $w \in V(F)$ takiego, że $d_F(w) = \delta(F)$ wierzchołek w i wierzchołki sąsiednie do niego należą do różnych zbiorów dowolnego podziału domatycznego o mocy $\delta(F) + 1$ grafu F.

Załóżmy, że $d(K_n[H]) = \delta(H) + (n-1)|V(H)| + 1$. Ponieważ $\delta(K_n[H]) = \delta(H) + (n-1)|V(H)|$ na mocy definicji grafu $K_n[H]$, więc $d(K_n[H]) = \delta(K_n[H]) + 1$. Zatem $K_n[H]$ jest grafem domatycznie pełnym. Bez straty ogólności rozważań niech $d_H(y_1) = \delta(H)$. Zatem jeżeli $n \geq 2$, to wierzchołki (x_1, y_1), (x_2, y_1) mają stopień $\delta(K_n[H])$ w grafie $K_n[H]$. Wobec powyższego każdy wierzchołek grafu $K_n[H]$ tworzy zbiór dominujący tego grafu. Oznacza to, że $H \simeq K_m$. Tym samym dowód został zakończony. □

Wyznaczymy teraz liczbę $d(K_n + (H_1, \ldots, H_n))$, przy czym $(H_1, \ldots, H_n)$ jest ciągiem grafów tego samego rzędu. Symbol $\lfloor x \rfloor$ oznacza największą liczbę całkowitą mniejszą lub równą x.

Własność 2.3.13. *Niech $n \geq 2$ oraz niech $(H_1, \ldots, H_n)$ będzie ciągiem grafów tego samego rzędu $m \geq 2$ bez wierzchołków nasyconych. Wówczas $d(K_n + (H_1, \ldots, H_n)) = \left\lfloor \frac{nm}{2} \right\rfloor$.*

Dowód. Załóżmy, że $|V(H_i)| = m \geq 2$ dla $i = 1, \ldots, n$. Rozważmy przypadki.

1. Niech n będzie liczbą parzystą. Wówczas zbiory $\{z_i^j, z_i^{j+1}\}$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$ oraz $j = 1, 3, \ldots, n-1$ tworzą podział domatyczny grafu $K_n + (H_1, \ldots, H_n)$. Zatem $d(K_n + (H_1, \ldots, H_n)) \geq \frac{nm}{2} = \left\lfloor \frac{nm}{2} \right\rfloor$.

2. Niech n będzie liczbą nieparzystą oraz niech m będzie liczbą parzystą. Wówczas podział domatyczny grafu $K_n + (H_1, \ldots, H_n)$ tworzymy ze zbiorów postaci: $\{z_i^j, z_i^{j+1}\}$ dla $i = 1, 3, \ldots, m-1$ oraz $j = 1, 3, \ldots, n-2$ lub $i = 2, 4, \ldots, m$ oraz $j = 2, 4, \ldots, n-1$ oraz $\{z_i^n, z_{i+1}^1\}$ dla $i = 1, 3, \ldots, m-1$. Wtedy $d(K_n + (H_1, \ldots, H_n)) \geq \frac{m}{2} \cdot \frac{n-1}{2} + \frac{m}{2} \cdot \frac{n-1}{2} + \frac{m}{2} = \frac{mn}{2} = \left\lfloor \frac{mn}{2} \right\rfloor$.

3. Niech n oraz m będą liczbami nieparzystymi. Podział domatyczny grafu $K_n + (H_1, \ldots, H_n)$ tworzymy z następujących zbiorów: $\{z_i^j, z_i^{j+1}\}$ dla $i = 1, 3, \ldots, m-2$ oraz $j = 1, 3, \ldots, n-2$ lub $i = 2, 4, \ldots, m-1$ oraz $j = 2, 4, \ldots, n-1$ lub $i = m$ oraz $j = 1, 3, \ldots, n-4$ oraz $\{z_i^n, z_{i+1}^1\}$ dla $i = 1, 3, \ldots, m-2$ oraz $\{z_m^{n-2}, z_m^{n-1}, z_m^n\}$.

Zatem $d(K_n+(H_1,\ldots,H_n)) \geq \frac{m-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}+\frac{m-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}+\frac{n-3}{2}+\frac{m-1}{2}+1 = \frac{mn-1}{2} = \left\lfloor\frac{mn}{2}\right\rfloor$. Reasumując,

$$d(K_n+(H_1,\ldots,H_n)) \geq \left\lfloor\frac{mn}{2}\right\rfloor. \tag{2.3.3}$$

Ponieważ H_i dla każdego i jest grafem bez wierzchołków nasyconych, więc $\gamma(H_i) \geq 2$. Stąd i z definicji grafu $K_n+(H_1,\ldots,H_n)$ mamy $\gamma(K_n+(H_1,\ldots,H_n)) \geq 2$. Zatem wobec założenia, że $|V(H_i)| = m$ dla każdego i oraz na mocy Własności 2.1.1b) otrzymujemy $d(K_n+(H_1\ldots,H_n)) \leq \frac{nm}{2}$. Natomiast z definicji liczby domatycznej grafu wynika, że jeżeli $d(K_n+(H_1,\ldots,H_n)) \leq \frac{nm}{2}$, to

$$d(K_n+(H_1,\ldots,H_n)) \leq \left\lfloor\frac{nm}{2}\right\rfloor, \text{ a równość} \tag{2.3.4}$$

wynika z nierówności w (2.3.3). □

Wniosek 2.3.14. *Niech H_1 oraz H_2 będą grafami tego samego rzędu $m \geq 2$ bez wierzchołków nasyconych. Wówczas $d(H_1+H_2) = m$.*

Wniosek 2.3.15. *Niech $n \geq 2$ oraz niech H będzie grafem rzędu co najmniej 2 nie zawierającym wierzchołków nasyconych. Wówczas $d(K_n[H]) = \left\lfloor\frac{n}{2}\cdot|V(H)|\right\rfloor$.*

Wykorzystując Własność 2.3.13 oraz Twierdzenie 2.3.4 otrzymujemy

Wniosek 2.3.16. *Niech $n \geq 2$. Niech H będzie grafem rzędu co najmniej $k+2 \geq 3$ zawierającym k wierzchołków nasyconych. Wówczas $d(K_n[H]) = nk + \left\lfloor\frac{n}{2}|A|\right\rfloor$, gdzie A jest zbiorem wierzchołków nienasyconych grafu H.*

Przykład 2.3.17. *Niech $n \geq 2$. Jeżeli $m \geq 2$ i $H = K_{1,m}$, to $|A| = m$ oraz $d(K_n[K_{1,m}]) = \left\lfloor\frac{n(m+2)}{2}\right\rfloor$.*

Wyniki przedstawione w tym podrozdziale stanowią część artykułu [17], który został przesłany do recenzji do czasopisma Graph Theory Notes of New York.

2.4 LICZBY DOMATYCZNE k-KORONY GRAFÓW

W tej części rozdziału szacowane są liczby domatyczne grafu $kG\circ H$, dla $k \geq 1$. W szczególności, zostaną wyznaczone dokładne wartości liczb domatycznych grafu

$G \circ H$ oraz podane zostaną pełne lub częściowe charakteryzacje grafów $2G \circ H$, dla których uzyskane oszacowania są osiągane.

Twierdzenie 2.4.1. *Niech $k \geq 1$. Dla dwóch dowolnych grafów G i H,*

$$d(H) + 1 \leq d(kG \circ H) \leq d(H) + k.$$

Dowód. Załóżmy, że $\{U_1, \ldots, U_{d(H)}\}$ jest podziałem domatycznym grafu H. Rozważmy podział domatyczny $\{U_1^i, \ldots, U_{d(H)}^i\}$ i-tej kopii H^i grafu H taki, że $U_l^i = \{y^i \in V(H^i) : y \in U_l\}$, dla $i = 1, \ldots, |V(G)|$, $l = 1, \ldots, d(H)$. Ponieważ $\{W_1, \ldots, W_{d(H)}, \bigcup_{j=1}^{k} V(G^j)\}$ jest podziałem domatycznym grafu $kG \circ H$, gdzie $W_l = \bigcup_{i=1}^{|V(G)|} U_l^i$ dla $l = 1, \ldots, d(H)$, więc $d(kG \circ H) \geq d(H) + 1$.

Niech $r = d(kG \circ H)$ oraz niech $\{W_1, W_2, \ldots, W_r\}$ będzie podziałem domatycznym grafu $kG \circ H$. Jeżeli dla $i = 1, \ldots, k$ $V(G^i) = \{x_1^i, \ldots, x_n^i\}$, to z własności podziału $\{W_1, \ldots, W_r\}$ grafu $kG \circ H$ i bez straty ogólności rozważań wynika, że $\{x_1^1, \ldots, x_1^k\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{p} W_j$ dla pewnego p, $1 \leq p \leq k$. Wówczas każdy ze zbiorów $W_{p+1} \cap V(H^1), \ldots, W_r \cap V(H^1)$ jest zbiorem dominującym grafu H^1 i zbiory te są parami rozłączne. Stąd $r - p \leq d(H)$, co kończy dowód wobec $p \leq k$. $\square$

Wniosek 2.4.2. *Jeżeli $k = 1$, to $d(G \circ H) = d(H) + 1$.*

Ponieważ $\{D_1^j, \ldots, D_{d(G)}^j\}$ oraz $\{U_1^i, \ldots, U_{d(H)}^i\}$ jest odpowiednio podziałem domatycznym grafu G^j oraz H^i, więc $\{W_1, \ldots, W_{d(H)+k}\}$ jest podziałem domatycznym grafu $kG \circ H$, gdzie $W_j = \bigcup_{i=0}^{j-1} D_i^{i+k-j+1} \cup \bigcup_{i=j}^{k-1} D_i^{i-j+1}$, przy czym $D_0^a = \bigcup_{i=k}^{d(G)} D_i^a$ oraz $W_l = \bigcup_{i=1}^{|V(G)|} U_{l-k}^i$ ($j = 1, \ldots, k$; $l = k+1, \ldots, d(H)+k$; $a = 1, \ldots, k$). Wobec tego faktu oraz na mocy Twierdzenia 2.4.1 otrzymujemy następujący wniosek.

Wniosek 2.4.3. *Niech $d(G) \geq k \geq 2$. Wówczas $d(kG \circ H) = d(H) + k$.*

Wyniki przedstawione w powyższej części podrozdziału stanowią część artykułu [17], który został przesłany do recenzji do czasopisma Graph Theory Notes of New York.

Twierdzenie 2.4.4. *Niech G będzie grafem z co najmniej jednym wierzchołkiem izolowanym. Jeżeli istnieją wierzchołki u, v w grafie H takie, że $d(H - \{u, v\}) \geq d(H)$, to $d(2G \circ H) = d(H) + 2$, w przeciwnym przypadku $d(2G \circ H) = d(H) + 1$.*

Dowód. Załóżmy, że istnieją dwa wierzchołki u, v w grafie H takie, że $d(H - \{u, v\}) \geq d(H)$. Oznacza to, że istnieje podział domatyczny $\{U_1, \ldots, U_{d(H)}\}$ grafu $H - \{u, v\}$. Oznaczmy $\{U_1^i, \ldots, U_{d(H)}^i\}$ jako podział domatyczny i-tej kopii $H^i - \{u^i, v^i\}$ grafu $H - \{u, v\}$. Wówczas zbiory $W_1 = V(G^1) \cup \bigcup_{i=1}^{|V(G)|} \{u^i\}$, $W_2 = V(G^2) \cup \bigcup_{i=1}^{|V(G)|} \{v^i\}$ oraz $W_{i+2} = \bigcup_{j=1}^{|V(G)|} U_j^i$, $i = 1, \ldots, d(H)$, tworzą podział domatyczny grafu $2G \circ H$. Zatem $d(2G \circ H) \geq d(H) + 2$. Stąd i na mocy Twierdzenia 2.4.1 otrzymujemy, że $d(2G \circ H) = d(H) + 2$.

Załóżmy, że $d(2G \circ H) = d(H) + 2$. Zatem niech $\{W_1, \ldots, W_{d(H)+2}\}$ będzie podziałem domatycznym grafu $2G \circ H$. Oznaczmy $V(G^i) = \{x_1^i, \ldots, x_{|V(G)|}^i\}$, $i = 1, 2$. Wykażemy, że wierzchołki x_j^1, x_j^2 należą do różnych zbiorów wspomnianego podziału, dla $j = 1, \ldots, |V(G)|$. Przyjmijmy, że istnieje $p \in \{1, \ldots, d(H) + 2\}$ takie, że $x_j^1, x_j^2 \in W_p$. Bez straty ogólności rozważań niech $x_j^1, x_j^2 \in W_1$. Wtedy zbiory $W_2 \cap V(H^j), \ldots, W_{d(H)+2} \cap V(H^j)$ są parami rozłącznymi zbiorami dominującymi grafu H^j. Oznacza to, że $d(H^j) \geq d(H) + 1$, co jest sprzeczne z faktem, że $H^j \simeq H$. Dowiedliśmy zatem, że wierzchołki x_j^1, x_j^2 należą do różnych zbiorów podziału $\{W_1, \ldots, W_{d(H)+2}\}$.

Na mocy założenia przypuśćmy, że x_1^1, x_1^2 są odpowiednio wierzchołkami izolowanymi grafów G^1, G^2. Ponadto, wobec powyższej części dowodu załóżmy bez straty ogólności rozważań, że $x_1^1 \in W_1$ oraz $x_1^2 \in W_2$. Wówczas nie jest trudno zauważyć, że $W_3 \cap V(H^1), \ldots, W_{d(H)+2} \cap V(H^1)$ są parami rozłącznymi zbiorami dominującymi grafu H^1. Oznaczmy przez K zbiór $V(H^1) \setminus \bigcup_{r=3}^{d(H)+2} W_r$. Gdyby $K \cap W_1 = \emptyset$, to wierzchołek x_1^2 nie byłby sąsiedni do żadnego wierzchołka ze zbioru W_1 w grafie $2G \circ H$, sprzeczność z założeniem, że W_1 jest zbiorem dominującym grafu $2G \circ H$.

Wobec tego $K \cap W_1 \neq \emptyset$. Podobnie możemy zauważyć, że $K \cap W_2 \neq \emptyset$. Oznacza to, że istnieją wierzchołki u^1, v^1 w grafie H^1 takie, że $u^1 \in W_1$ i $v^1 \in W_2$.

Wszystko to oznacza, że $W_3 \cap V(H^1), \ldots, W_{d(H)+2} \cap V(H^1)$ są parami rozłącznymi zbiorami dominującymi grafu $H^1 - \{u^1, v^1\}$. Zatem $d(H^1 - \{u^1, v^1\}) \geq d(H)$. Wobec Twierdzenia 2.4.1 dowód został zakończony. □

Z dowodu powyższego twierdzenia wynika następujący wniosek.

Wniosek 2.4.5. *Jeżeli istnieją wierzchołki u, v w grafie H takie, że $d(H - \{u, v\}) \geq d(H)$, to $d(2G \circ H) = d(H) + 2$.*

Rozważmy teraz totalną liczbę domatyczną (def. str. 13) grafu $kG \circ H$, gdy $k \geq 1$. Wyniki otrzymane w tej części rozdziału pozostawiamy bez dowodów, bowiem ich dowody należy przeprowadzić w sposób analogiczny do dowodów odpowiednich twierdzeń dotyczących liczby domatycznej grafu $kG \circ H$.

Twierdzenie 2.4.6. *Niech $k \geq 1$ oraz niech $\delta(G) \geq 1$ i $\delta(H) \geq 1$. Wtedy*

$$d_t(H) + 1 \leq d_t(kG \circ H) \leq d_t(H) + k.$$

Wniosek 2.4.7. *Niech $\delta(G) \geq 1$ i $\delta(H) \geq 1$. Jeżeli $k = 1$, to $d_t(G \circ H) = d_t(H) + 1$.*

Wniosek 2.4.8. *Niech $\delta(G) \geq 1$ i $\delta(H) \geq 1$. Jeżeli $d_t(G) \geq k \geq 2$, to $d_t(kG \circ H) = d_t(H) + k$.*

Z własności totalnego podziału domatycznego grafu $2G \circ H$ wynika, że

Uwaga 2.4.9. *Dla każdego $i = 1, \ldots, n$ x_i^1, x_i^2 należą do różnych zbiorów totalnego podziału domatycznego o mocy $d_t(H) + 2$ grafu $2G \circ H$. Co więcej, jeżeli każdy ze zbiorów każdego totalnego podziału domatycznego o mocy $d_t(H)$ grafu H jest 1-minimalnym zbiorem dominującym grafu H, to x_i^1, x_i^2 nie należą do tych ze zbiorów dowolnego totalnego podziału domatycznego o mocy $d_t(H)+2$ grafu $2G \circ H$, do których należą wierzchołki i-tej kopii H^i grafu H.*

Własność 2.4.10. *a) Niech $\delta(G) \geq 1$ i $\delta(H) \geq 1$. Jeżeli istnieją wierzchołki u, v w grafie H takie, że $d_t(H - \{u, v\}) \geq d_t(H)$, to $d_t(2G \circ H) = d_t(H) + 2$.*
b) Niech $\delta(G) = 1$ i $\delta(H) \geq 1$. Jeżeli każdy ze zbiorów każdego totalnego podziału domatycznego o mocy $d_t(H)$ grafu H jest 1-minimalnym totalnym zbiorem dominującym grafu H, to $d_t(2G \circ H) = d_t(H) + 1$.

Załóżmy, że $\{U_1^i, \ldots, U_{d_t(H)}^i\}$ jest totalnym podziałem domatycznym i-tej kopii H^i grafu H. Oznaczmy $W_l = \bigcup_{i=1}^{|V(G)|} U_l^i$, dla $l = 1, \ldots, d_t(H)$. Ponadto, niech $W_{d_t(H)+1} = \{x_p^q \in V(C_n^1) \cup V(C_n^2) : q = 1 \wedge (p \equiv 1(\text{mod } 4) \vee p \equiv 2(\text{mod } 4)) \vee q = 2 \wedge (p \equiv 3 (\text{mod } 4) \vee p \equiv 0(\text{mod } 4)), 1 \leq p \leq n\}$ oraz $W_{d_t(H)+2} = (V(C_n^1) \cup V(C_n^2)) \backslash W_{d_t(H)+1}$. Nietrudno sprawdzić, że $\{W_1, \ldots, W_{d_t(H)+2}\}$ jest totalnym podziałem domatycznym grafu $2C_n \circ H$. Stąd oraz na mocy Twierdzenia 2.4.6 otrzymujemy następujący wniosek.

