
Uniwersytet Zielonogórski
Wydział Mechaniczny

mgr inż. Krzysztof Białas-Heltowski

Wyznaczanie i ocena rozwiązań
polioptymalnych na przykładzie
wybranego układu technicznego

Rozprawa doktorska

Promotor: prof. zw. dr hab. inż. Ryszard Rohatyński,
Uniwersytet Zielonogórski

Zielona Góra 2006

Gdybym miał problem, od którego zależałoby moje życie
i tylko jedną godzinę na jego rozwiązanie,
spędziłbym 40 min na jego analizie,
15 min na ponownym badaniu
i 5 min na jego rozwiązaniu.

Albert Einstein

SPIS TREŚCI

Streszczenie	4
Abstract	6
1. Wprowadzenie	8
1.1. Projektowanie (projektowanie optymalne)	8
1.2. Optymalizacja	10
1.3. Optymalizacja wielokryterialna	12
1.4. Analiza wrażliwości	15
1.5. Problem wyboru	17
1.6. Tolerancje, a wrażliwość	18
2. Optymalizacja elementów maszyn w projektowaniu (przegląd literatury)	19
2.1. Spostrzeżenia wynikające z przeglądu literatury	24
2.2. Stan problemu	26
2.3. Propozycje rozwiązania niektórych wymienionych problemów	26
3. Cel, teza i zakres pracy	28
4. Optymalizacja wielokryterialna w konstruowaniu elementów i zespołów maszyn	34
4.1. Wprowadzenie do zagadnienia optymalizacji wielokryterialnej	34
4.2. Rys historyczny rozwoju optymalizacji wielokryterialnej	34
4.3. Optymalizacja wielokryterialna. Podstawowe definicje	36
4.4. Metody optymalizacji wielokryterialnej	40
4.5. Zastosowanie algorytmów genetycznych w optymalizacji wielokryterialnej	41
4.5.1. Wprowadzenie do zagadnienia algorytmów genetycznych (AG)	41
4.5.2. Rys historyczny (AG)	42
4.5.3. Charakterystyka algorytmu genetycznego MOGA	42
5. Metody analizy wrażliwości	47
5.1. Wprowadzenie	47
5.2. Metody analizy wrażliwości	47
5.3. Charakterystyka metody gradientowej	50
6. Koncepcja i schemat proponowanej metody	52
6.1. Sformułowanie problemu	55
6.2. Optymalizacja wielokryterialna	57

6.3. Redukcja liczby rozwiązań Pareto-optimalnych (analiza skupień)	59
6.4. Planowanie eksperymentu w punktach optymalnych	61
6.5. Tworzenie charakterystyki obiektu $K = f(ZD)$	64
6.5.1. Weryfikacja statystyczna równań powierzchni odpowiedzi	65
6.5.2. Wykresy Pareto i profile odpowiedzi	67
6.6. Badanie odporności rozwiązań w punktach optymalnych	69
6.6.1. Wykresy gradientów	71
6.6.2. Mapa wpływów	72
6.7. Analiza informacji pozyskanej w efekcie zastosowania metody	73
6.7.1. Racjonalny wybór rozwiązania najlepszego	74
7. Zastosowanie proponowanej metody na wybranym przykładzie obiektu technicznego	76
7.1. Hamulec wielotarczowy	76
7.2. Przekładnia zębata trzystopniowa	90
7.2.1. Sformułowanie problemu	90
7.2.2. Optymalizacja wielokryterialna	92
7.2.3. Analiza skupień	95
7.2.4. Planowanie eksperymentu	97
7.2.5. Tworzenie meta-modeli $K = f(ZD)$ i ich ocena statystyczna	99
7.2.6. Wykresy Pareto i profile odpowiedzi	106
7.2.7. Analiza wrażliwości	114
7.2.8. Mapa wpływów	121
7.2.9. Wybór rozwiązania najlepszego ze zbioru Pareto-optimalnego	124
7.3. Porównanie otrzymanych wyników z innymi dostępnymi wynikami	126
8. Podsumowanie i wnioski	128
8.1. Podsumowanie	128
8.2. Wnioski	132
8.3. Plany na przyszłość – kierunki rozwoju metody	134
Literatura	138
Załącznik I – modele matematyczne badanych obiektów	142
Załącznik II – wyniki obliczeń	152

STRESZCZENIE

Wyznaczanie i ocena rozwiązań polioptymalnych na przykładzie wybranego układu technicznego.

Praca mieści się w dziedzinie projektowania optymalnego. Projektowanie to złożony proces decyzyjny. Konstruktor, bazując na wiedzy i doświadczeniu, narażony jest w swych działaniach na ryzyko popełniania błędów, które negatywnie wpływają na koszt i czas realizacji produktu.

Aby sprostać wysokim wymaganiom stawianym produktom (niski koszt, krótki czas realizacji, a przy tym wysoka jakość) stosuje się techniki optymalizacji, szczególnie optymalizacji wielokryterialnej, co prowadzi do zbioru rozwiązań kompromisowych (Pareto-optymalnych). Ponieważ wynikiem jest zbiór rozwiązań należy dokonać wyboru rozwiązania najlepszego z tego zbioru. Zatem, potrzebne jest dodatkowe kryterium, które umożliwi racjonalny wybór. Zmienność to cecha charakterystyczna zmiennych decyzyjnych. Można powiedzieć, że są one z natury zmiennymi losowymi. Z tego wynika, że realizacja techniczna rozwiązania optymalnego (najlepszego) nie jest możliwa. Trzeba dodatkowo dokonać analizy zachowania się poszczególnych funkcji celów w otoczeniu rozwiązania optymalnego. Wiedza na temat reakcji funkcji celów staje się potrzebnym kryterium wyboru rozwiązania najlepszego oraz może być wykorzystana w procesie przydziału tolerancji.

Po dokonaniu przeglądu literatury stało się jasne, że istnieje potrzeba nie tylko odnajdywania optymalnych rozwiązań kompromisowych, lecz także badanie reakcji funkcji celów na zmiany wartości zmiennych decyzyjnych, które są spowodowane błędami wytwarzania, uwzględnianymi w odchyłkach tolerancji. Na tej podstawie sformułowano cel pracy, którym jest wyznaczenie rozwiązań Pareto-optymalnych oraz ich ocena w konstruowaniu elementów i zespołów maszyn. Na potrzeby badania otoczenia rozwiązań polioptymalnych zaproponowana została metoda jako kompilacja pewnych istniejących technik. To umożliwiło osiągnięcie efektu synergii, który byłby niemożliwy do osiągnięcia w przypadku stosowania tych metod niezależnie.

W skład metody weszły następujące narzędzia:

- algorytm genetyczny do optymalizacji wielokryterialnej,
- metody analizy skupień,
- metody planowania eksperymentu,

- metody powierzchni odpowiedzi,
- metoda pochodnych cząstkowych.

Cechą charakterystyczną każdego etapu metody jest graficzna reprezentacja wyników. Dostarczenie konstruktorowi narzędzi graficznych wspomaga i usprawnia proces projektowy oraz zwiększa efektywność podejmowanych decyzji.

Zaproponowana metoda została zastosowana na dwóch wybranych obiektach technicznych. Pierwszym obiektem jest hamulec wielotarczowy. Wyniki podane zostały w skróconej postaci. Szczegółowo została przedstawiona na przykładzie przekładni zębatej trzystopniowej. Otrzymane wyniki zostały poddane analizie oraz dokonano porównania tych wyników z wynikami otrzymanymi przez innego badacza.

Praca została zakończona podsumowaniem i wnioskami dotyczącymi zaproponowanej metody oraz wnioskami ogólnymi. Ponadto wskazane zostały dalsze kierunki rozwoju metody jako narzędzia wspomagającego proces konstrukcyjny elementów i zespołów maszyn.

ABSTRACT

Finding and evaluation of polioptimal solutions on the chosen technical system example.

This dissertation is part of the domain of optimal design. Design is a complex decision process. Designer works using his technical knowledge and experience. He is still jeopardized on a risk of making an error and this has a bad influence on cost and time of making a product.

In order to meet high demands concerning different products (low cost, short time of realization, and simultaneously high quality) some methods of optimization are used, especially methods of multi-objective (multi-criteria) optimization. As a result of using those techniques a set of solutions is obtained, which is called a set of compromise (Pareto-optimal) solutions. In the next step it is necessary to make a choice of the best solution from that set. Thus, it is needed additional criterion to support rational choice. One of the main features of decision variables is their stochastic nature. And so, technical realization of optimal (the best) solution is not possible. There is a desire of analysis of behavior of particular objective functions in the neighborhood of obtained optimal solution. The knowledge concerning behavior of objective function is directly used in the process of choosing the final solution from Pareto set and can be also used in the tolerance allocation process.

In the consequence of review of literature stood clear, that there is a need of finding optimal (compromise) solutions and simultaneously there is a need of investigation of reaction of objective functions on changes in values of decision variables. Those changes are caused by manufacturing errors, which are taken into account in deviations of tolerances. It was the base for formulating the goal of the dissertation and the goal is finding of Pareto-optimal solutions and their assessing in a design of components and machine assemblies.

In order to investigate a neighborhood of polioptimal solutions it was proposed a method, which is a compilation of some applied techniques. It gave the opportunity of achieving the effect of cooperation, which could not be attained in the case of using those methods separately.

The proposed method is composed of the following tools:

- genetic algorithm for multi-objective optimization,
- cluster analysis methods,

- methods of design of experiments,
- response surface methods,
- method of calculation of partial derivatives.

The characteristic feature of each stage of the method is graphical presentation of obtained results. Delivering of graphical tools to a designer is a way of supporting and improving of a design process as well as increasing the efficiency of undertaken decisions.

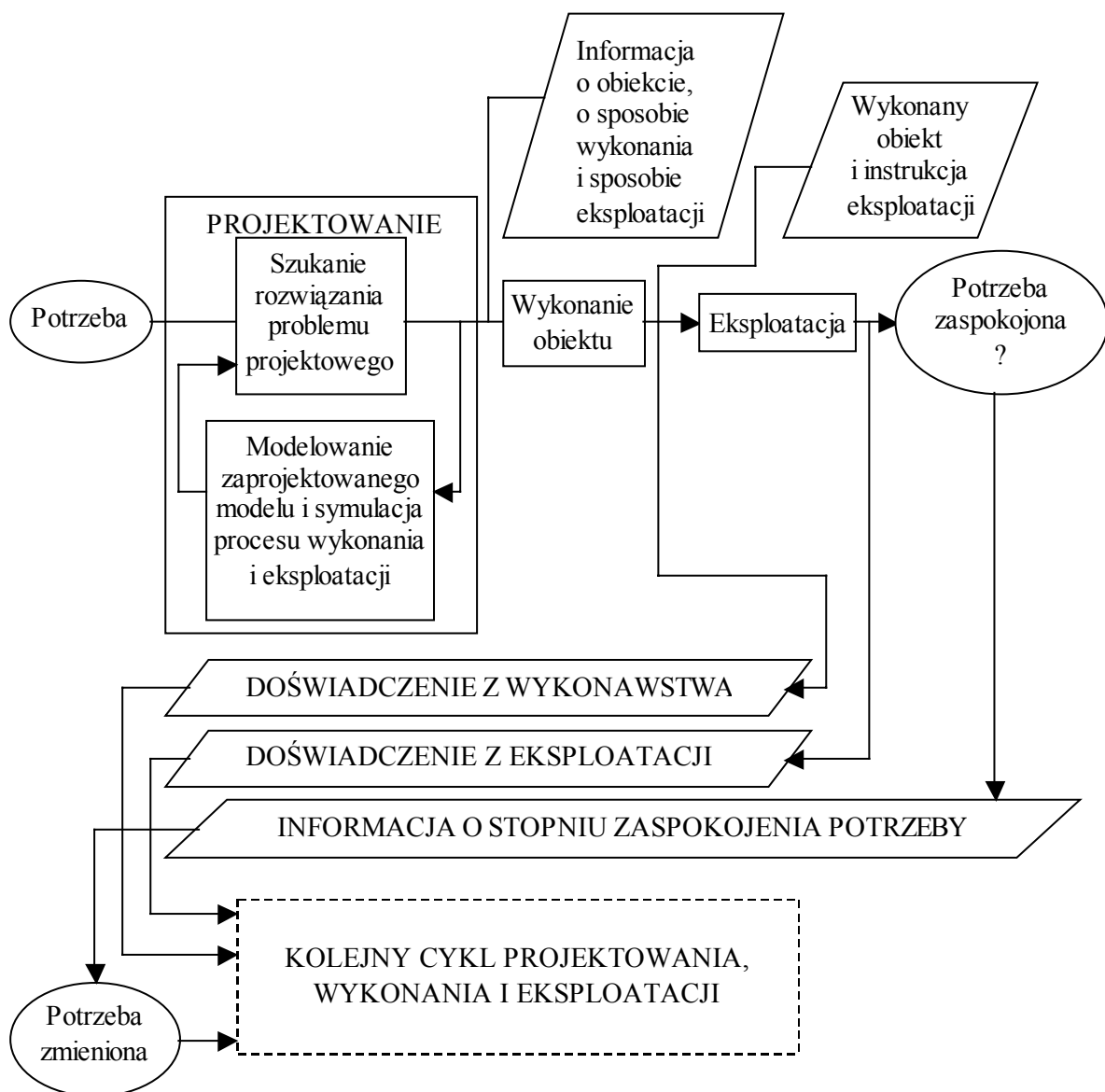
The method proposed in this dissertation was applied on two chosen technical systems. The first object was multiple brake. The effects were shown briefly. The other object was gear transmission. Every details were shown. The obtained results were analyzed and compared with result from literature.

The dissertation was finished with recapitulation and conclusions concerning proposed method and included examples. Moreover, ways of development of the method (as a tool of supporting a design process of components and machine assemblies) were indicated.

Rozdział 1. WPROWADZENIE

1.1. Projektowanie

Projektowanie, proces złożony, decyzyjny [Papalambros, 2000], określane też jako proces podejmowania decyzji [Johnson, 1971], prowadzi, mówiąc najogólniej, do wyznaczenia zamierzeń [Dietrych, 1974]. Jest elementem procesu zaspokajania potrzeb ludzkich (rys. 1.1) [Tarnowski, 1997]. Jest to typowy proces iteracyjny, zawierający sprzężenia zwrotne [Johnson, 1971]. Zdarza się, że informacje uzyskane na pewnym etapie projektowania zmuszają do powrotu do kroków poprzedzających.



Rys. 1.1. Schemat projektowania na tle procesu zaspokajania potrzeb [Tarnowski, 1997]

Błędne decyzje, których konsekwencją są sprzężenia zwrotne, wpływają negatywnie na trzy determinanty gospodarki rynkowej: niski koszt produkcji, wysoką jakość produktów oraz krótkie cykle produkcyjne, powodując zawyżanie kosztów i czasu wytwarzania [Chlebus, 2000].

Proces projektowania składa się z fazy formułowania zadania, fazy opracowania funkcji technicznej i fazy kształtowania postaci wyrobu [Pahl & Beitz, 1984]. Konstruowanie, jako część procesu projektowania technicznego, którego celem jest uszczegółowienie postaci części składowych projektowanego obiektu oraz wartości cech konstrukcyjnych [Tarnowski, 1997], można podzielić na krótki (najważniejszy) etap twórczy i stosunkowo długi etap obliczeniowo-dokumentacyjny. Etap drugi ma zwykle charakter zrutynizowany, co osłabia zdolności twórcze projektanta [Goliński, 1976]. Cel konstruowania, który wynika z potrzeb i możliwości ich realizowania, to tworzenie nowych obiektów technicznych. Jest to, w pewnym sensie, proces ciągły, ponieważ spełnienie jednych potrzeb tworzy nowe potrzeby [Dietrich, t. 1, 1995].

Można wymienić kilka charakterystycznych sposobów uzyskania przynajmniej zadowalającego rozwiązania problemu projektowego. Jednym z nich jest podejście doświadczalne, polegające na budowaniu obiektu technicznego i jego testowaniu. Jest to podejście bardzo kosztowne i czasochłonne, z małymi szansami odnalezienia optymalnego rozwiązania. Drugą skrajnością jest podejście czysto analityczne, w którym rozwiązanie otrzymuje się stosując odpowiednio dobrane metody matematyczne. W większości przypadków rzeczywiste problemy inżynierskie są zbyt złożone, aby otrzymać bezpośrednie rozwiązania analityczne. Jeszcze inne podejście to zastosowanie komputerowych systemów wspomagania projektowania. W tym podejściu eksperyment fizyczny zostaje zastąpiony przez eksperyment na modelu matematycznym. Wyniki z reguły muszą być zweryfikowane na prototypie fizycznym.

Znaczną część zadań inżynierskich można ująć w sposób ilościowy, co przekłada się na możliwość użycia komputera do analizy alternatywnych rozwiązań [Vanderplaats, 1984]. Maszyny cyfrowe w sposób radykalny wpłynęły na tradycyjny sposób projektowania. W konsekwencji ich rozwoju zmieni się pogląd na proces projektowania; zaczęto go formalizować [Goliński 1974]. Zastosowanie maszyn cyfrowych stworzyło możliwość wykonania badań numerycznych. Zamiast budować prototypy i poddawać je badaniom w laboratoriach, łatwiej i taniej jest budować i badać modele matematyczne tych prototypów [Pogorzelski, 1978]. Dzięki temu osiąga się obecnie lepsze zrozumienie działania projektowanego układu jeszcze przed wykonaniem prototypu [Papalambros, 2000].

Istnieje ciągła potrzeba poszukiwania najlepszych metod wspomagających proces projektowania. Wprowadzenie do projektowania inżynierskiego z metod optymalizacji nazywane bywa projektowaniem optymalnym [Leśniak, 1970; Johnson, 1980; Dziama, 1985; Szymczak, 1991; Dixon, 1995; Ostwald, 2003].

1.2. Optymalizacja

Niektórzy autorzy twierdzą (np. [Stolc, 1985]), że metody optymalizacji stały się nieodłącznym narzędziem w pracy inżyniera. Nie znajduje to potwierdzenia w badaniach realnego projektowania. Istnieje luka między inżynierską praktyką i teorią optymalizacji. Niniejsza rozprawa wpisuje się w nurt prac zmierzających do zmniejszenia luki między teorią optymalizacji, a praktyką jej stosowania.

