

Zbigniew Siwoń, Maria Stanisławska, Janusz Stanisławski

## MODEL SYMULACYJNY CZASÓW TRWANIA ZUŻYCIA WODY

### 1. Wstęp

W wielu zagadnieniach modelowania zjawisk fizycznych coraz szerzej jest stosowana teoria procesów stochastycznych. Gdy statystycznemu opracowaniu poddane zostaną wartości zużycia wody, które były rejestrowane w równych odstępach czasu i analizowane w kolejności pojawienia się w czasie rzeczywistym, to utworzony w ten sposób szereg czasowy  $\{Q_t, t = 1, 2, \dots\}$  ma właściwości procesu stochastycznego. Spośród różnych cech charakteryzujących przebieg zużycia wody (trend, sezonowość itp.) bardzo ważna z punktu widzenia praktycznych zastosowań jest właściwość opisująca chwile, w których obserwacje z szeregu czasowego są większe lub mniejsze od zadanej wartości. Przy czym interesujące są tutaj ilości przekroczeń zadanego poziomu, liczby obserwacji pomiędzy kolejnymi przekroczeniami (czas trwania) oraz sumaryczna od początku okresu liczba obserwacji pomiędzy kolejnymi przekroczeniami (czas trwania) oraz sumaryczna od początku okresu liczba obserwacji znajdujących się poniżej lub powyżej badanego poziomu (łączy czas trwania). Informacje te, wraz z umiejętnością przewidywania zapotrzebowania na wodę osiąganego lub przewyższanego z określonym prawdopodobieństwem, mogą stanowić przesłanki do prawidłowego projektowania i eksploatacji centralnych obiektów wodociągowych oraz optymalnego sterowania wydajnością zbiorników sieciowych. Rozwiązanie tych zagadnień metodami klasycznej statystyki jest znane i możliwe np. przy założeniu o normalności rozkładu jakiemu podlega zmienna [7]. Jednakże uzyskane tą drogą informacje dotyczą jedynie wartości średnich, nie mogą więc być wykorzystane do operacyjnego stosowania. Z tych powodów, w celu uzyskania danych opisujących pełny zakres zmienności stanów przekroczeń lub niedoborów wartości granicznej, wykorzystano elementy teorii niezawodności [1, 2, 3]. Wymaga to rozpatrywania procesu zużycia wody jako zjawiska, które ulega zakłóceniom wskutek "uszkodzeń".

### 2. Model symulacyjny zużycia wody

W odniesieniu do procesu zużycia wody "uszkodzenie" można zdefiniować jako zdarzenie polegające na przekroczeniu wartości zapotrzebowania na wodę ponad pewien założony poziom, zwany poziomem zaspokojenia potrzeb odbiorców  $Q_{gr}$ .

Proces znajdzie się wówczas w tzw. "stanie niezdatności", a czas trwania tego stanu nosi nazwę czasu odnowy. Gdy w pewnej chwili zużycie wody spadnie poniżej  $Q_{gr}$ , wówczas proces przejdzie w "stan zdatności", a przedział czasowy przebywania w tym stanie nazywa się czasem między kolejnymi uszkodzeniami. Wynika stąd, że model procesu zużycia

wody został sprowadzony do łańcucha kolejno następujących po sobie w czasie i uzupełniających się (bo przeciwnych) stanów. Upodabnia to go do modelu obiektu odnawialnego z niezerowym czasem odnowy. Na rys. 1 pokazano schemat przebiegu procesu zużycia wody jako procesu odnawialnego, w którym:

- odcinki czasu  $(t_0, t_1)$ ,  $(t_2, t_3)$ ,  $(t_4, t_5)$ ,  $(t_6, t_7)$  są przedziałami między kolejnymi "uszkodzeniami",
- odcinki czasu  $(t_1, t_2)$ ,  $(t_3, t_4)$ ,  $(t_5, t_6)$  itd. są czasami odnowy,
- różnice między rzeczywistymi wartościami zużycia wody a poziomem  $Q_{gr}$  są niedoborami lub nadwyżkami wydajności urządzeń  $Q$ .

Długości poszczególnych przedziałów czasu, liczba przejść procesu ze stanu zdatności w stan niezdatności oraz wartości  $Q$  w każdej godzinie rozpatrywanego okresu, są zależne od przyjętego poziomu zaspokojenia potrzeb odbiorców  $Q_{gr}$ .