Wniosek 2.4.11. *Niech $\delta(H) \geq 1$. Jeżeli $n \equiv 0(\text{mod } 4)$, to $d_t(2C_n \circ H) = d_t(H) + 2$.*

Prowadząc dowód analogicznie do dowodu Twierdzenia 2.4.4 otrzymujemy

Własność 2.4.12. *Niech $\delta(H) \geq 1$ oraz niech $n \not\equiv 0(\text{mod } 4)$. Jeżeli istnieją wierzchołki u, v w grafie H takie, że $d_t(H - \{u, v\}) \geq d_t(H)$, to $d_t(2C_n \circ H) = d_t(H) + 2$; w przeciwnym przypadku $d_t(2C_n \circ H) = d_t(H) + 1$.*

W kolejności oszacujemy uzupełniającą liczbę domatyczną (def. str13) grafu $kG \circ H$, dla $k \geq 1$. Załóżmy, że $\{U_1^i, \ldots, U_{d(H)}^i\}$ jest podziałem domatycznym i-tej kopii H^i grafu H. Oznaczmy $W_s = \bigcup_{i=1}^{|V(G)|} U_s^i$, dla $s = 1, \ldots, d(H)$. Wówczas $\{W_1, \ldots, W_{d(H)}, \bigcup_{r=1}^{k} V(G^r)\}$ jest uzupełniającym podziałem domatycznym grafu $kG \circ H$. Stąd oraz na mocy Twierdzenia 2.4.1 i faktu, że $d_{cp}(G) \leq d(G)$ otrzymujemy

Wniosek 2.4.13. *Niech G będzie grafem rzędu co najmniej 2. Wtedy*

$$d(H) + 1 \leq d_{cp}(kG \circ H) \leq d(H) + k.$$

Wniosek 2.4.14. *Niech G będzie grafem rzędu co najmniej 2. Jeżeli $k = 1$, to $d_{cp}(G \circ H) = d(H) + 1$.*

Jest oczywiste, że każdy uzupełniający podział domatyczny grafu jest jego podziałem domatycznym. Co więcej, nie jest trudno zauważyć, że każdy podział domatyczny grafu $kG \circ H$ jest jego uzupełniającym podziałem domatycznym dla $k \geq 2$. Wobec tego faktu i na mocy Wniosku 2.4.3 oraz Twierdzenia 2.4.4 otrzymujemy

Wniosek 2.4.15. *Niech $d(G) \geq k \geq 2$. Wówczas $d_{cp}(kG \circ H) = d(H) + k$.*

Wniosek 2.4.16. *Niech G będzie grafem rzędu co najmniej 2 oraz niech G będzie grafem z co najmniej jednym wierzchołkiem izolowanym. Jeżeli istnieją wierzchołki u, v w grafie H takie, że $d(H - \{u, v\}) \geq d(H)$, to $d_{cp}(2G \circ H) = d(H) + 2$; w przeciwnym przypadku $d_{cp}(2G \circ H) = d(H) + 1$.*

Wyznaczymy dokładną wartość spójnej liczby domatycznej (def. str. 13) grafu $kG \circ H$, gdzie $k \geq 1$. Następujący lemat będzie użyty w dowodach serii twierdzeń.

Lemat 2.4.17. *Wierzchołki $x_i^1, \ldots, x_i^k$ należą do różnych zbiorów spójnego podziału domatycznego o mocy $k \geq 2$ grafu $kG \circ H$.*

Dowód. Załóżmy, że $\{W_1, \ldots, W_k\}$ jest spójnym podziałem domatycznym grafu $kG \circ H$. Przyjmijmy, że co najmniej dwa spośród wierzchołków $x_i^1, \ldots, x_i^k$, powiedzmy x_i^1, x_i^2 należą do tego samego zbioru, powiedzmy W_1 podziału $\{W_1, \ldots, W_k\}$. Wówczas dla co najmniej jednego spośród zbiorów $W_2, \ldots, W_k$, powiedzmy W_k mamy $\bigcup_{j=1}^{k}\{x_i^j\} \cap W_k = \emptyset$. Wobec tego $W_k \cap V(H^i)$ jest zbiorem dominującym grafu H^i. Co więcej, $W_k \nsubseteq V(H^i)$. Zatem graf $\langle W_k \rangle_{kG \circ H}$ nie jest spójny, co przeczy założeniu i kończy dowód. □

Twierdzenie 2.4.18. *Niech G będzie grafem spójnym oraz $|V(H)| \geq k \geq 2$. Wówczas $d_c(kG \circ H) = k$.*

Dowód. Aby wykazać, że $d_c(kG \circ H) \geq k$, wystarczy zauważyć, że $\{V(G^1) \cup \bigcup_{i=1}^{|V(G)|}\{y_1^i\}, \ldots, V(G^{k-1}) \cup \bigcup_{i=1}^{|V(G)|}\{y_{k-1}^i\}, V(G^k) \cup \bigcup_{i=1}^{|V(G)|}\{y_k^i, \ldots, y_{|V(H)|}^i\}\}$ jest spójnym podziałem domatycznym grafu $kG \circ H$.

Załóżmy, że $\{W_1, \ldots, W_{k+1}\}$ jest spójnym podziałem domatycznym grafu $kG \circ H$. Zatem zbiory $W_1, \ldots, W_{k-1}, W_k \cup W_{k+1}$ tworzą spójny podział domatyczny o mocy k grafu $kG \circ H$. Na mocy Lematu 2.4.17 wierzchołki $x_1^1, \ldots, x_1^k$ należą do różnych zbiorów spośród zbiorów $W_1, \ldots, W_{k-1}, W_k \cup W_{k+1}$. Bez straty ogólności rozważań niech $x_1^l \in W_l$ dla $l = 1, \ldots, k-1$ oraz $x_1^k \in W_k \cup W_{k+1}$. Ponieważ $W_k \cap W_{k+1} = \emptyset$, więc albo $x_1^k \in W_k$ albo $x_1^k \in W_{k+1}$. Jeżeli $x_1^k \in W_k$, to $W_{k+1} \cap V(H^1)$

jest zbiorem dominującym grafu H^1 oraz $\{x_1^1, \ldots, x_1^k\} \cap W_{k+1} = \emptyset$. Oznacza to, że graf $\langle W_{k+1} \rangle_{kG \circ H}$ nie jest spójny, co oznacza sprzeczność z założeniem. Gdyby $x_1^k \in W_{k+1}$, to rozumując w analogiczny sposób otrzymujemy sprzeczność. Tym samym twierdzenie zostało udowodnione. $\square$

Twierdzenie 2.4.19. *Jeżeli G jest grafem spójnym, wówczas $d_c(G \circ H) = 1$.*

Dowód powyższego twierdzenia jest analogiczny do dowodu Twierdzenia 2.4.18.

Twierdzenie 2.4.20. *Niech G będzie grafem spójnym. Wtedy $d_c(2G \circ K_1) = 1$.*

Dowód. Wobec założenia graf $2G \circ K_1$ jest spójny, a zatem $d_c(2G \circ K_1) \geq 1$.

Przyjmijmy, że $\{W_1, W_2\}$ jest spójnym podziałem domatycznym grafu $2G \circ K_1$. Gdyby $W_1 \cap V(G^1) = \emptyset$, to $W_2 \cap V(G^1) = V(G^1)$. Zatem $W_1 \cap V(G^2) = V(G^2)$ na mocy Lematu 2.4.17. Wobec tego $\bigcup_{i=1}^{|V(G)|} V(K_1^i) \subset W_1$ oraz $\bigcup_{i=1}^{|V(G)|} V(K_1^i) \subset W_2$ (przeciwnie, W_1, W_2 nie byłyby zbiorami dominującymi grafu $2G \circ K_1$). Stąd $\bigcup_{i=1}^{|V(G)|} V(K_1^i) \subset W_1 \cup W_2 = \emptyset$, sprzeczność. Oznacza to, że $W_1 \cap V(G^1) \neq \emptyset$. W analogiczny sposób można wykazać, że $W_1 \cap V(G^2) \neq \emptyset$. Wobec tego oraz na mocy Lematu 2.4.17 mamy $W_2 \cap V(G^2) \neq \emptyset$ i $W_2 \cap V(G^1) \neq \emptyset$. Co więcej jeżeli założymy bez straty ogólności rozważań, że $W_1 \cap V(G^1) = \{x_1^1, \ldots, x_p^1\}$, dla $1 \leq p \leq |V(G)| - 1$, to $W_1 \cap V(G^2) = \{x_{p+1}^2, \ldots, x_{|V(G)|}^2\}$, $W_2 \cap V(G^1) = \{x_{p+1}^1, \ldots, x_{|V(G)|}^1\}$ oraz $W_2 \cap V(G^2) = \{x_1^2, \ldots, x_p^2\}$. Zatem nie jest trudno sprawdzić, że nie istnieje droga z wierzchołka x_1^1 do wierzchołka x_{p+1}^2 w grafie $\langle W_1 \rangle_{2G \circ K_1}$ na mocy definicji grafu $2G \circ K_1$. Oznacza to, że graf $\langle W_1 \rangle_{2G \circ K_1}$ nie jest spójny, co jest sprzeczne z założeniem. W konsekwencji, $d_c(2G \circ K_1) \leq 1$ i ostatecznie $d_c(2G \circ K_1) = 1$. $\square$

Na koniec tej części rozdziału podamy dokładną wartość liczby ps-domatycznej (def. str. 13) grafu $kG \circ H$, $k \geq 1$. Na mocy definicji grafu $kG \circ H$ oraz definicji zbioru ps-dominującego dowolnego grafu otrzymujemy następujący rezultat pomocniczy.

Lemat 2.4.21. *Wierzchołki co najmniej $|V(G)|-1$ kopii grafu H należą do każdego zbioru ps-dominującego grafu $kG \circ H$.*

Twierdzenie 2.4.22. *Niech G będzie grafem rzędu co najmniej 3 oraz $k \geq 1$. Wówczas $d_{ps}(kG \circ H) = 1$.*

Dowód. Jeżeli G nie jest grafem spójnym, to graf $kG \circ H$ nie jest spójny i $d_{ps}(kG \circ H) = 1$. Załóżmy, że G jest grafem spójnym oraz niech $\{W_1, W_2\}$ będzie podziałem ps-domatycznym grafu $kG \circ H$. Na mocy Lematu 2.4.21 oraz założenia, że $|V(G)| \geq 3$ istnieje $i \in \{1, \ldots, |V(G)|\}$ takie, że $V(H^i) \subset W_1$ oraz $V(H^i) \subset W_2$. Jest to jednak niemożliwe na mocy definicji podziału ps-domatycznego grafu. Oznacza to, że $d_{ps}(kG \circ H) \leq 1$, a ponieważ $\{V(kG \circ H)\}$ jest podziałem ps-domatycznym grafu $kG \circ H$, więc $d_{ps}(kG \circ H) = 1$. □

Wniosek 2.4.23. *Niech G będzie grafem rzędu co najmniej 3. Wtedy $d_{ps}(G \circ H) = 1$.*

Uwaga 2.4.24. *Jeżeli G jest grafem rzędu 1, to $d_{ps}(H) + 1 \leq d_{ps}(kG \circ H) \leq d_{ps}(H) + k$. Zatem $d_{ps}(G \circ H) = d_{ps}(H) + 1$, jeżeli G jest grafem rzędu 1.*

Jeżeli G jest grafem niespójnym rzędu 2, to $d_{ps}(kG \circ H) = 1$.

Jeżeli G jest grafem spójnym rzędu 2, to $d_{ps}(kG \circ H) = \begin{cases} 1, & dla\ k \geq 2\ lub \\ 2, & dla\ k = 1. \end{cases}$

Dowód. Jeżeli G jest grafem rzędu 1, to prowadząc analogiczne rozumowanie jak w dowodzie Twierdzenia 2.4.1 otrzymujemy, że $d_{ps}(H)+1 \leq d_{ps}(kG \circ H) \leq d_{ps}(H)+k$.

Jeżeli G jest grafem niespójnym rzędu 2, to $\{V(kG \circ H)\}$ jest jedynym podziałem ps-domatycznym grafu $kG \circ H$ i $d_{ps}(kG \circ H) = 1$.

Załóżmy, że G jest grafem spójnym rzędu 2, czyli $G = P_2$. Jeżeli $k = 1$, to zbiory $V(H^1) \cup \{x_2^1\}, V(H^2) \cup \{x_1^1\}$ tworzą podział ps-domatyczny grafu $P_2 \circ H$ i $d_{ps}(P_2 \circ H) \geq 2$. Wobec Lematu 2.4.21, $d_{ps}(P_2 \circ H) \leq 2$. Zatem $d_{ps}(P_2 \circ H) = 2$. Przyjmijmy, że $k \geq 2$. Ponieważ $\{V(kP_2 \circ H)\}$ jest podziałem ps-domatycznym grafu $kP_2 \circ H$, to $d_{ps}(kP_2 \circ H) \geq 1$. Oznaczmy $\{W_1, W_2\}$ jako podział ps-domatyczny grafu $kP_2 \circ H$. Na mocy Lematu 2.4.21 bez straty ogólności rozważań załóżmy, że

$V(H^i) \subset W_i$, dla $i = 1, 2$. Wobec tego $V(P_2^j) \cap W_i \neq \emptyset$, dla $j = 1, \ldots, k$ oraz $i = 1, 2$. Co więcej, istnieją liczby $p, q \in \{1, \ldots, k\}$ takie, że $x_1^p \in W_2$ oraz $x_2^q \in W_1$. Wtedy $x_2^p \in W_1$ oraz $x_1^q \in W_2$. Tak więc nie istnieje wierzchołek $w \in W_2$, dla którego graf $\langle \{x_2^p, x_2^q, y_1^1, w\} \rangle_{kP_2 \circ H}$ byłby spójny, co daje sprzeczność z założeniem, że W_2 jest zbiorem ps-dominującym grafu $kP_2 \circ H$. Zatem $d_{ps}(kP_2 \circ H) \leq 1$. Ostatecznie, $d_{ps}(kP_2 \circ H) = 1$. □

2.5 LICZBY DOMATYCZNE GRAFÓW $G * H$, $G\#H$

W tej części rozdziału rozważamy k-tą liczbę domatyczną, k-krotną liczbę domatyczną oraz uzupełniającą liczbę domatyczną grafów $G * H$, $G\#H$, których definicje są zamieszczone na stronie 14. Graf $G * H$ powstaje w wyniku sklejenia grafów G i H przy użyciu dwóch wierzchołków, a graf $G\#H$ otrzymujemy łącząc grafy G i H za pomocą nowej krawędzi. Inspiracją do badania liczb domatycznych powyższych grafów była praca [23], w której rozważano liczbę domatyczną oraz totalną liczbę domatyczną takich grafów. Przypomnę, że uzupełniającą liczbę domatyczną grafu G oznaczamy symbolem $d_{cp}(G)$.

Własność 2.5.1. *Dla dowolnych grafów G, H, $d_{cp}(G * H) \geq \min\{d_{cp}(G), d_{cp}(H)\}$.*

Dowód. Załóżmy, że $\{D_1, \ldots, D_{d_{cp}(G)}\}$ jest uzupełniającym podziałem domatycznym grafu G, a $\{V_1, \ldots, V_{d_{cp}(H)}\}$ jest uzupełniającym podziałem domatycznym grafu H. Bez straty ogólności rozważań przyjmijmy, że $d_{cp}(G) \leq d_{cp}(H)$ oraz $x \in D_{d_{cp}(G)}$, $y \in V_{d_{cp}(H)}$. Dla $i = 1, \ldots, d_{cp}(G) - 1$ oznaczmy $W_i = D_i \cup V_i$ oraz $W_{d_{cp}(G)} = (D_{d_{cp}(G)} \cup \bigcup_{j=d_{cp}(G)}^{d_{cp}(H)} V_j) \backslash \{x, y\} \cup \{u\}$. Wtedy zbiory $W_1, \ldots, W_{d_{cp}(G)}$ tworzą uzupełniający podział domatyczny grafu $G * H$ i $d_{cp}(G * H) \geq d_{cp}(G) = \min\{d_{cp}(G), d_{cp}(H)\}$. □

Wniosek 2.5.2. *Niech G i H będą grafami takimi, że $d_{cp}(G) \leq d_{cp}(H)$ i $d_{cp}(G) = d(G)$. Jeżeli x jest jednym z wierzchołków sklejających grafy G i H oraz x jest wierzchołkiem nasyconym w grafie G, to $d_{cp}(G * H) = d(G)$.*

Dowód. Na mocy Własności 2.5.1, $d_{cp}(G * H) \geq d(G)$. Załóżmy, że $d_{cp}(G * H) \geq d(G)+1$ oraz $\{W_1, \ldots, W_{d(G)+1}\}$ jest uzupełniającym podziałem domatycznym grafu $G * H$. Ponadto, bez straty ogólności rozważań przyjmijmy, że $u \in W_{d(G)+1}$. Wierzchołek u jest sąsiedni do każdego wierzchołka ze zbioru $V(G)\backslash\{x\}$ w grafie $G * H$, bowiem x jest wierzchołkiem nasyconym w grafie G. Zatem $W_i \cap V(G)$ jest zbiorem dominującym grafu G, dla $i = 1, \ldots, d(G)$. Ponadto, $(W_{d(G)+1} \cap V(G)) \cup \{x\}$ jest zbiorem dominującym grafu G. Wobec tego $\{W_1 \cap V(G), \ldots, W_{d(G)} \cap V(G), (W_{d(G)+1} \cap V(G)) \cup \{x\}\}$ jest podziałem domatycznym grafu G i $d(G) \geq d(G) + 1$, sprzeczność. Ostatecznie, $d_{cp}(G * H) = d(G)$. □

Dowody poniższych wniosków prowadzimy w sposób analogiczny do dowodów powyższych wyników.

Wniosek 2.5.3. *Niech G i H będą grafami takimi, że $d(G) \leq d(H)$. Jeżeli x jest jednym z wierzchołków sklejających grafy G i H oraz x jest wierzchołkiem nasyconym w grafie G, to $d(G * H) = d(G)$.*

Wniosek 2.5.4. *Niech $k \geq 1$ oraz niech G i H będą grafami takimi, że $d_{cp}(H) \geq d_{cp}(G)$. Jeżeli $d(G * H) \geq d_{cp}(G) + k$, to $d(G) - d_{cp}(G) \geq k$.*

Kolejne cytowane twierdzenia zostaną wykorzystane w dowodzie Twierdzenia 2.5.8.

