

Zbigniew Siwoń, Janusz Stanisławski

## SEZONOWY, LINIOWY MODEL PROCESU POBORU WODY W MIASTACH

### 1. Wstęp

Bieżące i krótkoterminowe prognozy zapotrzebowania na wodę spełniają istotną rolę w komputerowo wspomaganym optymalnym sterowaniu wielozbiornikowymi, dużymi, szczególnie grupowymi systemami wodociągowymi. Prognozy te są także podstawą do wypracowywania optymalnych poleceń operacyjnych w kierowaniu procesami produkcji wody. Są one określane z wyprzedzeniem od jednej godziny do roku i stanowią dane wyjściowe dla programów symulacyjnych możliwe przyszłe stany systemu zaopatrzenia w wodę, które z kolei są wykorzystywane w algorytmach sterowania do wyznaczenia sterowania optymalnego. Dokładność prognoz określa jakość sterowania. Celem sterowania jest dystrybucja i sterowanie przesyłem oraz dystrybucja dyspozycyjnych zasobów wody. Natomiast istotą optymalnego sterowania w systemach zaopatrzenia w wodę miast jest najtańsze i racjonalne eksploataowanie systemu wodociągowego z uwzględnieniem m.in. kosztów uzdatniania wody oraz kosztów energii elektrycznej zużywanej na jej pompowanie [6,7].

Ponadto komputerowa symulacja umożliwia zmniejszenia strat wody spowodowanych występowaniem nadmiernych ciśnień w sieci oraz awariami przewodów [5].

Układy optymalnego sterowania są w dziedzinie zaopatrzenia w wodę szeroko stosowane w innych krajach europejskich, a także w Stanach Zjednoczonych i Japonii, gdzie objęto nimi systemy wodociągowe we wszystkich miastach, w których dobowe zużycie wody jest większe niż  $100000 \text{ m}^3$ . Realizacja sterowania wymaga **zaawansowanych środków technicznych**, łącznie z komputerowym systemem rejestracji i przetwarzania danych wraz z pakietem programów użytkowych. Konieczne jest odpowiednie przystosowanie układu technologicznego. Polega ono na zainstalowaniu w nim dodatkowego osprzętu umożliwiającego realizację pomiarów, zdalnej sygnalizacji i zdalnego sterowania z centralnej dyspozytorni wyposażonej w minikomputer lub komputer prowadzący obliczenia optymalizacyjne. Realizacja sterowania bezpośredniego jest dokonywana z dyspozytorni lokalnych [5]. Z powyższych względów w Polsce jak dotąd został wykonany jedynie system teleinformatyczny (komputerowy system pomiarów i kontroli stanów) dla potrzeb obsługi sieci i obiektów wodociągu Łódzkiego oraz aktualnie jest instalowany informatyczny system komputerowy dla potrzeb wodociągu Lublińsko-Głogowskiego Okręgu Miedziowego. Obejmuje on swoim zasięgiem cały proces produkcji i dystrybucji wody, poczynając od jej ujęcia a kończąc na dostarczaniu odbiorcom, którymi są miasta i miejscowości LGOM-u oraz Zakłady Kombinatu Górniczo-Hutniczego Miedzi. Ponadto przewidziano, że



poza rejestracją i przetwarzaniem danych oraz sterowaniem na podstawie aktualnych stanów systemu wodociągowego, będzie tam realizowane sterowanie optymalne [5].

Praktyczne wdrożenie algorytmów optymalnego sterowania jest możliwe pod warunkiem dysponowania zestawem informacji niezbędnych do identyfikacji:

- prognostycznych modeli zapotrzebowania na wodę,
- charakterystyk hydraulicznych oraz zbiorów stanów źródeł zasilania (pompowni i zbiorników),
- modeli sieci wodociągowych.

Rola bieżących i krótkoterminowych prognoz zapotrzebowania na wodę jest zasadnicza, ponieważ bez nich nie jest możliwe prowadzenie sterowania optymalnego. Jego zasada polega na wyborze optymalnej strategii dostarczania wody do odbiorców w ilości odpowiadającej prognozowanym potrzebom, spośród skończonej liczby sposobów wynikającej z liczby możliwych stanów w pompowni i zbiorników oraz długości okresu (horyzontu) optymalizacji.

Do tematycznego opisu przebiegu deterministyczno-losowych zjawisk empirycznych, stosowane są ostatnio coraz częściej modele tworzone na podstawie analizy szeregów czasowych (chronologicznych ciągów) obserwacji badanego procesu, w tym tzw. scałkowane modele autoregresji i średniej ruchomej ARIMA (od: autoregressive integrated moving average process) [1]. Są one przydatne w praktycznych zastosowaniach, ponieważ pozwalają szybko uzyskiwać prognozy w dowolnych horyzontach czasowych, a równocześnie są modelami dynamicznymi. W dalszym ciągu zaprezentowano analizę możliwości wykorzystania szczególnej klasy modeli typu ARIMA, tj. liniowego, sezonowego modelu autoregresji, do opisu i prognozowania procesu zapotrzebowania na wodę w miastach. Weryfikacji modeli i estymacji ich parametrów dokonano na podstawie zbiorów wieloletnich (1976-84) obserwacji dobowego zużycia wody w Łodzi, udostępnionych przez Przedsiębiorstwo Wodociągów i Kanalizacji Okręgu Łódzkiego.

## 2. Stochastyczny charakter i lionowa struktura szeregu czasowego wartości zużycia wody

Próby sformułowania stochastycznych modeli procesu zużycia wody w miastach podjęto dopiero w ostatnich kilku latach. Badania w tym zakresie są aktualnie prowadzone m. in. w ZSRR [2], NRD [3, 4] i w Polsce [8]. Ze względu na metodykę obserwacji przebiegu procesu zakłada się, że daje się on dobrze opisać za pomocą szeregu czasowego  $\{q_t, t = 1, 2, \dots, N\}$  jego wartości uśrednionych w jednakowych przedziałach kwantowania (miesięcznych, dobowych, godzinowych lub innych).

Najbardziej ogólny analityczny model tego szeregu ma postać [6, 7]:

$$q_t = v(t) + a_t = TR(t) + w(t) + AK_t + KR_t + \epsilon_t; \quad t = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

gdzie:  $v(t)$  - składowa deterministyczna,  
 $a(t)$  - składowa losowa.



Składową  $v(t)$  tworzą:

- trend czasowy  $TR(t)$  wartości średniej szeregu,
- komponenta okresowa (periodyczna)  $w(t)$ , charakteryzująca cykliczne wahania wartości średniej i wariancji szeregu.

Składowa losowa  $a_t$  jest w ogólnym przypadku sumą komponenty autokorelacyjnej  $AK_t$  ujmującej zależność między zużyciem wody w chwili  $t$  a zużyciem w chwilach poprzednich, komponenty korelacyjnej  $KR_t$  opisującej zależność między zużyciem wody w chwili  $t$  a różnymi czynnikami losowymi (np. temperaturą powietrza i dobową wysokością opadów atmosferycznych) oraz reszty losowej  $\epsilon_t$ . Ogólnie przyjętą metodą modelowania szeregów czasowych obserwacji zjawisk empirycznych jest rozłożenie owych szeregów na trzy składowe:

- trend,
- komponentę okresową,
- składową losową.