Poszukiwanie rozwiązania optymalnego spełniającego określone (narzucone z góry) warunki nazywa się (w najogólniejszym znaczeniu) według Golińskiego (1976) programowaniem. Przebiega ono według następującego schematu: (i) ustalenie zmiennych, którym można nadać dowolne wartości, (ii) sformułowanie wymagań w postaci nierówności (wymagania zawierają zmienne ustalone wcześniej. Zbiór wymagań tworzy obszar dopuszczalny), (iii) utworzenie funkcji celu, zawierającej ustalone zmienne. Funkcja celu (funkcja kryterium optymalizacji, kryterium optymalizacji [Osiński, 1986]) opisuje cechę istotną dla oceny urządzenia.

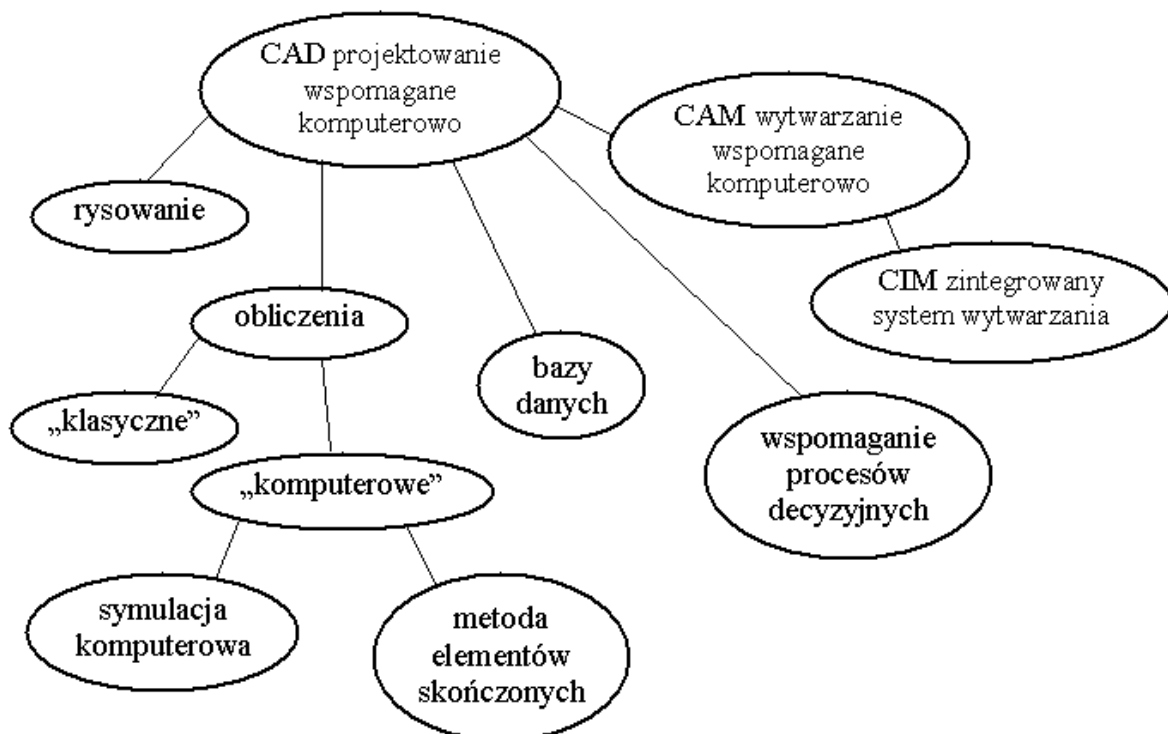
Metody optymalizacji stosowane są w celu odnalezienia pewnego zestawu wartości zmiennych projektowych (decyzyjnych), dla których funkcja celu przyjmuje wartość optymalną (maksymalną lub minimalną), jednakże pod warunkiem, że rozwiązanie spełnia ograniczenia. Problem ograniczeń jest bardzo istotny. Zły lub niekompletny zbiór prowadzi do błędnych rozwiązań [Dixon, 1995].

Można wyróżnić cały szereg metod optymalizacji, począwszy od metod o szczególnym przeznaczeniu przeznaczonych dla zadań określonej klasy, do metod ogólnych. Wśród nich znajdują się metody stochastyczne. Oto trzy przyczyny, dlaczego warto używać metod stochastycznych [Come, 1999]: (i) łatwe w implementacji, (ii) nie wymagają znajomości a priori rozwiązywanego problemu, (iii) zastosowanie potwierdza, że z powodzeniem nadają się do odnajdywania zadowalających rozwiązań trudnych problemów.

Istnieją różne podejścia do problemu optymalizacji. Jedno z nich to podejście o nazwie *soft optimization* (miękką optymalizacją). Autorzy [Zaporski, 2004] zwracają uwagę na to, że występują przypadki, gdy zdefiniowanie kryterium optymalizacji może być

dyskusyjne ze względu na fakt istnienia wielu wymagań. Wskazują, że przy wielu kryteriach przegląd rozwiązań polioptymalnych może być kłopotliwy. Jako podejście alternatywne proponują dialogową procedurę poszukiwania kompromisowego rozwiązania satysfakcjonującego. Procedura ta nazwana została „miękką optymalizacją” (*soft optimization*). Nazwa bierze się stąd, że w procesie optymalizacji nie ustala się postaci funkcji celu, a jedynie wykorzystuje ograniczenia. Obszerny opis tego podejścia znajduje się w publikacji [Tarnowski, 2004]. Inne zakłada holistyczne rozumienie optymalizacji [Ostwald, 2003], które pochodzi z teorii systemów [Cempel, 2005]. Na stronie internetowej <http://neur.am.put.poznan.pl/Skrypty/skrypty.htm> znajduje się e-skrypt na temat „Teoria i inżynieria systemów”.

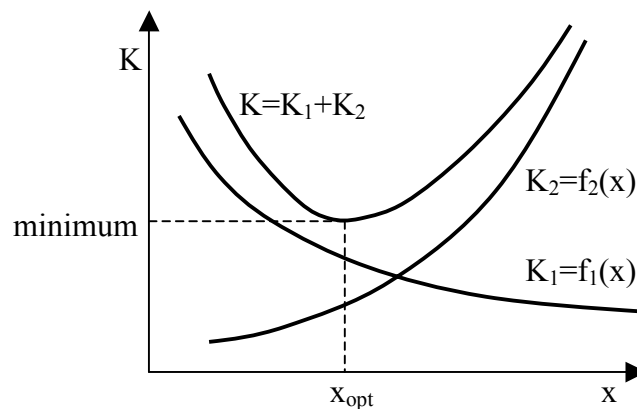
Należy podkreślić, że projektowanie ściśle związane jest z wykorzystaniem metod i technik CAD (*Computer Aided Design*) (np. [Osiński, 1994]). Rozwój systemów komputerowych spowodował, że zaczęto wyróżniać tzw. projektowanie zorientowane (*Design for ... X*). Można tu zaliczyć projektowanie zorientowane na montaż (*DFA – Design for Assembly*), na wytwarzanie (*DFM – Design for Manufacture*), na koszt (*Design for Cost*), na jakość (*Design for Quality*) itp. [Branowski, 1998]. Rysunek 1.2 przedstawia zakres CAD [Osiński, 2002].



Rys. 1.2. Zakres projektowania wspomagane komputerowo [Osiński, 2002]

1.3. Optymalizacja wielokryterialna

W rzeczywistych problemach inżynierskich jest regułą stawianie wielu wymagań rozwiązaniu zadania decyzyjnego (np. zadania projektowego) [Tarnowski, 2004], a zatem mamy więcej niż jedną funkcję celu [Osiński, 1982], co jest ważne ze względu na zastosowania praktyczne [Osiński, 2002]. W takiej sytuacji model optymalizacyjny jest opisany przez wektor celów [Papalambros, 2000]. Zadaniem polioptymalizacji (optymalizacji wektorowej = optymalizacji przy wielorakości celów = optymalizacji wielokryterialnej) jest znalezienie takiego podzbioru wariantów polioptymalnych, które możliwie dobrze spełniają kryteria, a jednocześnie bezwzględnie spełniają wszystkie ograniczenia [Tarnowski, 1997]. Otrzymane rozwiązania nazywamy rozwiązaniami kompromisowymi. Rysunek 1.3 przedstawia ogólną ideę rozwiązania kompromisowego dla 2 kryteriów o jednakowych wagach [Dietrych, 1974].



Rys. 1.3. Idea rozwiązania kompromisowego [Dietrych, 1974]

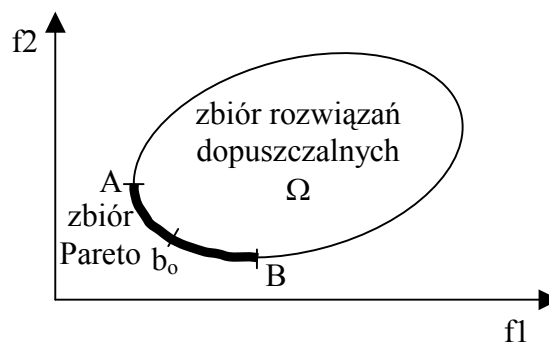
Na przestrzeni lat zostały zaproponowane pewne podejścia do transformacji problemu wielokryterialnego na jednokryterialny. Najprostsze podejście to wybór jednego najważniejszego kryterium z przeniesieniem pozostałych jako ograniczania [Goliński, 1974; Tarnowski, 1997; Papalambros, 2000]. Innym prostym sposobem jest metoda celów ważonych, polegająca na przydzielaniu odpowiednich wag każdemu kryterium oraz sumowaniu iloczynów wag w_i i celów $c_i(x)$ (rów. 1.1).

$$\min f(x) = w_1 \cdot c_1(x) + w_2 \cdot c_2(x) \quad (1.1)$$

Wadą tego podejścia jest trudność związana z określeniem wag a priori [Peschel, 1979]. Projektant powinien prowadzić obliczenia stopniowo zmieniając wartości wag, co prowadzi do lepszego poznania relacji między kryteriami [Papalambros, 2000]. Choć w literaturze (np. [Tarnowski, 1987]) spotyka się sposoby określania wag, niektórzy autorzy nie zalecają stosowania kryterium addytywnego (np. [Dixon, 1995]).

Ponadto, istnieją jeszcze inne podejścia, a wśród nich: teoria użyteczności (*utility theory*). Polega ona na korelacji funkcji celów z funkcjami wartości (kosztem), co prowadzi do jednego kryterium. Inne to programowanie celów (*goal programming*). Wprowadza się pewne zmienne jako miarę odchylenia od celów, które są definiowane na początku działań. Poszukuje się minimalnej wartości odchylenia. Wynikiem jest decyzja kompromisowa. Jeszcze inne podejście to teoria gier (*game theory*). Stosowana jest, gdy istnieje naturalna hierarchia kryteriów projektowych. Używane modele przedstawiają proces projektowania współbieżnego [Papalambros, 2000; Nikiel, 2004]. Przegląd metod polioptymalizacji można znaleźć w pozycjach [Osiński, 1988; Tarnowski, 1989].

Szczególnie wartościowym podejściem do problemów wielokryterialnych w projektowaniu jest poszukiwanie zbioru rozwiązań Pareto- optymalnych (polioptymalnych = kompromisowych = efektywnych = niezdominowanych = sprawnych) [Tarnowski, 1997; Ostwald, 2003; Papalambros, 2000]. Rysunek 1.4 przedstawia przykładowy zbiór rozwiązań kompromisowych, tzw. front Pareto (dla dwóch funkcji celów f_1 i f_2). W przypadku trójwymiarowej przestrzeni celów zbiór rozwiązań kompromisowych ma postać powierzchni. Czasami jednak może się zdegenerować i występować jako odcinek lub nawet punkt [Peschel, 1979].



Rys. 1.4. Przykładowy front Pareto

Punkt b_0 nazywa się Pareto- optymalnym wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje inny punkt b_i z przestrzeni rozwiązań dopuszczalnych Ω taki, że: $b_i \leq b_0$ dla wszystkich kryteriów

oraz $b_i < b_o$, co najmniej dla jednego kryterium. Ogólnie można powiedzieć, że są to rozwiązania charakteryzujące się tym, że próba polepszenia jednego kryterium kończy się pogorszeniem innego [Papalambros, 2000].

Metody polioptymalizacji dzielą się na te, których rozwiązaniem jest zbiór (metody generacyjne) i te, których rozwiązaniem jest jeden wariant spośród zbioru wariantów polioptymalnych (metody preferencyjne) [Tarnowski, 1997]. Ogólnie można wyróżnić trzy metody optymalizacji wielokryterialnej [Zitzler, 1999]: (i) proces decyzyjny poprzedza poszukiwanie (niezbędna jest znajomość a priori rozwiązywanego problemu; funkcja celu przyjmuje postać zagregowaną), (ii) poszukiwanie poprzedza proces decyzyjny (wynik optymalizacji to zbiór kandydatów, z których wybierane jest jedno rozwiązanie), (iii) proces decyzyjny następuje w trakcie poszukiwania (po każdym kroku procesu optymalizacji podejmowane są decyzje odnośnie dalszych działań).

Dokonując porównania dwóch podejść, optymalizacji jednokryterialnej i optymalizacji wielokryterialnej, można dojść do następujących wniosków [Zitzler, 1999]: optymalizacja jednokryterialna (*SOP – Single-objective Optimization Problem*) posiada następujące wady: (i) pewne techniki (np. metoda celów ważonych) mogą być wrażliwe na kształt frontu Pareto-optymalnego, (ii) może być wymagana wiedza o rozwiązywanym zagadnieniu, co nie zawsze jest możliwe, (iii) aby wygenerować front Pareto stosując podejścia klasyczne należy wielokrotnie powtórzyć proces optymalizacji. Optymalizacja wielokryterialna (*MOP – Multi-objective Optimization Problem*), realizowana przy pomocy algorytmów ewolucyjnych, posiada następujące cechy: (i) algorytmy genetyczne umożliwiają odnalezienie frontu Pareto przy jednym uruchomieniu procesu optymalizacji, (ii) techniki ewolucyjne mogą być implementowane w sposób pozwalający uniknąć wad optymalizacji jednokryterialnej.

Jeszcze w 1978 W. Pogorzelski pisał: „Jedynie w rzadkich przypadkach wyrażenie w matematycznej, formalnej postaci poglądów projektanta na szeroko rozumianą jakość układu optymalizowanego jest łatwe. Niestety, zwykle jest to trudne i często prowadzi do zagadnień optymalizacji z wieloma funkcjami ekstremalizowanymi (tzw. zagadnień wielokryterialnych).” [Pogorzelski, 1978], a dzisiaj, w dobie narzędzi nowej generacji, metod sztucznej inteligencji, problem ten został pokonany. Ogromna szybkość obliczeniowa komputerów pozwala na rozwiązywanie problemów dotychczas nierozwiązywalnych z uwagi na niezbędny olbrzymi zakres obliczeń.

Iteracyjne metody optymalizacji dzielą się na dwie główne klasy: metody poszukiwania lokalnego i metody poszukiwania oparte na populacji [Corne, 1999]. W

niniejszej pracy wykorzystano podejście drugie, gdzie rozwiązanie nowe znajdowane jest poprzez wybór osobników do nowej populacji i dokonywanie na nich pewnych zmian. Działanie na populacji osobników to możliwość, jaka zaistniała dzięki rozwojowi nowych procedur heurystycznych, powstałych w wyniku obserwacji przyrody [Ostwald, 2003]. Należą do nich algorytmy genetyczne i strategie ewolucyjne, symulowane wyżarzanie, sztuczne sieci neuronowe, systemy rozmyte, automaty (maszyny) uczące się, algorytmy mrówkowe, sztuczne systemy immunologiczne.

Techniki (algorytmy) ewolucyjne posiadają pewne cechy, które preferują je do rozwiązywania problemów optymalizacji. Zastosowanie ich do wielu przypadków pozwala wyciągnąć dwa wnioski [Zitzler, 1999]: (i) dobrze sprawdzają się w sytuacji wielu sprzecznych ze sobą celów, (ii) dobrze sprawdzają się w przypadku przeszukiwania bardzo dużych i złożonych przestrzeni [Cytowski, 1996].

Podsumowując można powiedzieć, że z optymalizacją wielokryterialną związane są dwa zagadnienia [Zitzler, 1999]: (i) poszukiwanie zbioru rozwiązań optymalnych, (ii) podejmowanie decyzji (proces decyzyjny) odnośnie wyboru rozwiązania najlepszego.

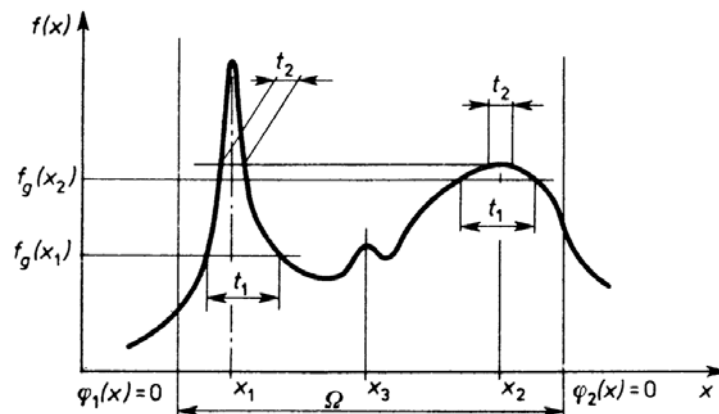
O tym, jak ważne są zagadnienia wielokryterialne świadczą najlepiej dwa fakty: (i) w czerwcu 2006 roku odbyła się już XXIV krajowa konferencja na temat „Poliptymalizacja i Komputerowe Wspomaganie Projektowania”, organizowana przez profesora Tarnowskiego z Politechniki Koszalińskiej, (ii) na stronie internetowej, prowadzonej przez Carlosa A. Coello Coello (PhD): <http://www.lania.mx/~ccoello/EMOO/>, znajduje się ogromny zbiór źródłowy dotyczący optymalizacji wielokryterialnej przy pomocy narzędzi ewolucyjnych, zawierający prace doktorskie, magisterskie, raporty techniczne, artykuły konferencyjne, publikacje w czasopiśmie, rozdziały książek oraz książki. Część z tych materiałów została udostępniona.

1.4. Analiza wrażliwości

Z punktu widzenia oceny produktu warto zwrócić uwagę na zależność kryteriów od małych zmian wartości zmiennych decyzyjnych. Badanie tego rodzaju zależności nazywa się badaniem (analizą) wrażliwości [Papalambros, 2000].