Twierdzenie 2.5.5. [28] *Niech G będzie grafem, którego dopełnienie nie jest grafem spójnym. Wówczas $d_{cp}(G) = d(\overline{G})$.*

Twierdzenie 2.5.6. [19] *G ma wierzchołek izolowany wtedy i tylko wtedy, gdy $d(G) = 1$.*

Własność 2.5.7. [28] *Dla dowolnego grafu G rzędu n, $d_{cp}(G) \leq n/\gamma(G)$.*

Twierdzenie 2.5.8. (1) *Dla dowolnych grafów G i H,*
$d_{cp}(G\#H) \geq \min\{d_{cp}(G), d_{cp}(H)\}$.
(2) *Dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej q, $q \geq 1$ istnieją grafy G, H takie, że $d_{cp}(G\#H) = \min\{d_{cp}(G), d_{cp}(H)\} + q$.*

Dowód. Dowód (1) jest analogiczny do dowodu Własności 2.5.1. Zatem przeprowadzimy jedynie dowód (2). Załóżmy, że $G = K_{q+1}$ oraz $V(G) = \{x, x_1, \ldots, x_q\}$ i $H \simeq G$. Jeżeli φ jest bijekcją zbioru $V(G)$ na $V(H)$, to $\varphi(x) = y$ oraz dla $i = 1, \ldots, q$ $\varphi(x_i) = y_i$. Ponieważ $\overline{G}$ nie jest grafem spójnym, więc $d_{cp}(G) = d(\overline{K_{q+1}}) = 1$ na mocy Twierdzenia 2.5.5 oraz Twierdzenia 2.5.6. Co więcej, $d_{cp}(H) = 1$, bowiem $H \simeq G$. Zatem $\min\{d_{cp}(G), d_{cp}(H)\} = 1$.

Ponieważ rząd grafu $G\#H$ jest równy $2(q+1)$, więc $d_{cp}(G\#H) \leq \frac{2(q+1)}{2} = q+1$ na mocy Własności 2.5.7 oraz definicji uzupełniającego zbioru dominującego grafu. Zauważmy, że zbiory $\{x, y\}$, $\{x_1, y_1\}$, $\{x_2, y_2\}$, $\ldots$, $\{x_q, y_q\}$ tworzą uzupełniający podział domatyczny grafu $G\#H$. W konsekwencji, $d_{cp}(G\#H) = q+1$, co kończy dowód. $\square$

Oszacujemy teraz k-tą liczbę domatyczną (def. str. 13) grafu $G * H$, $k \geq 1$.

W dowodzie Twierdzenia 2.5.11 wykorzystamy następującą własność i oszacowanie k-tej liczby domatycznej grafu.

Własność 2.5.9. [25] *Niech k, m będą liczbami naturalnymi, $k \leq m$. Wówczas każdy m-ty zbiór dominujący grafu G jest k-tym zbiorem dominującym grafu G.*

Twierdzenie 2.5.10. [25] *Dla dowolnego grafu G, $d^k(G) \leq \left\lfloor \frac{\delta(G)}{k} \right\rfloor + 1$.*

Twierdzenie 2.5.11. *Niech $k \geq 1$ oraz x, y są wierzchołkami sklejającymi grafy G i H, $x \in V(G)$, $y \in V(H)$.*
(1) *Dla dowolnych grafów G i H,*
$\min\{d^k(G), d^k(H)\} \leq d^k(G * H) \leq 1 + \min\{d^k(G - x), d^k(H - y)\}$.
(2) *Dla dowolnych grafów G i H,*
$d^k(G * H) \leq \min\{d^{k-1}(G - x), d^{k-1}(H - y)\}$, *dla $k \geq 2$.*
(3) *Dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej q, $q \geq 1$ istnieją grafy G, H takie, że $d^k(G * H) = \min\{d^k(G), d^k(H)\} + q$.*
(4) *Dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej q, $1 \leq q \leq min\{d^k(G-x), d^k(H-y)\}-1$ istnieją grafy G, H takie, że $d^k(G * H) = \min\{d^k(G - x), d^k(H - y)\} - q$.*

Dowód (1). Dowód nierówności $d^k(G * H) \geq \min\{d^k(G), d^k(H)\}$ jest analogiczny do dowodu Własności 2.5.1. Wykażemy, że $d^k(G * H) \leq 1 + \min\{d^k(G -$

$x), d^k(H-y)\}$. Jeżeli $d^k(G*H) = 1$, to nierówność jest prawdziwa. Załóżmy, że $d^k(G*H) \geq 2$. Niech $\{Z_1, \ldots, Z_{d^k(G*H)}\}$ będzie k-tym podziałem domatycznym grafu $G*H$, $k \geq 1$. Przypomnijmy, że u jest wierzchołkiem grafu $G*H$ powstałym w wyniku sklejenia wierzchołków x, y. Bez straty ogólności rozważań załóżmy, że $u \in Z_{d^k(G*H)}$. Oznaczmy $R_i = Z_i \cap V(G)$ oraz $S_i = Z_i \cap V(H)$, dla $i = 1, \ldots, d^k(G*H)-1$. Zauważmy, że $R_i \neq \emptyset$ oraz $S_i \neq \emptyset$, dla każdego i. Niech $j \in \{1, \ldots, d^k(G*H)-1\}$ oraz $p \in V(G-x)\backslash R_j \subset V(G*H)\backslash Z_j$. Ponieważ Z_j jest k-tym zbiorem dominującym grafu $G*H$, więc wierzchołek p jest sąsiedni do co najmniej k wierzchołków zbioru Z_j. Co więcej, wierzchołki te należą również do zbioru R_j na mocy definicji grafu $G*H$, czyli R_j jest k-tym zbiorem dominującym grafu $G-x$. Dlatego $\{R_1, \ldots, R_{d^k(G*H)-2}, R_{d^k(G*H)-1} \cup R_{d^k(G*H)}\}$ jest k-tym podziałem domatycznym grafu $G-x$ i $d^k(G-x) \geq d^k(G*H)-1$. Analogicznie należy dowieść, że $d^k(H-y) \geq d^k(G*H)-1$. Ostatecznie, $d^k(G*H) \leq 1 + \min\{d^k(G-x), d^k(H-y)\}$, co kończy dowód (1).

Dowód (2). Niech $k \geq 2$. Ponieważ zbiory $R_1, \ldots, R_{d^k(G*H)-1}$ są k-tymi zbiorami dominującymi grafu $G-x$, więc na mocy Własności 2.5.9 są one również $(k-1)$-wszymi zbiorami dominującymi grafu $G-x$. Również $R_{d^k(G*H)}$ jest także $(k-1)-$wszym zbiorem dominującym grafu $G-x$. Istotnie: weźmy $q \in V(G-x)\backslash R_{d^k(G*H)}$. Wierzchołek q jest sąsiedni do co najmniej k wierzchołków ze zbioru $Z_{d^k(G*H)}$ grafu $G*H$. Ponieważ wierzchołek q może być sąsiedni do wierzchołka u w grafie $G*H$, to q jest sąsiedni do co najmniej $k-1$ wierzchołków ze zbioru $R_{d^k(G*H)}$ grafu $G-x$. Oznacza, że zbiór $R_{d^k(G*H)}$ jest $(k-1)$-wszym zbiorem dominującym grafu $G-x$. Reasumując, $\{R_1, \ldots, R_{d^k(G*H)}\}$ jest $(k-1)$-wszym podziałem domatycznym grafu $G-x$ i $d^{k-1}(G-x) \geq d^k(G*H)$. W analogiczny sposób dowodzimy, że $d^{k-1}(H-y) \geq d^k(G*H)$. W konsekwencji, $d^k(G*H) \leq \min\{d^{k-1}(G-x), d^{k-1}(H-y)\}$.

Dowód (3). Niech q będzie liczbą naturalną, $q \geq 1$. Niech G będzie grafem takim, że $V(G) = \{x\} \cup \{x_{i,j} : 1 \leq i \leq q+1, 1 \leq j \leq 2k\}$ oraz $G - x \simeq K_{2k(q+1)}$ i wierzchołek x jest sąsiedni do wierzchołków $x_{1,l}, \ldots, x_{q+1,l}$, dla $l = 1, \ldots, k$. Niech H będzie grafem izomorficznym z G. Jeżeli φ jest bijekcją zbioru $V(G)$ na $V(H)$, to $\varphi(x) = y$ oraz $\varphi(x_{i,j}) = y_{i,j}$ dla $i = 1, \ldots, q+1$, $j = 1, \ldots, 2k$. Z definicji grafu G $d_G(x) = k(q+1)$, a zatem $d^k(G) \leq \left\lfloor \frac{\delta(G)}{k} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{k(q+1)}{k} \right\rfloor + 1 = q + 2$ na mocy Twierdzenia 2.5.10. Zbiory: $\{x_{i,1}, x_{i,2}, \ldots, x_{i,k}\}$ dla $i = 1, \ldots, q+1$ oraz $\{x, x_{1,k+1}, \ldots, x_{q+1,k+1}, \ldots, x_{1,2k}, \ldots, x_{q+1,2k}\}$ tworzą k-ty podział domatyczny o mocy $q+2$ grafu G i $d^k(G) = q+2$. Ponieważ $H \simeq G$, więc również $d^k(H) = q+2$. Zatem $\min\{d^k(G), d^k(H)\} = q+2$.

Ponieważ $\delta(G*H) = d_{G*H}(x_{1,k+1}) = 2k(q+1)-1$, to $d^k(G*H) \leq \left\lfloor \frac{2k(q+1)-1}{k} \right\rfloor + 1$ na mocy Twierdzenia 2.5.10. Zatem $d^k(G*H) \leq 2q+2$. Przypomnijmy, że u jest wierzchołkiem grafu $G*H$ powstałym w wyniku sklejenia wierzchołków x, y grafów G, H. Zbiory: $\{u, x_{1,1}, x_{1,2}, \ldots, x_{1,k}, y_{1,k+1}, y_{1,k+2}, \ldots, y_{1,2k}\}$, $\{x_{p,1}, x_{p,2}, \ldots, x_{p,k}, y_{p,k+1}, y_{p,k+2}, \ldots, y_{p,2k}\}$ dla $p = 2, \ldots, q+1$ oraz $\{y_{i,1}, y_{i,2}, \ldots, y_{i,k}, x_{i,k+1}, x_{i,k+2}, \ldots, x_{i,2k}\}$ dla $i = 1, \ldots, q+1$ tworzą k-ty podział domatyczny o mocy $2q+2$ grafu $G*H$. Czyli $d^k(G*H) = 2q+2$. Tym samym dowód (3) został zakończony. Dla $k = 1$ konstrukcja grafów G i H została podana w [23].

Dowód (4). Niech $G - x$ będzie grafem pełnym o $k(q+3)$ wierzchołkach. Graf G otrzymamy z grafu $G - x$ przez dodanie wierzchołka x oraz krawędzi łączących ten wierzchołek z dokładnie k wybranymi wierzchołkami grafu $G - x$. Niech H będzie grafem izomorficznym z grafem G. Dalej dowód prowadzimy identycznie jak dowód (3). □

Dowód kolejnego twierdzenia jest analogiczny do dowodu Własności 2.5.1 oraz do dowodu części (1) Twierdzenia 2.5.11.

Twierdzenie 2.5.12. *Niech $k \geq 1$. Dla dowolnych grafów G i H,*

$$\min\{d^k(G), d^k(H)\} \leq d^k(G\#H) \leq 1 + \min\{d^k(G), d^k(H)\}.$$

Uwaga 2.5.13. *Można podać pełną charakteryzację grafów G i H, dla których osiągane są górne i dolne oszacowania liczby $d^k(G\#H)$ z Twierdzenia 2.5.12. Charakteryzacje te są sformułowane w terminach $(k-1)$-wszych i k-tych zbiorów dominujących grafów G, H.*

Załóżmy, że $\min\{d^k(G), d^k(H)\} = d^k(G)$ oraz $d^k(G\#H) = 1+d^k(G)$. Wówczas istnieją wierzchołki w grafie G, które nie są sąsiednie do wierzchołka x. Przez połączenie krawędziami tych wierzchołków z wierzchołkiem x powstanie graf, którego k-ta liczba domatyczna jest równa $d^k(G) + 1$.

Podane zostaną oszacowania k-krotnej liczby domatycznej (def. str.13) grafów $G*H$, $G\#H$.

Twierdzenie 2.5.14. *Niech $\delta(G) \geq k-1$, $\delta(H) \geq k-1$ dla $k \geq 1$ oraz x, y są wierzchołkami sklejającymi grafy G i H, $x \in V(G)$, $y \in V(H)$. Wówczas*
(1) $\min\{d_k(G), d_k(H)\} \leq d_k(G*H) \leq 1 + \min\{d_k(G-x), d_k(H-y)\}$.
(2) *Dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej q, $q \geq 1$ istnieją grafy G, H takie, że $d_k(G*H) = \min\{d_k(G), d_k(H)\} + q$.*
(3) *Dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej q, $1 \leq q \leq \min\{d_k(G-x), d_k(H-y)\} - 1$ istnieją grafy G, H takie, że $d_k(G*H) = \min\{d_k(G-x), d_k(H-y)\} - q$.*

Dowód tego twierdzenia jest analogiczny do dowodu Twierdzenia 2.5.11. Zatem podamy jedynie konstrukcję grafu G dla dowodu (2) i (3), dla $k \geq 2$. Dla $k = 1$ graf G skonstruowany został w pracy [23].

Dowód (2). Niech $G-x$ będzie grafem pełnym dwudzielnym takim, że $V(G-x) = A \cup B$, gdzie $|A| = |B| = 2k(q+1)$. Graf G otrzymamy z grafu $G-x$ przez dodanie wierzchołka x oraz krawędzi łączących wierzchołek x z $k(q+2)$ wierzchołkami należącymi do zbioru A.

Dowód (3). Niech $G-x$ będzie grafem pełnym dwudzielnym takim, że $V(G-x) = C \cup D$, gdzie $|C| = |D| = k(q+2)$. Graf G otrzymamy z grafu $G-x$ przez dodanie wierzchołka x oraz krawędzi łączących wierzchołek x z k wierzchołkami należącymi do zbioru C. $\square$

Z części (2) tezy Twierdzenia 2.5.14 wynika, że liczba $d_k(G*H)$ może przyjmować dowolną wartość nie mniejszą niż $\min\{d_k(G), d_k(H)\}$. Natomiast liczba $d^k(G\#H)$ przyjmuje tylko dwie wartości.

Twierdzenie 2.5.15. *Niech* $\delta(G) \geq k-1$ *oraz niech* $\delta(H) \geq k-1$. *Wówczas*

$$\min\{d_k(G), d_k(H)\} \leq d_k(G\#H) \leq 1 + \min\{d_k(G), d_k(H)\}.$$

Dowód powyższego rezultatu jest analogiczny do dowodu Twierdzenia 2.5.12.

Z Twierdzeń 2.5.11, 2.5.12, 2.5.14 oraz 2.5.15 dla $k=1$ otrzymujemy rezultaty P. D. Vestergaarda oraz B. Zelinki ([23]) odnoszące się do liczby domatycznej grafów $G*H$ oraz $G\#H$.

Rozdział 3

LICZBY DOMATYCZNE GRAFÓW SPECJALNYCH

W podrozdziale 3.1 zostały porównane ze sobą liczby domatyczne: uzupełniająca liczba domatyczna, liczba *ps*-domatyczna i spójna liczba domatyczna grafu dwudzielnego i jego dopełnienia. Motywacją do rozpatrywania tego problemu była praca [35] B. Zelinki, w której autor porównał liczbę domatyczną oraz totalną liczbę domatyczną grafu dwudzielnego i jego dopełnienia. W podrozdziałach 3.2 i 3.3 znajdują się odpowiednio oszacowania kilku liczb domatycznych grafu G/K_m powstałego w wyniku ściągnięcia podgrafu K_m grafu G do nowego wierzchołka i grafu G^x powstałego w wyniku duplikacji wierzchołka x w grafie G. Ponadto, podane zostały pełne lub częściowe charakteryzacje grafów, dla których osiągane są dolne lub górne oszacowania liczb domatycznych grafu G^x. W ostatnim podrozdziale podane zostały pełne charakteryzacje grafów k-domatycznie krytycznych i k-krotnie domatycznie krytycznych. Dla $k = 1$ problem ten rozwiązał B. Zelinka w [24].

3.1 LICZBY DOMATYCZNE DOPEŁNIENIA GRAFU

W niniejszym podrozdziale porównujemy uzupełniającą liczbę domatyczną, liczbę ps-domatyczną i spójną liczbę domatyczną grafu dwudzielnego z liczbami domatycznymi jego dopełnienia. Symbolem $G(A,B)$ będziemy oznaczali graf dwudzielny, w którym $V(G(A,B)) = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ oraz $|A| = a$, $|B| = b$, gdzie $a \geq b \geq 2$. Jeżeli zakres zmienności parametrów a, b będzie inny, to zostanie to wyraźnie zaznaczone w treści twierdzeń. Jeżeli $G = G(A,B)$, to dla $b \leq 2$ $d_{cp}(G) = d_{cp}(\overline{G}) = b$.

Twierdzenie 3.1.1. *Jeżeli $G = G(A,B)$ oraz $a \geq b \geq 3$, to $d_{cp}(\overline{G}) = b$ wtedy i tylko wtedy, gdy:*
(i) dla każdego $x \in A$, $d_{\overline{G}}(x) \in \{a-1, a\}$ oraz
(ii) dla każdego $x \in A$ takiego, że $d_{\overline{G}}(x) = a$ istnieje dokładnie jeden $y \in B$ taki, że: $xy \in E(\overline{G})$ oraz x, y należą do tego samego zbioru uzupełniającego podziału domatycznego o mocy b grafu $\overline{G}$.