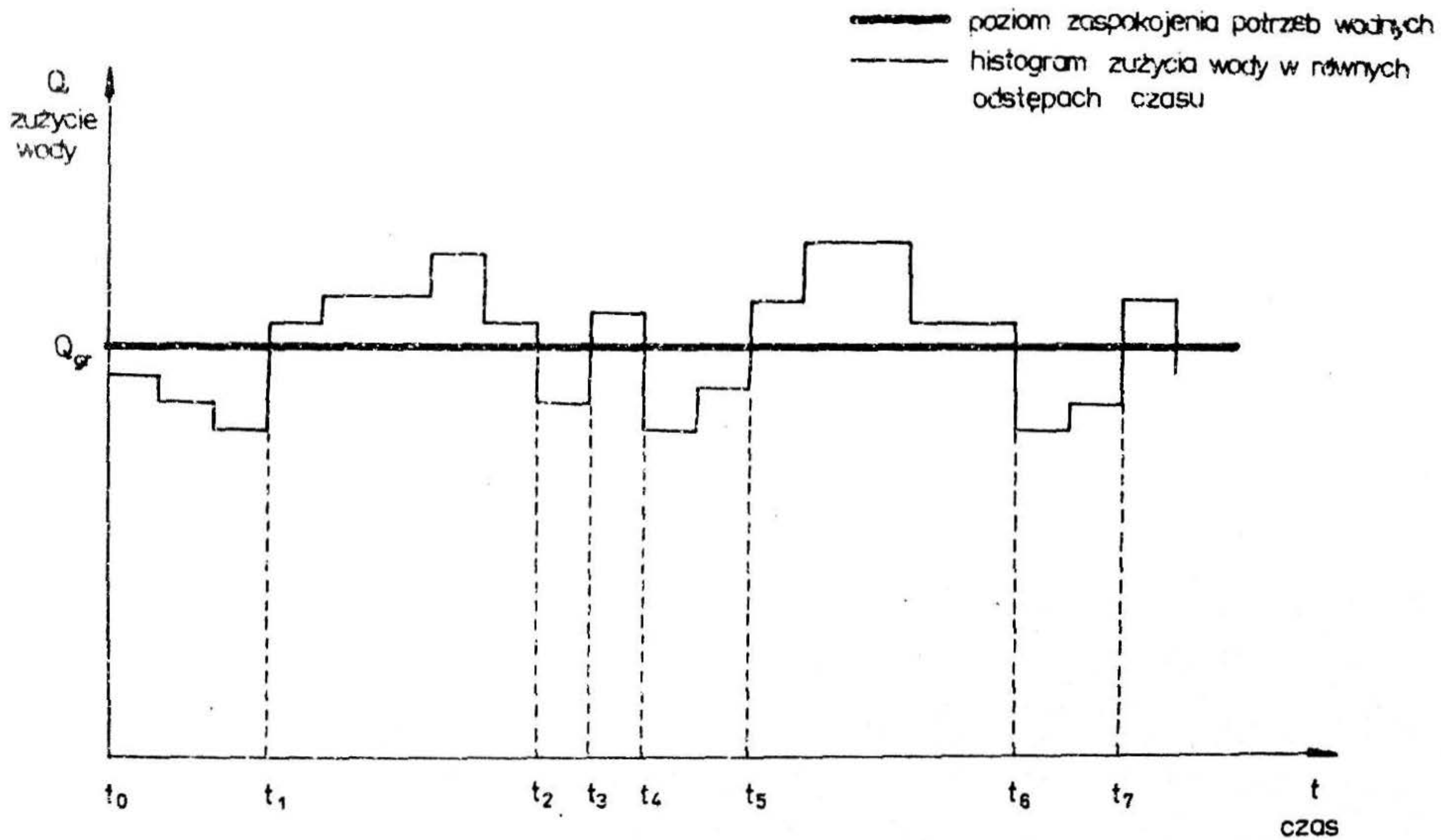
Z tych powodów uzyskane charakterystyki niezawodności oraz informacje o przebiegu procesu muszą nawiązywać do wartości  $Q_{gr}$ . Można ją wyznaczyć np. na podstawie analizy zbiorów obserwacji rzeczywistego zużycia wody w mieście, poprzez symulowanie przebiegu procesu z uwzględnieniem następujących czynników:

- rodzaju obszaru konsumpcji wody (miasto, osiedle),
- występowania i lokalizacji zbiorników wodociągowych,
- ograniczeń wynikających z przesłanek technicznych i ekonomicznych, a powodujących, że wartości  $Q_{gr}$  będą wybierane z przedziału między zużyciem maksymalnym i minimalnym.