Jeżeli w efekcie zastosowania metod optymalizacji wielokryterialnej otrzymuje się zbiór rozwiązań nieulepszalnych, to pojawia się pytanie, które z tych rozwiązań jest najlepsze. Należy zatem na otrzymany zbiór nałożyć pewne dodatkowe kryterium, które umożliwi wybór rozwiązania najlepszego. W tej pracy za takie kryterium przyjęto wrażliwość funkcji celu na zmiany wartości zmiennych decyzyjnych.

Dietrich w swym fundamentalnym podręczniku [Dietrich, t. 1, 1995] rozróżnia dwa znaczenia wyniku optymalnego: w sensie matematycznym i w sensie technicznym. Pierwsze znaczenie obejmuje tylko wyznaczenie optymalnej wartości funkcji celu w obszarze decyzji dopuszczalnych¹. Znalezienie takiego punktu lub punktu położonego blisko niego kończy zadanie. Sens znaczenia technicznego jest szerszy: ważne jest nie tylko znalezienie punktu optymalnego, ale także zbadanie przebiegu funkcji celu w okolicy tego punktu. Ponieważ pewne czynniki (jak np. tolerancje wykonania elementów [Humienny, 2004], odchylenia standardowe lub niedokładności pomiaru) powodują rozminięcie się realizacji technicznej maszyny z idealną realizacją rozwiązania optymalnego, to jeśli wartości funkcji celu szybko pogarszają się w okolicy rozwiązania optymalnego, to optimum matematyczne nie może być zaakceptowane. Należy więc poszukać innego ekstremum, w okolicy którego funkcja celu będzie miała łagodniejszy przebieg. Rysunek 1.5 przedstawia ilustrację wyboru rozwiązania w zależności od tolerancji t_1 wykonania w jednowymiarowej przestrzeni zmiennych decyzyjnych x i dla jednego kryterium $f(x)$.



Rys. 1.5. Wybór rozwiązania w zależności od tolerancji wykonania [Dietrich, t. 1, 1995]

Zbadanie wrażliwości rozwiązania optymalnego na zmiany zmiennych decyzyjnych daje możliwość przewidywania wpływu zmian cech materiałowych, geometrycznych, wahań obciążenia, naruszenia ograniczeń itp. [Vanderplaats, 1984]. Oprócz zmian wartości zmiennych decyzyjnych należy też zbadać wpływ zewnętrznych czynników na przyjęte wielkości kryterialne. W modelu optymalizacyjnym mogą one występować jako parametry.

¹ Obszar decyzji dopuszczalnych – podzbiór Ω zbioru wartości zmiennych decyzyjnych wyznaczony przez ograniczenia (więzy) równościowe i nierównościowe nałożone na zmienne decyzyjne [Dietrich, t. 1, 1995]

Charakterystyka obiektu, w formie zależności matematycznej między wielkościami mierzalnymi na wejściu i na wyjściu obiektu, jest często w problemach inżynierskich poszukiwana. Do wyznaczania zależności stosuje się metody analizy regresji [Milkiewicz, 1979]. W celu wyznaczania wrażliwości odpowiedzi badanego obiektu (a właściwie jego modelu) zastosowano w pracy postać wielomianową równania opisującego relacje między kryteriami, a zmiennymi decyzyjnymi.

1.5. Problem wyboru

Rozwiązanie zadania polioptymalnego, ze względu na dużą liczbę wariantów, jest niejednoznaczne. W konsekwencji użytkownik zmuszony jest do podjęcia arbitralnej decyzji dotyczącej wyboru jednego wariantu. Decyzja to jednorazowy akt postanowienia w sprawie rezultatów wyboru, dokonywany przez człowieka, subiektywny, intuicyjny, arbitralny [Tarnowski, 1997]. Optymalizacja wielokryterialna, której wynikiem jest zbiór rozwiązań kompromisowych, wymaga dodatkowego kryterium oceny w celu podjęcia decyzji o rozwiązaniu optymalnym. Wybór rozwiązania jest finalnym zabiegiem w procesie optymalizacji [Dietrych, 1985]. Podstawą wyboru jest system wartości, definiowany przez żądania, życzenia i relacje między nimi [Tarnowski, 1987]. Niemal każde działanie człowieka związane jest z podejmowaniem decyzji [Całczyński, 1988].

Problemy decyzyjne bywają jednak tak skomplikowane, że nie wystarcza już tylko intuicja i doświadczenie. W sytuacji, gdy mamy do czynienia z co najmniej dwoma rozwiązaniami (wariantami) pojawia się potrzeba podjęcia decyzji i wyboru jednego z nich.. Technika optymalizacji numerycznej oferuje pewne uporządkowane podejście do podejmowania decyzji, które wcześniej oparte były na intuicji i doświadczeniu. Nie oznacza to, że intuicja i doświadczenie zostają całkowicie przez nią zastąpione. Chodzi o to, aby zautomatyzować pewne rutynowe czynności (obliczenia) umożliwiając tym samym skoncentrowanie się na prawdziwie kreatywnych aspektach projektowania [Vanderplaats, 1984].

Kryteria oceny konstrukcji różnią się między sobą i są uwarunkowane przeznaczeniem, sposobem i warunkami eksploatacji oraz możliwościami ekonomicznymi i technologicznymi. Do typowych kryteriów można zaliczyć: kryterium bezpieczeństwa, kryterium niezawodności, kryterium masy, kryterium ekonomicznej eksploatacji, kryterium technologiczności, kryterium ergonomii i estetyki oraz kryterium ekologiczne. Lokalna

analiza wrażliwości wiąże się bezpośrednio z kryterium niezawodności², ponieważ uszkodzenie maszyny spowodowane zbytnią wrażliwością na nieuniknione wahania wartości zmiennych decyzyjnych lub zakłócenia powoduje straty związane z jej naprawą i unieruchomieniem. Jeśli spojrzymy systemowo na układ maszyn i urządzeń, kryterium to nabiera jeszcze większego znaczenia, ponieważ awaria jednego elementu systemu może spowodować uszkodzenie, a nawet zniszczenie całego systemu. Należy więc budować maszyny odporne na odchylenia wielkości konstrukcyjnych na zmiany obciążenia i na zakłócenia.

Po rozwiązaniu zadania polioptymalizacji konstruktor musi podjąć decyzję o wyborze rozwiązania kompromisowego, najlepiej dostosowanego do możliwości wykonawczych i do przewidywanych warunków eksploatacji. Wrażliwość na zmiany jest ważnym elementem tej decyzji.

1.6. Tolerancje, a wrażliwość

Jeśli chcemy uwzględnić niepewność w sposób analityczny, zmienne należy traktować jako losowe [Siddal, 1972]. Zmienne decyzyjne, które są z natury zmiennymi losowymi [Białas, 1986], charakteryzują się pewnym rozrzutem swych wartości, a zatem powinny być ujmowane probabilistycznie [Tarnowski, 1989]. Z tego wynika, że nie wystarcza znaleźć rozwiązanie „najlepsze” w sensie matematycznym, ale jak to wspomniano w rozdz. 1.4, trzeba dodatkowo zbadać otoczenie tego rozwiązania. Wiedza uzyskana w ten sposób może być bezpośrednio użyta w procesie alokacji tolerancji. Ogólnie wiadomo, że koszt wykonania rośnie, gdy tolerancje się zmniejszają. Związane jest to z potrzebą zakupu droższych maszyn, proces wytwarzania się wydłuża, należy dokonywać częstszych pomiarów, potrzebni są lepiej wyszkoleni operatorzy maszyn, całość zabiera więcej czasu itd. [Whitney, 2004]. A zatem tam, gdzie wpływ danej zmiennej decyzyjnej jest mniejszy, należy przydzielić większe tolerancje, tam zaś, gdzie wpływ jest znaczny, tolerancje można ostrożnie „zacieśnić”.

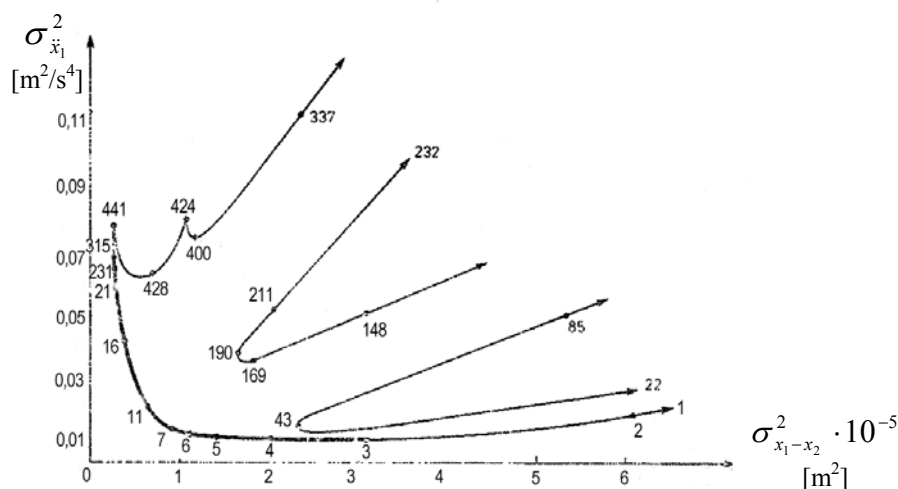
² Niezawodność – zdolność obiektu do wypełniania zadanych funkcji i utrzymania swoich wskaźników eksploatacyjnych w zadanych przedziałach przy zadanych warunkach eksploatacji, w ciągu wymaganego czasu lub wymaganej do wykonania przez obiekt pracy [Osiński, 1986]

Rozdział 2. OPTIMALIZACJA ELEMENTÓW MASZYN W PROJEKTOWANIU (ANALIZA KRYTYCZNA)

W tym rozdziale przedstawiono kilka znaczących osiągnięć na polu rozwiązywania problemów wielokryterialnych oraz wykazano potrzebę opracowania dotychczas nierozwiązanych problemów. Ze względu na ogrom prac z tej dziedziny ograniczono się tylko do prac, które miały zasadniczy wpływ na ukształtowanie poglądów autora.

Profesor Zbigniew Osiński [Osiński, 1982] dokonał przeglądu metod polioptymalizacji. Charakteryzując rodzaje tych metod użył takich nazw: pseudoptymalizacja, polioptymalizacja docelowa, polioptymalizacja względna, polioptymalizacja hierarchiczna leksykograficzna, polioptymalizacja zupełna. Cechą wspólną tych metod (oprócz polioptymalizacji zupełnej) jest przekształcenie zadania z wektorową funkcją celu (wielokryterialnego) w zadanie ze skalarną funkcją celu (jednokryterialne). W konsekwencji otrzymuje się tylko jedno z wielu rozwiązań polioptymalnych. Stosowane sposoby transformacji nie są wolne od wad, na przykład w przypadku pseudoptymalizacji potrzebna jest a priori znajomość wag określających siłę wpływu danego kryterium na wartość addytywnej funkcji celu. Zmiana wektora wag powoduje wyznaczenie innego rozwiązania optymalnego. W przypadku polioptymalizacji docelowej osiągnięcie optimum zależy od przyjętego punktu docelowego. Zmieniając punkt docelowy otrzymujemy inny punkt jako optymalny. W przypadku polioptymalizacji względnej wadą jest nieokreślony sposób poszukiwania najlepszego rozwiązania. Pewną alternatywą dla wymienionych metod jest polioptymalizacja zupełna. Polega ona na przeglądzie całego zbioru rozwiązań polioptymalnych, z których eksperci dokonują wyboru najlepszego ich zdaniem rozwiązania. Na wybór mogą wpłynąć kryteria subiektywne, które nie były uwzględnione w procesie polioptymalizacji (np. estetyka konstrukcji) oraz osobiste doświadczenie i intuicja. Zasługuje na uwagę, że we wszystkich metodach polioptymalizacji wybór najlepszego rozwiązania konstrukcyjnego dokonywany jest w sposób mniej lub więcej subiektywny w cytowanej pozycji literaturowej. Problem wielokryterialności w budowie maszyn zobrazowano na przykładzie liniowego modelu zawieszenia samochodu o dwu stopniach swobody przy wymuszeniu stochastycznym. Przyjęto 2 zmienne decyzyjne i 2 kryteria. Zastosowano metodę systematycznego przeszukiwania, wcześniej dokonując dyskretyzacji zbioru dopuszczalnego. Dla każdego punktu obliczono wartości funkcji celów. Określono zbiór

rozwiązań polioptymalnych. Wyniki przedstawione zostały ekspertom do ostatecznego podjęcia decyzji. Rysunek 2.1 przedstawia uzyskany front Pareto.



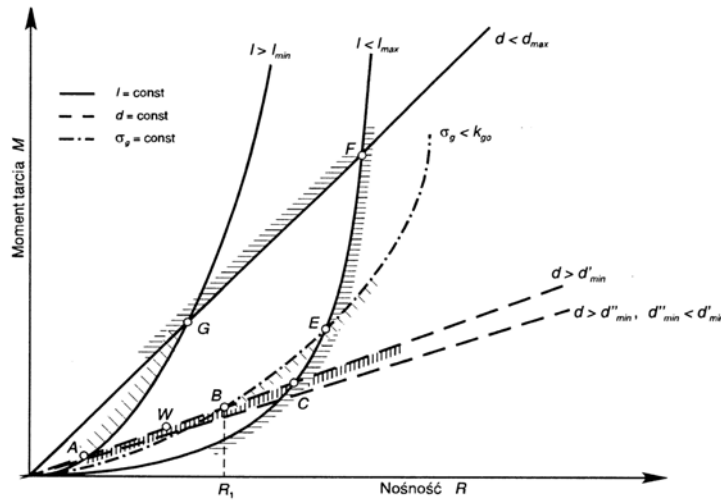
Rys. 2.1. Zbiór stanów osiągalnych i stanów polioptymalnych [Osiński, 1982]

Chociaż otrzymany został zbiór rozwiązań polioptymalnych nie podano rozwiązania najlepszego ani kryteriów oceny i wyboru dokonanego przez ekspertów.

W innej pozycji literatury [Tarnowski, 1991] przedstawiono przykład polioptymalizacji walcowej przekładni zębatej dla 8 zmiennych decyzyjnych i 5 kryteriów jakości. Rozwiązanie problemu polioptymalizacji przeprowadzone zostało poprzez wprowadzenie kryterium zastępczego w postaci zagregowanej, co w konsekwencji przekształciło zadanie wielokryterialne w jednokryterialne. W efekcie otrzymano kolekcję parametrycznych zbiorów rozwiązań polioptymalnych. Podobne postępowanie można znaleźć w pozycjach [Osiński, 1994; Porębska, 1997; Torzyński, 2000; Osiński, 2002].

W pozycji [Tarnowski, 1997] zagadnienie polioptymalizacji zobrazowano na przykładzie łożyska ślizgowego. Przyjęto 2 zmienne decyzyjne i 2 kryteria optymalizacji. Zdefiniowano 7 nierówności. Ponadto zobrazowano rozwiązania polioptymalne dla przypadków dwóch i trzech kryteriów. Przeprowadzono analizę ograniczeń konstrukcyjnych, zwracając uwagę na fakt, że zbiór wariantów polioptymalnych leży najczęściej w całości na ograniczeniach. Pokazano jednoczesną optymalizację parametrów i struktury. Całość zakończono uwagami, które dotyczą możliwości, jakie daje polioptymalizacja: (i) umożliwia wgląd w naturę rozwiązywanego zadania, szczególnie w naturę konfliktu między sprzecznymi wymaganiami, (ii) może być pomocna jako narzędzie wypełniające „lukę” między metodami algorytmicznymi i heurystycznymi. Rozwiązanie optymalne nie zostało podane. Przykład

służył tylko jako ilustracja problemu. Rysunek 2.2 przedstawia graficzne odwzorowanie zbioru wariantów w przestrzeni celów (kryteriów), która w tym przypadku jest przestrzenią dwuwymiarową $\langle R, M \rangle$.



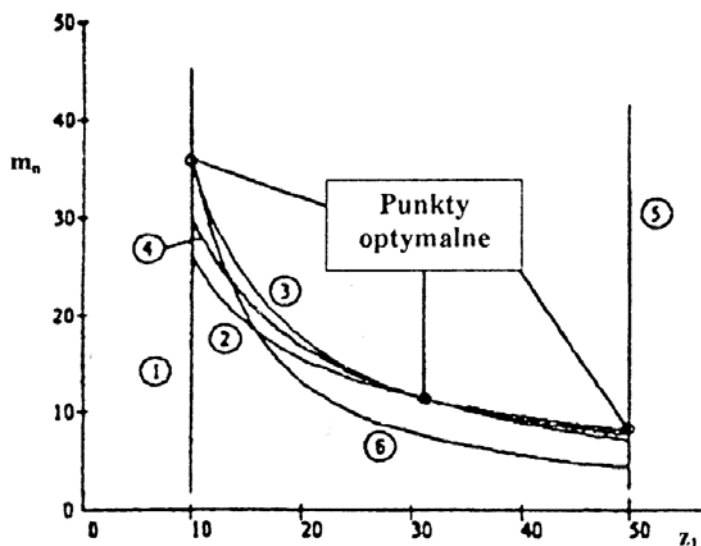
Rys. 2.2. Przykład ilustrujący zasadę, że rozluźnienie ograniczenia, na którym leży zbiór wariantów polioptymalnych, powoduje poprawę tego zbioru [Tarnowski, 1997]

W pozycji [Torzyński, 1999] rozważano zadanie optymalizacji wielokryterialnej dla trzech kryteriów. Dla trzech ograniczeń (ograniczenia podcięcia, zginania i pittingu zębów) wskazano 3 optymalne punkty (rozwiązania), wynikające z przecięcia linii kryteriów i ograniczeń. Rysunek 2.3 przedstawia zbiór rozwiązań optymalnych: 1 – ograniczenie podcięcia, 2 – ograniczenia zginania, 3 – ograniczenia pittingu, 4 – minimum wymiaru d_1 , 5 – maksimum sprawności, 6 – minimum sił dynamicznych. Jednakże przykład w dalszej pracy uwzględnia tylko jedno kryterium.

W pozycji [Soban, 2000] dokonano analizy wpływu różnych wielkości wejściowych na skuteczność systemu złożonego na przykładzie fikcyjnego konfliktu zbrojnego.