Dowód. Przyjmijmy, że $A = \{x_1, \ldots, x_a\}$, $B = \{y_1, \ldots, y_b\}$, $b \geq 3$ oraz $d_{cp}(\overline{G}) = b$. Niech $\{D_1, \ldots, D_b\}$ będzie uzupełniającym podziałem domatycznym grafu $\overline{G}$. Na mocy Własności 1.3.1 i ponieważ $b \geq 3$, więc $D_i \cap B \neq \emptyset$. Zatem bez straty ogólności rozważań załóżmy, że $D_i \cap B = \{y_i\}$, dla $i = 1, \ldots, b$. Rozważmy dowolny, ustalony wierzchołek x ze zbioru A w grafie G. Ponieważ $\langle A \rangle_{\overline{G}} \simeq K_a$, to $d_{\overline{G}}(x) \geq a-1$. Pokażemy, że wierzchołek x jest sąsiedni do co najwyżej jednego wierzchołka ze zbioru B. Na mocy definicji uzupełniającego podziału domatycznego grafu $x \in D_p$, dla pewnego $p \in \{1, \ldots, b\}$. Ponieważ x jest sąsiedni do każdego wierzchołka ze zbioru A, to w zbiorze B muszą być takie wierzchołki, które należą do zbiorów $D_1, \ldots, D_{p-1}, D_{p+1}, \ldots, D_b$, a wierzchołek x nie jest do nich sąsiedni. Stąd oraz ponieważ $D_i \cap B = \{y_i\}$ dla $i = 1, \ldots, b$, więc wierzchołek x nie jest sąsiedni do wierzchołków $y_1, \ldots, y_{p-1}, y_{p+1}, \ldots, y_b$ w grafie $\overline{G}$. Zatem $N_{\overline{G}}(x) = A \backslash \{x\}$ lub $N_{\overline{G}}(x) = (A \backslash \{x\}) \cup \{y_p\}$. Czyli $d_{\overline{G}}(x) \in \{a-1, a\}$ i warunek (i) zachodzi. Ponadto, wobec powyższego jeżeli $d_{\overline{G}}(x) = a$ oraz $x \in D_p$, to $xy_p \in E(\overline{G})$ i $y_p \in D_p$, co dowodzi prawdziwości warunku (ii).

Wykażemy teraz, że jeżeli zachodzą warunki (i) oraz (ii), to $d_{cp}(\overline{G}) = b$. Nie jest trudno pokazać, że $d_{cp}(\overline{G}) \leq b$. Aby zakończyć dowód wystarczy skonstruować uzupełniający podział domatyczny o mocy b grafu $\overline{G}$. Niech $M_i = \{x \in A : xy_i \in E(\overline{G})\}$ dla $i = 1, \ldots, b$ oraz $J = \{i \in \{1, \ldots, b\} : d_{\overline{G}}(y_i) = b - 1\}$. Załóżmy, że:

a) $y_i \in D_i$ dla $i = 1, \ldots, b$ oraz

b) dla $i = 1, \ldots, b$ jeżeli $x \in M_i$, to $x \in D_i$ (wobec (i) oraz (ii)) oraz

c) jeżeli $J \neq \emptyset$, to weźmy $|J|$ wierzchołków ze zbioru A takich, które nie należą do zbioru $\bigcup_{i=1}^{b} M_i$; oznaczmy je przez $x_{i_1}, \ldots, x_{i_{|J|}}$. Wtedy dla każdego $j \in J$ wybierzmy dokładnie jedno $k \in \{1, \ldots, |J|\}$ takie, że $x_{i_k} \in D_j$ (przy czym jeżeli $j_1, j_2 \in J$ i $j_1 \neq j_2$ oraz $x_{i_k} \in D_{j_1}$ i $x_{i_l} \in D_{j_2}$, to $k \neq l$) oraz

d) jeżeli $A \backslash (\bigcup_{i=1}^{b} M_i \cup \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_{|J|}}\}) \neq \emptyset$, to niech wierzchołki z tego zbioru należą do D_1.

Nie jest trudno sprawdzić, że zbiory $D_1, \ldots, D_b$ tworzą uzupełniający podział domatyczny grafu $\overline{G}$, co kończy dowód. $\square$

Wniosek 3.1.2. *Jeżeli $G = G(A, B)$ oraz $a \geq b \geq 3$, to $d_{cp}(G) = b$ wtedy i tylko wtedy, gdy:*
(i) *dla każdego $x \in A$, $d_G(x) \in \{b - 1, b\}$ oraz*
(ii) *dla każdego $x \in A$ takiego, że $d_G(x) = b - 1$ istnieje dokładnie jeden $y \in B$ taki, że: $xy \notin E(G)$ oraz x, y należą do tego samego zbioru uzupełniającego podziału domatycznego o mocy b grafu G.*

Podamy teraz inną charakteryzację grafów dwudzielnych $G = G(A, B)$, dla których zachodzi równość $d_{cp}(G) = b$, gdzie $a \geq b \geq 2$.

Twierdzenie 3.1.3. *Jeżeli $G = G(A, B)$, to $d_{cp}(G) = b$ wtedy i tylko wtedy, gdy:*
(i) *dla każdego $x \in A$, $d_G(x) \in \{b - 1, b\}$ oraz*
(ii) $|\{x \in A : d_G(x) = b\}| \geq |\{y \in B : d_G(y) = a\}|$.

Dowód. Niech warunki (i), (ii) zachodzą. Niech $B = \{y_1, \ldots, y_b\}$, $M_0 = \{x \in A :$

$N_G(x) = B\}$ oraz $M_i = \{x \in A : y_i \notin N_G(x)\}$ dla $i = 1, \ldots, b$. Wobec warunku (i) zbiory $M_0, M_1, \ldots, M_b$ są parami rozłączne (niektóre z nich mogą być puste). Niech $J_0 = \{i \in \{1, \ldots, b\} : M_i = \emptyset\}$, $J_1 = \{i \in \{1, \ldots, b\} : M_i \neq \emptyset\}$. Dla $i \in J_0$, $d_G(y_i) = a$. Z warunku (ii) mamy $|M_0| \geq |J_0|$. Wobec tego istnieje rodzina zbiorów $\{L_i : i \in J_0\}$ taka, że dla każdego $i \in J_0$ $L_i \neq \emptyset$ oraz $\bigcup_{i \in J_0} L_i = M_0$. Zdefiniujemy zbiory D_i, dla $i = 1, \ldots, b$. Jeżeli $i \in J_0$, to $D_i = L_i \cup \{y_i\}$. Jeżeli $i \in J_1$, wtedy $D_i = M_i \cup \{y_i\}$. Zatem $\{D_1, \ldots, D_b\}$ jest uzupełniającym podziałem domatycznym grafu G i $d_{cp}(G) \geq b$. Nie jest trudno wykazać, że $d_{cp}(G) \leq b$. Czyli $d_{cp}(G) = b$.

Załóżmy, że $d_{cp}(G) = b$ i niech $\{V_1, \ldots, V_b\}$ będzie uzupełniającym podziałem domatycznym grafu G. Jeżeli $a \geq b = 2$, to warunki w (i) oraz w (ii) są spełnione. Niech zatem $a \geq b \geq 3$. Wtedy $V_i \cap B \neq \emptyset$, dla każdego $i \in \{1, \ldots, b\}$. Niech $V_i \cap B = \{y_i\}$ dla każdego i. Ponadto, przyjmijmy, że warunek w (i) nie zachodzi. Oznacza to, że dla każdego $x \in A$, $d_G(x) \leq b - 2$. Niech $x_0 \in A$. Wtedy istnieją dwa wierzchołki $y_1, y_2 \in B$ takie, że $N_G(x_0) \cap \{y_1, y_2\} = \emptyset$. Zatem x_0 musi należeć jednocześnie do zbioru V_1 i do zbioru V_2, co jest sprzeczne z definicją uzupełniającego podziału domatycznego grafu. Tym samym warunek w (i) jest spełniony.

Załóżmy, że warunek w (ii) nie zachodzi, czyli $|M_0| < |J_0|$. Jeżeli $i \in J_1$, to $M_i \subseteq V_i \backslash \{y_i\}$. Jeżeli $i \in J_0$, to $(V_i \backslash \{y_i\}) \subseteq M_0$ i $|V_i \backslash \{y_i\}| \geq 1$. Zatem $|M_0| \geq \sum_{i \in J_0} |V_i \backslash \{y_i\}| \geq |J_0|$, co jest sprzeczne z założeniem. Tym samym warunek w (ii) zachodzi. □

Wniosek 3.1.4. *Jeżeli $G = G(A, B)$, to $d_{cp}(\overline{G}) = b$ wtedy i tylko wtedy, gdy:*
(i) dla każdego $x \in A$, $d_{\overline{G}}(x) \in \{a - 1, a\}$ oraz
(ii) $|\{x \in A : d_{\overline{G}}(x) = a - 1\}| \geq |\{x \in B : d_{\overline{G}}(x) = b - 1\}|$.

Następnie podamy relację pomiędzy liczbami *ps*-domatycznymi (def. str. 13) grafu dwudzielnego i jego dopełnienia. Najpierw przypomnimy znane własności, które będą wykorzystane w dowodach Twierdzenia 3.1.6 i Twierdzenia 3.1.7.

Własność 3.1.5. *a)* [33] *Niech G będzie grafem dwudzielnym. Jeżeli $d_p(G) \geq 3$, to G jest grafem pełnym dwudzielnym.*
b) Jeżeli G jest grafem dwudzielnym różnym od grafu pełnego dwudzielnego, to $d_p(G) = 2$ wtedy i tylko wtedy, gdy G ma drzewo spinające T takie, że $diam(T) \leq 3$.
c) Niech G będzie dowolnym grafem. Jeżeli $d_p(G) \geq 3$, to $diam(G) \leq 2$.
d) Niech G będzie dowolnym grafem. Jeżeli $d_p(G) = 2$, to $diam(G) \leq 3$.
e) $d_p(K_{m,n}) = m$ dla $n \geq m \geq 2$.

Z Własności 3.1.5e) wynika, że $d_p(K_{a,b}) > d_p(\overline{K_{a,b}})$. Ponadto, zauważmy, że jeżeli G jest grafem dwudzielnym zawierającym co najmniej jeden wierzchołek izolowany, to $d_p(G) \neq d_p(\overline{G})$.

Twierdzenie 3.1.6. *Jeżeli $G = G(A, B)$, $a \geq b \geq 2$ oraz $G \neq K_{a,b}$, wówczas $d_p(G) \leq 2 \leq d_p(\overline{G})$.*

Dowód. Na mocy Własności 3.1.5a) $d_p(G) \leq 2$. Ponieważ $G \neq K_{a,b}$, to istnieją wierzchołki $x \in A$, $y \in B$ takie, że $xy \notin E(G)$, czyli $xy \in E(\overline{G})$. Wykażemy, że $\{D_1, D_2\}$, gdzie $D_1 = (A \backslash \{x\}) \cup \{y\}$ oraz $D_2 = (B \backslash \{y\}) \cup \{x\}$ jest podziałem *ps*-domatycznym grafu $\overline{G}$. Ponieważ $D_i \cap A \neq \emptyset$ i $D_i \cap B \neq \emptyset$, więc D_i jest zbiorem dominującym grafu $\overline{G}$, dla $i = 1, 2$.

Niech $S \subseteq V(\overline{G}) \backslash D_1 = D_2$. Jeżeli $S \subset B$, to zbiór $S \cup \{y\}$ indukuje podgraf grafu $\overline{G}$ izomorficzny z grafem pełnym o $|S| + 1$ wierzchołkach.

Jeżeli $S \subset A$, to $S = \{x\}$. Wtedy zbiór $\{x, y\}$ indukuje podgraf K_2 grafu $\overline{G}$, bowiem $xy \in E(\overline{G})$. Jeżeli natomiast $S \cap A \neq \emptyset$ oraz $S \cap B \neq \emptyset$, to $S = C \cup \{x\}$, gdzie $C \subset B$. Wówczas zbiór $C \cup \{x, y\}$ indukuje podgraf grafu $\overline{G}$ izomorficzny z grafem pełnym o $|C| + 2$ wierzchołkach.

Reasumując, ponieważ każdy z otrzymanych podgrafów jest grafem spójnym oraz D_1 jest zbiorem dominującym grafu $\overline{G}$, więc D_1 jest zbiorem *ps*-dominującym grafu $\overline{G}$. W analogiczny sposób dowodzimy, że D_2 jest zbiorem *ps*-dominującym grafu $\overline{G}$. Zatem D_1, D_2 tworzą podział *ps*-domatyczny grafu $\overline{G}$ i $d_p(\overline{G}) \geq 2$, co kończy dowód.

□

Twierdzenie 3.1.7. *Niech $G = G(A, B)$ oraz $a \geq b \geq 2$. Równość $d_p(G) = d_p(\overline{G})$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy:*
(i) $G \neq K_{a,b}$ oraz
(ii) G zawiera drzewo spinające T, dla którego $diam(T) \leq 3$.

Dowód. Załóżmy, że warunki (i), (ii) zachodzą. Zatem na mocy Własności 3.1.5b) $d_p(G) = 2$. Z warunku (ii) wynika, że w grafie G istnieje wierzchołek $x \in A$, który jest sąsiedni do wszystkich wierzchołków ze zbioru B oraz istnieje wierzchołek $y \in B$, który jest sąsiedni do wszystkich wierzchołków ze zbioru A. Oznacza to, że w $\overline{G}$ nie ma krawędzi xy i $d_{\overline{G}}(x, y) \geq 2$. Co więcej, ponieważ x nie jest sąsiedni do żadnego wierzchołka ze zbioru B w grafie $\overline{G}$ oraz y nie jest sąsiedni do żadnego wierzchołka ze zbioru A w $\overline{G}$, to $d_{\overline{G}}(x, y) \geq 3$. Zatem $diam(\overline{G}) \geq 3$. Stąd na mocy Własności 3.1.5c) mamy $d_p(\overline{G}) \leq 2$. Na mocy warunku (i) istnieją wierzchołki $u \in A$, $v \in B$ takie, że $uv \notin E(G)$. Czyli $uv \in E(\overline{G})$. Wówczas $\{(A \backslash \{u\}) \cup \{v\}, (B \backslash \{v\}) \cup \{u\}\}$ jest podziałem ps-domatycznym grafu $\overline{G}$. Oznacza to, że $d_p(\overline{G}) = 2$ i $d_p(G) = d_p(\overline{G})$.

Załóżmy, że $d_p(G) = d_p(\overline{G})$. Ponadto przyjmijmy, że nie zachodzi warunek (i), czyli $G \simeq K_{a,b}$. Na mocy Własności 3.1.5e) $d_p(G) = d_p(K_{a,b}) = b \geq 2$. Natomiast $d_p(\overline{G}) = d_p(\overline{K_{a,b}}) = 1$. Czyli $d_p(G) > d_p(\overline{G})$, co przeczy założeniu. Zatem warunek (i) zachodzi.

Niech teraz $d_p(G) = d_p(\overline{G})$ i $G \neq K_{a,b}$ oraz załóżmy, że nie zachodzi warunek (ii). Z Własności 3.1.5b) oraz z Własności 3.1.5a) otrzymujemy, że $d_p(G) = 1$. Natomiast na mocy Twierdzenia 3.1.6, $d_p(\overline{G}) \geq 2$. Czyli $d_p(G) < d_p(\overline{G})$, co jest sprzeczne z założeniem. Oznacza to, że warunek (ii) zachodzi. □

Podamy teraz charakteryzację grafów dwudzielnych G, dla których $d_c(G) = d_c(\overline{G})$ (oczywiście $G \neq K_{a,b}$). W dowodzie poniższego twierdzenia wykorzystamy

Własność 3.1.8. [14] *Jeżeli G jest dowolnym grafem oraz $\gamma(G) \geq 2$, to $d_c(G) \leq \delta(G)$.*

Twierdzenie 3.1.9. *Niech $G = G(A, B)$, $a \geq 2$, $b = 2$ oraz G jest grafem spójnym i $G \neq K_{a,b}$. Wówczas $d_c(G) = d_c(\overline{G})$ wtedy i tylko wtedy, gdy dokładnie jeden wierzchołek ze zbioru B jest stopnia a w grafie G.*

Dowód. Załóżmy, że $B = \{y_1, y_2\}$. Przyjmijmy, że dokładnie jeden wierzchołek ze zbioru B jest stopnia a w grafie G. Niech $d_G(y_1) = a$ oraz $d_G(y_2) \leq a - 1$. Wówczas istnieje wierzchołek x w zbiorze A, który nie jest sąsiedni do y_2 w G, czyli $d_G(x) = 1$. Stąd i na mocy Własności 3.1.8 oraz z definicji spójnej liczby domatycznej grafu otrzymujemy $d_c(G) = 1$. Natomiast wierzchołek y_1 jest stopnia 1 w grafie $\overline{G}$, więc $d_c(\overline{G}) = 1$. W rezultacie, $d_c(G) = 1 = d_c(\overline{G})$.

Załóżmy, że $d_c(G) = d_c(\overline{G})$ oraz przyjmijmy, że żaden z wierzchołków ze zbioru B nie jest stopnia a w grafie G (ponieważ $G \neq K_{a,b}$, więc nie jest możliwe, aby dwa wierzchołki ze zbioru B były stopnia a w grafie G). Wtedy istnieją dwa wierzchołki, powiedzmy x_1, x_2 w zbiorze A, które nie są sąsiednie odpowiednio do wierzchołków y_1, y_2 ze zbioru B w grafie G (Gdyby istniał tylko jeden taki wierzchołek x w zbiorze A, to x byłby wierzchołkiem izolowanym w G, co przeczyłoby spójności grafu G). Zatem wierzchołki x_1, x_2 są stopnia 1 w grafie G i $d_c(G) = 1$.

Przyjmijmy, że $D_1 = \{x_2, y_2\}$ oraz $D_2 = (A \backslash \{x_2\}) \cup \{y_1\}$. Nietrudno wykazać, że D_1, D_2 są zbiorami dominującymi grafu $\overline{G}$. Ponieważ $x_2y_2 \in E(\overline{G})$, $x_1y_1 \in E(\overline{G})$ oraz $\langle A \backslash \{x_2\} \rangle_{\overline{G}} \simeq K_{a-1}$, więc podgrafy indukowane na zbiorach D_1, D_2 w grafie $\overline{G}$ są spójne. Zatem $\{D_1, D_2\}$ jest spójnym podziałem domatycznym grafu $\overline{G}$ i $d_c(\overline{G}) \geq 2$. W konsekwencji, $d_c(G) \neq d_c(\overline{G})$, co jest sprzeczne z założeniem. Oznacza to, że jeżeli $d_c(G) = d_c(\overline{G})$, to dokładnie jeden wierzchołek ze zbioru B jest stopnia a w grafie G. Tym samym dowód został zakończony. □

3.2 LICZBY DOMATYCZNE ŚCIĄGNIĘCIA PODGRAFU K_m GRAFU DO NOWEGO WIERZCHOŁKA

W tej części rozdziału znajdują się oszacowania k-tej liczby domatycznej, k-krotnej liczby domatycznej, totalnej liczby domatycznej, spójnej liczby domatycznej oraz uzupełniającej liczby domatycznej grafu G/K_m. Niech $K_m < G$, $m \geq 2$. Graf G/K_m taki, że: $V(G/K_m) = (V(G) \backslash V(K_m)) \cup \{u\}$ oraz $E(G/K_m) = \{xy \in E(G) : \{x,y\} \cap V(K_m) = \emptyset\} \cup \{uy : y \in V(G) \backslash V(K_m)$ oraz istnieje $v \in V(K_m)$ taki, że $yv \in E(G)\}$ został otrzymany z grafu G w wyniku operacji ściągnięcia podgrafu K_m do nowego wierzchołka u.