Sposób wyboru wartości  $Q_{gr}$  zależy od przeznaczenia symulacji. Gdy wielkości tej nadany zostanie sens poziomu zaspokojenia potrzeb wodnych, to określić ją można jako zużycie wody osiągnięte lub przekraczane z góry zadany *prawdopodobieństwem w danym okresie powtarzalności*. Rozpatrując jednak to zagadnienie w aspekcie eksploatacji systemu przy optymalnych wskaźnikach efektywności, jako podstawę do wyboru wartości  $Q_{gr}$  proponuje się przyjąć funkcję odnowy wyrażającą oczekiwaną liczbę "uszkodzeń" w rozważanym przedziale czasu (np. dobie). Optymalna wartość  $Q_{gr}$  wyznacza wydajność centralnych obiektów systemu wodociągowego, miarodajną do ich wymiarowania. Jest ona punktem wyjścia do badania przebiegów procesu w czasie, w tym charakterystyk czasów trwania, oraz sumarycznych czasów przebywania procesu w poszczególnych stanach, a także reakcji systemu na określone stany.

Jednym z praktycznych efektów proponowanej analizy symulacyjnej jest probabilistyczny model opisujący łączne w dobie czasy trwania zużycia wody większego lub niższego, niż poziom  $Q_{gr}$ . W celu sformułowania owego modelu zbadano zbiory godzinowego zużycia wody w Łodzi w okresie 7 lat, symulując przebiegi procesu przy różnych wartościach  $Q_{gr}$ . Czasy przebywania procesu w stanach zdatności i niezdatności analizowano dla jednoimiennych dni tygodnia w wiosenno-letnich i jesienno-zimowych okresach roku. Utworzono dwie zmienne losowe:  $T_1$  i  $T_2$ .

Ich realizacjami są odpowiednio sumaryczne w dobie czasy trwania procesu w stanie zdatności lub niezdatności.



Rys. 1. Proces zużycia wody w mieście jako model obiektu odnawialnego

Analiza empirycznych rozkładów częstotliwości wykazała, że właściwości losowe zmiennych mogą być opisane lewostronnie ograniczonym rozkładem Weibulla o dodatnim parametrze kształtu.

Rozkład ten znajduje szerokie zastosowanie praktyczne w badaniach intensywności uszkodzeń. Jest łatwy w obliczeniach, a przy tym wystarczająco ogólny. Szczególnymi jego przypadkami są:

- rozkład wykładniczy (dla  $\gamma = 1$ ),
- rozkład Rayleigha (dla  $\gamma = 2$ ).

Funkcja gęstości rozkładu Weibulla łącznego czasu trwania procesu zużycia wody w stanie zdatności lub niezdatności jest w sensie poprzednio podanej definicji opisana równaniem:

$$f(t) = \gamma \cdot \beta \cdot t^{\gamma-1} \cdot \exp(-\beta \cdot t^{\gamma}), \quad \gamma > 0, \beta > 0 \quad (1)$$

w którym  $t$  jest sumarycznym w dobie czasem trwania zużycia wody poniżej lub powyżej założonego poziomu  $Q_{gr}$ .

W praktycznych obliczeniach (np. przy wyznaczaniu kwantyli) wygodniejsze jest operowanie dystrybuantą, która ma postać:

$$F(t) = 1 - \exp(-\beta \cdot t^{\gamma}) \quad (2)$$

Do weryfikacji hipotezy, że rozkład cech  $T_1$  lub  $T_2$  jest rozkładem Weibulla, wykorzystano test Cochran'a, w którym miarą rozbieżności między rozkładami empirycznym i teoretycznym jest wartość statystyki  $g_0$ , obliczana ze wzorów:

$$g_0 = \frac{\max(Z_1, \dots, Z_m)}{\sum_{i=1}^m Z_i}, \quad m \leq n \quad (3)$$

$$Z_i = \begin{cases} n \cdot t_i & \text{dla } i = 1 \\ (n-i+1) \cdot (t_i^{\hat{\gamma}} - t_{i-1}^{\hat{\gamma}}) & \text{dla } i = 2, \dots, m \end{cases} \quad (4)$$