Trend opisuje się najczęściej za pomocą równań regresji liniowej lub nieliniowej, a okresowość poprzez kombinację sinusoid i cosinusoid [1, 6]. Sposób ten został wykorzystany w modelach procesu zużycia wody opracowanych w ZSRR [2] i w NRD [3, 4]. Z własnych badań autorów wynika jednakże, że nie zawsze jest on wystarczająco efektywny i oszczędny pod względem parametryzacji. Z tego względu w opracowanej przez autorów efektywnej metodzie krótkoterminowego i bieżącego prognozowania zapotrzebowania na wodę w miastach [8, 9] wykorzystano tzw. modele sezonowe, wielowymiarowe, których podstawą jest stacjonarność szeregów opisujących proces zużycia wody w dniach tygodnia o podobnym charakterze. Zostały one szczegółowo opisane w pracach [6, 8, 9].

### 3. Sezonowy model liniowy dobowego zużycia wody w mieście

W modelowaniu i prognozowaniu jednorodnych szeregów czasowych są niekiedy stosowane modele sezonowe bazujące na podobieństwie obserwacji odległych od siebie o „s” jednostek czasu, gdzie „s” jest znanym a priori okresem składowej periodycznej. W szczególnym przypadku cykliczne zmiany w dobowym zużyciu wody można scharakteryzować sezonowym modelem autoregresji AR:

$$w_t = \phi_1 \cdot w_{t-1} + \phi_2 \cdot w_{t-2} + \dots + \phi_p \cdot w_{t-p} + \epsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, N \quad (2)$$

w którym :

$$w_t = q_t - \bar{q}_t, \quad (3)$$

$$q_t = q_t - q_{t-s} \quad (4)$$

gdzie:  $s$  - okres składowej periodycznej,  
 $p$  - rząd modelu autoregresji AR,  
 $\phi_p$  - parametr modelu AR.



Wyrażając ten model przy pomocy operatora przesunięcia wstecz  $B$  można go zapisać w skróconej formie [1]:

$$\phi(B)w_t = \varepsilon_t \quad (5)$$

gdzie:

$$w_t = q_t - \bar{q}_t$$

$$q_t = \bar{V}_s q_t = (1 - B^s) q_t = q_t - q_{t-s}$$

Model ten bazuje na założeniu, że kolejno po sobie następujące  $s$ -te różnice wartości badanego szeregu czasowego  $\{q_t\}$  są nawzajem skorelowane i mogą być wyrażone jako skończona kombinacja liniowa różnic poprzednich obserwacji oraz komponenty nieskorelowanej (reszty losowej)  $\varepsilon_t$ . Szereg  $\varepsilon_t$  powinien być tzw. „białym szumem”, tj. powinien podlegać rozkładowi normalnemu o wartości oczekiwanej równej zero i skończonej równej zero i skończonej wariancji. Do wyznaczenia właściwej dla badanego szeregu  $\{q_t\}$  różnicy „ $s$ ”, przydatna jest analiza empirycznych funkcji autokorelacji i autokorelacji cząstkowych, wskazujących jak zmienia się korelacja między wartościami badanego szeregu wraz ze zmianą ich odstepu czasowego  $k$ .

Na rysunku 1 i 2 pokazano przykładowe wykresy estymatorów  $r_k(k)$  funkcji autokorelacyjnej oraz  $r_{kk}(k)$  funkcji autokorelacji cząstkowych ciągu obserwacji dobowego zużycia wody w Łodzi dla szeregu podstawowego ( $\bar{V}_0$ , tj.  $s = 0$ ) oraz drugiej ( $s = 0$ ) i siódmej ( $s = 7$ ) różnicy wartości procesu. Wskazują one, że w modelu klasy AR należy uwzględnić siódme różnice ( $s = 7$ ).

W celu zweryfikowania przydatności modeli klasy (2) do opisu procesu zużycia wody, obliczono wartości estymatorów  $\hat{\phi}_p$  parametrów  $\phi_p$ , rozwiązując układ równań liniowych Yule'a-Walkera [1]. Zbadano sezonowe modele AR pierwszego ( $p = 1$ ), drugiego ( $p = 2$ ) i trzeciego ( $p = 3$ ) rzędu. Adekwatność badanych modeli próbnych sprawdzono analizując szeregi  $\{\check{\varepsilon}_t\}$  różnic między wartościami  $w_t$  rzeczywistymi, a obliczonymi. Do oceny stopnia adekwatności szeregu dopasowanego i rzeczywistego wykorzystano jednoczesny test zgodności, w którym badane są pierwsze  $K$  autokorelacje reszt losowych. Liczba  $K$  jest wybierana tak duża, że wagi  $\Psi_k$  procesu dla  $k > K$  są zaniedbywalnie małe.

Jeśli dobrany model jest odpowiedni to statystyka:

$$Q = N \sum_{k=1}^K r_k(\check{\varepsilon})^2 \quad (6)$$

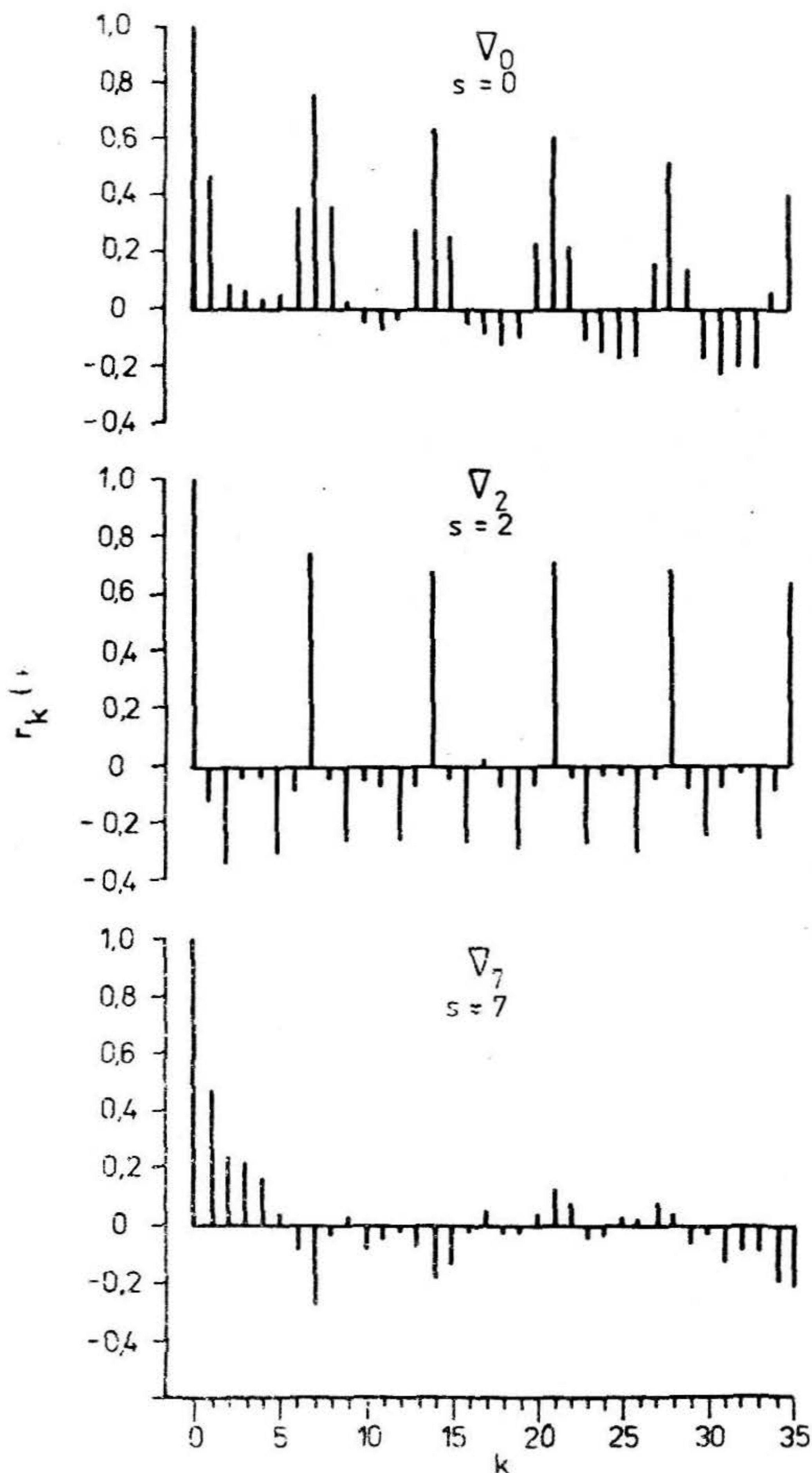
gdzie:

$r_k$  - współczynnik autokorelacji reszt dla  $k$ -tego kroku,

$N$  - liczebność szeregu reszt  $\check{\varepsilon}_t$ ,

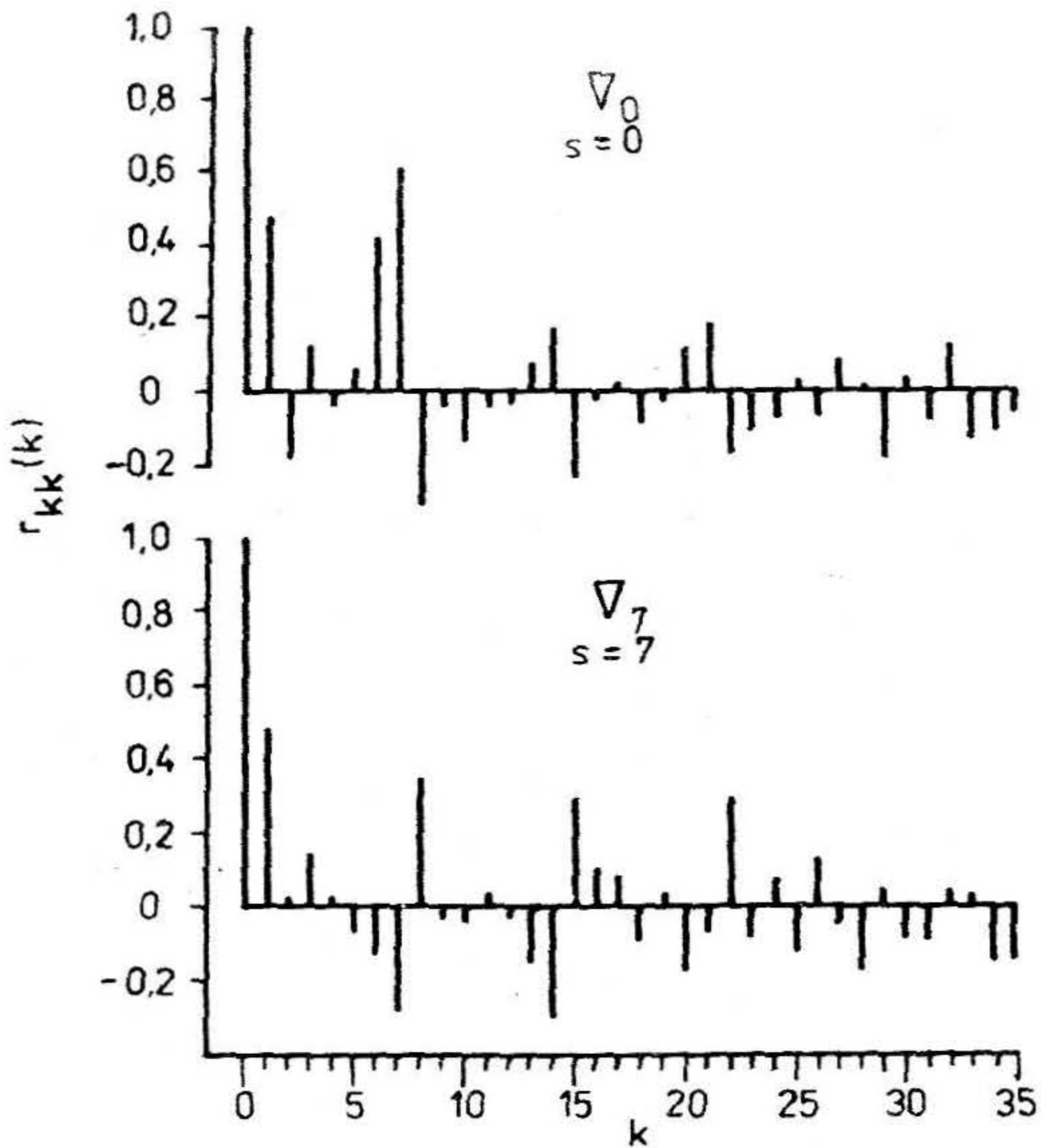
$K$  - największa liczba kroków (przyjęto:  $K = 30$ ),

ma rozkład  $\chi^2$  z liczbą stopni swobody równą różnicy między wartością  $K$  i liczbą parametrów modelu. Testowanie polega na porównaniu obliczonych wartości  $Q$  z odpo-



Rys. 1. wykresy funkcji autokorelacyjnej szeregu czasowego obserwacji dobowego zużycia wody w Łodzi w wiosenno-letnim okresie 1982 roku dla szeregu podstawowego ( $\nabla_0$ ) oraz drugiej ( $\nabla_2$ ) i siódmej ( $\nabla_7$ ) różnicy wartości procesu





Rys. 2. Wykresy funkcji autokorelacji cząstkowych szeregu czasowego obserwacji dobowego zużycia wody w łodzi w wiosenno-letnim okresie 1982 r. dla szeregu podstawowego ( $\nabla_0$ ) oraz siódmej różnicy wartości procesu ( $\nabla_7$ )

wiednimi kwantylami rozkładu  $\chi^2$ . Jeżeli  $Q$  jest mniejsze od stabilizowanej wartości krytycznej  $Q_{kr}$ , to nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o prawidłowym dopasowaniu modelu na poziomie istotności równym rzędowi kwantyla. Wartości  $Q_{kr}$  określono jako 95-cio procentowy kwantyl rozkładu  $\chi^2$  o  $N-p$  stopniach swobody.

Skutecznym, efektywnym środkiem dla wykrywania okresowych odchyżeń od losowości na tle białego szumu jest tzw. unormowany periodogram skumulowany. Według definicji periodogram szeregu czasowego reszt  $\{\varepsilon_t, t = 1, 2, \dots, N\}$  jest określony jako:

$$J(f_1) = \frac{2}{N} \left[ \left( \sum_{t=1}^N \varepsilon_t \cos 2\pi f_1 t \right)^2 + \left( \sum_{t=1}^N \varepsilon_t \sin 2\pi f_1 t \right)^2 \right] \quad (7)$$

gdzie:  $f_1 = \frac{1}{N}$  jest częstotliwością.

Wygodniejszy w użyciu i pozwalający na dokonywanie porównań różnych typów modeli dopasowanych do tego samego szeregu czasowego jest periodogram unormowany postaci:

$$C(f_j) = \frac{\sum_{i=1}^j J(f_i)}{N \cdot s_{\xi}^2} \quad (8)$$

gdzie:

$s_{\xi}^2$  - estymator wariancji szeregu reszt,

$j$  -  $j = N/2$  dla  $N$  parzystego lub  $j = (N-1)/2$  dla  $N$  nieparzystego.