Podamy teraz dolne oszacowanie k-tej liczby domatycznej (def. str. 13) grafu G/K_m, dla $k \geq 1$.

Twierdzenie 3.2.1. *Niech $m \geq 2$ oraz niech $K_m < G$. Wówczas $d^k(G/K_m) \geq d^k(G) - m + 1$.*

Dowód. Niech $K_m < G$ oraz niech $V(K_m) = \{x_1, \ldots, x_m\}$, $m \geq 2$. Dowód przeprowadzimy w oparciu o indukcję matematyczną ze względu na liczbę m. Na początek przyjmijmy, że $m = 2$, czyli rozważmy graf G/K_2. Udowodnimy, że $d^k(G/K_2) \geq d^k(G) - 1$. Załóżmy, że $\{D_1, \ldots, D_{d^k(G)}\}$ jest k-tym podziałem domatycznym grafu G. Jeżeli $d^k(G) = 1$ lub $d^k(G) = 2$, to $d^k(G/K_2) \geq 1 \geq d^k(G) - 1$ (bowiem k-ta liczba domatyczna jest dobrze zdefiniowana dla każdego grafu).

Niech teraz $d^k(G) \geq 3$. Na mocy definicji k-tego podziału domatycznego grafu istnieją dwie liczby p, q, $1 \leq p, q \leq d^k(G)$ (niekoniecznie różne) takie, że $x_1 \in D_p$ oraz $x_2 \in D_q$. Rozważmy przypadki.

1. Bez straty ogólności rozważań załóżmy, że $x_1, x_2 \in D_1$. Wówczas nie jest trudno zauważyć, że zbiory $(D_1 \backslash \{x_1, x_2\}) \cup \{u\} \cup D_2, D_3, \ldots, D_{d^k(G)}$ tworzą k-ty podział domatyczny grafu G/K_2. Zatem $d^k(G/K_2) \geq d^k(G) - 1$.

2. Bez straty ogólności rozważań przyjmijmy, że $x_1 \in D_1$ oraz $x_2 \in D_2$. Nietrudno wykazać, że $D_3, \ldots, D_{d^k(G)}$ są k-tymi zbiorami dominującymi grafu G/K_2. Dowiedziemy, że zbiór $(D_1 \backslash \{x_1\}) \cup (D_2 \backslash \{x_2\}) \cup \{u\}$ jest k-tym zbiorem dominującym grafu G/K_2. Załóżmy, że $a \in V(G/K_2) \backslash [(D_1 \backslash \{x_1\}) \cup (D_2 \backslash \{x_2\}) \cup \{u\}]$. Oznacza to, że $a \notin D_1$ i $a \notin D_2$ i $a \neq u$. Stąd i ponieważ D_i, dla $i = 1, 2$ jest k-tym zbiorem dominującym grafu G, to wierzchołek a jest sąsiedni do co najmniej $k - 1$ wierzchołków ze zbioru $D_i \backslash \{x_i\}$, dla $i = 1, 2$. Nietrudno sprawdzić, że jeżeli a jest sąsiedni do co najmniej k wierzchołków ze zbioru $D_1 \backslash \{x_1\}$ lub $D_2 \backslash \{x_2\}$, to a jest sąsiedni do co najmniej $2k - 1$ wierzchołków ze zbioru $(D_1 \backslash \{x_1\}) \cup (D_2 \backslash \{x_2\}) \cup \{u\}$. Załóżmy zatem, że wierzchołek a jest sąsiedni do dokładnie $k - 1$ wierzchołków ze zbioru $D_1 \backslash \{x_1\}$ oraz ze zbioru $D_2 \backslash \{x_2\}$. Stąd i ponieważ D_1 oraz D_2 są k-tymi zbiorami dominującymi grafu G, to x_1 oraz x_2 są sąsiednie do wierzchołka a w grafie G. Zatem wobec definicji grafu G/K_2 wierzchołek u jest sąsiedni do wierzchołka a w G/K_2. Wszystko to gwarantuje, że wierzchołek a jest sąsiedni do $2k-1$ wierzchołków ze zbioru $(D_1 \backslash \{x_1\}) \cup (D_2 \backslash \{x_2\}) \cup \{u\}$. Reasumując, $(D_1 \backslash \{x_1\}) \cup (D_2 \backslash \{x_2\}) \cup \{u\}$ jest $(2k - 1)$-wszym zbiorem dominującym grafu G/K_2. Co więcej, zbiór ten jest również k-tym zbiorem dominującym grafu G/K_2. W konsekwencji, $\{(D_1 \backslash \{x_1\}) \cup (D_2 \backslash \{x_2\}) \cup \{u\}, D_3, \ldots, D_{d^k(G)}\}$ jest k-tym podziałem domatycznym grafu G/K_2 oraz $d^k(G/K_2) \geq d^k(G) - 1$. Zatem twierdzenie jest prawdziwe dla $m = 2$.

Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla $m = l$. Pokażemy, że jest ono prawdziwe dla $m = l + 1$. Ponieważ $G/K_{l+1} \simeq (G/K_l)/K_2$ oraz wobec pierwszego kroku indukcyjnego, a następnie na mocy założenia indukcyjnego otrzymujemy, że $d^k(G/K_{l+1}) = d^k((G/K_l)/K_2) \geq d^k(G/K_l) - 1 \geq d^k(G) - l$. W rezultacie, z twierdzenia o indukcji matematycznej wynika, że twierdzenie jest prawdziwe dla $m \geq 2$. □

Własność 3.2.2. *Niech $k \geq 2$. Jeżeli $K_m < G$ oraz wierzchołki grafu K_m należą do l ($1 \leq l \leq \min\{m, d^k(G)\} - 1$) zbiorów k-tego podziału domatycznego o mocy $d^k(G)$ grafu G, to $d^k(G/K_m) \geq d^k(G) - l$.*

Dowód. Niech $\{D_1, \ldots, D_{d^k(G)}\}$ będzie k-tym podziałem domatycznym grafu G. Ponadto, załóżmy, że wierzchołki $x_1, \ldots, x_m$ podgrafu K_m grafu G należą do l ($1 \leq l \leq \min\{m, d^k(G)\} - 1$) zbiorów tego podziału. Bez straty ogólności założenia niech $V(K_m) \subseteq \bigcup_{i=1}^{l} D_i$. Wówczas $\{\bigcup_{i=1}^{l} D_i \backslash V(K_m) \cup \{u\} \cup D_{l+1}, D_{l+2} \ldots, D_{d^k(G)}\}$ jest k-tym podziałem domatycznym grafu G/K_m. W konsekwencji, $d^k(G/K_m) \geq d^k(G) - l$.

□

Przyjmując oznaczenia jak w dowodzie Własności 3.2.2 nie jest trudno sprawdzić, że $\{\bigcup_{i=1}^{l} D_i \backslash V(K_m) \cup \{u\}, D_{l+1}, D_{l+2} \ldots, D_{d(G)}\}$ jest podziałem domatycznym grafu G/K_m.

Własność 3.2.3. *Niech $K_m < G$ oraz wierzchołki grafu K_m należą do l ($1 \leq l \leq \min\{m, d(G)\}$) zbiorów podziału domatycznego o mocy $d(G)$ grafu G, wówczas $d(G/K_m) \geq d(G) - l + 1$.*

W dowodzie kolejnego twierdzenia wykorzystamy następujące trzy rezultaty.

Twierdzenie 3.2.4. [25] *Niech k będzie dodatnią liczbą całkowitą. Wówczas* $d^k(K_n) = \begin{cases} 1, & \text{dla} \quad n < k, \\ \lfloor n/k \rfloor, & \text{dla} \quad n \geq k. \end{cases}$

Twierdzenie 3.2.5. [25] $d^k(K_{m,n}) = \begin{cases} 1, & \text{dla} \quad \min(m,n) < k, \\ 2, & \text{dla} \quad k \leq \min(m,n) < 2k, \\ \lfloor \min(m,n)/k \rfloor, & \text{dla} \quad \min(m,n) \geq 2k. \end{cases}$

Twierdzenie 3.2.6. [25] *Dla $k \geq 1$, $d^k(G) \leq \lfloor \frac{\delta(G)}{k} \rfloor + 1$.*

Twierdzenie 3.2.7. *Dla dowolnych liczb naturalnych q oraz m, $m \geq 2$ istnieje graf G, który ma podgraf indukowany K_m taki, że $d^k(G/K_m) = d^k(G) + q$.*

Dowód. Załóżmy, że $m \geq k$. Weźmy graf K_m oraz graf $K_{a,a}$, gdzie $a = k\left(\lfloor \frac{m}{k} \rfloor + q\right)$. Niech $V(K_m) = \{x_1, \ldots, x_m\}$ oraz $V(K_{a,a}) = P \cup Q$. Konstruujemy graf G jako sumę rozłączną grafów K_m oraz $K_{a,a}$ z dodatkowymi krawędziami łączącymi dokładnie jeden wierzchołek grafu K_m, powiedzmy x_1 ze wszystkimi wierzchołkami należącymi do jednego ze zbiorów P, Q.

Na mocy Twierdzenia 3.2.4, $d^k(K_m) = \lfloor \frac{m}{k} \rfloor$. Ponieważ $a \geq 2k$, więc z Twierdzenia 3.2.5 otrzymujemy, że $d^k(K_{a,a}) = \lfloor \frac{a}{k} \rfloor = \lfloor \frac{k(\lfloor \frac{m}{k} \rfloor + q)}{k} \rfloor = \lfloor \frac{m}{k} \rfloor + q$. Oznaczmy $\lfloor \frac{m}{k} \rfloor$ przez b. Ponadto, załóżmy, że $\{D_1, \ldots, D_b\}$ jest k-tym podziałem domatycznym grafu K_m oraz $\{V_1, \ldots, V_{b+q}\}$ jest k-tym podziałem domatycznym grafu $K_{a,a}$. Niech $W_i = D_i \cup V_i$ dla $i = 1, \ldots, b-1$ oraz $W_b = D_b \cup \bigcup_{i=b}^{b+q} V_i$. Zbiory $W_1, \ldots, W_b$ tworzą k-ty podział domatyczny grafu G czyli

$$d^k(G) \geq b = \left\lfloor \frac{m}{k} \right\rfloor. \tag{3.2.1}$$

Ponieważ $\delta(G) = d_G(x_2) = m - 1$ więc na mocy Własności 3.2.6 otrzymujemy

$$d^k(G) \leq \lfloor \frac{m-1}{k} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{m-1}{k} + 1 \rfloor = \lfloor \frac{m}{k} + \frac{k-1}{k} \rfloor \leq \lfloor \frac{m}{k} \rfloor + \lfloor \frac{k-1}{k} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{m}{k} \rfloor + 1 \tag{3.2.2}$$

Z nierówności w (3.2.1) oraz w (3.2.2) wynika, że $d^k(G) = \lfloor \frac{m}{k} \rfloor$ albo $d^k(G) = \lfloor \frac{m}{k} \rfloor + 1$. Zauważmy, że równość $d^k(G) = \lfloor \frac{m}{k} \rfloor + 1$ nie jest prawdziwa. Przypuśćmy, że $d^k(G) = \lfloor \frac{m}{k} \rfloor + 1$. Jeżeli $k = 1$, to $d(G) = m + 1$. Ponieważ $d(G) \leq \delta(G) + 1$, więc $\delta(G) \geq m$. Zatem $d_G(x_2) \geq m$, co jest sprzeczne wobec konstrukcji grafu G. Niech teraz $k \geq 2$. Przyjmijmy, że $\{R_1, \ldots, R_{\lfloor \frac{m}{k} \rfloor + 1}\}$ jest k-tym podziałem domatycznym grafu G. Bez straty ogólności rozważań niech $x_1 \in R_1$. Nietrudno sprawdzić, że $R_1 \cap V(K_m)$ jest k-tym zbiorem dominującym grafu K_m. Wobec tego załóżmy, że $x_2, \ldots, x_k \in R_1$. Ponieważ R_i jest k-tym zbiorem dominującym grafu G, to w zbiorze $(V(K_m) \backslash R_1) \cap R_i$ jest co najmniej k wierzchołków, które są sąsiednie do wierzchołka x_2, dla $i = 2, \ldots, \lfloor \frac{m}{k} \rfloor + 1$. Zatem $d_G(x_2) \geq k \lfloor \frac{m}{k} \rfloor + k - 1 > k(\frac{m}{k} - 1) + k - 1 = m - 1$, co daje sprzeczność, bowiem $d_G(x_2) = m - 1$ wobec konstrukcji grafu G.

Reasumując, $d^k(G) = \lfloor \frac{m}{k} \rfloor$.

Dalej ponieważ $G/K_m \simeq K_{a,a+1}$, to $d^k(G/K_m) = \lfloor \frac{m}{k} \rfloor + q$ na mocy Twierdzenia 3.2.5.

Dla $m < k$ konstrukcja grafu G jest taka sama, przy czym $a = k(q+1)$. □

Oszacujemy teraz k-krotną liczbę domatyczną (def. str. 13) grafu G/K_m. Nietrudno zauważyć, że $\delta(G/K_m) \geq \delta(G)$, dla $m \geq 2$. Jeżeli zatem istnieje k-krotna liczba domatyczna grafu G, to istnieje również k-krotna liczba domatyczna grafu G/K_m.

Twierdzenie 3.2.8. *Niech $K_m < G$ dla $m \geq 2$ oraz niech $\delta(G) \geq k-1$. Wówczas $d_k(G/K_m) \geq d_k(G) - m + 1$. Co więcej, dla dowolnych liczb naturalnych q oraz m, $m \geq 2$ istnieje graf G taki, że $K_m < G$ oraz $d_k(G/K_m) = d_k(G) + q$.*

Dowód pierwszej części powyższego twierdzenia jest analogiczny do dowodu Twierdzenia 3.2.1, a dowód drugiej części jest analogiczny do dowodu Twierdzenia 3.2.7.

Twierdzenie 3.2.9. *Niech $K_m < G$ dla $m \geq 2$. Jeżeli graf $\langle V(K_m)\rangle_G$ nie jest komponentą spójności grafu G, to $d_t(G/K_m) \geq d_t(G) - m + 1$. Co więcej, dla dowolnych liczb naturalnych q oraz m, $m \geq 2$ istnieje graf G taki, że $K_m < G$ oraz $d_t(G/K_m) = d_t(G) + q$.*

Pierwszą część twierdzenia można udowodnić analogicznie jak Twierdzenie 3.2.1, a dowód drugiej części jest analogiczny do dowodu Twierdzenia 3.2.7, przy czym należy przyjąć $a = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + q$.

Podamy teraz oszacowanie dla spójnej liczby domatycznej (def. str. 13) grafu G/K_m. Załóżmy, że G jest grafem spójnym. Zatem z definicji grafu G/K_m wynika, że graf G/K_m jest spójny dla $m \geq 2$. Dla dowodu poniższego twierdzenia wykorzystamy znany fakt.

Własność 3.2.10. [14] *Jeżeli G jest dowolnym grafem oraz $\gamma(G) \geq 2$, to $d_c(G) \leq \delta(G)$.*

Twierdzenie 3.2.11. *Niech G będzie grafem spójnym i niech $K_m < G$ dla $m \geq 2$. Wówczas $d_c(G/K_m) \geq d_c(G) - m + 1$. Co więcej, dla dowolnych liczb naturalnych q oraz m, $m \geq 2$ istnieje graf spójny G taki, że $K_m < G$ oraz $d_c(G/K_m) = d_c(G) + q$.*

Pierwszą część twierdzenia można udowodnić analogicznie jak Twierdzenie 3.2.1. Udowodnimy drugą część twierdzenia.

Dowód. Rozważmy graf K_m, $m \geq 2$ oraz graf $K_{m+q,m+q}$, $q \geq 1$. Załóżmy, że $V(K_m) = \{x_1, \ldots, x_m\}$, $V(K_{m+q,m+q}) = P \cup Q$, gdzie $P = \{y_1, \ldots, y_{m+q}\}$ oraz $Q = \{z_1, \ldots, z_{m+q}\}$. Konstruujemy teraz graf G będący sumą rozłączną grafów K_m oraz $K_{m+q,m+q}$ i mający dodatkowe krawędzie x_iy_i dla $i = 1, \ldots, m$. Ponieważ $\delta(G) = d_G(x_1) = m$, więc na mocy Własności 3.2.10 mamy $d_c(G) \leq m$. Nie jest trudno wykazać, że zbiory $V_i = \{x_i, y_i, z_i\}$ dla $i = 1, \ldots, m-1$ oraz zbiór $V_m = V(G) \setminus \bigcup_{i=1}^{m-1} V_i$ tworzą spójny podział domatyczny grafu G. Wobec tego $d_c(G) \geq m$. Zatem $d_c(G) = m$.

Ponieważ $G/K_m \simeq K_{m+q,m+q+1}$, to $d_c(G/K_m) = d_c(K_{m+q,m+q+1}) = m + q$, co kończy dowód twierdzenia. □

Na koniec podamy oszacowania uzupełniającej liczby domatycznej (def. str. 13) grafu G/K_m, $m \geq 2$. Najpierw jednak przypomnimy znany rezultat.

Własność 3.2.12. [28] *Dla dowolnego grafu G, $d_{cp}(G) \leq \min\{\delta(G) + 1, |V(G)| - \Delta(G)\}$.*

Twierdzenie 3.2.13. *Niech $K_m < G$ dla $m \geq 2$. Wówczas $d_{cp}(G/K_m) \geq d_{cp}(G) - m + 1$. Co więcej, dla dowolnych liczb naturalnych q oraz m, $m \geq 2$ istnieje graf G taki, że $K_m < G$ oraz $d_{cp}(G/K_m) = d_{cp}(G) + q$.*

Udowodnimy jedynie drugą część twierdzenia, bowiem dowód pierwszej części twierdzenia jest analogiczny do dowodu Twierdzenia 3.2.1.