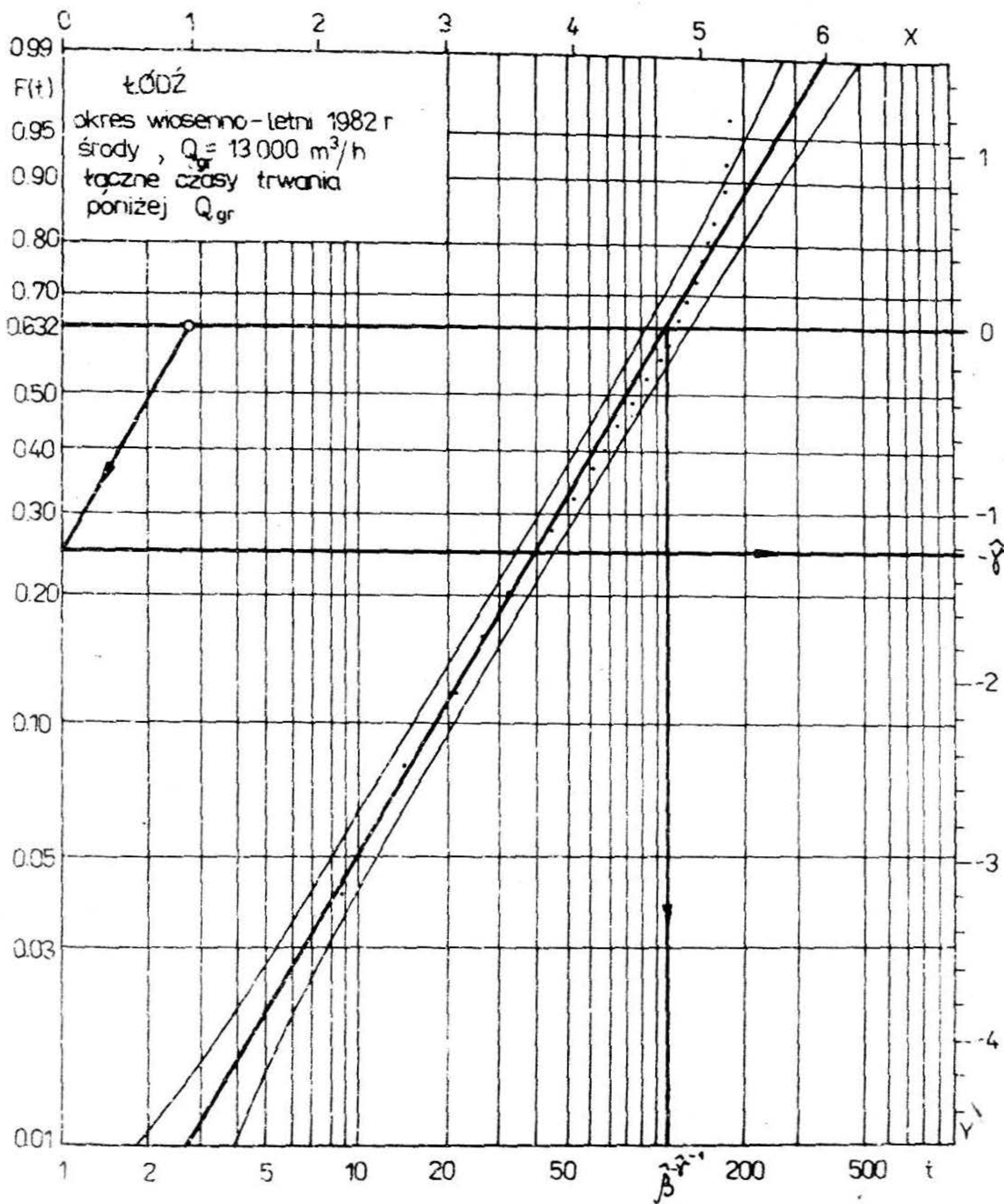
gdzie:

$n$  - liczebność populacji generalnej

$m$  - liczebność próby

$\hat{\gamma}$  - estymator z próby parametru  $\gamma$ .

Krytyczne wartości  $g_{n,2,1-\alpha}$  są kwantylami statystyki Cochran'a rzędu  $i - \infty$  o parze stopni swobody  $(m, 2)$ , gdzie  $\alpha$  jest współczynnikiem ufności. Sprawdzenia słuszności hipotezy dokonuje się przez porównanie wartości empirycznej  $g_0$  z jej wartością tablicową  $g_{n,2,1-\alpha}$ . Hipotezę odrzuca się, jeśli jest spełniona nierówność  $g_0 \geq g_{n,2,1-\alpha}$ , natomiast w przeciwnym wypadku uznaje się, że wyniki uzyskane z badania próby nie przeczą owej hipotezie na poziomie istotności  $1 - \alpha$ . Przybliżonego oszacowania  $\hat{\gamma}$  i  $\hat{\beta}$  parametrów  $\gamma$  i  $\beta$  rozkładu Weibulla można dokonać metodą graficzną, po naniesieniu na siatkę funkcyjną punktów wyznaczających dystrybuantę empiryczną. Na siatce tej, o osi odciętych  $X = \ln t$  oraz rzędnych  $Y = \{-\ln [1 - F(t)]\}$ , punkty empiryczne ułożą się wokół prostej  $Y = AX + B$ , aproksymującej dystrybuantę.