Dla białego szumu wykres  $C(f_j)$  układa się wzdłuż prostej łączącej punkty  $(0, 0)$  i  $(0,5; 1)$ . Wykrywanie błędnie dopasowanych modeli polega na stwierdzeniu znacznych systematycznych odchylen periodogramu od tej prostej. Wówczas szereg reszt nie jest czysto losowy i zachodzi podejrzenie o: **nieodpowiedniości** dobranych okresów. Dla tego testu tego używa się szczególnie chętnie do badania reszt modeli sezonowych [1].

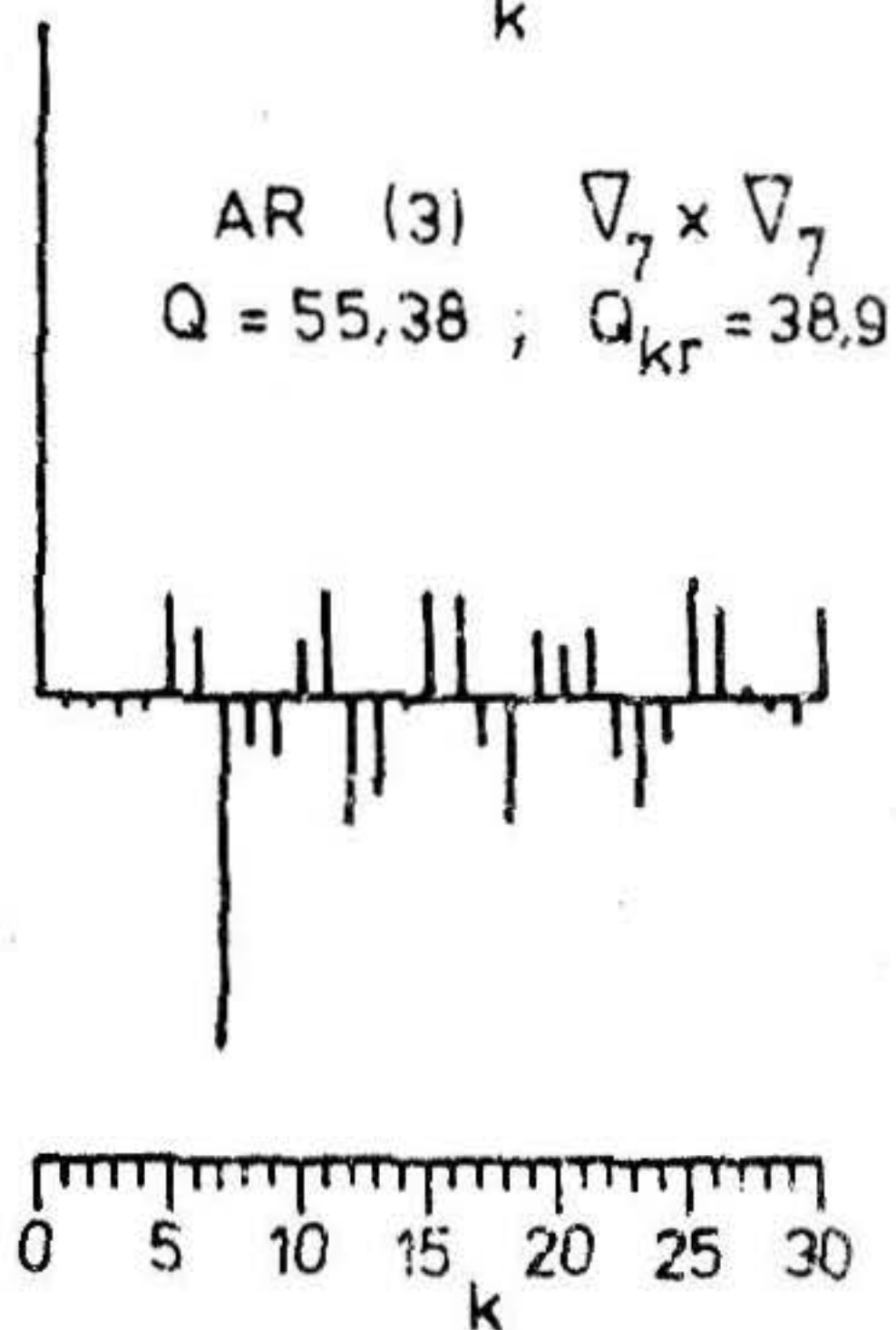
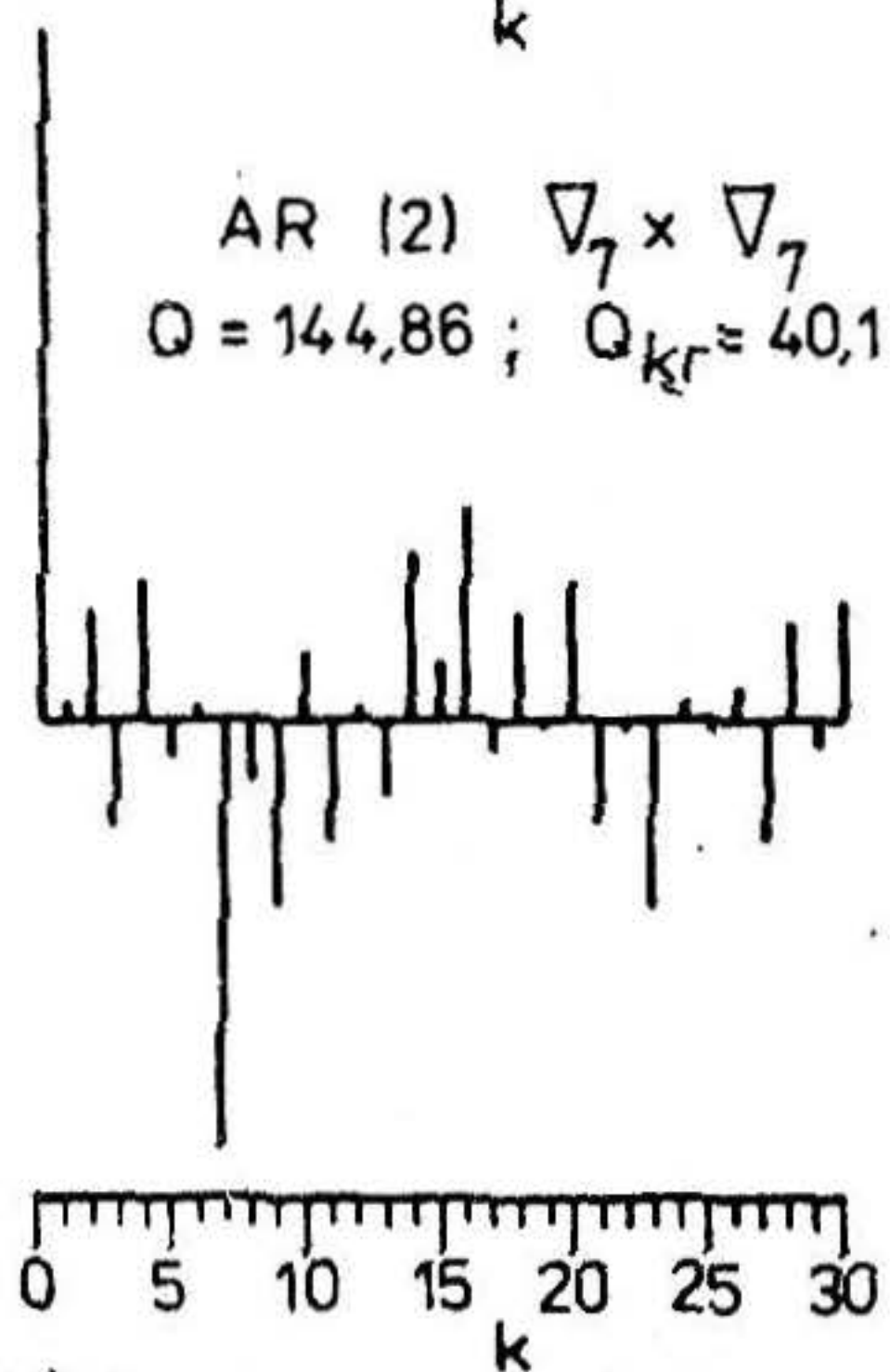
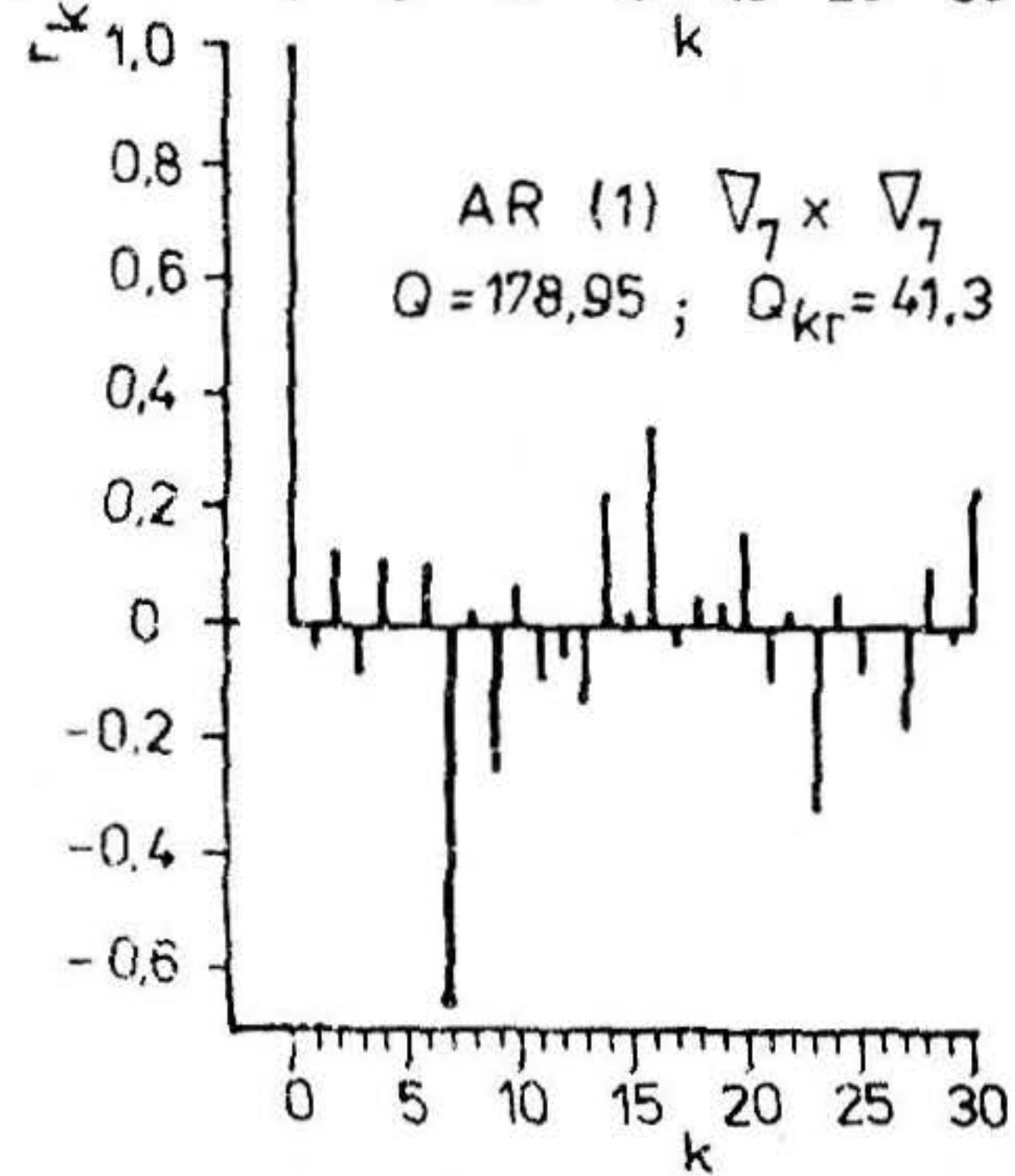
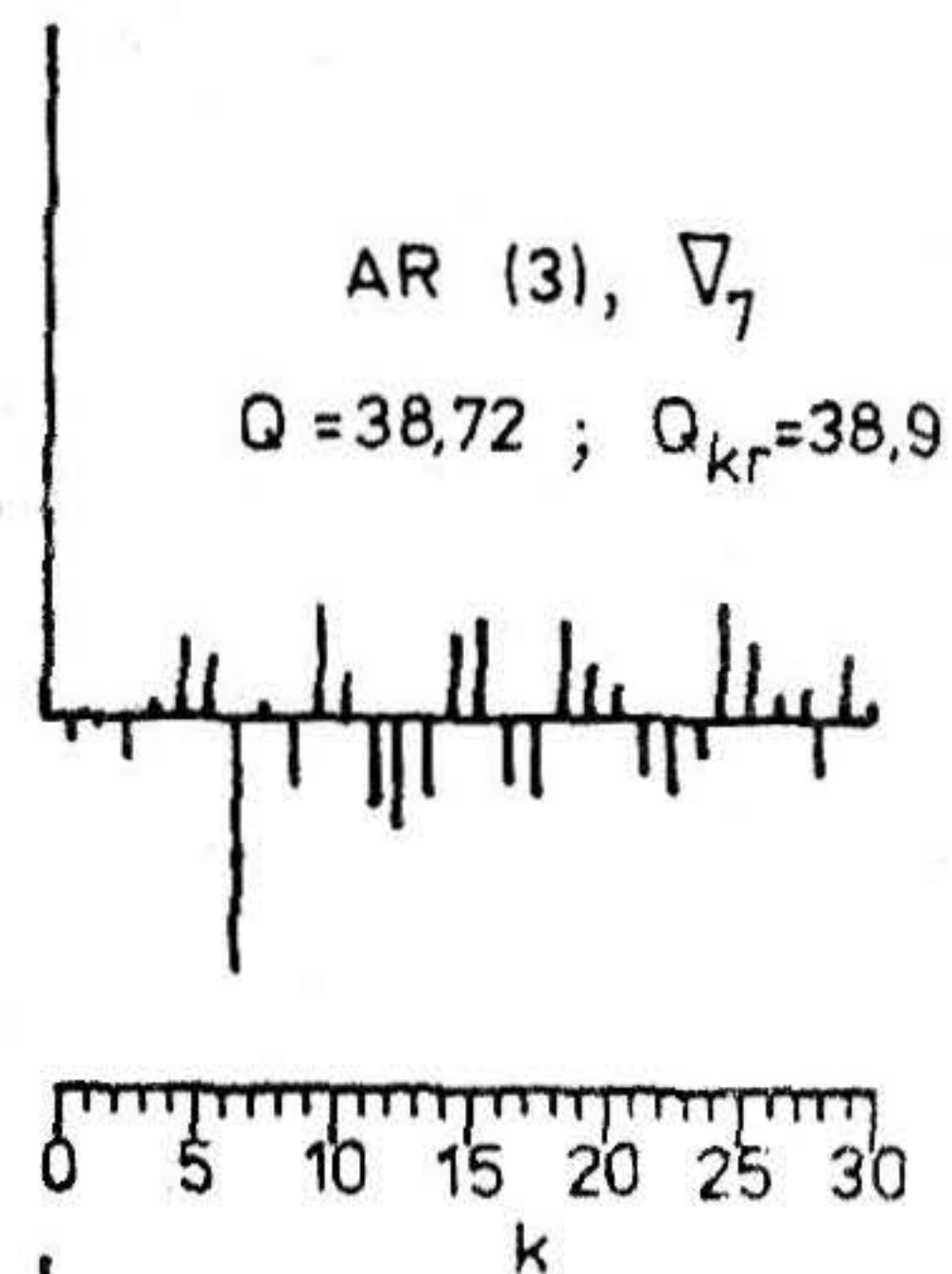
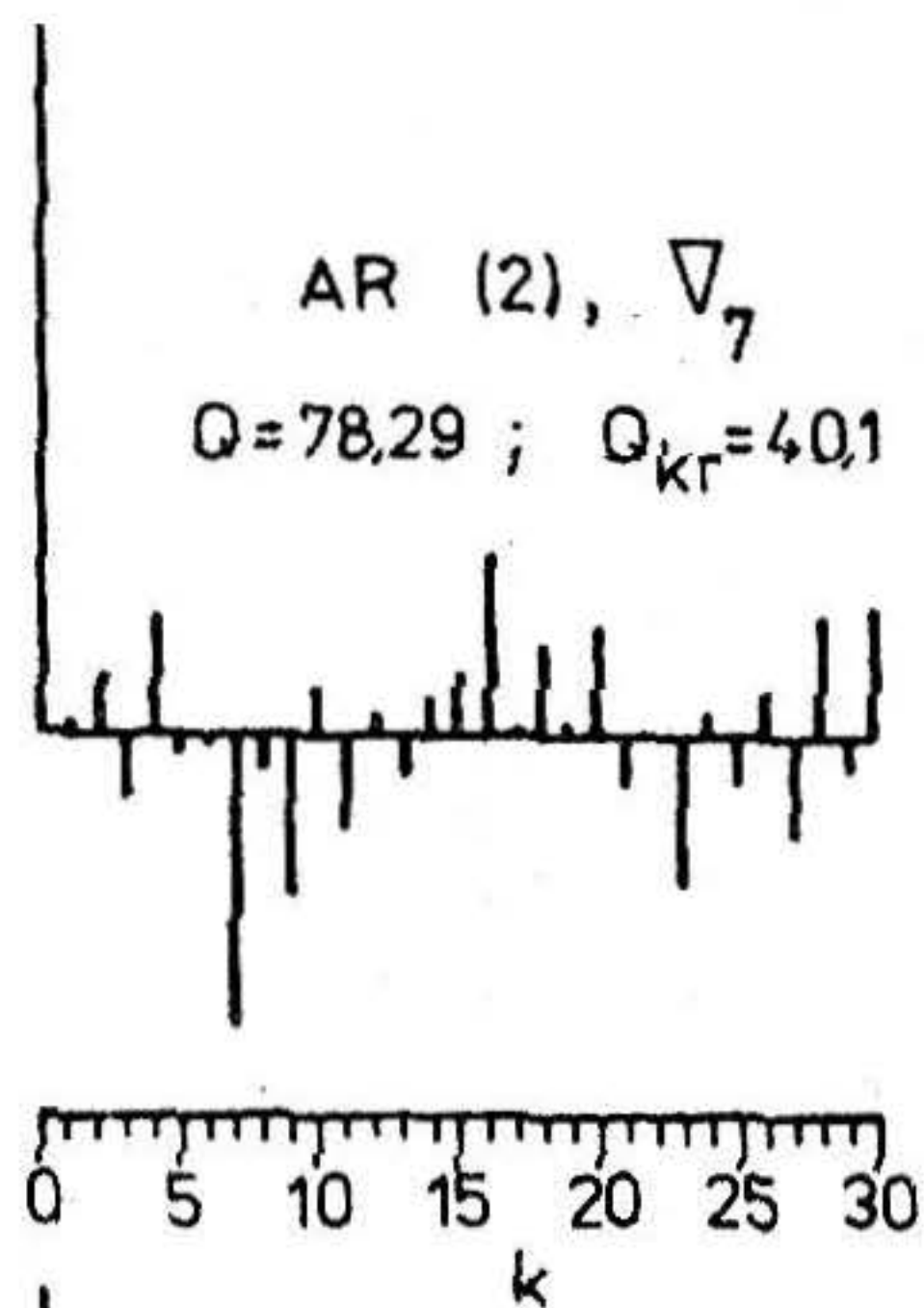
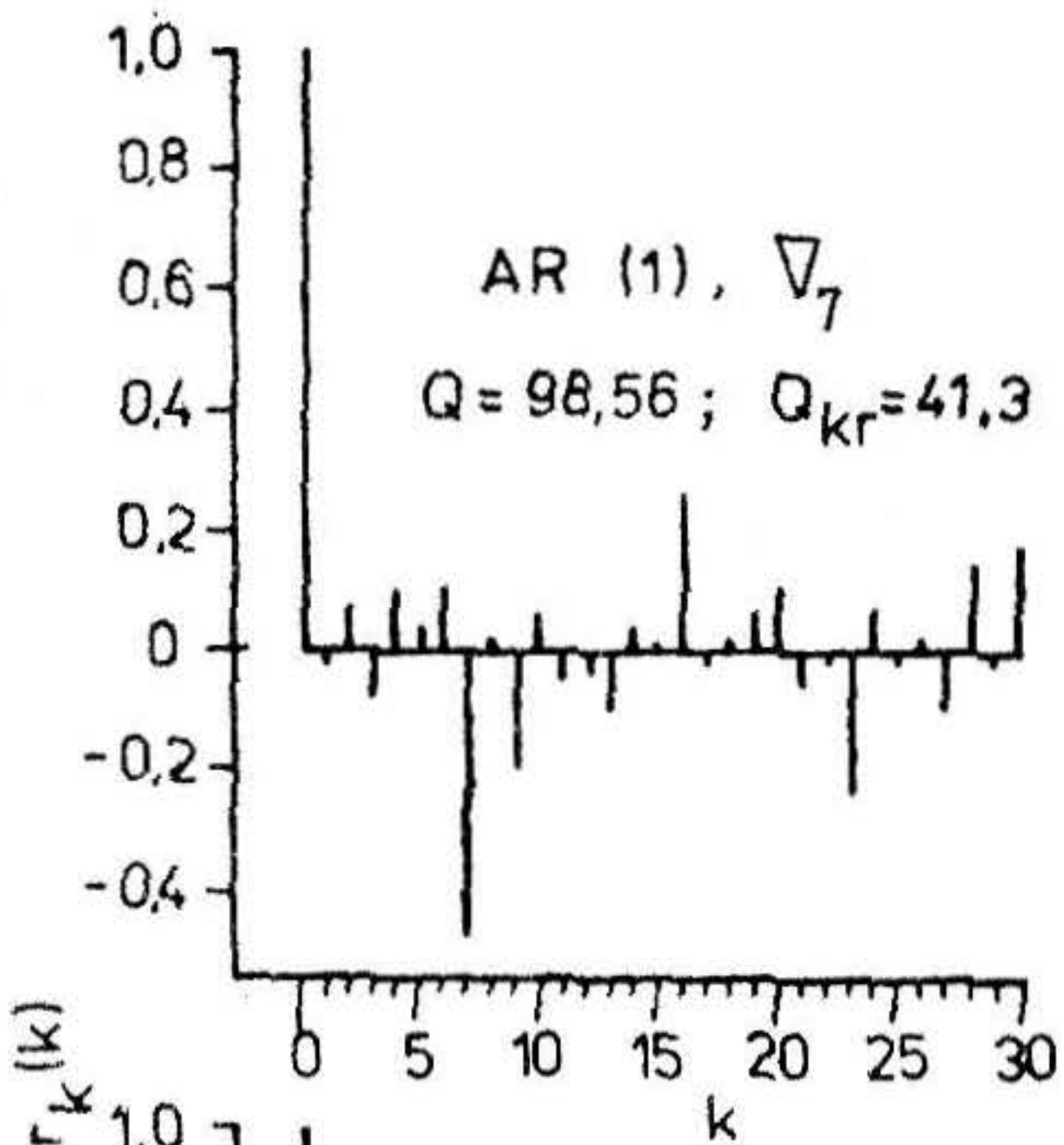
Przykładowe wykresy autokorelacji reszt  $\check{\xi}_t$  oraz testu (6) pokazano na rys. 3. Wynika z nich, że w praktyce wystarczającą zgodność między modelem a szeregiem zaobserwowanym uzyskuje się stosując sezonowy proces autoregresji trzeciego rzędu AR(3) dla siódmych różnic wartości szeregu  $\{q_t\}$ .