Dowód. Weźmy graf K_m, $m \geq 2$ oraz graf $K_{m+q,m+q}$, $q \geq 1$. Załóżmy, że $V(K_m) = \{x_1, \ldots, x_m\}$, $V(K_{m+q,m+q}) = P \cup Q$, gdzie $P = \{y_1, \ldots, y_{m+q}\}$ oraz $Q = \{z_1, \ldots, z_{m+q}\}$. Wówczas niech G będzie sumą rozłączną grafów K_m oraz $K_{m+q,m+q}$ z dodatkowymi krawędziami łączącymi dokładnie jeden wierzchołek, powiedzmy x_m grafu K_m z wszystkimi wierzchołkami jednego ze zbiorów P, Q, powiedzmy P grafu $K_{m+q,m+q}$. Wobec powyższej konstrukcji mamy $\delta(G) = d_G(x_1) = m - 1$ oraz

$\Delta(G) = d_G(x_m) = 2m + q - 1$. Zatem na mocy Własności 3.2.12, $d_{cp}(G) \leq m$. Ponadto, nie jest trudno wykazać, że $D_i = \{x_i, y_i, z_i\}$ dla $i = 1, \ldots, m-1$ oraz $D_m = V(G) \setminus \bigcup_{i=1}^{m-1} D_i$ są uzupełniającymi zbiorami dominującymi grafu G. Czyli $d_{cp}(G) \geq m$. Reasumując, $d_{cp}(G) = m$.

Ponieważ $G/K_m \simeq K_{m+q,m+q+1}$, to $d_{cp}(G/K_m) = d_{cp}(K_{m+q,m+q+1}) = m + q$, co kończy dowód. □

3.3 LICZBY DOMATYCZNE DUPLIKACJI WIERZCHOŁKA W GRAFIE

W niniejszym podrozdziale szacujemy liczbę domatyczną i spójną liczbę domatyczną graf G^x zwanego *duplikacją* wierzchołka x w grafie G.(def. str. 14) Ponadto, dajemy pełne lub częściowe charakteryzacje grafów, które realizują dolne lub górne oszacowania tych liczb.

Najpierw podajemy oszacowania liczby $d(G^x)$.

Twierdzenie 3.3.1. *Dla dowolnego grafu G, $d(G) \leq d(G^x) \leq d(G) + 1$.*

Dowód. Wykażemy, że $d(G^x) \geq d(G)$. Jeżeli $d(G) = 1$, to $d(G^x) \geq d(G)$. Załóżmy teraz, że $d(G) \geq 2$ oraz $\{V_1, \ldots, V_{d(G)}\}$ jest podziałem domatycznym grafu G. Ponadto, bez straty ogólności rozważań możemy przyjąć, że $x \in V_1$. Ponieważ V_1 dominuje wszystkie wierzchołki ze zbioru V_i, dla $i = 2, \ldots, d(G)$, to $V_1 \cup \{u\}$ jest zbiorem dominującym grafu G^x. Następnie do zbioru V_i, dla $i = 2, \ldots, d(G)$ należy wierzchołek sąsiedni do x, a zatem sąsiedni do u. Stąd V_i jest również zbiorem dominującym grafu G^x, dla każdego i. W konsekwencji, $\{V_1 \cup \{u\}, V_2, \ldots, V_{d(G)}\}$ jest podziałem domatycznym grafu G^x i $d(G^x) \geq d(G)$.

Wykażemy teraz, że $d(G^x) \leq d(G) + 1$. Załóżmy, że $d(G^x) \geq d(G) + 2$. Wobec tego istnieje podział domatyczny, powiedzmy $\{U_1, \ldots, U_{d(G)+2}\}$ grafu G^x. Rozważmy przypadki.

1. Załóżmy bez straty ogólności rozważań, że $x, u \in U_1$. Wtedy $\{U_1 \backslash \{u\}, U_2, \ldots, U_{d(G)+2}\}$ jest podziałem domatycznym grafu G. Istotnie: $U_1 \backslash \{u\}$ jest zbiorem dominującym grafu G, bowiem dowolny wierzchołek ze zbioru $V(G) \backslash U_1$ sąsiedni do u w grafie G^x jest również sąsiedni do x w grafie G. Zbiory $U_2, \ldots, U_{d(G)+2}$ są zbiorami dominującymi grafu G^x, a zatem również grafu G. Czyli znaleźliśmy podział domatyczny o mocy $d(G)+2$ grafu G. Zatem $d(G) \geq d(G)+2$, sprzeczność.

2. Załóżmy bez straty ogólności rozważań, że $u \in U_1$ oraz $x \in U_2$. Wówczas $\{(U_1 \backslash \{u\}) \cup U_2, U_3, \ldots, U_{d(G)+2}\}$ jest podziałem domatycznym grafu G. Istotnie: ponieważ U_2 jest zbiorem dominującym grafu G^x, to U_2 jest również zbiorem dominującym grafu G. Zatem $(U_1 \backslash \{u\}) \cup U_2$ jest zbiorem dominującym grafu G. Każdy ze zbiorów $U_3, \ldots, U_{d(G)+2}$ jest zbiorem dominującym grafu G^x, a zatem również G. W rezultacie znaleźliśmy podział domatyczny o mocy $d(G)+1$ grafu G. Oznacza to, że $d(G) \geq d(G)+1$, sprzeczność.

Reasumując, $d(G^x) \leq d(G)+1$, co kończy dowód twierdzenia. □

Podamy teraz kilka warunków koniecznych na to, aby $d(G^x) = d(G)+1$ oraz kilka warunków wystarczających na to, aby $d(G^x) = d(G)$.

Przypomnę, że symbolem u oznaczany jest wierzchołek będący kopią wierzchołka x w grafie G^x.

Własność 3.3.2. *Jeżeli $d(G^x) = d(G)+1$, to wierzchołki x oraz u należą do różnych zbiorów podziału domatycznego o mocy $d(G)+1$ grafu G^x.*

Dowód powyższej własności pomijamy, bowiem jest on analogiczny do dowodu górnego oszacowania liczby $d(G^x)$ z Twierdzenia 3.3.1.

Na mocy Własności 3.3.2 oraz definicji grafu G^x otrzymujemy

Wniosek 3.3.3. *Jeżeli $d(G^x) = d(G)+1$, to $d_G(x) \geq d(G)+1$.*

Twierdzenie 3.3.4. *Niech G będzie grafem domatycznie pełnym oraz $x \in V(G)$. Niech x będzie oryginałem w grafie G^x. Jeżeli $d_G(x) = \delta(G)$ lub dla każdego $y \in N_G(x)$ $d_G(y) \neq \delta(G)$, to $d(G^x) = d(G)$.*

Dowód. Z Twierdzenia 3.3.1 wynika, że $d(G^x) \geq d(G)$. Udowodnimy teraz, że $d(G^x) \leq d(G)$. Załóżmy najpierw, że $d_G(x) = \delta(G)$. Ponieważ x nie jest sąsiedni do u w G^x, to $d_{G^x}(x) = d_G(x) = \delta(G)$. Ponadto, $\delta(G^x) = d_{G^x}(x) = \delta(G)$. Ponieważ G jest grafem domatycznie pełnym, więc $\delta(G) = d(G) - 1$. Wobec tego $\delta(G^x) = d(G) - 1$. Tak więc na mocy Własności 2.1.1a), $d(G^x) \leq d(G)$. Pozostało wykazać, że dla każdego $y \in N_G(x)$ takiego, że $d_G(y) \neq \delta(G)$ mamy $d(G^x) \leq d(G)$. Ponieważ rozważania w tej części dowodu są identyczne do powyższych, więc je pomijamy. Tym samym teza twierdzenia jest prawdziwa. □

Wniosek 3.3.5. *Jeżeli x jest oryginałem w grafie G^x oraz $d_G(x) = \delta(G)$, to $d(G^x) \leq \delta(G) + 1$.*

Z Twierdzenia 3.3.1 oraz Wniosku 3.3.5 otrzymujemy następujący rezultat

Wniosek 3.3.6. *Jeżeli x jest oryginałem w grafie G^x i $d_G(x) = d(G) - 1$, to $d(G^x) = d(G)$.*

Twierdzenie 3.3.7. *Jeżeli x jest oryginałem w grafie G^x i $d_G(x) = d(G)$, to $d(G^x) = d(G)$.*

Dowód. Wobec Twierdzenia 3.3.1, $d(G^x) \geq d(G)$. Pokażemy teraz, że $d(G^x) \leq d(G)$. Przypuśćmy, że $d(G^x) \geq d(G) + 1$. Zatem na mocy Twierdzenia 3.3.1 mamy $d(G^x) = d(G) + 1$. To gwarantuje, że istnieje co najmniej jeden podział domatyczny, powiedzmy $\{V_1, \ldots, V_{d(G)+1}\}$ grafu G^x. Załóżmy, że $d_G(x) = d(G)$ i niech $N_G(x) = \{y_1, \ldots, y_{d(G)}\}$. Na mocy definicji grafu G^x, $N_{G^x}(x) = N_G(x)$. Zatem bez straty ogólności rozważań przyjmijmy, że $x \in V_1$ oraz $y_j \in V_{j+1}$ dla $j = 1, \ldots, d(G)$. Ponieważ $N_{G^x}(u) = N_{G^x}(x)$ oraz $N_{G^x}(x) = N_G(x)$, więc $N_{G^x}(u) = N_G(x)$. Zatem wierzchołek u musi należeć do zbioru V_1. Istotnie: gdyby $u \notin V_1$ i ponieważ $N_{G^x}(u) \cap V_1 = \emptyset$, to zbiór V_1 nie dominowałby wierzchołka u, co przeczy założeniu, że V_1 jest zbiorem dominującym grafu G. Oznacza to, że wierzchołki x oraz u należą do zbioru V_1 z podziału $\{V_1, \ldots, V_{d(G)+1}\}$, sprzeczność z tezą Własności 3.3.2. Reasumując, $d(G^x) = d(G)$, co należało dowieść. □

Twierdzenie 3.3.8. *Jeżeli* $\langle N_G(x)\rangle_G \simeq K_{d(G)+1}$, *to* $d(G^x) = d(G)$.

Dowód. Ponieważ $\langle N_G(x)\rangle_G \simeq K_{d(G)+1}$, to załóżmy, że $N_G(x) = \{y_1, \ldots, y_{d(G)+1}\}$. Na mocy Twierdzenia 3.3.1 jedynie dowiedziemy, że $d(G^x) \leq d(G)$. Przyjmijmy, że $d(G^x) \geq d(G) + 1$. Tak więc wobec Twierdzenia 3.3.1, $d(G^x) = d(G) + 1$. Zatem istnieje podział domatyczny $\{V_1, \ldots, V_{d(G)+1}\}$ grafu G^x. Bez straty ogólności niech $x \in V_1$. Wobec tego założenia oraz na mocy Własności 3.3.2 przyjmijmy, że $u \in V_2$. Ponieważ V_i jest zbiorem dominującym grafu G^x, więc x oraz u są sąsiednie do pewnego wierzchołka, powiedzmy $y_i \in V_i$, dla $i = 1, \ldots, d(G)+1$. Pokażemy teraz, że $V_2 \backslash \{u\}$ jest zbiorem dominującym grafu G. Niech $w \in V(G) \backslash V_2$. Jeżeli wierzchołek w nie jest sąsiedni w grafie G^x do wierzchołka u, to jest on sąsiedni w grafie G do pewnego wierzchołka ze zbioru $V_2 \backslash \{u\}$, bowiem V_2 jest zbiorem dominującym grafu G^x. Jeżeli natomiast wierzchołek w jest sąsiedni w grafie G^x do wierzchołka u, to jest on również sąsiedni w grafie G do wierzchołka x. Ponieważ $\langle N_G(x)\rangle_G \simeq K_{d(G)+1}$, to w jest sąsiedni w G do $y_2 \in V_2$. Zatem $V_2 \backslash \{u\}$ jest zbiorem dominującym grafu G. Ponadto, zbiory $V_1, V_3, V_4, \ldots, V_{d(G)+1}$ są zbiorami dominującymi grafu G. W rezultacie $\{V_1, V_2 \backslash \{u\}, V_3, \ldots, V_{d(G)+1}\}$ jest podziałem domatycznym grafu G. Skąd $d(G) \geq d(G) + 1$. Sprzeczność ta kończy dowód. □

W następnej kolejności rozważymy spójną liczbę domatyczną (def. str. 13) duplikacji wierzchołka w grafie. Przypomnijmy, że spójna liczba domatyczna jest dobrze określona dla każdego grafu spójnego. Co więcej, $\{V(G)\}$ jest spójnym podziałem domatycznym takiego grafu i wobec tego $d_c(G) \geq 1$. Jeżeli $|V(G)| = 1$, to G^x nie jest grafem spójnym. Z tego powodu w poniższych rozważaniach $|V(G)| \geq 2$. Nietrudno sprawdzić, że $d_c(K_n^x) = d_c(K_n) - 1 = n - 1$, dla $n \geq 2$.

Własność 3.3.9. *Niech* G *będzie grafem spójnym rzędu co najmniej 2 oraz* $G \neq K_n$. *Wtedy* $d_c(G) \leq d_c(G^x) \leq d_c(G) + 1$.

Dowód. Udowodnimy, że $d_c(G^x) \geq d_c(G)$. Jeżeli $d_c(G) = 1$, to nierówność zachodzi. Niech zatem $d_c(G) \geq 2$ i $G \neq K_n$. Rozważmy przypadki.

1. Niech x będzie wierzchołkiem nasyconym w G (tzn. wierzchołkiem sąsiednim do wszystkich pozostałych wierzchołków grafu G). Wybierzmy taki spójny podział domatyczny $\{V_1, \ldots, V_{d_c(G)}\}$ grafu G, że $V_1 = \{x\}$. Ponieważ $G \neq K_n$, więc załóżmy, że $|V_2| \geq 2$. Zatem niech $y, z \in V_2$. Ponieważ x dominuje każdy wierzchołek ze zbioru $V(G)$ w G oraz y dominuje u w G^x i x, y są wierzchołkami sąsiednimi w G, więc $\{x, y\}$ jest spójnym zbiorem dominującym grafu G^x. Co więcej, $(V_2 \backslash \{y\}) \cup \{u\}$ indukuje podgraf spójny grafu G^x. Ponadto, u dominuje każdy wierzchołek ze zbioru $V(G^x) \backslash \{x\}$ w G^x oraz z dominuje x w G^x. Dla każdego $i = 3, \ldots, d_c(G)$, do zbioru V_i należy wierzchołek sąsiedni do x, a zatem również do u. Otrzymujemy zatem spójny podział domatyczny $\{\{x, y\}, (V_2 \backslash \{y\}) \cup \{u\}, V_3, \ldots, V_{d_c(G)}\}$ grafu G^x. Oznacza to, że $d_c(G^x) \geq d_c(G)$.

2. Załóżmy, że x nie jest wierzchołkiem nasyconym w G oraz niech $\{V_1, \ldots, V_{d_c(G)}\}$ będzie spójnym podziałem domatycznym grafu G. Niech $x \in V_1$. Ponieważ $V_1 \neq \{x\}$, to przyjmijmy, że $w \in V_1$ i w jest wierzchołkiem sąsiednim do x w G. Na mocy definicji grafu G^x wierzchołek w jest sąsiedni do wierzchołka u w grafie G^x. Wobec tego $V_1 \cup \{u\}$ jest spójnym zbiorem dominującym grafu G^x. Ponadto, do każdego zbioru V_i, $2 \leq i \leq d_c(G)$ należy wierzchołek sąsiedni do x w G. Oznacza to, że ten sam wierzchołek jest sąsiedni do u w G^x. Stąd V_i, dla $i = 2, \ldots, d_c(G)$ jest spójnym zbiorem dominującym grafu G^x. Zatem $\{V_1 \cup \{u\}, V_2, \ldots, V_{d_c(G)}\}$ jest spójnym podziałem domatycznym grafu G^x i $d_c(G^x) \geq d_c(G)$.

Wykażemy teraz, że $d_c(G^x) \leq d_c(G) + 1$. Załóżmy, że $d_c(G^x) \geq d_c(G) + 2$ i niech $\{U_1, \ldots, U_{d_c(G)+2}\}$ będzie spójnym podziałem domatycznym grafu G^x. Rozważmy przypadki.

1. Bez straty ogólności rozważań załóżmy, że $x, u \in U_1$. Ponieważ U_1 indukuje podgraf spójny grafu G^x, wtedy co najmniej jeden wierzchołek sąsiedni do wierzchołków x oraz u należy do U_1. Zatem zbiór $U_1 \backslash \{u\}$ indukuje podgraf spójny grafu G oraz jest zbiorem dominującym grafu G, bowiem $N_G(x) = N_{G^x}(u)$. Ponadto, każdy zbiór U_i, $2 \leq i \leq d_c(G)+2$ jest spójnym zbiorem dominującym grafu G. Zatem $\{U_1 \backslash \{u\}, U_2, \ldots, U_{d_c(G)+2}\}$ jest spójnym podziałem domatycznym grafu G i $d_c(G) \geq d_c(G)+2$, sprzeczność.

2. Bez straty ogólności rozważań przypuśćmy, że $u \in U_1$, $x \in U_2$. Wobec tego $(U_1 \backslash \{u\}) \cup U_2, U_3, \ldots, U_{d_c(G)+2}$ są spójnymi zbiorami dominującymi grafu G. Zatem tworzą one spójny podział domatyczny grafu G i $d_c(G) \geq d_c(G)+1$, sprzeczność.

Otrzymane sprzeczności dowodzą, że $d_c(G^x) \leq d_c(G)+1$, co kończy dowód. $\square$

Załóżmy teraz, że x jest wierzchołkiem nasyconym w grafie G. Niech $\mathcal{V}^i = \{V_1^i, V_2^i, \ldots, V_{d_c(G)}^i\}$, $1 \leq i \leq k$ będzie rodziną spójnych podziałów domatycznych o mocy $d_c(G)$ grafu G taką, że $x \in V_{d_c(G)}^i$. Dla każdego V_j^i istnieje $U_j^i \subseteq V_j^i$ taki, że U_j^i jest najmniejszym spójnym zbiorem dominującym grafu G. Zatem $U_{d_c(G)}^i = \{x\}$. Oznaczmy: $a(G) = \max\{|V_{d_c(G)}^i| + \sum_{1 \leq j \leq d_c(G)-1} |V_j^i \backslash U_j^i| : 1 \leq i \leq k\} - 1$ oraz $Z_{d_c(G)}^i = V_{d_c(G)}^i \cup \bigcup_{1 \leq j \leq d_c(G)-1} (V_j^i \backslash U_j^i)$. Wtedy $\{U_1^i, \ldots, U_{d_c(G)-1}^i, Z_{d_c(G)}^i\}$ jest spójnym podziałem domatycznym grafu G. Ostatecznie,

$$a(G) = \max\{|Z_{d_c(G)}^i| : 1 \leq i \leq k\} - 1. \tag{3.3.1}$$

Twierdzenie 3.3.10. *Niech G będzie grafem spójnym rzędu co najmniej 3 oraz $G \neq K_n$. Jeżeli x jest wierzchołkiem nasyconym w grafie G, to* $d_c(G^x) = \begin{cases} d_c(G), & \text{\textit{jeżeli} } 0 \leq a(G) \leq 1 \text{ \textit{lub}} \\ d_c(G)+1, & \text{\textit{w przeciwnym przypadku.}} \end{cases}$

Dowód. Załóżmy, że $0 \leq a(G) \leq 1$ oraz $|V(G)| \geq 3$. Ponieważ $G \neq K_n$, więc na mocy Własności 3.3.9 $d_c(G^x) \geq d_c(G)$. Wykażemy teraz, że $d_c(G^x) \leq d_c(G)$. Przypuśćmy, że $d_c(G^x) \geq d_c(G)+1$. Stąd oraz na mocy Własności 3.3.9 otrzymujemy, że $d_c(G^x) = d_c(G)+1$. Nietrudno zauważyć, że $d_c(G^x) \geq 2$.