Rys. 2. Wykres empirycznej dystrybuanty sumarycznych czasów trwania zużycia wody poniżej  $Q_{gr} = 13000 \text{ m}^3/\text{h}$ , Łódź, okres wiosenno-letni 1982, środy

T a b e l a 1

WYNIKI TESTU ZGODNOŚCI ROZKŁADÓW ZMIENNEJ  $T_1$  (SUMARYCZNYCH CZASÓW TRWANIA ZUŻYCIA WODY PONIŻEJ ZADANEGO POZIOMU  $Q_{gr}$ ) Z ROZKŁADEM WEIBULLA., ŁÓDŹ, OKRES WIOSENNO-LĘTNI 1982

Wartość $Q_{gr}$ $m^3/h$	Estymatory parametrów rozkładu Weibulla						Wartość empiryczna statystyki Cochrana $g_0$		
	wtorki		środy		czwartki		wtorki	środy	czwartki
	1,256	0,0038	1,261	0,0039	1,352	0,0031			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11.000	1,256	0,0038	1,261	0,0039	1,352	0,0031	0,068	0,073	0,079
13.000	-	-	1,236	0,0029	1,292	0,0028	-	0,090	0,089
15.000	1,085	0,0028	1,053	0,0036	1,145	0,0021	0,074	0,089	0,084
Wartość krytyczna statystyki Cochrana $H_m, 2,1-0,05$	-	-	-	-	-	-	0,235	0,217	0,217
Liczba danych	26		24		24				

Tabela 2

WYNIKI TESTÓW ZGODNOŚCI ROZKŁADÓW ZMIENNEJ  $T_i$  (SUMARYCZNYCH CZASÓW TRWANIA ZUŻYCIA WODY PONIŻEJ ZADANEGO POZIOMU  $Q_{gr}$ ) Z ROZKŁADEM WEIBULLA, ŁÓDŹ, OKRES WIOSENNO-LETNI 1982, DNI ŚWIĄTECZNE

Wartość $Q_{gr}$ $m^3/h$	Estymatory parametrów rozkładu Weibulla		Współczynniki prostej najmniejszych kwadratów		Liczba danych	Test $\chi^2$		Test Cochran	
	$\hat{\gamma}$	$\hat{\beta}$	A	B		$\chi^2_{emp}$	$\chi^2_{0,05}$	$g_0_{emp}$	$g_3_{0,2;0,95}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
12500	1,250	0,00797	1,250	-7,135	30	1,985	7,815	0,0544	
13000	1,292	0,00537	1,292	-7,530	30	1,831	7,815	0,0568	0,1980
13500	1,262	0,00585	1,262	-7,444	30	1,954	7,815	0,0542	

Tabela 3

WYNIKI TESTU ZGODNOŚCI ROZKŁADÓW ZMIENNEJ  $T_2$  (SUMARYCZNYCH CZASÓW TRWANIA ZUŻYCIA WODY POWYŻEJ ZADANEGO POZIOMU  $Q_{gr}$ )  
Z ROZKŁADEM WEIBULLA, ŁÓDŹ, OKRES WIOSENNO-LETNI 1982