W pozycji [Ostwald, 2003] opisano program komputerowy MOST do optymalizacji dwukryterialnej różnego typu konstrukcji inżynierskich, generujący zbiór rozwiązań Pareto-optymalnych oraz przedstawiono przykład optymalizacji dwukryterialnej. Obiektem analizy jest pręt wspornikowy. Przyjęto 2 zmienne decyzyjne oraz 2 kryteria. Wyniki rozwiązań Pareto-optymalnych ujęto w tabeli i przedstawiono na rysunku. Wytypowano 11 rozwiązań. Do wyboru rozwiązania najlepszego użyto funkcji preferencji, opartej na rozwiązaniu idealnym, zaznaczonym na rysunku 2.4, który przedstawia front Pareto uzyskany przez

Ostwalda. Dodatkowo ukazany został obszar rozwiązań dopuszczalnych w przestrzeni zamiennych decyzyjnych. Niestety, procedura wyboru rozwiązania optymalnego ze zbioru rozwiązań kompromisowych nie została doprowadzona do końca i rozwiązania najlepszego nie podano.

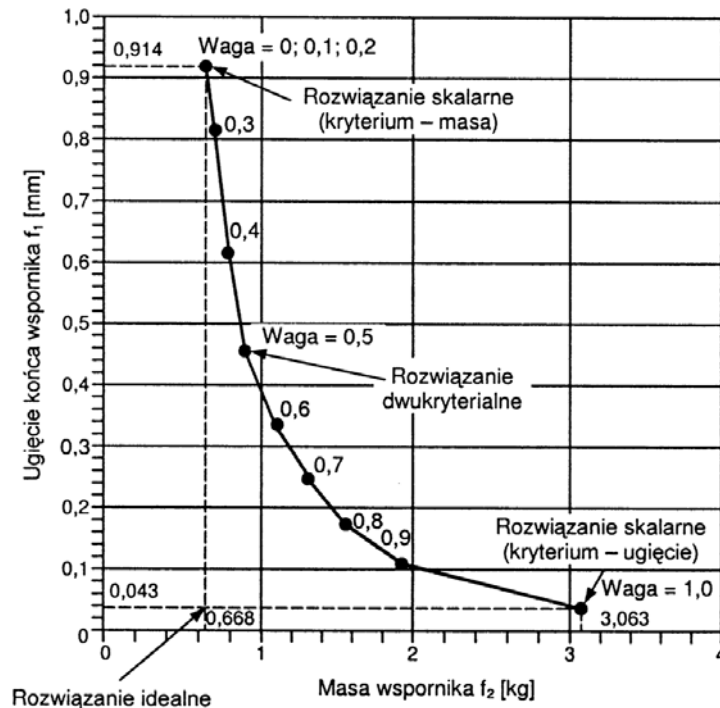


Rys. 2.3. Zdefiniowanie przestrzeni projektowania w wielokryterialnym zadaniu projektowym [Torzyński, 1999]

W pozycji [Zaporski, 2004] zaprezentowano przykład zastosowania tzw. „miękkiej optymalizacji” (obszerny opis miękkiej optymalizacji znajduje się w pozycjach [Tarnowski, 2004; Tarnowski, 2004a]), jako alternatywnego podejścia do przeszukiwania przestrzeni wielokryterialnej. Obiektem optymalizacji jest pojemnik o określonych wymiarach, wypełniony płynem (olejem) hydraulicznym. Wewnątrz pojemnika znajduje się emiter ciepła. Przy budowie modelu matematycznego badanego obiektu dokonano pewnych uproszczeń (przyjęto niezmiennie wartości parametrów, niezależne od temperatury, stałą temperaturę otoczenia, źródło ciepła emituje stały strumień ciepła). Dokonano dyskretyzacji przestrzeni przy pomocy programu FEMLAB (toolbox¹ MATLAB’a) z uwagi na zastosowanie równań różniczkowych. Zdefiniowano 3 kryteria optymalizacji oraz 3 zmienne decyzyjne. Do eksperymentu wybrano tylko jedno kryterium. Wyniki zostały przedstawione graficznie. W konkluzji podano przewagę proponowanej metody nad klasycznym podejściem do

¹ toolbox – specjalistyczna biblioteka oprogramowania do projektowania, testowania i szybkiego prototypowania w różnych dziedzinach techniki, używana w środowisku MATLAB [Mrozek, 1998]

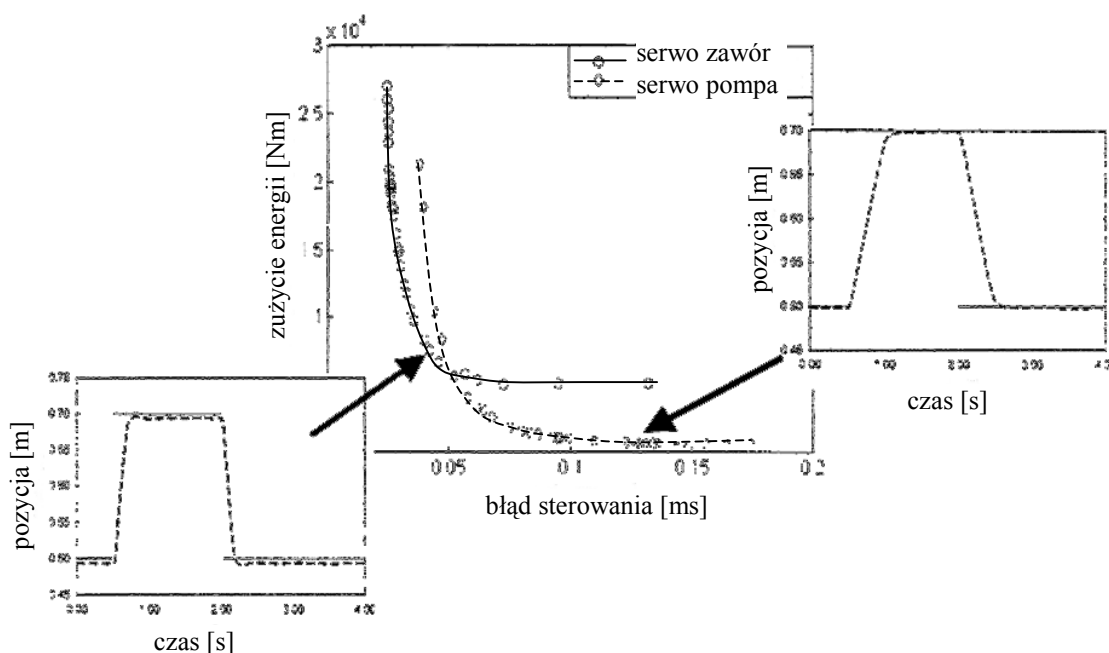
optymalizacji w sytuacji, gdy punkt startowy, który jest wymagany do inicjalizacji optymalizacji, znajduje się blisko optimum.



Rys. 2.4. Zbiór rozwiązań Pareto-optymalnych [Ostwald, 2003]

W pozycji [Deb, 2005] przedstawiono pewne podejście do analizy zagadnień wielowymiarowych zwane *innovization approach*. Cechy charakterystyczne tego podejścia podano w rozdz. 8.3 (str. 134). Analizowano różne przypadki: układ kratowy, przekładnię zębatą, hamulec wielotarczowy, sprężynę i połączenie spawane. Wszystkie przypadki są bikryterialne. Dokonano analizy globalnej wpływu zmiennych decyzyjnych na kryteria, ale nie podano rozwiązań optymalnych. Poszukiwano pewnych reguł, które łączą wielkości kryterialne i zmienne decyzyjne.

W pozycji [Ölvander, 2005] przedstawiono ideę wyboru rozwiązania najlepszego w zagadnieniach symulacji oraz dokonano porównania dwóch układów hydraulicznych. Rysunek 2.5 przedstawia dwa fronty Pareto dla dwóch niezależnych koncepcji (serwo zaworu oraz serwo pompy).



Rys. 2.5. Fronty Pareto [Ölvander, 2005]

Należy również odnotować, że wiele publikacji traktuje problem polioptymalizacji marginalnie, tylko o nim wspominając [np. Szymanowski, 1984; Goliński, 1974; Pogorzelski, 1978; Milkiewicz, 1979; Dziama, 1985; Dietrych, 1985; Stolc, 1985; Szymczak, 1991; Dietrich, t.1, 1995].

Podane tutaj przykłady w żaden sposób nie wyczerpują złożonego i szeroko eksploatowanego zagadnienia polioptymalizacji. Umożliwiają one jednak ustalenie pewnych ogólnych kierunków działania, wypunktowanie słabych stron tych działań oraz sformułowanie kroków, które zostały podjęte, by zająć się słabymi stronami.

2.1. Spostrzeżenia wynikające z przeglądu literatury

- Zmienne decyzyjne, traktowane z reguły jako zmienne deterministyczne, są z natury zmiennymi losowymi, które należy potraktować w sposób probabilistyczny. W wielu zadaniach nie jest rzeczą wystarczającą podanie tylko wartości nominalnych zmiennych decyzyjnych. Należy je opisać przy pomocy rozkładu gęstości prawdopodobieństwa (np. rozkładu normalnego lub jednostajnego) i jego parametrów (wartości oczekiwanej $E(X)$, odchylenia standardowego σ_X itd.).

- Algorytmy genetyczne, jako narzędzia nowej generacji (metody sztucznej inteligencji wzorowane na mechanizmach zaczerpniętych z natury), otworzyły nowe możliwości przeszukiwania dużych przestrzeni problemowych i poszukiwania rozwiązań kompromisowych w przypadku istnienia kilku wielkości kryterialnych, co jest częste w rzeczywistych problemach inżynierskich. Należy również podkreślić, że wykazują się one skutecznym działaniem w przypadkach, gdy (i) model matematyczny jest złożony, nieliniowy, nieciągły, (ii) funkcja celu jest wielomodalna. W takich sytuacjach polioptymalizacja z wykorzystaniem metod klasycznych, np. gradientowych, zawodzi.
- Celem działań optymalizacyjnych nie może być tylko znalezienie zadowalających rozwiązań spełniających warunki z matematycznego punktu widzenia. Istnieje także potrzeba zbadania otoczenia danego rozwiązania optymalnego, skutkiem czego pozyskana zostaje wiedza na temat odpowiedzi funkcji celu na wahania wartości zmiennych decyzyjnych.
- Wiedza dotycząca zachowania się funkcji celu w otoczeniu rozwiązania optymalnego może być wykorzystana w procesie wyboru rozwiązania najlepszego ze zbioru rozwiązań Pareto-optymalnych (odporność rozwiązań staje się kryterium wyboru) oraz w procesie przydziału tolerancji. Rzeczą oczywistą jest, że wartości rzeczywiste charakteryzujące dany obiekt, otrzymane w trakcie realizacji tego obiektu, będą różniły się od wartości ścisłych, wyznaczonych w procesie optymalizacji. Tam, gdzie funkcja celu reaguje słabo lub nie reaguje na zmiany wartości zmiennych decyzyjnych, tolerancje można „rozluźnić”. Tam natomiast, gdzie funkcja celu reaguje gwałtownie na zmiany wartości zmiennych decyzyjnych, należy podejść z większą ostrożnością do przydziału tolerancji.
- Konstruowanie to proces, który zależy od zdolności, wyobraźni, wiedzy i doświadczenia konstruktora. Jest on nierozzerwalnie związany z ryzykiem popełniania błędów. W kontekście zmniejszenia tego ryzyka wydaje się uzasadnione tworzenie nowych metod i narzędzi komputerowych wspomagających konstruktora w procesie podejmowania lepszych decyzji.
- Problem wrażliwości na zmiany wartości zmiennych decyzyjnych i na zakłócenia ma związek z niezawodnością i pewnością ruchu maszyny. Przy dużej skali integracji i

złożoności współczesnych systemów technicznych występuje propagacja uszkodzeń, która może spowodować straty związane z unieruchomieniem lub zniszczeniem dużego systemu. Uzasadnia to troskę o odporność elementów systemu.

2.2. Stan problemu

- W przypadku występowania wielu kryteriów najczęstszym podejściem jest transformacja problemu wielokryterialnego do jednokryterialnego poprzez zastosowanie różnych funkcji kompleksowych (np. w postaci addytywnej). Techniki optymalizacji jednokryterialnej są dobrze znane i opisane w literaturze, więc takie działanie ma uzasadnienie, jednakże transformacja taka wiąże się z ryzykiem, że wyznaczone rozwiązanie nie będzie w rzeczywistości rozwiązaniem optymalnym. Słabe strony metody punktowej wymienione są w literaturze, np. [Peschel, 1979; Dixon, 1995].
- Proces optymalizacji z reguły kończy się znalezieniem rozwiązania optymalnego lub zbliżonego do niego. Brak informacji o zachowaniu się funkcji celu w otoczeniu danego rozwiązania optymalnego powoduje brak kontroli ryzyka uszkodzeń w etapie eksploatacji (np. prognozowana trwałość obiektu może ulec skróceniu). Być może w tym tkwi przyczyna ograniczonego zaufania konstruktorów do klasycznych metod optymalizacji.

2.3. Propozycje rozwiązania niektórych wymienionych problemów

- Problem wyznaczania wag a priori przez badacza został ominięty przez zastosowanie jednej z metod sztucznej inteligencji (algorytmu genetycznego do optymalizacji wielokryterialnej). W tym przypadku nie ma potrzeby tworzenia kryterium zastępczego, np. w postaci addytywnej. W konsekwencji otrzymuje się nie jedno rozwiązanie, lecz ich zbiór. Takie podejście umożliwia wgląd w naturę relacji między kryteriami.
- Należy rozszerzyć wyznaczanie rozwiązania optymalnego o zbadanie otoczenia znalezionych rozwiązań. Wiedza pozyskana w ten sposób może być użyta na dwa sposoby:

- odporność rozwiązań staje się podstawą (kryterium) wyboru rozwiązania najlepszego ze zbioru rozwiązań Pareto-optimalnych,
- wiedza o zachowaniu się funkcji celu w otoczeniu rozwiązania optymalnego jest użyteczna w procesie przydziału tolerancji.

W kontekście potrzeby poszukiwania coraz lepszych konstrukcji oraz możliwości, jakie pojawiają się w wyniku rozwoju nowych metod heurystycznych, zaproponowane zostało nowe podejście do badania otoczenia rozwiązania optymalnego. Jest ono odpowiedzią na uzasadnioną potrzebę pozyskiwania wiedzy o zachowaniu się funkcji celu w otoczeniu rozwiązań optymalnych. Zaproponowana przez autora procedura jest systemowym połączeniem wybranych metod.

Rozdział 3. CEL, TEZA I ZAKRES PRACY

Jak zaznaczono w rozdz. 1.4 do wyniku optymalizacji można podejść w dwojaki sposób [Dietrich, t. 1, 1995]: (i) w sensie matematycznym, (ii) w sensie technicznym.

W pierwszym przypadku chodzi tylko o znalezienie optymalnej wartości funkcji celu w obszarze decyzji dopuszczalnych. Znalezienie takiego punktu lub punktu położonego blisko niego kończy zadanie.

W przypadku drugim ważne jest nie tylko znalezienie punktu optymalnego, ale także zbadanie przebiegu funkcji celu w okolicy tego punktu. Takie czynniki jak tolerancje wykonania elementów, odchylenia standardowe lub niedokładności pomiaru wpływają na fakt rozminięcia się realizacji technicznej maszyny z idealną realizacją rozwiązania optymalnego. Może się okazać, że wartości funkcji celu szybko pogarszają się w okolicy rozwiązania optymalnego, co nie jest korzystne. Należy więc poszukać innego ekstremum, w okolicy którego funkcja celu będzie miała gładzy przebieg.

Cel pracy

Podstawowym celem rozprawy jest opracowanie metody wyznaczania najlepszych (optymalnych) wartości zmiennych decyzyjnych ze zbioru rozwiązań polioptymalnych w procesie konstruowania elementów i zespołów maszyn. Integralną częścią metody jest ocena wrażliwości tych rozwiązań na odchylenia wartości zmiennych decyzyjnych.

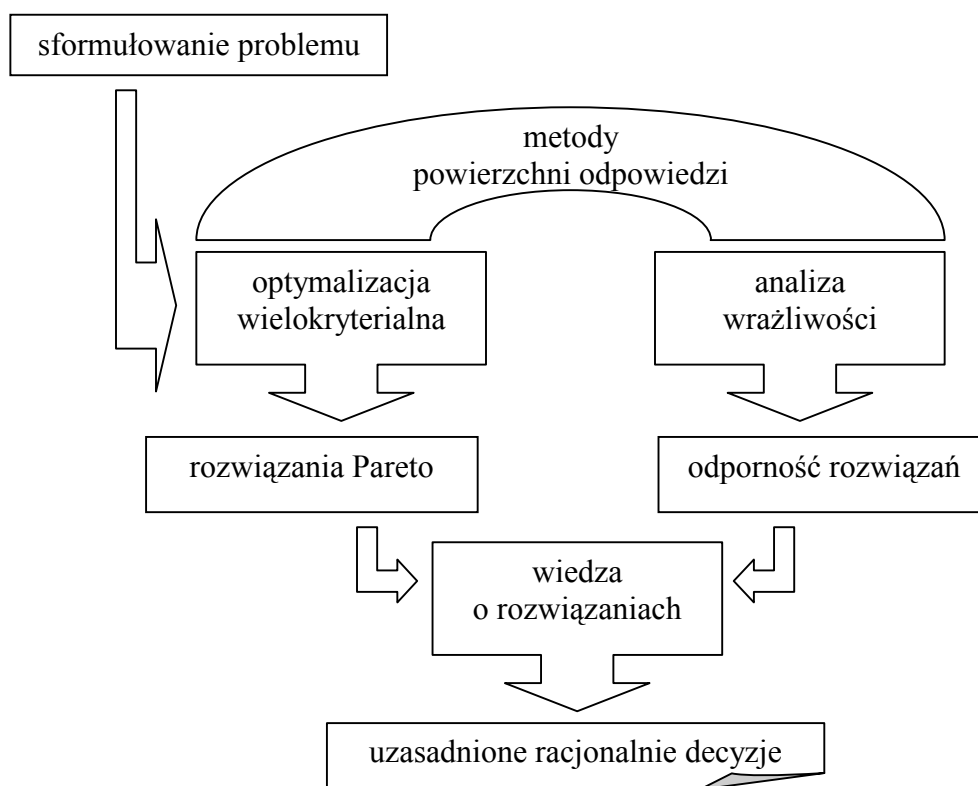
Cel główny zostanie osiągnięty przez realizację następujących **celów szczegółowych**:

- rozwiązanie zadania optymalizacji wielokryterialnej dla problemów typu wiele wejść - wiele wyjść,
- grupowanie rozwiązań Pareto-optymalnych w skupienia,
- opracowanie analizy wrażliwości do zbadania kierunku i siły zależności między zmiennymi decyzyjnymi i kryteriami, prze zastosowanie:
 - metod planowania eksperymentu i powierzchni odpowiedzi do poszukiwania zależności przyczynowo-skutkowej (metamodelu) między zmiennymi decyzyjnymi i kryteriami,
 - statystycznej oceny otrzymanych równań powierzchni odpowiedzi,
 - wykresów Pareto oraz profili odpowiedzi do wizualizacji badanych zależności,

- analizy wrażliwości wielkości kryterialnych na wahania wartości zmiennych decyzyjnych (wykresy gradientów oraz mapa wpływów),
- zaproponowanie racjonalnego uzasadnienia wyboru jednego rozwiązania ze zbioru rozwiązań Pareto-optimalnych.