Jeżeli $d_c(G^x) = 2$, to $d_c(G) = 1$. Wówczas $\{V(G)\}$ jest jedynym spójnym podziałem domatycznym grafu G. Ponieważ $|V(G)| \geq 3$, więc $a(G) = |V(G)| - 1 \geq 2$, co przeczy założeniu.

Załóżmy teraz, że $d_c(G^x) \geq 3$, czyli $d_c(G) \geq 2$. Niech $\mathcal{W} = \{W_1, \ldots, W_{d_c(G)+1}\}$ będzie spójnym podziałem domatycznym grafu G^x. Jeżeli x, u należą do tego samego zbioru z podziału $\mathcal{W}$, to dowód prowadzimy identycznie jak w części *1* Własności 3.3.9. Przypuśćmy zatem bez straty ogólności rozważań, że $x \in W_1$, $u \in W_2$. Ponieważ x oraz u nie są sąsiednie w G^x, to $|W_i| \geq 2$, $i = 1, 2$. Wobec tego niech $y \in W_1$, $y \neq x$ oraz $z \in W_2$, $z \neq u$. Nie jest trudno sprawdzić, że zbiory $V_1 = \{x\}$, $V_2 = (W_1 \backslash \{x\}) \cup (W_2 \backslash \{u\}) \cup W_3$, $V_3 = W_4, \ldots, V_{d_c(G)} = W_{d_c(G)+1}$ tworzą spójny podział domatyczny grafu G. Ponieważ $y, z \in (W_1 \backslash \{x\}) \cup (W_2 \backslash \{u\})$, więc $a(G) \geq |V_2 \backslash W_3| = |(W_1 \backslash \{x\}) \cup (W_2 \backslash \{u\})| \geq 2$, co jest sprzeczne z założeniem.

Reasumując jeżeli $0 \leq a(G) \leq 1$, to $d_c(G^x) = d_c(G)$.

Pozostało udowodnić, że jeżeli $a(G) \geq 2$, to $d_c(G^x) = d_c(G) + 1$. Na mocy Własności 3.3.9 wystarczy znaleźć spójny podział domatyczny o mocy $d_c(G) + 1$ grafu G^x.

1. Załóżmy, że $d_c(G) = 1$. Ponieważ $|V(G)| \geq 3$, to niech $w, v \in V(G)$, $w \neq x$, $v \neq x$. Wówczas zbiory $\{x, w\}$, $(V(G) \backslash \{x, w\}) \cup \{u\}$ tworzą spójny podział domatyczny o mocy 2 grafu G^x.

2. Załóżmy, że $d_c(G) \geq 2$. Niech $\{U_1, \ldots, U_{d_c(G)-1}, Z_{d_c(G)}\}$ będzie spójnym podziałem domatycznym grafu G definiującym liczbę $a(G)$. Ponieważ $a(G) \geq 2$, to $|Z_{d_c(G)}| \geq 3$, przy czym $x \in Z_{d_c(G)}$. Zatem niech $a \in Z_{d_c(G)}$, $a \neq x$. Wówczas $\{U_1, \ldots, U_{d_c(G)-1}, Z_{d_c(G)} \backslash \{a\}, \{u, a\}\}$ jest spójnym podziałem domatycznym o mocy $d_c(G) + 1$ grafu G^x. Tym samym twierdzenie zostało udowodnione. $\square$

Z dowodu powyższego twierdzenia natychmiast wynika

Wniosek 3.3.11. *Niech G będzie grafem spójnym rzędu co najmniej 3. Jeżeli x jest wierzchołkiem nasyconym w grafie G oraz $d_c(G) = 1$, to $d_c(G^x) = 2$.*

3.4 GRAFY DOMATYCZNIE KRYTYCZNE

E. J. Cockayne w [2] oraz B. Zelinka w [24] rozważali grafy domatycznie krytyczne. Graf G jest nazywany *grafem domatycznie krytycznym*, jeżeli dla dowolnej krawędzi e grafu G zachodzi $d(G-e) < d(G)$, gdzie $d(G)$ jest liczbą domatyczną grafu G. W tym podrozdziale rozważane są grafy k-domatycznie krytyczne oraz k-krotnie domatycznie krytyczne. Graf G nazywamy grafem *k-domatycznie krytycznym*, jeżeli $d^k(G-e) < d^k(G)$ dla dowolnej krawędzi e grafu G. Graf G nazywamy grafem *k-krotnie domatycznie krytycznym*, jeżeli $d_k(G-e) < d_k(G)$ dla dowolnej krawędzi e grafu G. Podamy pełne charakteryzacje grafów k-domatycznie krytycznych i k-krotnie domatycznie krytycznych. W tym celu symbolem $H(V_i, V_j)$ będziemy oznaczali graf dwudzielny H taki, że $V(H) = V_i \cup V_j$, $V_i, V_j \neq \emptyset$.

Twierdzenie 3.4.1. *Graf G jest grafem k-domatycznie krytycznym wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego k-tego podziału domatycznego $\{V_1, \ldots, V_{d^k(G)}\}$ grafu G zachodzą następujące warunki:*
(i) dla $i \neq j$ $\langle V_i \cup V_j\rangle_G \simeq H(V_i, V_j)$, $(i, j = 1, \ldots, d^k(G))$ oraz
(ii) jeżeli $xy \in E(\langle V_i \cup V_j\rangle_G)$, to $d_{\langle V_i \cup V_j\rangle_G}(x) = k$ oraz $d_{\langle V_i \cup V_j\rangle_G}(y) \geq k$.

Dowód. Załóżmy, że G jest grafem k-domatycznie krytycznym oraz niech $\{V_1, \ldots, V_{d^k(G)}\}$ będzie jego dowolnym k-tym podziałem domatycznym.

Aby wykazać, że warunek (i) zachodzi wystarczy udowodnić, że V_i jest zbiorem niezależnym grafu G dla dowolnego, ustalonego i, $i \in \{1, \ldots, d^k(G)\}$. Przyjmijmy, że istnieje krawędź e incydentna z dwoma wierzchołkami należącymi do zbioru V_i w grafie G. Wówczas zbiory $V_1, \ldots, V_{d^k(G)}$ tworzą k-ty podział domatyczny grafu $G-e$ i $d^k(G-e) \geq d^k(G)$. Oznacza to, że G nie jest grafem k-domatycznie krytycznym, co przeczy założeniu. Zatem V_i jest zbiorem niezależnym grafu G.

Załóżmy, że $xy \in E(\langle V_i \cup V_j\rangle_G)$, $i, j \in \{1, \ldots, d^k(G)\}$, $i \neq j$. Zatem $d_{\langle V_i \cup V_j\rangle_G}(x) \geq k$ oraz $d_{\langle V_i \cup V_j\rangle_G}(y) \geq k$, bowiem V_i, V_j są k-tymi zbiorami dominującymi grafu G. Wykażemy teraz, że stopień jednego z wierzchołków x, y grafu $\langle V_i \cup V_j\rangle_G$ jest równy

k. Przyjmijmy, że $d_{\langle V_i \cup V_j \rangle_G}(x) > k$ oraz $d_{\langle V_i \cup V_j \rangle_G}(y) > k$, czyli $d_G(x) > k$ oraz $d_G(y) > k$. Wobec tego jeżeli usuniemy krawędź xy z grafu G, to $d_G(x) \geq k$ oraz $d_G(y) \geq k$. Zatem każdy ze zbiorów $V_1, \ldots, V_{d^k(G)}$ jest k-tym zbiorem dominującym grafu $G - xy$ i zbiory te tworzą k-ty podział domatyczny grafu $G - xy$. Oznacza to, że $d^k(G - xy) \geq d^k(G)$, co przeczy założeniu i warunek (ii) zachodzi.

Załóżmy, że zachodzą warunki (i) oraz (ii) i G nie jest grafem k-domatycznie krytycznym, czyli $d^k(G - e) \geq d^k(G)$ dla pewnej krawędzi $e \in E(G)$. Zatem istnieje k-ty podział domatyczny $\{D_1, \ldots, D_{d^k(G)}\}$ grafu $G - e$. Niech $e = xy$. Bez straty ogólności rozważań przyjmijmy, że $x \in D_1$ oraz $y \in D_2$ na mocy warunku (i). Nie jest trudno zauważyć, że zbiory $D_1, \ldots, D_{d^k(G)}$ tworzą k-ty podział domatyczny grafu G. Co więcej, $d_{\langle D_1 \cup D_2 \rangle_G}(x) = d_{\langle D_1 \cup D_2 \rangle_{G-e}}(x) + 1 = k + 1 > k$ oraz $d_{\langle D_1 \cup D_2 \rangle_G}(y) = d_{\langle D_1 \cup D_2 \rangle_{G-e}}(y) + 1 \geq k + 1 > k$, co jest sprzeczne z warunkiem (ii). Tym samym twierdzenie zostało udowodnione. □

Na mocy tego twierdzenia otrzymujemy następujący wniosek.

Wniosek 3.4.2. *Jeżeli G jest grafem domatycznie krytycznym ($k = 1$), to graf $\langle V_i \cup V_j \rangle_G$ jest gwiazdą lub sumą rozłączną gwiazd. Jeżeli $k \geq 2$, to każda komponenta spójności zawiera cykl.*

Postępując analogicznie jak w dowodzie Twierdzenia 3.4.1 można udowodnić następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.4.3. *Graf G jest grafem k-krotnie domatycznie krytycznym wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego k-krotnego podziału domatycznego $\{V_1, \ldots, V_{d_k(G)}\}$ grafu G zachodzą warunki:*
(i) jeżeli $xy \in E(\langle V_i \rangle_G)$, to $d_{\langle V_i \rangle_G}(x) = k - 1$ oraz $d_{\langle V_i \rangle_G}(y) \geq k - 1$, dla $i = 1, \ldots, d_k(G)$ oraz
(ii) jeżeli $x \in V_i$ oraz $y \in V_j$, to $d_{\langle V_i \cup V_j \rangle_G}(x) = k$ oraz $d_{\langle V_i \cup V_j \rangle_G}(y) \geq k$, dla dowolnych i, j, $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq d_k(G)$.

Wniosek 3.4.4. *Niech G będzie grafem domatycznie krytycznym. Wówczas każdy zbiór V_i jest zbiorem niezależnym grafu $\langle V_i \rangle_G$.*

Rozdział 4

PROBLEMY TYPU NORDHAUSA-GADDUMA

W tej części pracy rozważamy problemy typu Nordhausa-Gadduma dla liczby *ps*-domatycznej, k-tej liczby domatycznej oraz uzupełniającej liczby domatycznej grafów. W pracach [12], [4] oraz [9] rozwiązany został problem typu Nordhausa-Gadduma dla liczby domatycznej grafu.

4.1 PROBLEMY TYPU NORDHAUSA-GADDUMA

Twierdzenie 4.1.1. *Dla dowolnego grafu G rzędu $n \geq 1$, $d_p(G) + d_p(\overline{G}) \leq n + 1 + \delta(G) - \Delta(G)$.*

Dowód. Ponieważ $d_p(G) \leq d(G)$ oraz $d(G) \leq \delta(G)+1$, to $d_p(G) \leq \delta(G)+1$. Zatem $d_p(G) + d_p(\overline{G}) \leq \delta(G) + \delta(\overline{G}) + 2$. Jest oczywiste, że $n = \Delta(G) + \delta(\overline{G}) + 1$, czyli $\delta(\overline{G}) = n - \Delta(G) - 1$. W konsekwencji, $d_p(G) + d_p(\overline{G}) \leq \delta(G) + n - \Delta(G) - 1 + 2 = n + 1 + \delta(G) - \Delta(G)$. □

Wniosek 4.1.2. *Dla dowolnego grafu regularnego G rzędu $n \geq 1$, $d_p(G) + d_p(\overline{G}) \leq n + 1$, a równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $G = K_n$ lub $\overline{G} = K_n$.*

Dowód. Niech G będzie grafem r-regularnym. Wówczas z Twierdzenia 4.1.1 otrzymujemy, że $d_p(G) + d_p(\overline{G}) \leq n + 1$.

Udowodnimy teraz, że $d_p(G)+d_p(\overline{G})=n+1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $G=K_n$ lub $\overline{G}=K_n$. Nie jest trudno sprawdzić, że jeżeli $G=K_n$ lub $\overline{G}=K_n$, to $d_p(G)+d_p(\overline{G})=n+1$. Przypuśćmy teraz, że G jest grafem, dla którego $d_p(G)+d_p(\overline{G})=n+1$. Załóżmy najpierw, że $d_p(G)=1$ lub $d_p(\overline{G})=1$.

Jeżeli $d_p(G)=1$, to $d_p(\overline{G})=n$, a to jest możliwe jeżeli $\overline{G}=K_n$. Podobnie jeżeli $d_p(\overline{G})=1$, to $d_p(G)=n$, skąd $G=K_n$.

Przyjmijmy teraz, że $d_p(G)\geq 2$ oraz $d_p(\overline{G})\geq 2$. Oznacza to, że $G\neq K_n$ oraz $\overline{G}\neq K_n$. Ponieważ $G\neq K_n$, to $r\leq n-2$. Czyli w grafie G nie ma żadnego wierzchołka nasyconego. Stąd $\gamma_p(G)\geq 2$. Zatem $d_p(G)\leq \frac{n}{\gamma_p(G)}\leq \frac{n}{2}$. Analogicznie pokazujemy, że $d_p(\overline{G})\leq \frac{n}{2}$ (bowiem $\overline{G}$ jest grafem $(n-1-r)$-regularnym). Reasumując, $d_p(G)+d_p(\overline{G})\leq n<n+1$, sprzeczność z założeniem. Oznacza to, że $d_p(G)+d_p(\overline{G})=n+1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $G=K_n$ lub $\overline{G}=K_n$, co należało dowieść. □

Z Twierdzenia 4.1.1 otrzymujemy następujący

Wniosek 4.1.3. *Niech G będzie grafem rzędu $n\geq 1$. Jeżeli G nie jest grafem regularnym, to $d_p(G)+d_p(\overline{G})\leq n$.*

Zauważmy, że jeżeli $G=K_n-e$, gdzie e jest dowolną krawędzią grafu K_n, to $d_p(G)+d_p(\overline{G})=n$.

Rozważmy teraz grafy spójne G takie, że $diam(G)>3$. Niech $\mathcal{Z}=\{P_5,P_6,T_6^*,T_6^{\triangledown}\}$ będzie rodziną grafów, przy czym $V(T_6^*)=V(T_6^{\triangledown})=\{x_1,\ldots,x_6\}$ oraz $E(T_6^*)=\{x_1x_2,x_2x_3,x_3x_4,x_4x_5,x_2x_6\}$, $E(T_6^{\triangledown})=E(T_6^*)\backslash\{x_2x_6\}\cup\{x_3x_6\}$.

Twierdzenie 4.1.4. *Jeżeli $diam(G)>3$ oraz G jest grafem spójnym, to $d_p(G)+d_p(\overline{G})\leq n-2$, a równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $G\in\mathcal{Z}$.*

Dowód. Załóżmy, że $diam(G)>3$. Wówczas na mocy Własności 3.1.5c) oraz Własności 3.1.5d) ze str 76, $d_p(G)=1$. Wobec założenia istnieją co najmniej dwa wierzchołki, powiedzmy u,z w grafie G takie, że $d_G(u,z)=4$ oraz $uvwxz$ jest najkrótszą drogą od wierzchołka u do wierzchołka z w grafie G. Wobec tego zbiory $\{u\}$, $\{v\}$,$\{w\}$, $\{x\}$, $\{z\}$ nie są zbiorami ps-dominującymi grafu $\overline{G}$. Oznacza to, że jednoelementowych zbiorów ps-dominujących grafu $\overline{G}$ może być co najwyżej $n-5$. Wówczas wierzchołki u, v, w, x, z mogą być elementami co najwyżej dwóch zbiorów ps-dominujących grafu $\overline{G}$. Zatem $d_p(\overline{G}) \leq n-3$, a $d_p(G)+d_p(\overline{G}) \leq n-2$.

Wykażemy, że jeżeli $G \in \mathcal{Z}$, to $d_p(G)+d_p(\overline{G}) = n-2$. Niech $G \in \mathcal{Z}$. Oznacza to, że $G = P_5$ lub $G = P_6$ lub $G = T_6^*$ lub $G = T_6^\triangledown$. Nie jest trudno sprawdzić, że $d_p(P_5) = d_p(P_6) = d_p(T_6^*) = d_p(T_6^\triangledown) = 1$ oraz $d_p(\overline{P_5}) = 2$, $d_p(\overline{P_6}) = d_p(\overline{T_6^*}) = d_p(\overline{T_6^\triangledown}) = 3$ i dla każdego z grafów G $d_p(G)+d_p(\overline{G}) = n-2$.

Pokażemy teraz, że tylko dla grafów należących do rodziny $\mathcal{Z}$ zachodzi powyższa równość. Przypuśćmy, że $d_p(G)+d_p(\overline{G}) = n-2$. Zatem $d_p(\overline{G}) = n-3$, bowiem $d_p(G) = 1$ na mocy Własności 3.1.5c), Własności 3.1.5d) i założenia $diam(G) > 3$. Ponieważ G jest grafem spójnym i $diam(G) > 3$, to w grafie G istnieje droga o pięciu wierzchołkach, skąd $n \geq 5$. Pokażemy, że $n \leq 6$. Załóżmy, że $n \geq 7$. Tak więc niech $n = 7+k$, $k \geq 0$. Oznacza to, że $d_p(\overline{G}) = 4+k$. Wobec tego $k+1$ wierzchołków grafu $\overline{G}$ tworzy $k+1$ zbiorów ps-dominujących grafu $\overline{G}$. Zatem każdy z tych wierzchołków jest wierzchołkiem nasyconym w grafie $\overline{G}$. To gwarantuje, że każdy z tych $k+1$ wierzchołków jest wierzchołkiem izolowanym w G. Stąd G nie jest grafem spójnym, co jest sprzeczne z założeniem. Oznacza to, że nie istnieje graf spójny G rzędu większego niż 6, dla którego $d_p(G)+d_p(\overline{G}) = n-2$.