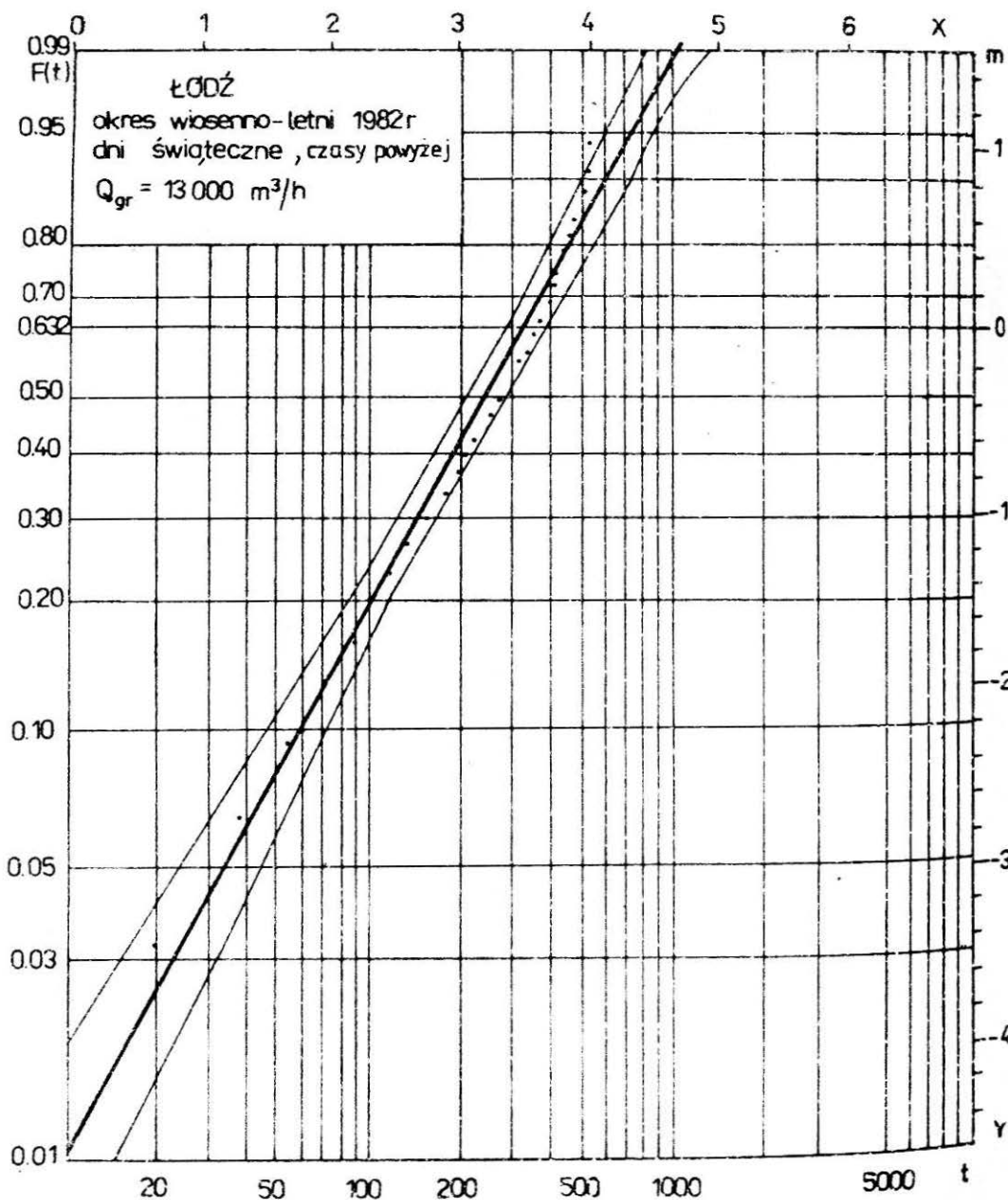
Wartości $Q_{gr}$ $m^3/h$	Estymatory parametrów rozkładu Weibulla						Wartość empiryczna		
	wtorki		środy		czwartki		wtorki	środy	czwartki
11.000	1,331	0,0005	1,313	0,0006	1,304	0,0007	0,057	0,070	0,070
13.000	-	-	1,347	0,0006	1,350	0,0006	-	0,078	0,069
15.000	1,650	0,0003	1,716	0,0002	1,569	0,0005	0,108	0,119	0,123
Wartość krytyczna statystyki Cochrana $g_m, 2; 1-0,05$	-	-	-	-	-	-	0,235	0,217	0,217
Liczba danych	26		24		24				