Ze względu na komunikatywność wyniki poszczególnych etapów przedstawiane będą w postaci graficznej.

Rysunek 3.1 przedstawia graficznie cel pracy.



Rys. 3.1. Schemat sposobu realizacji celu pracy

Narzędzia zastosowane do realizacji celu pracy

Cele szczegółowe zostaną osiągnięte przez zastosowanie następujących narzędzi:

- optymalizacja wielokryterialna – algorytm genetyczny do optymalizacji wielokryterialnej, działający w środowisku MATLAB’a,
- grupowanie rozwiązań Pareto-optimalnych – metody analizy skupień (metoda najbliższego sąsiedztwa); wykorzystano pakiet statystyczny JMP,

- planowanie eksperymentu – metody planowania doświadczeń (plan centralny kompozycyjny); wykorzystano środowisko MATLAB'a,
- tworzenie metamodelu – metody powierzchni odpowiedzi; wykorzystano środowisko MATLAB'a,
- ocena statystyczna – statystyki liczbowe; wykorzystano pakiet JMP,
- wykresy Pareto i profile odpowiedzi – wykorzystano pakiet JMP,
- analiza wrażliwości – wyznaczanie pochodnych cząstkowych; wykorzystano środowisko MATLAB'a,
- wykresy gradientów – wykorzystano program MS Excel,
- mapa wpływów – wykorzystano środowisko MATLAB'a.

Uzasadnienie wyboru narzędzi do realizacji celu pracy

Spośród wielu metod optymalizacji wielokryterialnej (można tu wyróżnić techniki skalaryzacji oraz techniki Pareto) wybrany został algorytm genetyczny, ponieważ umożliwia odszukanie frontu Pareto już przy jednym uruchomieniu, dzięki działaniom wykonywanym na populacji potencjalnych rozwiązań. Ponadto, dobrze sprawdza się w przeszukiwaniu przestrzeni złożonych oraz uwalnia od wady klasycznej transformacji zadania wielowymiarowego na jednowymiarowe, realizowanej przez stosowanie odpowiednich współczynników wagowych przypisywanych wielkościom kryterialnym.

Metody analizy skupień prowadzi do redukcji dużego zbioru na zbiory o mniejszej liczebności, opartej na metryce podobieństwa elementów tego zbioru. Wśród nich można wyróżnić metody hierarchiczne (głównie aglomeracyjne), metody związane z analizą czynnikową i funkcjami dyskryminacyjnymi. W pracy, ze względu na łatwość stosowania i skuteczność, wykorzystana została metoda hierarchiczna (metoda najbliższego sąsiedztwa) [Kucharczyk, 1982].

Metody planowania eksperymentu to kolejny, obszerny zbiór podejść do efektywnego wykorzystania informacji z przestrzeni czynników (czyli zmiennych niezależnych) oraz identyfikacji korelacji między czynnikami. Można wyróżnić następujące metody: planowanie dwupoziomowe, trójpoziomowe i wielopoziomowe (kompozycyjne, ortogonalne, rotatabilne), planowanie optymalne [Mańczak, 1976]. W pracy został zastosowany plan centralny kompozycyjny, ponieważ umożliwia on niezależne badanie czynników liniowych, kwadratowych oraz mieszanych. Metody planowania eksperymentu w połączeniu z metodami

powierzchni odpowiedzi umożliwiają szybkie i oszczędne (liczba doświadczeń jest minimalizowana) definiowanie zależności $K = f(ZD)$. Otrzymane równania powierzchni odpowiedzi poddane zostają ocenie statystycznej, która umożliwia zweryfikowanie jakości otrzymanych metamodeli przy pomocy odpowiednich statystyk.

Spośród wielu podejść do problemu analizy wrażliwości (można tu wyróżnić metody matematyczne, statystyczne, graficzne) wybrano podejście lokalne, metodę pochodnych cząstkowych, która, dzięki zastosowaniu metod powierzchni odpowiedzi, umożliwia szybkie i łatwe wyznaczenie miar wrażliwości w postaci normalnej i standaryzowanej.

Teza pracy

Proces projektowo-konstrukcyjny, tak jak jest przedstawiony w podręcznikach dotyczących konstruowania maszyn, nie pokazuje w sposób jawny i skoordynowany niektórych działań istotnych dla jakości konstrukcji. W szczególności wyczuwa się brak metody sprawdzania 'jaki wpływ na wyznaczniki jakości konstrukcji mają odchylenia wartości zmiennych decyzyjnych (projektowych)'.

Niniejsza dysertacja zawiera propozycję takiej metody przez połączenie w spójny proces kilku narzędzi badawczych, których osobne zastosowanie nie jest tak skuteczne, jak wtedy, gdy są one wykorzystane w ramach spójnej procedury postępowania. Połączenie takich narzędzi, jak algorytmy genetyczne do optymalizacji wielokryterialnej, metody powierzchni odpowiedzi oraz metody analizy wrażliwości, umożliwia udzielenie odpowiedzi na pytanie: na ile (w ujęciu jakościowym) dana konstrukcja jest odporna na odchylenia wartości zmiennych decyzyjnych? Teza pracy obejmuje wykazanie, że opracowanie metody o takich właściwościach jest możliwe, a jej zastosowanie w procesie projektowo-konstrukcyjnym przyczynia się do realizacji lepszych konstrukcji.

Problematyka pracy mieści się w zakresie podstaw konstrukcji maszyn. W celu wykazania, że proponowana metoda jest narzędziem, które wspomaga i ułatwia poszukiwanie i wybór optymalnych (w sensie Pareto) rozwiązań konstrukcyjnych elementów i zespołów maszyn, przedstawiona metoda została zastosowana na dwóch klasycznych przykładach obiektów technicznych (hamulec wielotarczowy, reduktor zębaty).

Zakres pracy

W rozdziale 1. zawarta została ogólna charakterystyka pracy, określająca obszar problemowy, którego ta praca dotyczy. Przedstawiony został problem optymalizacji, szczególnie optymalizacji wielokryterialnej, która występuje w problemach inżynierskich. Ponadto zwrócona została uwaga na problem losowości zmiennych decyzyjnych i relację między losowością, a niezawodnością obiektu technicznego.

W rozdziale 2. zawarty został przegląd podejść do zagadnienia optymalizacji wielokryterialnej wraz z uzasadnieniem działań związanych z proponowaną metodą wyznaczania i oceny rozwiązań polioptymalnych. Sformułowane zostały uwagi merytoryczne, określony został stan problemu oraz zaproponowano sposoby rozwiązania dotychczas nie rozwiązanych problemów.

W rozdziale 3. sformułowany został cel pracy, wynikający z uzasadnionych potrzeb. Następnie sformułowana została teza pracy. Sformułowano cele szczegółowe służące do osiągnięcia celu głównego, podano narzędzie do osiągnięcia tych celów oraz wykazano zasadność wyboru danych narzędzi.

W rozdziale 4. zawarty został krótki zarys historyczny problemu optymalizacji. Podano podstawy teoretyczne i przegląd metod optymalizacji wielokryterialnej, jakie można zanotować w konstruowaniu elementów i zespołów maszyn, ze szczególnym uwzględnieniem naciskiem optymalizacji w sensie Pareto. Ponadto zaprezentowane zostały podstawowe informacje na temat zastosowania algorytmów genetycznych do rozwiązywania problemów optymalizacji wielokryterialnej. Podany został zarys historii algorytmów genetycznych oraz opisano zastosowany w pracy algorytm genetyczny do optymalizacji wielokryterialnej.

W rozdziale 5. zawarty został przegląd metod analizy wrażliwości. Scharakteryzowana została klasyczna metoda pochodnych cząstkowych, jako narzędzie wspomagające analizę wrażliwości odpowiedzi układu złożonego na zmiany wartości zmiennych decyzyjnych.

W rozdziale 6. przedstawiona została szczegółowa charakterystyka proponowanej metody. Składa się ona z dwóch głównych bloków: bloku związanego z poszukiwaniem rozwiązań optymalnych i z bloku związanego z badaniem wrażliwości otrzymanych rozwiązań optymalnych. Metoda składa się z kilku etapów, do których zaliczamy: identyfikację problemu (wybór zmiennych decyzyjnych oraz kryteriów, utworzenie modelu matematycznego badanego obiektu), zastosowanie metod optymalizacji wielokryterialnej, redukcję otrzymanych rozwiązań poprzez zastosowanie metod analizy skupień, planowanie

eksperymentu w punktach optymalnych, poszukiwanie zależności między zmiennymi decyzyjnymi, a kryteriami $K = f(ZD)$ przez zastosowanie metod powierzchni odpowiedzi, statystyczną weryfikację otrzymanych w ten sposób charakterystyk, wykonanie wykresów Pareto i profili odpowiedzi, badanie odporności otrzymanych zredukowanych rozwiązań optymalnych poprzez zastosowanie metod analizy wrażliwości (klasyczna metoda pochodnych cząstkowych), wykonanie wykresów unormowanych składowych gradientów oraz utworzenie mapy wpływów zmiennych decyzyjnych na poszczególne wielkości kryterialne.

W rozdziale 7. zaprezentowane zostało zastosowanie metody na przykładzie wybranego, relatywnie prostego projektowego problemu inżynierskiego (hamulca wielotarczowego). Obiekt został zaczerpnięty z pozycji [Osyczka, 2001]. Otrzymane wyniki przedstawiono w postaci skrótowej. Zastosowanie metody na bardziej złożonym obiekcie technicznym pokazano na zadaniu optymalizacji walcowej przekładni trzystopniowej. Zadanie to zaczerpnięto z pozycji [Torzyński, 2000]. Otrzymane wyniki przedstawiono w postaci szczegółowej. Ponadto dokonano porównania otrzymanych wyników z wynikami otrzymanymi przez innego badacza.

W rozdziale 8. została oceniona przydatność proponowanej metody jako narzędzia do wspomagania procesu konstruowania. Oceniono stopień realizacji tezy rozprawy. Podano właściwości metody. Sformułowano wnioski, które zostały podzielona na dwie grupy: wnioski dotyczące metody oraz wnioski dotyczące zawartych w rozdziale 7 zadań inżynierskich. Wskazano kierunki rozwoju zaproponowanej metody.

Rozdział 4. OPTYMALIZACJA WIELOKRYTERIALNA W KONSTRUOWANIU ELEMENTÓW I ZESPOŁÓW MASZYN

4.1. Wprowadzenie do zagadnienia optymalizacji wielokryterialnej

W problemach inżynierskich zdarza się, że mamy do czynienia z wieloma kryteriami jednocześnie. Mamy wtedy do czynienia z *optymalizacją wielokryterialną* (OW) lub *polioptymalizacją*. Nie należy w takiej sytuacji wybierać rozwiązania na podstawie jednego wskaźnika.

W optymalizacji wielokryterialnej pojęcie rozwiązania optymalnego nie jest tak oczywiste, jak w przypadku jednego kryterium, gdzie poszukujemy po prostu najlepszej (największej lub najmniejszej) wartości pewnej funkcji celu. Dlatego wprowadzono pojęcie optymalności w sensie Pareto.

Wszystkie rozwiązania można podzielić na *niezdominowane* (gdy nie istnieją żadne rozwiązania, które byłyby lepsze ze względu na wszystkie kryteria jednocześnie) i *zdominowane* (gorsze od innych). W zadaniu OW zamiast jednej odpowiedzi otrzymujemy zbiór rozwiązań, z których żadne nie jest zdominowane przez drugie. Są to rozwiązania *optymalne w sensie Pareto* (inaczej *Pareto-optymalne* lub *P-optymalne*). Decyzja wyboru któregoś z rozwiązań ze zbioru polioptymalnego jest kwestią kompromisu.

W zbiorze Pareto-optymalnym nie ma wskazówek co do wyboru ostatecznego rozwiązania. W konkretnym zadaniu projektowo-konstrukcyjnym elementy tego zbioru nie są jednak równowarte. Zadaniem decydenta jest dokonanie racjonalnego wyboru [Goldberg, 1995; Tarnowski, 1997].

4.2. Rys historyczny rozwoju optymalizacji wielokryterialnej

Historię optymalizacji można podzielić na kilka etapów. Etap pierwszy [Nikiel, 2004] tworzyli prekursorzy tego podejścia. Pierwsze próby poszukiwania wartości minimalnej realizują G. W. Leibniz (1646-1716) i L. Euler (1707-1783). Rozwój kontynuują I. Newton (1643-1727), J. Bernoulli (1654-1705) oraz syn, D. Bernoulli (1700-1782). Podstawy matematyczne optymalizacji tworzą J. L. Lagrange (1736-1813) i W. R. Hamilton (1805-1865). Wykorzystanie aproksymacji do wyznaczania optimum pewnych skomplikowanych funkcji realizują L. Rayleigh (1842-1919), W. Ritz (1878-1909) i B. G. Galerkin (1871-1945).

Kolejny etap to początki optymalizacji w sensie Pareto [de Weck, 2004; Lamont, 2005]. Definicja optimum w przypadku wielokryterialnych decyzji ekonomicznych została podana przez Francisa Ysidro Edgeworth'a (1845-1926). W 1881 r. publikuje on dzieło pt. *“Mathematical Psychics: An essay on the application of mathematics to the moral sciences”*, w którym jako pierwszy wprowadza pojęcie “optymalny”. Georg Cantor i Felix Hausdorff wprowadzają zagadnienie przestrzeni bezwymiarowych (1895). Analizę problemów ekonomii przy pomocy aparatu matematycznego zapoczątkowuje Vilfredo Pareto (1848-1923), który też wprowadza pojęcie optimum w sensie Pareto (1896). Tjalling C. Koopmans przeprowadza analizę produkcji i alokacji zasobów oraz wykorzystuje problematykę optymalizacji wielokryterialnej w teorii produkcji (1951). Harold W. Kuhn i Albert W. Tucker podają podstawy matematyczne OW (1951). Leonid Hurwicz uogólnia wyniki Kuhn'a i Tucker'a na przestrzenie wektorowe (1960). Rosenberg proponuje zastosowanie algorytmów ewolucyjnych w problemach wielokryterialnych (lata 60-te). Marglin koncentruje się na zastosowaniu problemów optymalizacji wielokryterialnej w planowaniu źródeł zaopatrzenia w wodę (1967). Jednak dopiero tłumaczenie dzieła V. Pareto na angielski w 1971r. staje się przełomem. Od tego czasu następuje szybki rozwój metod wielokryterialnych w zastosowaniach matematycznych i inżynierskich. Schaffer opracowuje wielowymiarowe algorytmy ewolucyjne (lata 80-te). W Stanach Zjednoczonych pionierami są Stadler (1979), Steuer (1985) i inni. Pionierzy japońscy (szczególnie w teoretycznych aspektach OW) to Sawaragi, Nakayama i Tanino (1985). Należy również dodać, że powszechny dostęp do Internetu i liczne konferencje przyczyniają się w sposób istotny do stałego i szybkiego rozwoju zagadnienia.

Według przeglądowej publikacji Cichosza [Cichosz, 2006], pierwsze prace nad optymalizacją wielokryterialną zostały poczynione przez J. L. Cohon'a i D. H. Marks'a (1975). W 1985r. J. D. Schaffer tworzy program VEGA - Vector Evaluated Genetic Algorithms. Cechy programu: tworzył on podpopulacje jednakowej wielkości. Wewnątrz każdej podpopulacji przeprowadzano niezależnie selekcję. Krzyżowanie przekraczało granice podpopulacji. Wadą było to, że selekcja według niezależnych kryteriów działała na niekorzyść osobników „pośrednich” [Goldberg, 1995]. M. Fourman proponuje hierarchiczną metodę optymalizacji (1985). F. Kursawe rozwija metody optymalizacji stochastycznej z problemu jednokryterialnego na wielokryterialny. Jego propozycja to ESVO - Evolution Strategies for Vector Optimization (1991). C. Fonseca i P. Fleming tworzą program MOGA - Multiobjective Genetic Algorithm, w którym wprowadzają selekcję opartą na rangowaniu (1993). J. Horn i N. Nafpliotis tworzą program NPGA - Niche Pareto Genetic Algorithm, w

którym proponują rozwiązanie problemu nisz (1993). N. Srinivas i K. Deb tworzą program NSGA - NonDominated Sorting Genetic Algorithm, w którym stosują graficzną metodą porównania wyników (1994). E. Zitzler i L. Thiele tworzą program SPEA - Strength Pareto Evolutionary Algorithm, w którym proponują rozwiązanie problemu elityzmu (1999). D. W. Corne i J. D. Knowles tworzą program PAES - Pareto Archived Evolution Strategy (1999) i PESA - Pareto Envelope-based Selection Algorithm (2000), w których zaproponowali ilościowe metryki działania. K. Deb tworzy NSGA-II - NonDominated Sorting Genetic Algorithm II (2000).

Historię MOEA (*Multiobjective Evolutionary Algorithms*) zawarto w publikacji [Lamont, 2005]. Dalej zostały przedstawione nazwiska autorów i nazwy programów. Fourman: LOGA - Lexicographic Ordering GA (1985). Hajela i Lin: WBGA - Weight-Based GA (1993). Osyczka i Kundu: DPGA - Distance-based Pareto GA (1995). Kita i inni: TDGA - Thermodynamical GA (1996). VanVeldhuizen, Zydallis, Day i Lamont: MOMGA-I, II, IIa - Multi-Objective Messy GA (1999, 2000+). Coello: micro GA-MOEA - micro GA for Multiobjective Optimization (2000). Pelikan, Goldberg, Lobo: mBOA - Multi-Objective Bayesian Optimization Algorithm (2000+).