Potwierdza to także wykres periodogramu skumulowanego dla tego modelu, który przedstawiono na rys. 4. Jego odchylenia od prostej białego szumu mają charakter przypadkowy i wynikają z błędów estymacji parametrów modelu. Wartości tych odchylen nie przekraczają jednak wielkości dopuszczalnych określonych 25-cio procentowym przebiegiem ufności wg Kołmogorowa. Dla innych lat i okresów sezonowych otrzymano nieco różniące się wyniki: niekiedy okazało się konieczne uwzględnienie w modelu podwójnych siódmych różnic wartości szeregu. Z tego względu w opracowanym przez autorów i pokazanym na rys. 5 algorytmie doboru modelu sezonowego AR zastosowano iteracyjny cykl jego identyfikacji i diagnostycznego sprawdzenia. Obliczenia są realizowane za pomocą programu komputerowego AR 123 w języku FORTRAN 77 dla systemu minikomputerowego SM-4/20.

### 3. Podsumowanie i wnioski końcowe

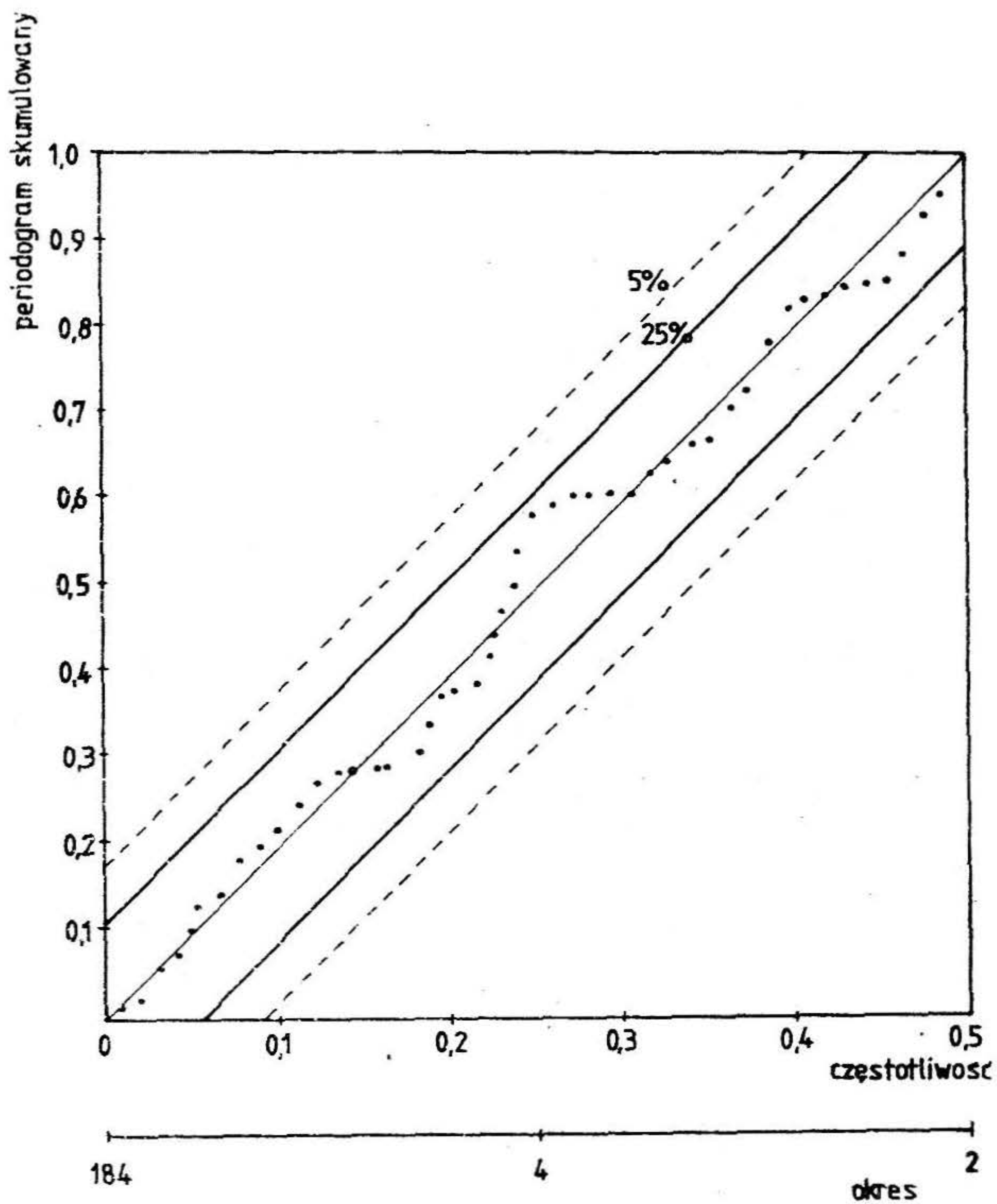
Zastosowanie standardowych metod analizy szeregów czasowych może prowadzić do budowy modeli stochastycznych typu ARIMA aproksymujących przebieg procesów rzeczywistych czasowymi funkcjami rozmaitych zmiennych losowych. Wykorzystywanie ich w praktyce jest bardzo wygodne, ponieważ oszacowania parametrów są dokonywane jedynie na podstawie danych określających konkretną realizację procesu, a dodatkowo istnieje możliwość łatwej ich korekty w miarę dopływu informacji o procesie.