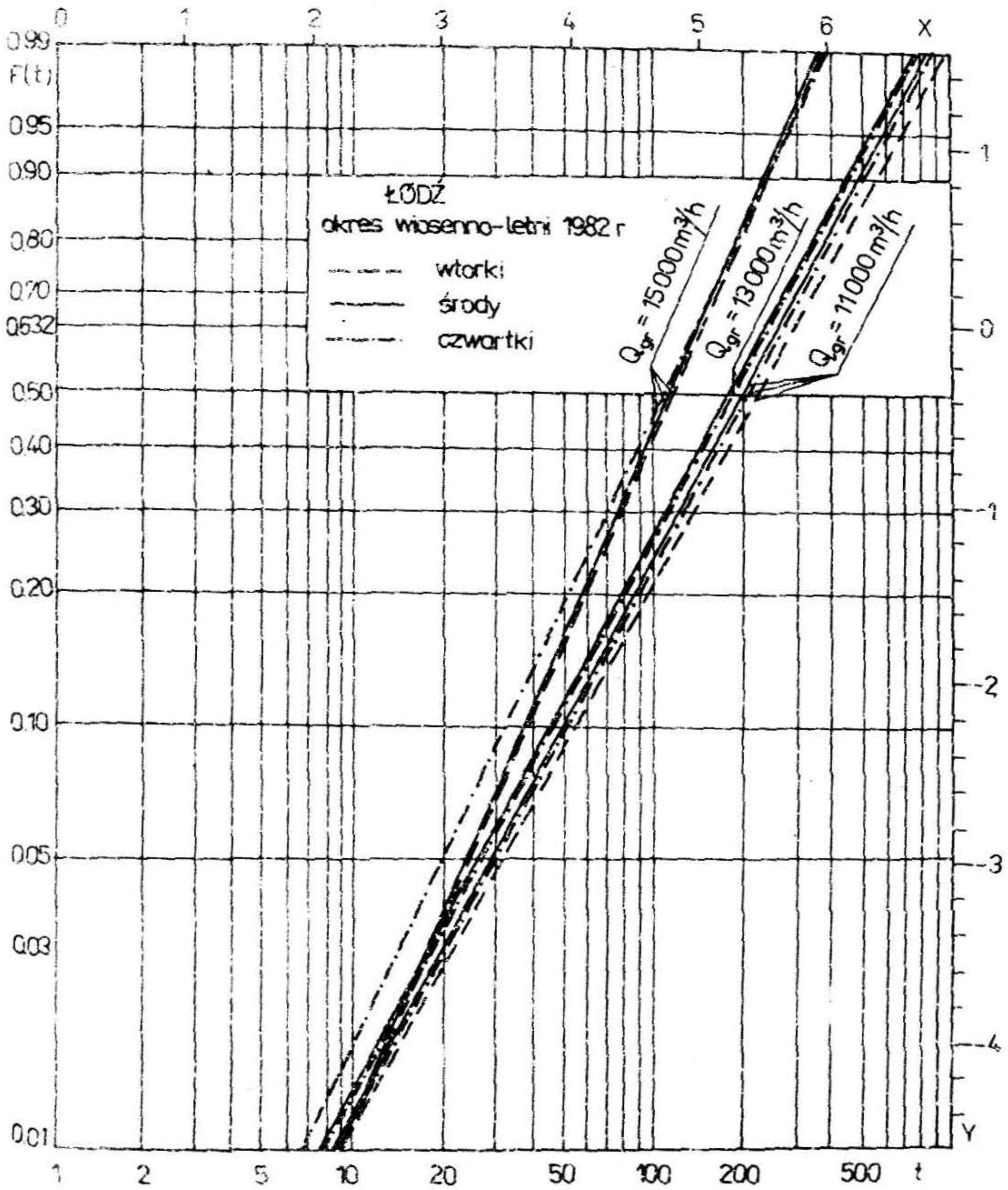
Tabela 4

WYNIKI TESTÓW ZGODNOŚCI ROZKŁADÓW ZMIENNEJ  $T_2$  (SUMARYCZNYCH CZASÓW TRWANIA ZUŻYCIA WODY  
 POWYŻEJ ZADANEGO POZIOMU  $Q_{gr}$ ) Z ROZKŁADEM WEIBULLA, ŁÓDŹ, OKRES WIOSENNO-LETNI 1982, DNI ŚWIĄTECZNE

Wartość $Q_{gr}$ $m^3/h$	Estymatory parametrów rozkładu Weibulla		Współczynniki prostej najmniejszych kwadratów		Liczba danych	Test $\chi^2$		Test Cochra	
			A	B		$\chi^2_{emp}$	$\chi^2_{0,05}$	$g_0_{emp}$	$g_3_{0,2; 0,95}$
12500	1,442	0,0086	1,442	-7,055	30	3,227	7,815	0,0734	0,1980
13000	1,319	0,0241	1,319	-6,029	30	7,360	7,815	0,1088	



Rys. 3. Wykres empirycznej dystrybuanty sumarycznych czasów trwania zużycia wody  
 poniżej  $Q_{gr} = 13000 \text{ m}^3/\text{h}$ , Łódź, okres wiosenno-letni 1982, dni świąteczne



Rys. 4. Wykresy empirycznych dystrybuant sumarycznych czasów trwania zużycia wody poniżej  $Q_{gr}$ , Łódź, okres wiosenno-letni 1982, wtorki, środy, czwartki

Sposób odczytywania przybliżonych estymatorów  $\hat{\alpha}$  i  $\hat{\beta}$  pokazano na rys. 2. W celu dokładnego wyznaczenia estymatorów nieobciążonych i zgodnych rozkładu Weibulla, adaptowano metodę Gumbela, opisaną np. w [6]. Obliczenia są realizowane za pomocą opracowanego przez autorów programu komputerowego KWE FTN w języku FORTRAN 77 dla systemu mikrokomputerowego SMA-20. Obejmują one wyznaczenie wartości:

- dystrybucyjności empirycznej,
- parametrów rozkładu Weibulla,
- współczynników prostej  $Y = A X + B$ ,
- estymatorów kwantyli dowolnego rzędu oraz szerokości ich przedziałów ufności,
- statystyki Cochran  $g_0$ .