Przegląd najnowszych osiągnięć w dziedzinie optymalizacji wielokryterialnej znaleźć można w pozycji [Kunkle, 2005]. Dalej podano nazwiska autorów, nazwy programów i rok ich powstania. Erickson, Mayer, Horn - NPGA II (2001). Zitzler, Laumanns, Thiele - SPEA 2 (2001). Kim, Hiroyasu, Miki, Watanabe - SPEA 2+ (2004). Hongyun, Sanyang - ISPEA Immunity SPEA (2003). Corne, Jerram, Knowles, Oates - PESA II (2001). Coello, Pulido - Micro GA: Micro-Genetic Algorithm (2001). Pulido, Coello - Micro-GA2 (2003). Cochran, Horng, Fowler - MPGA: Multi-Population Genetic algorithm (2003). Coello, Becerra - CAEP: Cultural Algorithm with Evolutionary Programming (2003). Coello, Pulido, Lechuga - MOPSO: Multi-Objective Particle Swarm Optimization (2003). Knowles - ParEGO: Pareto Efficient Global Optimization (2005).

4.3. Optymalizacja wielokryterialna. Podstawowe definicje [Zitzler, 1999]

Definicja 1. *Zagadnienie optymalizacji wielokryterialnej*

Niech dany będzie zbiór n zmiennych decyzyjnych, zbiór k funkcji celu i zbiór m ograniczeń. Funkcje celu (kryteria) i ograniczenia są funkcjami zmiennych decyzyjnych.

Problem polioptymalizacji można wyrazić następująco:

$$\begin{aligned} \text{minimalizacja wektora: } y = f(x) &= (f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)) \\ \text{pod warunkiem: } g(x) &= (g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)) \leq 0 \\ \text{gdzie: } x &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X \\ y &= (y_1, y_2, \dots, y_k) \in Y \end{aligned} \tag{4.1}$$

gdzie:

x - wektor zmiennych decyzyjnych,

y - wektor kryteriów,

X - przestrzeń zmiennych decyzyjnych,

Y - przestrzeń kryteriów.

Ograniczenia $g(x) \leq 0$ determinują zbiór rozwiązań dopuszczalnych.

Definicja 2. Zbiór rozwiązań dopuszczalnych X_d

Jest to zbiór zmiennych decyzyjnych x spełniających ograniczenia $g(x)$, co można wyrazić następująco:

$$X_d = \{x \in X \mid g(x) \leq 0\} \tag{4.2}$$

Odpowiadający mu zbiór kryteriów ma postać:

$$Y_d = f(X_d) = \bigcup_{x \in X_d} \{f(x)\} \tag{4.3}$$

W przypadku optymalizacji jednokryterialnej zbiór rozwiązań dopuszczalnych jest w pełni uporządkowany według wartości funkcji celu f . W przypadku optymalizacji wielokryterialnej zbiór rozwiązań dopuszczalnych uporządkowany jest częściowo.

Definicja 3. *Relacje typu $=, \geq, >$*

Niech dane będą dwa wektory wielkości kryterialnych u i v . Można określić następujące relacje:

$$\begin{aligned} u = v, & \text{ gdy } \forall i \in \{1, 2, \dots, k\}: u_i = v_i \\ u \geq v, & \text{ gdy } \forall i \in \{1, 2, \dots, k\}: u_i \geq v_i \\ u > v, & \text{ gdy } u \geq v \wedge u \neq v \end{aligned} \quad (4.4)$$

Relacje $\leq, <$ definiowane są podobnie.

Definicja 4. *Dominacja w sensie Pareto (Pareto dominacja)*

Niech dane będą dwa wektory zmiennych decyzyjnych a i b . Można określić następujące relacje:

$$\begin{aligned} a \succ b & \text{ (} a \text{ dominuje nad } b \text{), gdy } f(a) > f(b) \\ a \succeq b & \text{ (} a \text{ słabo dominuje nad } b \text{), gdy } f(a) \geq f(b) \\ a \sim b & \text{ (} a \text{ jest neutralne względem } b \text{), gdy } f(a) \not\geq f(b) \wedge f(b) \not\geq f(a) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Przez analogię można zdefiniować relacje typu $<, \leq, \sim$.

Definicja 5. *Optymalność w sensie Pareto (Pareto optymalność)*

Wektor zmiennych decyzyjnych $x \in X_d$ jest niezdominowany odnośnie zbioru $A \subseteq X_d$, gdy zachodzi:

$$\nexists a \in A : a \succ x \quad (4.6)$$

Wektor x jest optymalny w sensie Pareto, gdy jest niezdominowany odnośnie przestrzeni X_d .

Wszystkie rozwiązania Pareto-optymalne nazywa się *zbiorem Pareto-optymalnym*. Odpowiadające mu wektory kryteriów to *front* lub *powierzchnia Pareto-optymalna*.

Definicja 6. *Zbiory i fronty niezdominowane*

Niech $A \subseteq X_d$. Funkcja $p(A)$ daje zbiór niezdominowanych wektorów zmiennych decyzyjnych w zbiorze A :

$$p(A) = \{a \in A \mid a \text{ jest niezdominowany odnośnie } A\} \quad (4.7)$$

Zbiór $p(A)$ jest zbiorem niezdominowanym odnośnie A , odpowiadający mu zbiór wektorów kryteriów $f(p(A))$ jest niezdominowanym frontem odnośnie A . Ponadto, zbiór $X_p = p(X_d)$ to zbiór Pareto-optymalny, a zbiór $Y_p = p(X_p)$ to front Pareto-optymalny.

Definicja 7. *Globalne i lokalne zbiory Pareto-optymalne*

Niech dany będzie zbiór wektorów zmiennych decyzyjnych $A \subseteq X_d$.

1. Zbiór A jest *lokalnym* zbiorem Pareto-optymalnym, jeżeli zachodzi:

$$\forall a \in A : \exists x \in X_d : x \succ a \wedge \|x - a\| < \varepsilon \wedge \|f(x) - f(a)\| < \delta \quad (4.8)$$

gdzie:

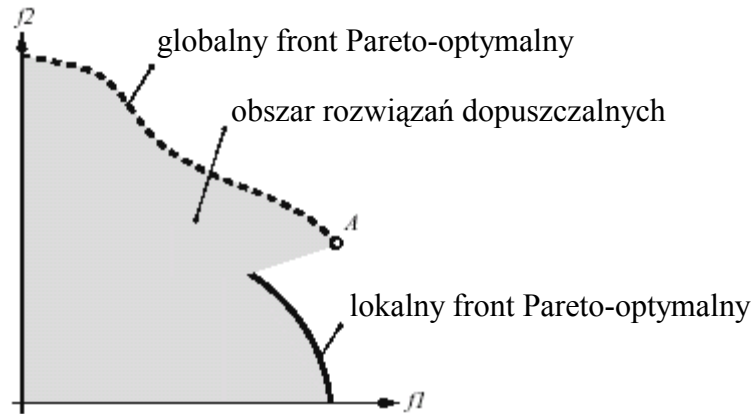
$\|\cdot\|$ - metryka,

$\varepsilon > 0, \delta > 0$.

2. Zbiór A jest *globalnym* zbiorem Pareto-optymalnym, jeżeli zachodzi:

$$\forall a \in A : \exists x \in X_d : x \succ a \quad (4.9)$$

Rysunek 4.1 przedstawia koncepcję lokalnej i globalnej Pareto-optymalności.



Rys. 4.1. Lokalna i globalna Pareto-optymalność [Zitzler, 1999]

4.4. Metody optymalizacji wielokryterialnej

Metody optymalizacji wielokryterialnej można w szerokim ujęciu podzielić na dwie kategorie [de Weck, 2004]:

- Techniki skalaryzacji (*scalarization approaches*), w których problem wielowymiarowy sprowadzany jest do problemu jednowymiarowego i w konsekwencji otrzymujemy jedno rozwiązanie:
 - Metoda ważonej sumy (*Weighted Sum Approach - WSA*),
 - Programowanie kompromisowe - kombinacje nieliniowe (*Compromise Programming - CP - Non-linear combinations*)
 - Analiza użyteczności wielokryterialnej - teoria użyteczności (*Multiattribute Utility Analysis - MUA - Utility Theory - UT*)
 - Programowanie fizyczne (*Physical Programming - PP*),
 - Programowanie celów (*Goal Programming - GP*),
 - Techniki leksykograficzne (*Lexicographic Approaches - LA*)
 - Funkcje dopuszczalne (*Acceptability Functions - AF*),
 - Logika rozmyta (*Fuzzy Logic - FL*)
- Techniki Pareto (*Pareto approaches*), w których rozwiązaniem zadania jest zbiór rozwiązań:
 - Poszukiwanie i filtrowanie w sensie Pareto (*Exploration and Pareto Filtering*),

- Metoda sum ważonych ze skanowaniem wag (*Weighted Sum Approaches (with weight scanning)*)
- Adaptacyjna metoda sum ważonych (*Adaptive Weighted Sum Method - AWS*)
- Metoda przecięć obszaru granicznego (*Normal Boundary Intersection - NBI*)
- Symulowane wyżarzanie do optymalizacji wielokryterialnej (*Multiobjective Simulated Annealing MOSA*)
- Algorytmy genetyczne do optymalizacji wielokryterialnej (*Multiobjective Genetic Algorithm MOGA*)

4.5. Zastosowanie algorytmów genetycznych w optymalizacji wielokryterialnej

4.5.1. Wprowadzenie do zagadnienia algorytmów genetycznych (AG)

Algorytmy genetyczne (AG) to grupa algorytmów ewolucyjnych (AE), bazujących na ewolucji naturalnej, której podstawy stworzył Karol Darwin. AE to klasa metod optymalizacji stochastycznej, której początki sięgają lat 50-tych. W latach 70-tych zaproponowano różne podejścia ewolucyjne, np. algorytmy genetyczne (AG), czy też programowanie ewolucyjne.

Za twórcę AG uważany jest John Henry Holland. Ich działanie opiera się na trzech (głównych) zasadach: reprodukcji, selekcji i utrzymywaniu różnorodności [Popov, 2005]. Zasady te stosowane są na zbiorze osobników, reprezentujących prawdopodobne rozwiązanie danego zadania. Wybór dokonywany jest na podstawie oceny osobników względem pewnego kryterium. Najlepsze osobniki (w sensie danego kryterium oceny) tworzą nową generację (populację).

Techniki (algorytmy) ewolucyjne posiadają pewne cechy, które preferują je do rozwiązywania problemów optymalizacji. Zastosowanie ich do wielu różnych przypadków pozwala wyciągnąć dwa wnioski [Zitzler, 1999]:

- (i) dobrze sprawdzają się w sytuacji wielu sprzecznych ze sobą celów,
- (ii) dobrze sprawdzają się w przypadku przeszukiwania bardzo dużych i złożonych przestrzeni.

AE w szczególności nadają się do optymalizacji wielokryterialnej, ponieważ umożliwiają odnalezienie rozwiązań Pareto-optymalnych przy jednym uruchomieniu algorytmu.

4.5.2. Rys historyczny (AG) [Miczek, 2004]

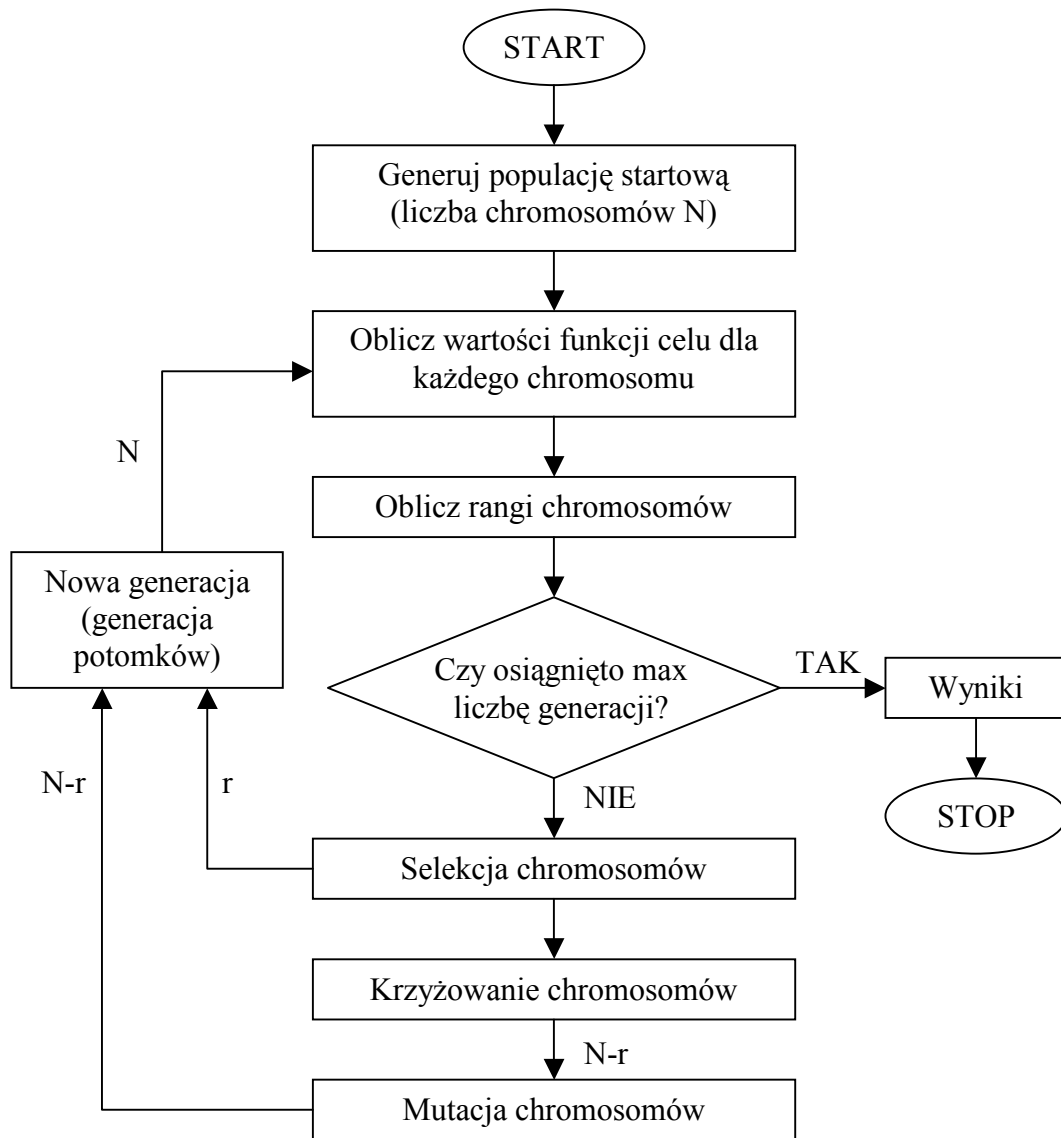
Historia algorytmów genetycznych sięga lat 50-tych. Poniższa lista w skróty sposób ukazuje kilka ważnych dat dla powstania i rozwoju algorytmów genetycznych:

- 1957-62: Barricelli, Fraser, Martin, Cockerham – początki algorytmów genetycznych. Prace nad modelowaniem (symulacją) procesów genetycznych,
- 1960: John Henry Holland (Uniwersytet Michigan) – systemy adaptacyjne. Stosuje z powodzeniem operatory genetyczne → twórca algorytmów genetycznych (AG),
- 1967: J. D. Bagley – program gry w 6 pionków (algorytmy genetyczne grają w prostą grę). Jako pierwszy używa nazwy *algorytm genetyczny*,
- 1971: R. B. Hollstien (Uniwersytet Michigan) – adaptacja AG w komputerowych układach sterowania,
- 1975: powstają dwie ważne prace: „*Adaptation in natural and artificial systems*” (J. Holland) i „*An analysis of the behavior of a class of genetic adaptive systems*” (K. E. De Jong) – początki optymalizacji funkcji,
- 1985: David E. Goldberg – optymalizacja pracy gazociągu.

W historii dotyczącej algorytmów genetycznych nie zabrakło również polskiego akcentu. Zbigniew Michalewicz (Uniwersytet Północnej Karoliny, Charlotte, USA) napisał książkę pt. *Algorytmy genetyczne + struktury danych = programy ewolucyjne* (1996). Andrzej Buller (ATR Kioto, Japonia) napisał książkę pt. *Sztuczny mózg. To już nie fantazje* (1998). Marek J. Kasperski (Uniwersytet Gdański) napisał książkę pt. *Sztuczna inteligencja. Droga do myślących maszyn* (2003).

4.5.3. Charakterystyka algorytmu genetycznego do optymalizacji wielokryterialnej (MOGA) [Popov, 2005]

W pracy zastosowano algorytm genetyczny do optymalizacji wielokryterialnej, którego autorem jest Andrey Popov [Popov, 2005]. Program można pobrać ze strony internetowej pod adresem: <http://www.tu-harburg.de/~soap0883/>. Rysunek 4.2 przedstawia schemat algorytmu genetycznego do optymalizacji wielokryterialnej.



Rys. 4.2. Schemat działania MOGA

Poniżej zamieszczona została charakterystyka podstawowych elementów MOGA.

- *Chromosom* - łańcuch zbudowany z genów, które zawierają informacje. Geny reprezentują zmienne niezależne. Każdy chromosom reprezentuje możliwe rozwiązanie danego problemu. Istnieją różne sposoby kodowania genów: liczby całkowite, liczby rzeczywiste (kodowanie zmiennoprzecinkowe), notacja zero-jedynkowa (binarna), łańcuchy zmiennych oraz kombinacja powyższych sposobów.
- *Populacja (generacja)* - zbiór chromosomów. Populacja tworzona jest przez zastosowanie operatorów krzyżowania, mutacji i selekcję.

- *Krzyżowanie* - polega na wymianie podciągu/podciągów chromosomów (tzw. ciągów rodziców) między sobą, tworząc tzw. ciągi potomków (dzieci).