Na koniec nie jest trudno sprawdzić, że grafy $P_5, P_6, T_6^*, T_6^\triangledown$ są wszystkimi możliwymi grafami spójnymi G rzędu 5 lub 6 takimi, że $diam(G) > 3$ oraz $d_p(G)+d_p(\overline{G}) = n-2$. Tym samym dowód został zakończony. $\square$

Wniosek 4.1.5. *Jeżeli $diam(G) > 3$ oraz G jest grafem spójnym, to $d_p(\overline{G}) \leq n-3$, a równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $G \in \mathcal{Z}$.*

Twierdzenie 4.1.6. *Niech G będzie dowolnym grafem. Wtedy $\gamma_p(G)+d_p(G) \leq n+1$, a równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $G = K_n$ lub $\overline{G} = K_n$.*

Dowód. Niech G będzie dowolnym grafem. Ponieważ $d_p(G) \leq \frac{n}{\gamma_p(G)}$, to $\gamma_p(G) + d_p(G) \leq \frac{n}{d_p(G)} + d_p(G)$ i $1 \leq d_p(G) \leq n$. Ponieważ funkcja $f(x) = \frac{n}{x} + x$ jest malejąca dla $1 \leq x \leq \sqrt{n}$, a rosnąca dla $x \geq \sqrt{n}$, to $\frac{n}{d_p(G)} + d_p(G) \leq n + 1$ i $\gamma_p(G) + d_p(G) \leq n + 1$.

Nie jest trudno pokazać, że jeżeli $G = K_n$ lub $\overline{G} = K_n$, to $\gamma_p(G)+d_p(G) = n+1$. Wykażemy, że jedynie dla grafów $G = K_n$ lub $\overline{G} = K_n$ powyższa równość zachodzi. Przyjmijmy, że G jest grafem, dla którego $\gamma_p(G) + d_p(G) = n + 1$. Załóżmy, że $\gamma_p(G) = 1$ lub $d_p(G) = 1$. Jeżeli $\gamma_p(G) = 1$, to $d_p(G) = n$. To jest możliwe jedynie dla $G = K_n$. Jeżeli $d_p(G) = 1$, to $\gamma_p(G) = n$. Niech $x_1, x_2 \in V(G)$ oraz $x_1x_2 \in E(G)$. Wówczas $V(G)\backslash\{x_1\}$ jest zbiorem ps-dominującym grafu G i $\gamma_p(G) \leq |V(G)\backslash\{x_1\}| = n - 1$, sprzeczność z założeniem. Oznacza to, że $\overline{G} = K_n$. Jeżeli $\gamma_p(G) \geq 2$ oraz $d_p(G) \geq 2$, to wobec nierówności $d_p(G) \leq \frac{n}{\gamma_p(G)}$ otrzymujemy $\gamma_p(G) + d_p(G) \leq \frac{n}{d_p(G)} + \frac{n}{\gamma_p(G)} \leq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} < n + 1$, sprzeczność. W konsekwencji, jeżeli $\gamma_p(G) + d_p(G) = n + 1$, to $G = K_n$ lub $\overline{G} = K_n$, co kończy dowód. □

Rozwiążemy teraz problem typu Nordhausa-Gadduma dla k-tej liczby domatycznej grafu (def. str. 13). W tym celu wykorzystamy następującą własność.

Własność 4.1.7. [25] *Dla dowolnego grafu G, $d^k(G) \leq \left\lfloor \frac{\delta(G)}{k} \right\rfloor + 1$.*

Własność 4.1.8. *Dla dowolnego grafu G, $d^k(G) + d^k(\overline{G}) \leq \frac{n-\Delta(G)+\delta(G)-1}{k} + 2$.*

Dowód. Na mocy Własności 4.1.7, $d^k(G) \leq \frac{\delta(G)}{k} + 1$. Zatem $d^k(G) + d^k(\overline{G}) \leq \frac{\delta(G)+\delta(\overline{G})}{k} + 2$. Jest oczywiste, że $n = \delta(\overline{G}) + \Delta(G) + 1$, czyli $\delta(\overline{G}) = n - \Delta(G) - 1$. Wobec tego $d^k(G) + d^k(\overline{G}) \leq \frac{\delta(G)+n-\Delta(G)-1}{k} + 2$, co należało wykazać. □

Wykorzystując metodę dowodzenia z Twierdzenia 2 oraz z Twierdzenia 3 z [10] oraz metody dowodzenia twierdzeń z pracy [13] podamy górne oszacowanie dla $\gamma^k(G) + d^k(G)$.

Twierdzenie 4.1.9. *Niech $k \geq 2$ oraz $d^k(G) \geq 2$. Wtedy $\gamma^k(G) + d^k(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2$, a równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy:*
(i) $d^k(G) = 2$ oraz $\gamma^k(G) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ lub
(ii) $\gamma^2(G) = 2$ oraz $d^2(G) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ lub
(iii) $k = 2$, $n = 9$ oraz $d^2(G) = \gamma^2(G) = 3$ lub
(iv) $k = 3$, $n = 9$ oraz $d^3(G) = \gamma^3(G) = 3$.

Dowód. Niech $k \geq 2$ oraz niech G będzie grafem, dla którego $d^k(G) \geq 2$. Ponieważ $d^k(G) \leq \frac{n}{\gamma^k(G)}$, więc $\gamma^k(G) + d^k(G) \leq \frac{n}{d^k(G)} + d^k(G)$. Zauważmy, że $2 \leq d^k(G) \leq \frac{n}{k}$, bowiem $d^k(G) \leq \frac{n}{\gamma^k(G)}$ i $\gamma^k(G) \geq k$.

Z własności funkcji $f(x)$ z dowodu Twierdzenia 4.1.6 wynika, że $\frac{n}{d^k(G)} + d^k(G) \leq \max\{\frac{n}{2} + 2, \frac{n}{n/k} + \frac{n}{k}\}$. Ponieważ $d^k(G) \geq 2$, $\gamma^k(G) \geq k$ oraz $\gamma^k(G) \cdot d^k(G) \leq n$, więc $n \geq 2k$. Stąd i z założenia $k \geq 2$ otrzymujemy $\frac{n}{2} + 2 \geq \frac{n}{k} + k$. Zatem $\frac{n}{d^k(G)} + d^k(G) \leq n/2 + 2$, czyli $\gamma^k(G) + d^k(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2$.

Nie jest trudno zauważyć, że każdy z warunków (i)-(iv) implikuje równość $\gamma^k(G) + d^k(G) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2$. Niech teraz G będzie grafem takim, że $d^k(G) \geq 2$, dla $k \geq 2$ oraz $\gamma^k(G) + d^k(G) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2$. Załóżmy, że $\gamma^k(G) = 2$ lub $d^k(G) = 2$. Jeżeli $d^k(G) = 2$, to $\gamma^k(G) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ i warunek (i) zachodzi. Jeżeli $\gamma^k(G) = 2$, to $d^k(G) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Co więcej, $k \leq 2$, bowiem $\gamma^k(G) \geq k$. Zatem z założenia, że $k \geq 2$ otrzymujemy $k = 2$ i $\gamma^2(G) = 2$ oraz $d^2(G) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Zatem warunek (ii) jest spełniony.

Jeżeli $\gamma^k(G) \geq 4$ oraz $d^k(G) \geq 4$, to $\gamma^k(G) + d^k(G) \leq \frac{n}{d^k(G)} + \frac{n}{\gamma^k(G)} \leq \frac{n}{4} + \frac{n}{4} < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2$, co jest sprzeczne z założeniem, że $\gamma^k(G) + d^k(G) = \lfloor n/2 \rfloor + 2$.

Pozostaje rozważyć przypadek, że $\gamma^k(G) = 3$ i $d^k(G) \geq 3$ lub $d^k(G) = 3$ i $\gamma^k(G) \geq 3$. Jeżeli $\gamma^k(G) = 3$, to $d^k(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$, bowiem $\gamma^k(G) \cdot d^k(G) \leq n$. Jeżeli $d^k(G) = 3$, to $\gamma^k(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$. Wobec powyższego mamy $\gamma^k(G) + d^k(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 3$, czyli $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2 = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 3$ lub równoważnie $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor = 1$.

Równość ta oznacza, że jeżeli $n = 6t$ lub $n = 6t + 1$ lub $n = 6t + 3$, $t \geq 0$, to

$t = 1$. Jeżeli natomiast $n = 6t + 2$ lub $n = 6t + 4$ lub $n = 6t + 5$, $t \geq 0$, to $t = 0$. Zatem $n \in \{2, 4, 5, 6, 7, 9\}$. Ponieważ $\gamma^k(G) \cdot d^k(G) \leq n$ i $\gamma^k(G) \geq 3$ i $d^k(G) \geq 3$, to $n \geq 9$. Czyli $n = 9$. Wówczas $\gamma^k(G) + d^k(G) = 6$ a skoro $\gamma^k(G) = 3$ lub $d^k(G) = 3$, to $\gamma^k(G) = d^k(G) = 3$. Oznacza to, że $k \leq 3$, a wobec założenia $k \geq 2$. Tym samym warunki (iii) i (iv) są spełnione i dowód został zakończony. $\square$

Zauważmy, że warunek (iv) zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy graf 6-regularny rzędu $n = 9$ jest podgrafem spinającym (niekoniecznie właściwym) grafu G.

Rozważymy teraz sumę $\gamma_{cp}(G) + d_{cp}(G)$. Przypomnę, że $\gamma_{cp}(G)$ oznacza moc najmniejszego uzupełniającego zbioru dominującego grafu G, a $d_{cp}(G)$ oznacza uzupełniającą liczbę domatyczną grafu G. W dowodzie Twierdzenia 4.1.11 wykorzystamy następujący rezultat.

Własność 4.1.10. *a)* [28] *Niech G będzie grafem, którego dopełnienie $\overline{G}$ nie jest grafem spójnym. Wówczas $d_{cp}(G) = d(\overline{G})$.*
b) [19] *$d(G) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy G ma co najmniej jeden wierzchołek izolowany.*

Twierdzenie 4.1.11. *Niech G będzie dowolnym grafem. Wówczas $\gamma_{cp}(G)+d_{cp}(G) \leq n + 1$, a równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $G = K_n$ lub $\overline{G} = K_n$.*

Dowód. Nie jest trudno sprawdzić, że dla grafów rzędu 1,2 i 3 twierdzenie jest prawdziwe. Rozważmy zatem graf G rzędu co najmniej 4. Na mocy definicji uzupełniającej liczby domatycznej grafu otrzymujemy $\gamma_{cp}(G) + d_{cp}(G) \leq \frac{n}{d_{cp}(G)} + d_{cp}(G)$ i $1 \leq d_{cp}(G) \leq n/2$. Ponieważ funkcja $f(x) = \frac{n}{x} + x$ jest malejąca dla $1 \leq x \leq \sqrt{n}$, a rosnąca dla $x \geq \sqrt{n}$, to $\frac{n}{d_{cp}(G)} + d_{cp}(G) \leq \max\{n+1, \frac{1}{2}n+2\} = n+1$. Zatem $\gamma_{cp}(G) + d_{cp}(G) \leq n + 1$.

Nietrudno pokazać, że dla $G = K_n$ lub $\overline{G} = K_n$ zachodzi $\gamma_{cp}(G)+d_{cp}(G) = n+1$. Załóżmy teraz, że $\gamma_{cp}(G)+d_{cp}(G) = n+1$. Ponieważ $d_{cp}(G) \leq \frac{n}{2}$, więc $\gamma_{cp}(G) \geq \frac{n}{2}+1$. Wobec tego $d_{cp}(G) = 1$. Zatem $\gamma_{cp}(G) = n$ wobec założenia $\gamma_{cp}(G) + d_{cp}(G) = n+1$.

Jeżeli G nie jest grafem spójnym, to na mocy Własności 4.1.10a), $d(G) = 1$. Czyli G ma co najmniej jeden wierzchołek izolowany, powiedzmy x_1 wobec Własności 4.1.10b). Załóżmy, że $x_2x_3 \in E(G)$, gdzie $x_2, x_3 \in V(G)$. Ponieważ $x_2x_3 \in E(G)$ i $x_1x_3 \notin E(G)$, to $V(G)\backslash\{x_3\}$ jest uzupełniającym zbiorem dominującym grafu G. Zatem $\gamma_{cp}(G) \leq |V(G)\backslash\{x_3\}| = n-1 < n$, co przeczy równości $\gamma_{cp}(G) = n$. Otrzymana sprzeczność oznacza, że $G = \overline{K_n}$, czyli $\overline{G} = K_n$.
Jeżeli G jest grafem spójnym i $G \neq K_n$, to istnieją w grafie G takie dwa wierzchołki x, y, że $xy \notin E(G)$. Zbiór $V(G)\backslash\{x\}$ jest uzupełniającym zbiorem dominującym grafu G. Istotnie: ponieważ G jest grafem spójnym, to wierzchołek x musi być sąsiedni do pewnego wierzchołka ze zbioru $V(G)\backslash\{x\}$ w grafie G. Ponadto, wierzchołek $y \in V(G)\backslash\{x\}$ nie jest sąsiedni do wierzchołka x w grafie G. W konsekwencji, $\gamma_{cp}(G) \leq |V(G)\backslash\{x\}| = n - 1 < n$, sprzeczność, bowiem $\gamma_{cp}(G) = n$. Ostatecznie, $G = K_n$, co kończy dowód. $\square$

Bibliografia

[1] G. J. Chang, *The domatic number problem*, Discrete Mathematics **125** (1994), 115–122.

[2] E. J. Cockayne, *Domination in undirected graphs - a survey.*, In: Theory and Applications of Graphs, Proc. Michigan 1976, ed. by Y. Alavi and D. R. Lick (Springer-Verlang Berlin-Heldelberg-New York), New York, 1978 (141-147).

[3] E. J. Cockayne, R. M. Dawes, and S. T. Hedetniemi, *Total domination in graphs*, Networks **10** (1980), 211–219.

[4] E. J. Cockayne and S. T. Hedetniemi, *Towards a theory of domination in graphs*, Networks **7** (1977), 247–261.

[5] P. Dankelmann and N. Calkin, *The Domatic Number of Regular Graphs*, Ars Combinatoria **73** (2004), 247–255.

[6] J. E. Dunbar, T. W. Haynes, and M. A. Henning, *The codomatic number of a cubic graph*, JCMCC **32** (2000), 139–147.

[7] M. R. Garey and D. S. Johnson, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, Freeman, San Francisco, CA, 1979.

[8] R. L. Graham, D. E. Knuth, and O. Patashnik, *Concrete mathematics. A foundation for computer science*, Addition-Wesley Publishing Company, Inc. 01867, USA, 1994.

[9] F. Harary and T. W. Haynes, *Nordhaus-Gaddum inequalities for domination in graphs*, Discrete Mathematics **155** (1996), 99–105.

[10] F. Harary, T. W. Haynes, and H. Skovera, *The k-tuple domatic number of a graph*, Math. Slovaca **48** (1998), no. 2, 161–166.

[11] B. L. Hartnell and D. F. Rall, *Connected domatic number in planar graphs*, Czech. Math. J. **51** (2001), no. 126, 173–179.

[12] T. W. Haynes and M. A. Henning, *The domatic numbers of factors of graphs*, Ars Combinatoria **56** (2000), 161–173.

[13] T. W. Haynes and P. J. Slater, *Paired-domination and the paired-domatic number*, Congr. Numer. **109** (1995), 67–72.

[14] S. T. Hedetniemi and R. Laskar, *Connected domination in graphs*, Graph Theory and Combinatorics. Academic Press, London-New York (1984), 209–217.

[15] M. A. Henning and J. E. Maritz, *Stratification and domination in graphs II*, Discrete Mathematics **286** (2004), 203–211.

[16] M. Kijewska, *Domatic number of graph products*, praca wysłana do recenzji do Journal of Mathematics and Applications.

[17] ———, *Domatic number of some products of two graphs*, praca wysłana do recenzji do Graph Theory Notes of New York.

[18] ———, *Total numbers of domatic partitions of special graphs*, praca przyjęta do druku w Graph Theory Notes of New York **LIV** (2008).

[19] O. Ore, *Theory of Graphs*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 38, Providence, 1962.

[20] H. Prodinger and R. F. Tichy, *Fibonacci numbers of graphs*, The Fibonacci Quarterly **20** (1982), no. 1, 16–21.

[21] D. F. Rall, *Domatically critical and domatically full graphs*, Discrete Mathematics **86** (1990), 81–87.

[22] D. Rautenbach and L. Volkmann, *The domatic number of block-cactus graphs*, Discrete Mathematics **187** (1998), 185–193.

[23] P. D. Vestergaard and B. Zelinka, *Cut-vertices and domination in graphs*, Math. Bohemica **120** (1995), no. 2, 135–143.

[24] B. Zelinka, *Domatically critical graphs*, Czech. Math. J. **30** (1980), no. 105, 486–489.

[25] ———, *On k-ply domatic numbers of graphs*, Math. Slovaca **34** (1984), no. 3, 313–318.

[26] ———, *Bichromaticity and domatic number of a bipartite graph*, Casopis Pest. Mat. **110** (1985), no. 207, 113–115.

[27] ———, *Connected domatic number of a graph*, Math. Slovaca **36** (1986), no. 4, 387–392.

[28] ———, *Complementarily domatic number of a graph*, Math. Slovaca **38** (1988), no. 1, 27–32.

[29] ———, *Total domatic number of cacti*, Math. Slovaca **38** (1988), no. 3, 207–214.

[30] ———, *Domatic numbers of lattice graphs*, Czech. Math. J. **40** (1990), no. 115, 113–115.

[31] ———, *Regular totally domatically full graphs*, Discrete Mathematics **86** (1990), 71–79.

[32] ———, *Location-domatic number of a graph*, Math. Bohemica **123** (1998), no. 1, 67–71.

[33] ———, *Point-set domatic numbers of graphs*, Math. Bohemica **124** (1999), no. 1, 77–82.

[34] ______, *Induced-paired domatic number of graphs*, Math. Bohemica **127** (2002), no. 4, 591–596.

[35] ______, *Domination in bipartite graphs and in their complements*, Czech. Math. J. **53** (2003), no. 128, 141–147.

Indeks

Rysunki