Przykładowe wyniki obliczeń zestawiono w tabelach 1, 2, 3, 4, a wykresy empirycznych dystrybucyjności rozkładu prawdopodobieństwa zmiennych  $T_1$  i  $T_2$  pokazano na rys. 2, 3 i 4. Należy zwrócić uwagę na wygodę w praktycznym posługiwaniu się wynikami obliczeń. Wydruk wartości współczynników równań opisujących dystrybucyjność oraz wartości estymatorów niektórych kwantyli sprawia, że prawdopodobieństwa występowania zdarzeń  $t_1$  lub  $t_2$  może łatwo wyznaczyć każdy operator systemu wodociągowego nie posiadający specjalistycznego przygotowania, wykorzystując siatkę funkcyjną rozkładu Weibulla.

### 3. Podsumowanie i wnioski

Zaprezentowana w referacie metoda analizy i symulacji procesu zużycia lub zapotrzebowania na wodę (np. zużycia godzinowego), bazująca między innymi na elementach teorii niezawodności systemów odnawialnych, umożliwia uzyskanie szeregu istotnych informacji o przebiegu procesu. Jej wykorzystanie w praktyce stwarza przesłanki do rozwiązywania wielu zagadnień związanych z projektowaniem oraz eksploatacją systemów i obiektów wodociągowych. Niektóre z tych zagadnień, to:

- wyznaczenie poziomu zużycia wody lub zapotrzebowania na wodę miarodajnego do wymiarowania centralnych obiektów wodociągowych. Zadanie to można rozwiązać wykorzystując łącznie metodę probabilistycznego modelowania zaprezentowaną w pracach [4, 5] oraz scharakteryzowaną w referacie metodą bazującą na elementach teorii niezawodności,
- wyznaczenie sumarycznych w zadanym okresie (np. w poszczególnej dobie) czasów trwania zużycia wody powyżej lub poniżej poziomu zaspokojenia potrzeb odbiorców  $Q_{gr}$ . Ich znajomość stwarza przesłanki do racjonalnej eksploatacji centralnych obiektów wodociągowych (np. zakładów produkcji wody), oraz do optymalnego sterowania zbiornikami sieciowymi. Ponadto autorzy wyrażają pogląd, że metoda symulacji liczby i czasów przekroczeń zadanym poziomów granicznych może być bardzo dobrym testem zgodności generowanego modelu stochastycznego z rozważanym szeregiem czasowym.

### Literatura

- [1] Bobrowski D. - Wprowadzenie matematyczne do teorii niezawodności. Materiały dla studiów doktoranckich, Poznań, 1977.
- [2] Kopociński B. - Zarys teorii odnowy i niezawodności, PWN, Warszawa, 1973.
- [3] Praca zbiorowa pod red. Migdałskiego J. - Poradnik niezawodności - podstawy m3-tematyczne. Wyd. "WEMA", Warszawa, 1982.

- 
- [ 4 ] Siwoń Z. - Podstawy probabilistycznego modelowania zużycia i zapotrzebowania na wodę w miastach, Archiwum Hydrotechniki, t. XXVIII, z. 3, s. 399-435, 1981.
  - [ 5 ] Siwoń Z. - Statystyczna metoda analizy obserwacji zużycia wody w budynkach i osiedlach mieszkaniowych. Raport Instytutu Inżynierii Ochrony Środowiska Politechniki Wrocławskiej, Nr PRE 78/84.
  - [ 6 ] Smirnov N.W., Dunin-Barkowski I.W. - Kurs rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej dla zastosowań technicznych. PWN, Warszawa, 1973.
  - [ 7 ] Ojner I.J. i inni - Rachunek prawdopodobieństwa w problemach i zadaniach, PWN, Warszawa, 1979.

---

Doc. dr hab. inż. Zbigniew Siwoń - Politechnika Wrocławska, Wrocław; mgr inż. Maria Stanisławska, dr inż. Janusz Stanisławski - Wyższa Szkoła Inżynierska w Zielonej Górze.