W pracy wykorzystano krzyżowanie pośrednie, zwane też krzyżowaniem arytmetycznym [Michalewicz, 1999], które można wyrazić w następujący sposób:

$$\begin{aligned} C_1 &= \gamma \cdot P_1 + (1 - \gamma) \cdot P_2 \\ C_2 &= (1 - \gamma) \cdot P_1 + \gamma \cdot P_2 \\ \gamma &= (1 + 2 \cdot \alpha) \cdot r - \alpha \end{aligned} \quad (4.10)$$

gdzie:

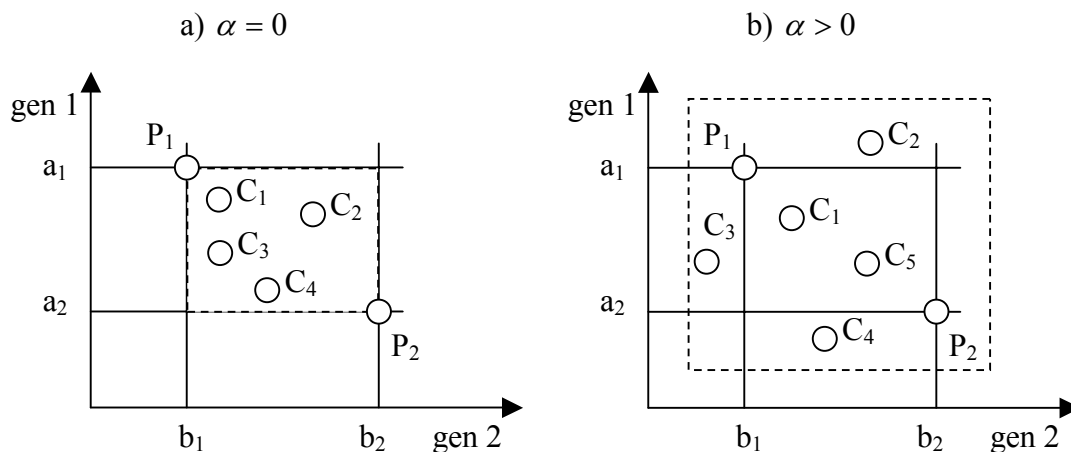
P_1, P_2 - chromosomy reprezentujące rodziców,

C_1, C_2 - chromosomy reprezentujące dzieci,

α - współczynnik eksploracji (definiowany jest przez użytkownika; $\alpha \geq 0$),

r - liczba losowa z przedziału od 0 do 1.

Rysunek 4.3 przedstawia krzyżowanie pośrednie.



Rys. 4.3. Graficzna prezentacja krzyżowania pośredniego [Popov, 2005]

- *Mutacja* - losowa zmiana wartości genu. Rysunek 4.4 przedstawia schemat mutacji dla kodowania całkowitoliczbowego.

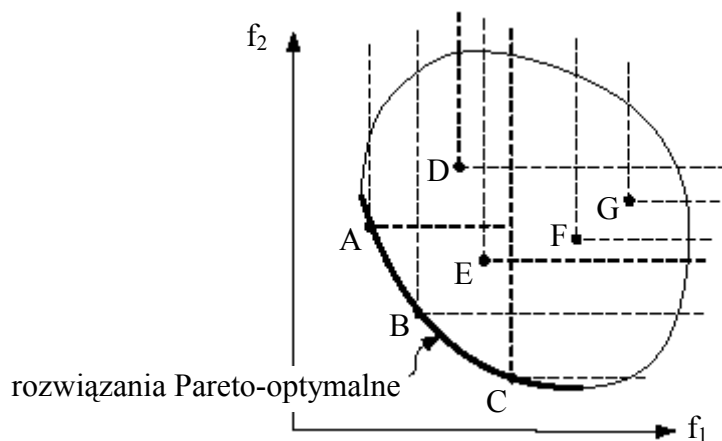
$$\begin{array}{c}
 41380731351 \\
 \downarrow \\
 41380738351
 \end{array}$$

Rys. 4.4. Mutacja w chromosomie dla kodowania całkowitoliczbowego [Popov, 2005]

- *Selekcja* - proces, w którym osobniki poddane operacjom genetycznym są wybierane w celu utworzenia nowej populacji. Selekcja ma dwa główne cele:
 - wybór perspektywicznych osobników, które biorą udział w tworzeniu następnej generacji lub są kopiowane bezpośrednio (elityzm),
 - szansa dla osobników o małej wartości funkcji przystosowania¹, by miały udział w procesie tworzenia następnej generacji.

W niniejszej pracy wykorzystano selekcję opartą na schemacie sortowania rozwiązań Pareto-optymalnych. Polega ona na tym, że z całej (bieżącej) populacji wybierane są tylko rozwiązania Pareto-optymalne, które stają się podstawą do tworzenia nowej generacji. W przypadku, gdy jedno rozwiązanie dominuje nad całą generacją, tworzona jest druga powierzchnia Pareto, jako podstawa do tworzenia nowej populacji.

Wadą metody jest możliwość utknięcia w lokalnym minimum. Zaletą jest szybki wybór i konwergencja. Rysunek 4.5 przedstawia metodę sortowania Pareto-optymalnego.



Rys. 4.5. Idea sortowania Pareto-optymalnego [Popov, 2005]

¹ Funkcja przystosowania – nazwa (używana przez biologów) określająca funkcję celu f , która stanowi pewien miernik zysku, użyteczności lub innej wielkości, którą chcielibyśmy maksymalizować lub zminimalizować [Goldberg, 1995]

- *Liczba rozwiązań Pareto-optimalnych* - liczba ta została ograniczona przez zastosowanie funkcji bliskości pomiędzy osobnikami, o postaci:

$$D(x) = \frac{\min\|x - x_i\| + \min\|x - x_k\|}{2} \quad (4.11)$$

gdzie:

$x \neq x_i \neq x_k$ - osobniki na powierzchni (froncie) Pareto.

Celem tego zabiegu jest:

- ograniczenie liczby rozwiązań,
- utrzymanie różnorodności zbioru Pareto, a tym samym równomiernie rozproszonych punktów na powierzchni.

Rozdział 5. METODY ANALIZY WRAŻLIWOŚCI

5.1. Wprowadzenie

Analiza wrażliwości w tej pracy pojmowana jest jako oszacowanie stopnia zmiany odpowiedzi modelu na zmiany czynników wejściowych modelu [Isukapalli, 1999], czyli określenie siły relacji między niepewnym wejściem, a wyjściem [Saltelli, 2005]. Wybór metody analizy wrażliwości zależy od: (i) zastosowanej miary wrażliwości, (ii) dokładności w oszacowaniu miary wrażliwości, (iii) poniesionych kosztów obliczeniowych. Tabela 5.1 przedstawia często spotykane miary wrażliwości.

Tabela 5.1. Popularne miary wrażliwości [Isukapalli, 1999]

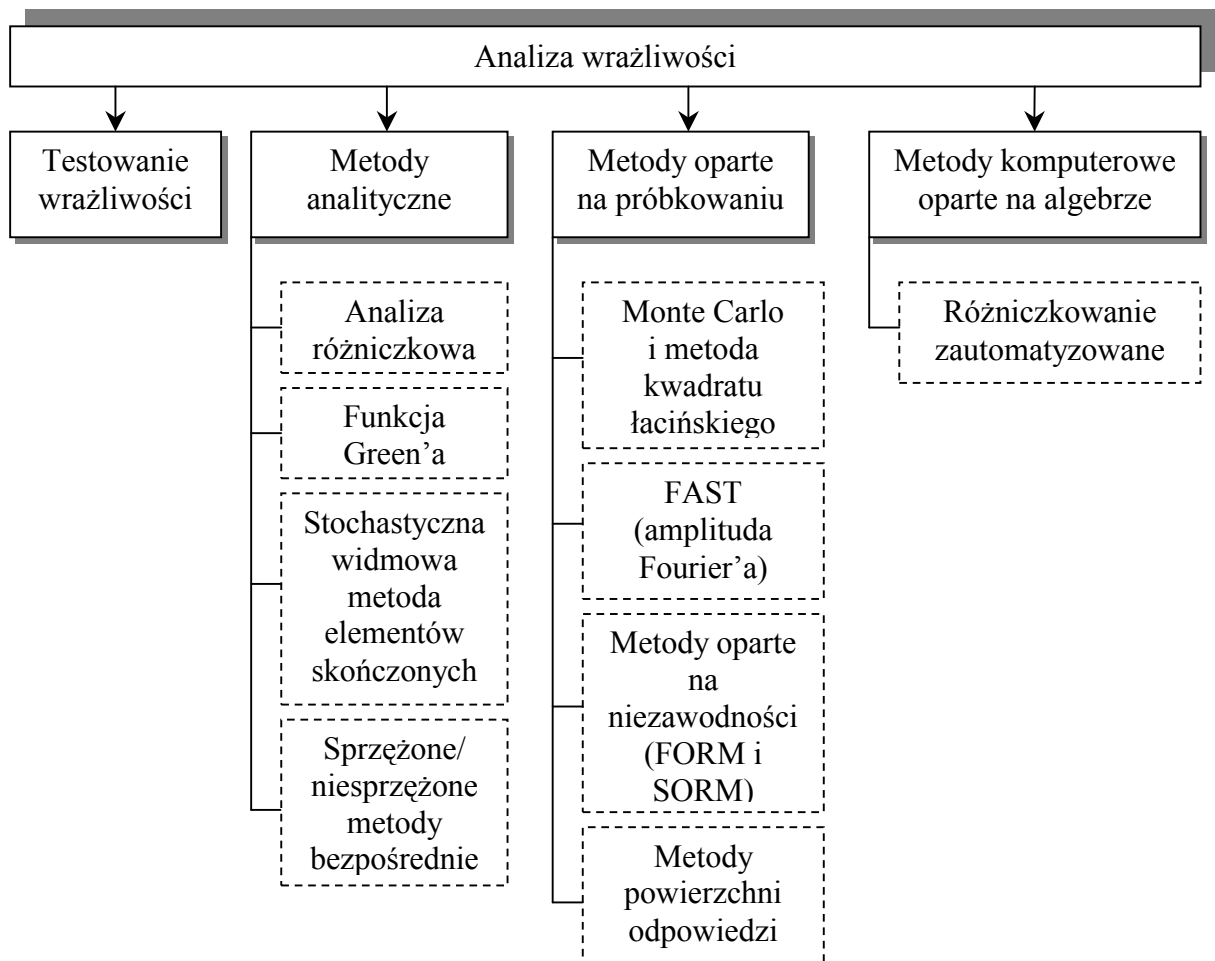
L.p.	Miary wrażliwości	Definicje
1	Odpowiedź na podstawie zmienności parametrów (<i>Response from arbitrary parameter variation</i>)	$u = u(\bar{k} + \delta \cdot k) - u(k)$
2	Odpowiedź znormalizowana (<i>Normalized Response</i>)	$D_i = \frac{\delta u_i}{u_i(\bar{k})}$
3	Odpowiedź uśredniona (<i>Average Response</i>)	$\overline{u_i(\bar{k})} = \frac{\int \dots \int_k u_i(k) dk}{\int \dots \int_k dk}$
4	Wartość oczekiwana (<i>Expected Value</i>)	$\langle u_i(k) \rangle = \int \dots \int_k u_i(k) P(k) dk$
5	Wariancja (<i>Variance</i>)	$\delta_i^2(k) = \langle u_i(k)^2 \rangle - \langle u_i(k) \rangle^2$
6	Extremum (<i>Extrema</i>)	$\max [u_i(k)], \min [u_i(k)]$
7	Lokalna aproksymacja gradientowa (<i>Local Gradient Approximation</i>)	$\delta u \approx [S] \delta k; S_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial k_j}$
8	Gradient znormalizowany (<i>Normalized Gradient</i>)	$S_{ij}^n = \frac{\bar{k}_j}{u_i(\bar{k})} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial k_j}$

5.2. Metody analizy wrażliwości

W oparciu o wybór miary wrażliwości i zmienność parametrów modelu metody analizy wrażliwości można sklasyfikować następująco [Isukapalli, 1999]:

- Globalna analiza wrażliwości (dla pełnego zakresu zmienności parametru badane jest zachowanie się układu).
- Lokalna analiza wrażliwości (wrażliwość modelu szacowana jest ze względu na zmienność parametrów. Metoda jest charakteryzowana przez gradienty i pochodne cząstkowe w punktach badanych).

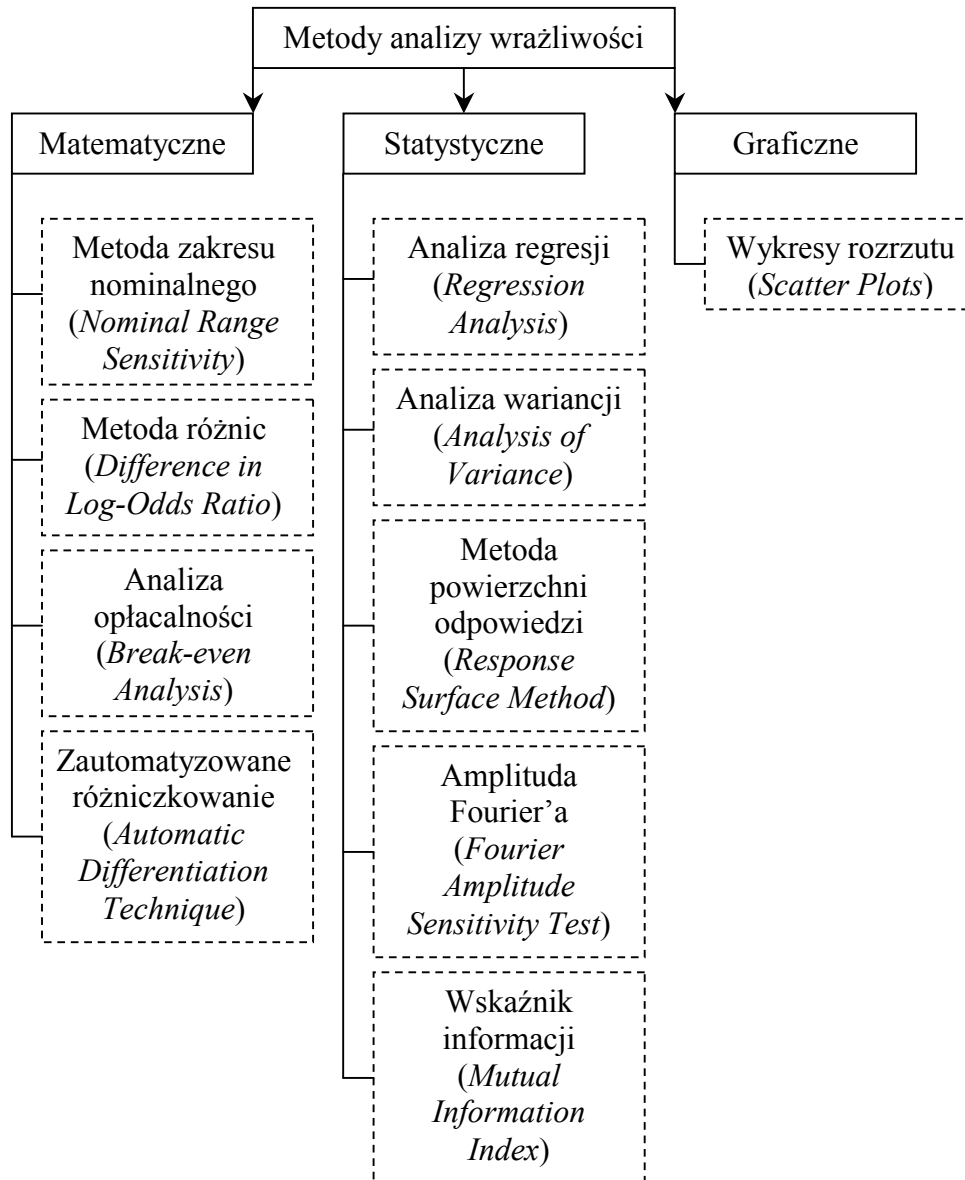
W pracy wykorzystano lokalne podejścia do analizy wrażliwości. Rysunek 5.1 przedstawia metody analizy wrażliwości.



Rys. 5.1. Metody analizy wrażliwości [Isukapalli, 1999]

W pozycji [Helton, 2001] znajdujemy procedury i miary metod analizy wrażliwości opartych na próbkowaniu: współczynniki korelacji, rangowe współczynniki korelacji, średnia wspólna, położenie wspólne, wspólne mediany, statystyczna niezależność, standaryzowane współczynniki regresji, cząstkowe współczynniki regresji, standaryzowane rangowe współczynniki regresji, cząstkowe rangowe współczynniki korelacji, analiza regresji

krokowej dla danych surowych i transformowanych w oparciu o rangi, badanie wykresów rozrzutu.



Rys. 5.2. Metody analizy wrażliwości według [Frey, 2001]

Inny podział metod analizy wrażliwości znajdujemy w pozycji [Frey, 2001]. Przedstawia on 10 wybranych metod, stosowanych w różnych dziedzinach. Ogólnie metody analizy wrażliwości dzieli na (rys. 5.2):

- metody matematyczne (ocena wrażliwości odpowiedzi modelu na zakres zmiany danego wejścia),
- metody statystyczne (symulacja, w której każde wejście opisane jest rozkładem gęstości prawdopodobieństwa i oceniany jest wpływ zmienności wejść na rozkład wyjścia),

- metody graficzne (prezentacja wrażliwości w postaci wykresów, tabel lub powierzchni. Stosowane jest jako uzupełnienie dwóch poprzednich metod).

Jak wynika z powyższego istnieje cały szereg różnych sposobów analizy wrażliwości.

5.3. Charakterystyka metody gradientowej

W niniejszej pracy w analizie wrażliwości wykorzystano metodę gradientową.

Niech dana będzie funkcja $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_i)$. *Miary wrażliwości* odpowiedzi Y , które określają stopień wrażliwości odpowiedzi Y na wahania wejść X_i , można wyrazić na trzy sposoby [Saltelli, 2005]:

- w postaci pochodnych cząstkowych funkcji odpowiedzi:

$$Y'_{X_i} = \frac{\partial Y}{\partial X_i} \quad (5.1)$$

- w postaci unormowanych pochodnych cząstkowych funkcji odpowiedzi:

$$S_{X_i}^r = \left(\frac{\bar{X}_i}{\bar{Y}} \right) \left(\frac{\partial Y}{\partial X_i} \right) \quad (5.2)$$

gdzie:

\bar{X}_i - wartość nominalna (lub centralna, gdy znany jest zakres) czynnika X_i ,

\bar{Y} - wartość odpowiedzi Y odpowiadająca nominalnym wartościom czynników X_i .

Miara ta jest niezależna od jednostek używanych przez Y i X_i .