Zaprezentowany liniowy, sezonowy model autoregresyjny AR procesu dobowego zużycia wody w miastach charakteryzuje się oszczędną parametryzacją, małym nakładem obliczeń i jest wystarczająco efektywny dla potrzeb praktycznych. Bazuje on na żweryfikowanym przez autorów założeniu, że szeregi siódmych lub podwójnych siódmych różnic wartości procesu są w przybliżeniu stacjonarne, o czym świadczy zbieżność szeregu wag  $\Psi_k$  procesu. Model ten po zastosowaniu standardowej techniki równań różnic-

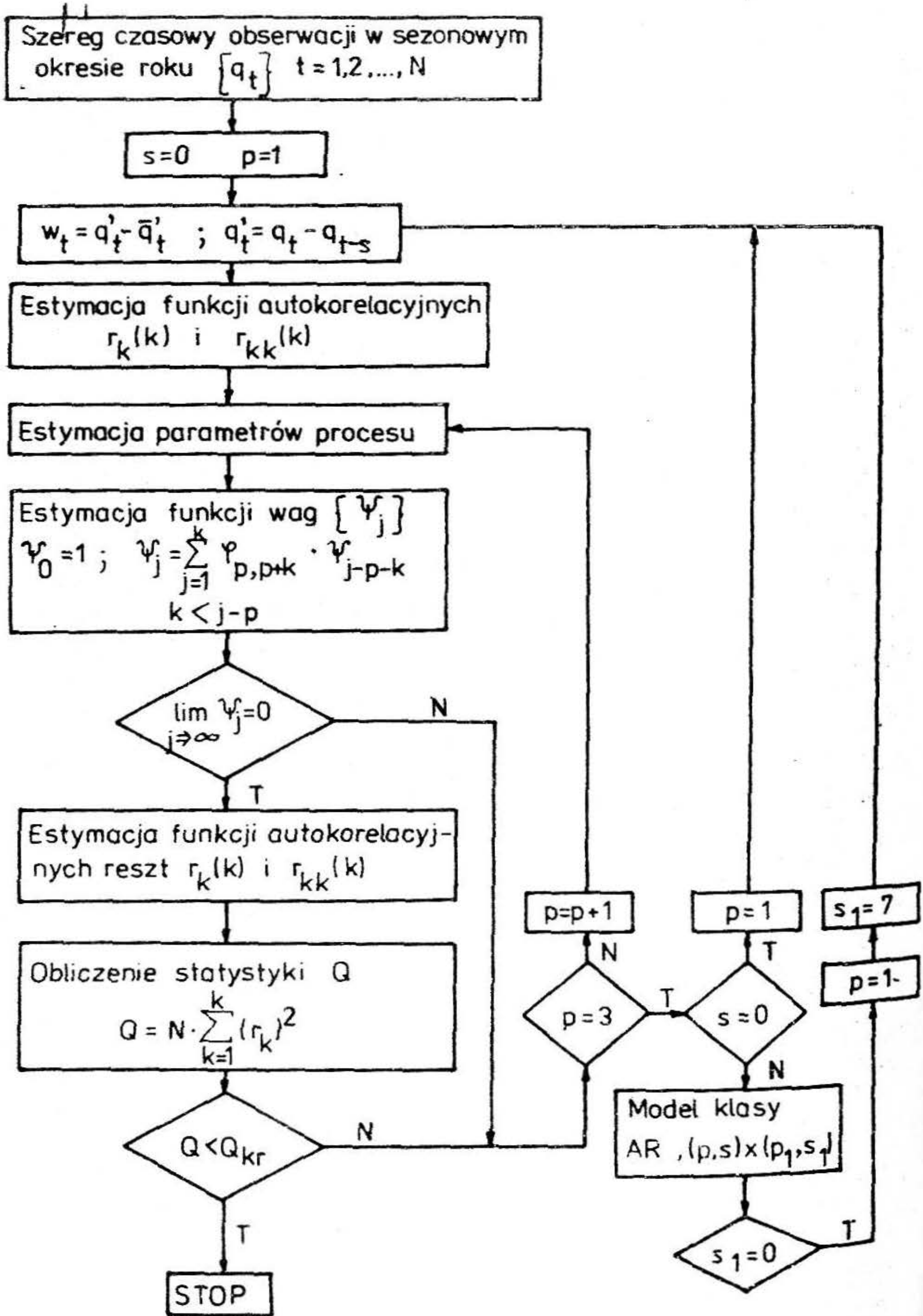


Rys. 3. Wykresy funkcji autokorelacji szeregów reszt sezonowych modeli rzędu pierwszego AR(1), drugiego AR(2), trzeciego AR(3) dla siódmych i podwójnych siódmych ( $7 \times \nabla_7$ ) różnic wartości procesu. Łódź, dobowe zużycie wody (okres wiosenno-letni 1981 roku)





Rys. 4. Skumulowany periodogram unormowany reszt dla modelu  $AR(3)\nabla_7$ . Łódź, wiosenno-letni okres 1982 roku



Rys. 5. Algorytm wyboru modelu próbnego w klasie sezonowych procesów autoregresji



wych pozwala szybko uzyskiwać prognozy w różnym horyzoncie czasowym, a równocześnie dzięki skonstruowaniu go jako rekursywnego (w każdym kroku po otrzymaniu nowej porcji danych uwzględnia je i generuje nową wartość prognozy), jest dynamicznym.

Realizowane przez autorów badania dotyczące stochastycznego modelowania i prognozowania procesu zużycia wody w miastach (ich wyniki zaprezentowano m. in. w pracach [6-9]), mają na celu sformułowanie efektywnych i równocześnie oszczędnych pod względem parametryzacji i nakładu obliczeń metod prognozowania, nadających się do bezpośredniego wykorzystania w algorytmach optymalnego sterowania szeroko pojętym procesem zaopatrzenia w wodę miast i regionów.

#### Literatura

- [ 1] Box G.E.P., Jenkins G.M. - Time Series Analysis Forecasting and Control, Holden-day, San Francisco, 1976.
- [ 2] Cichelasvili Z. - Modelowanie procesu wodopotrzeblenia system wodosnabżenia. Materiały z konferencji Sympozjum „Zużycie wody wodociągowej”, Białystok, s. 185-198, 1984.
- [ 3] Hummel J., Nestler W., Kittner H., Luckner L. - Wasserbedarfprognose mit Hilfe von Signalmodellen. Materiały z Sympozjum „Zużycie wody wodociągowej”, s. 264-281, 1984.
- [ 4] Nestler W., Luckner L., Hummel J. - Die Nutzung von -Signalmodellen zur Wasserbedarfprognose als Basis einer effektiven Steuerung von Wasserversorgungsprocessen, Wasserwirtschaft-Wassertechnik t. 32 nr 12, s. 414-418, 1982.
- [ 5] Pawlak A., Mielcarzewicz E.W. - Opracowanie metody, programu i zasad jego wykorzystania do sterowania pompowniami zasilającymi systemy zaopatrzenia w wodę. Raport Instytutu Inż. Ochrony Środowiska Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, 1985.
- [ 6] Siwoń Z. - Modelowanie procesu zużycia wody i prognozowanie zapotrzebowania na wodę w miastach. Monografia. Wydawnictwa Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, 1986.
- [ 7] Siwoń Z. - Problemy prognozowania w projektowaniu i procesach optymalnego sterowania systemami zaopatrzenia w wodę miast. Mat. konf. nauk.-techn. „Węzłowe problemy inżynierii środowiska w makroregionie pld.-zach.”, Jelenia Góra, 1985.
- [ 8] Siwoń Z., Stanisławski J. - Opracowanie stochastycznego modelu zużycia wody w aglomeracji miejsko-przemysłowej. Raport Inst. Inż. Ochr. Środ. Politechniki Wrocławskiej, SPR nr 50/84, Wrocław 1984.
- [ 9] Siwoń Z., Stanisławski J. - Prognozowanie zapotrzebowania na wodę w miastach dla potrzeb sterowania i kontroli procesów zaopatrzenia. GwiTS Tom 59 nr 1, s. 14-17, 1985.

---

Doc. dr hab. inż. Zbigniew Siwoń - Politechnika Wrocławska, dr inż. Janusz Stanisławski  
Wyższa Szkoła Inżynierska w Zielonej Górze.