- w zmodyfikowanej postaci pochodnych cząstkowych:

$$S_{X_i}^{\sigma} = \left(\frac{\sigma_{X_i}}{\sigma_Y} \right) \left(\frac{\partial Y}{\partial X_i} \right) \quad (5.3)$$

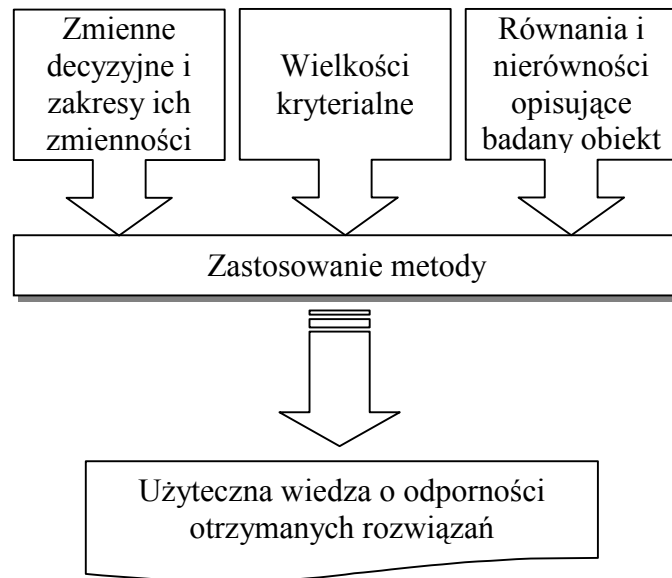
gdzie:

σ_{X_i} - odchylenie standardowe czynnika X_i ,

σ_Y - odchylenie standardowe odpowiedzi (jego wartość ustalana jest na podstawie modelu).

Rozdział 6. KONCEPCJA I SCHEMAT PROPONOWANEJ METODY

Rysunek 6.1 przedstawia ogólną koncepcję metody. Na rysunku przedstawiono, co należy wprowadzić i co otrzymamy w efekcie zastosowania metody.



Rys. 6.1. Wejście i wyjścia w zaproponowanej metodzie

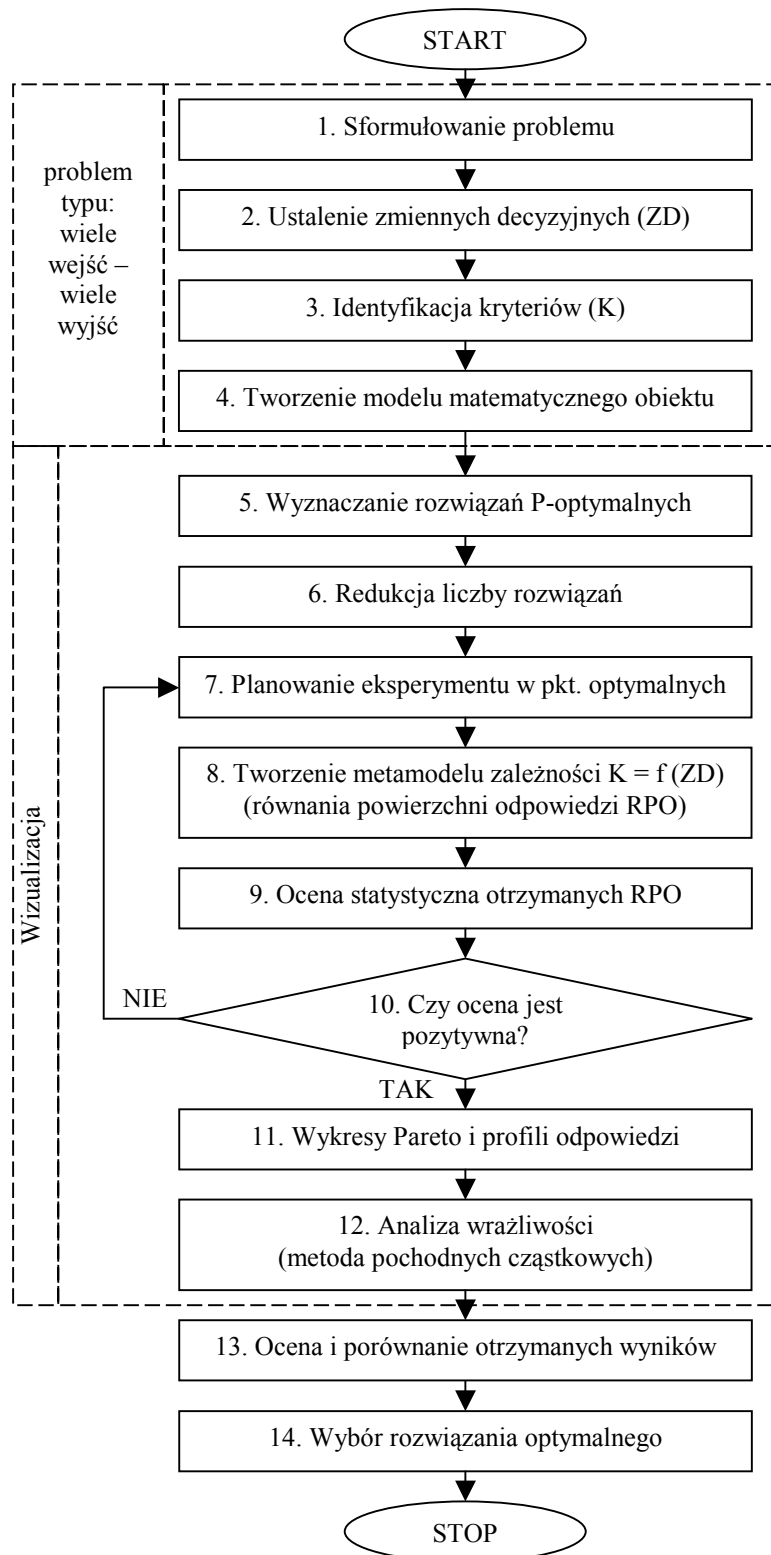
Zaproponowana metoda wyznaczania i oceny rozwiązań polioptymalnych została przedstawiona na rysunku 6.2.

Kolejne etapy postępowania można scharakteryzować następująco:

Krok 1. to sformułowanie problemu: co jest obiektem badań, co jest celem analiz, jakie są wymogi oraz ograniczenia. Często otrzymane zadanie to problem typu wiele wejść – wiele wyjść, czyli wielowymiarowe zadanie wielokryterialne (WZW). W tym etapie należy również określić rodzaj optymalizacji (czy jest to minimalizacja, czy maksymalizacja).

Krok 2. to ustalanie wielkości sterujących, tzn. zmiennych decyzyjnych (ZD). Należy dokonać wyboru najważniejszych zmiennych oraz ustalić zakresy ich zmienności.

Krok 3. to ustalanie odpowiedzi układu, tzn. kryteriów (K) polioptymalizacji.



Rys. 6.2. Schemat proponowanej metody

Krok 4. to utworzenie modelu matematycznego badanego obiektu z uwzględnieniem ograniczeń. W pracy problem ograniczeń został rozwiązany poprzez zastosowanie metody

funkcji kary, ponieważ jest ona łatwa w stosowaniu. Model matematyczny obiektu zaimplementowany został w środowisku MATLAB.

Krok 5. to poszukiwanie rozwiązań Pareto-optimalnych konkretnego problemu w określonej przestrzeni stanu. W konsekwencji otrzymujemy zbiór rozwiązań niezdominowanych dla kryteriów pozostających w konflikcie (tzw. powierzchnia Pareto). Do poszukiwania zbioru rozwiązań użyty został algorytm genetyczny do optymalizacji wielokryterialnej MOGA (*Multiobjective Genetic Algorithm*). Przed uruchomieniem algorytmu należy ustalić jego parametry. Jest to adaptacja narzędzia do konkretnego przypadku. Należy ustalić liczbę iteracji (kryterium stopu), rozmiar populacji (ilość chromosomów), stopień mutacji, rodzaj krzyżowania (zwykle lub pośrednie).

Krok 6. to zmniejszenie liczby rozwiązań. Należy wyeliminować, poprzez grupowanie, rozwiązania podobne do siebie. W tym celu zastosowano analizę skupień. Po otrzymaniu skupień ustala się ich środki. W ten sposób z kilkudziesięciu (kilkuset) otrzymujemy kilka (kilkanaście). Uzyskane środki to rozwiązania Pareto-optimalne, które zostaną poddane dalszej analizie.

Krok 7. to eksploracja otoczeń otrzymanych rozwiązań Pareto-optimalnych, czyli planowanie doświadczenia, przyjmując wyselekcjonowane Pareto-optimalne rozwiązanie za środek planu. Jeżeli w otoczeniu nie napotykamy ograniczeń można przyjąć jednakowy zakres zmienności (rozpiętości) dla ZD.

Krok 8. to poszukiwanie charakterystyki (metamodelu) opisującej zależności między ZD, a kryteriami. W tym celu zastosowano metodę powierzchni odpowiedzi (MPO).

Krok 9. to ocena otrzymanych metamodeli (równań powierzchni odpowiedzi RPO). Do tego celu wykorzystano analizę statystyczną. Należy zweryfikować jakość dopasowania otrzymanych RPO, ilość informacji wniesioną przez RPO itp.

Krok 10. to sprawdzenie, czy ocena otrzymanych metamodeli jest zadowalająca. Pozytywna ocena umożliwia dalszą analizę. W przypadku oceny negatywnej należy powrócić do kroku 7.

Krok 11. to przedstawienie rozwiązań cząstkowych w postaci wykresów Pareto (dla pojedynczych kryteriów w poszczególnych punktach optymalnych) oraz profili odpowiedzi (dla wszystkich kryteriów dla poszczególnych punktów optymalnych).

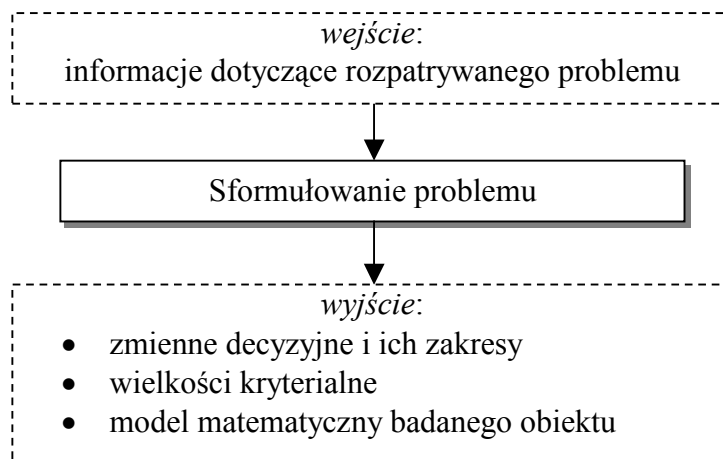
Krok 12. to zbadanie wpływu wahań wartości ZD na kryteria. W tym celu zastosowano analizę wrażliwości. Należy zbadać siłę i kierunek wpływu różnych ZD na kryteria w otrzymanych rozwiązaniach Pareto-optymalnych, by na tej podstawie dokonać porównania odporności otrzymanych rozwiązań. Do badania wrażliwości wykorzystano klasyczną metodę pochodnych cząstkowych. Wrażliwość otrzymanych rozwiązań Pareto-optymalnych można poglądowo przedstawić na wykresach gradientów oraz na mapie wpływów, która przedstawia pełny obraz zależności między zmiennymi decyzyjnymi, a kryteriami dla wszystkich badanych kryteriów i we wszystkich badanych punktach Pareto-optymalnych.

Krok 13. to analiza informacji zdobytej dzięki zastosowaniu metody.

Krok 14. to wybór rozwiązania najbardziej odpornego, czyli najmniej wrażliwego na ZD. Z punktu widzenia optymalności i odporności jest to wybór racjonalny. Wybór ten jest wspomagany narzędziami graficznymi, które ułatwiają wgląd w sytuację problemową, gdy liczba kryteriów $K > 3$.

Poniżej przedstawiona została pełna charakterystyka kolejnych elementów metody.

6.1. Sformułowanie problemu



Rys. 6.3. Wejścia i wyjścia kroku „sformułowanie problemu”

Rysunek 6.3 przedstawia wejścia i wyjścia kroku „sformułowanie problemu”. Aby rozpocząć działania zmierzające do ustalenia odporności otrzymanych rozwiązań Pareto- optymalnych należy wybrać te zmienne decyzyjne¹ (sterujące), których wpływ na odpowiedzi układu² (kryteria) z pewnych względów (np. technologicznych, ekonomicznych, ergonomicznych itp.) jest ważny. Dodatkowo należy określić zakres zmienności tych zmiennych. Następnie przystępuje się do identyfikacji wielkości kryterialnych, czyli do określenia wielkości wynikowych, które są szczególnie pożądane (jak np. ciężar obiektu czy koszt wykonania) oraz ustalenia rodzaju optymalizacji (maksymalizacji czy minimalizacji) dla poszczególnych wielkości kryterialnych.

Każdy obiekt techniczny jest charakteryzowany zbiorem równań i nierówności, które wynikają z warunków geometrycznych, wytrzymałościowych i innych. Znając wielkości decyzyjne (ZD) i kryteria (K) należy dokonać takich przekształceń formuł matematycznych, którymi dysponujemy, aby otrzymać zależności typu $K = f(ZD)$. W ten sposób przygotowany zostanie model matematyczny³ badanego obiektu. Model matematyczny optymalizacji zawiera [Tarnowski, 1997]: podzbiór zmiennych decyzyjnych x_N , podzbiór parametrów stałych, podzbiór niedodatnich ograniczeń nierównościowych $g_j(x_N)$, podzbiór ograniczeń równościowych $h_k(x_N)$ oraz kryterium optymalizacji $F(x_N)$. Ogólnie można powiedzieć, że model matematyczny optymalizowanego urządzenia technicznego składa się z równań i nierówności, ujmujących zmienne opisujące dane urządzenie. Warunki te wynikają z wymagań wytrzymałościowych, eksploatacyjnych, technologicznych, ekonomicznych i innych [Pogorzelski, 1978]. Dobry model matematyczny jest podporządkowany celowi optymalizacji, zły model powoduje trudności, a nawet uniemożliwia optymalizację [Papalambros, 2000].

Istotnym elementem zależności charakteryzujących obiekt techniczny są warunki nierównościowe, tzw. ograniczenia. Ograniczenia mogą przyjmować charakter liczbowy (np. zakres zmienności ZD) lub funkcyjny (np. ograniczenia wytrzymałościowe, wynikające z faktu, że naprężenia dopuszczalne w danym elemencie muszą być większe niż naprężenia rzeczywiste, pojawiające się wskutek przyłożonego obciążenia). W tej pracy problem ograniczeń został rozwiązany przez zastosowanie metody funkcji kary. Zastosowano tzw. zewnętrzną funkcję kary, którą można wyrazić następującą formułą:

¹ Zmienne decyzyjne – zbiór zmiennych x , których wartości wyznacza się dopiero w wyniku procesu optymalizacyjnego [Dietrich, t. 1, 1995]

² Odpowiedź układu – pewna funkcja zmiennych decyzyjnych i parametrów $f(x, p)$, której wartości stanowią ocenę maszyny [Dietrich, t.1, 1995]

³ Model matematyczny – zbiór zmiennych opisujących obiekt i jego stan oraz zbiór relacji matematycznych między nimi [Dietrich, t.1, 1995]

$$f'(x) = f(x) + \sum_i f_i^p(x) \quad (6.1)$$

gdzie:

$f'(x)$ – zmodyfikowana funkcja celu,

$f(x)$ – funkcja celu,

$f_i^p(x)$ – funkcja kary związana z ograniczeniami nierównościami $g_i(x)$.

W przypadku zewnętrznej funkcji kary karane są wykroczenia poza obszar dopuszczalny. Powoduje ona, że punkty spoza obszaru dopuszczalnego otrzymują „złą” wartość funkcji zmodyfikowanej. Ma to zapobiegać poszukiwaniu w obszarach niedopuszczalnych. Funkcja kary $f_i^p(x)$ ma następujące własności:

$$\begin{aligned} f_i^p(x) &= 0 & , \text{jeśli } g_i(x) \leq 0 \\ f_i^p(x) &> 0 & , \text{jeśli } g_i(x) > 0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

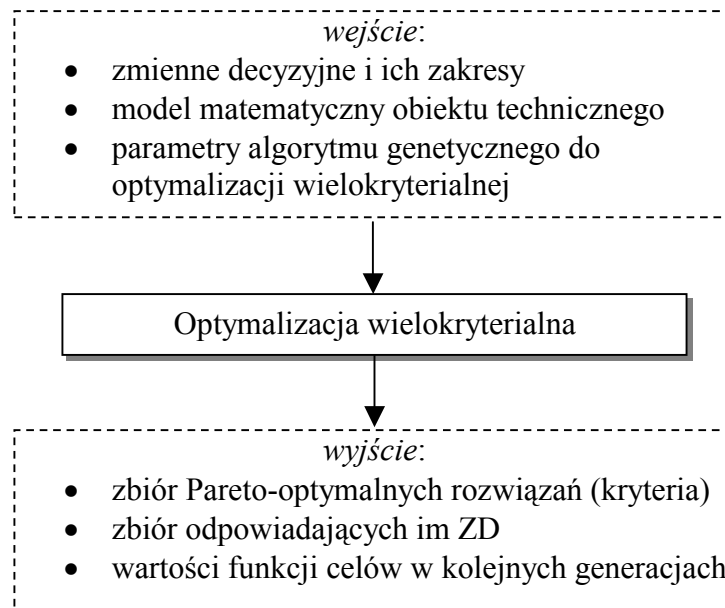
Szczególną odmianą funkcji kary jest tzw. „kara śmierci” [Arabas, 2001]. Polega ona na tym, że dla każdego $x \notin D$ (D – zbiór rozwiązań dopuszczalnych) funkcja kary $f_i^p(x) = \infty$. W konsekwencji nie ma potrzeby obliczania wartości funkcji celu poza obszarem dopuszczalnym. Wynikiem minimalizacji $f'(x)$ będzie zawsze punkt spełniający ograniczenia. W pracy przyjęto stałą wartość funkcji kary ($f_i^p(x) = 10^{10}$).

6.2. Optymalizacja wielokryterialna

Rysunek 6.4 przedstawia wejścia i wyjścia kroku „optymalizacja wielokryterialna”.

W tej pracy do optymalizacji wielokryterialnej zastosowano algorytm genetyczny, tzw. MOGA (*Multiobjective Genetic Algorithm*). Algorytm ten działa w środowisku MATLAB, które jest produktem firmy The MathWorks⁴. Składa się on z kilku funkcji, m. in.: *GAMOminBC* i *GAMOminSC*.

⁴ Witrynę firmy The MathWorks można znaleźć pod adresem: <http://www.mathworks.com>



Rys. 6.4. Wejścia i wyjścia kroku „optymalizacja wielokryterialna”

Wywołanie m-pliku⁵ *GAMOminBC* ma następującą postać:

[RozwOpt, WartFun, NajRozw, NajWartFun] = GAMOminBC ('Nazwa_pliku', Granice, Opcje)

gdzie na wejściu mamy:

Nazwa_pliku – nazwa m-pliku zawierającego model matematyczny badanego obiektu, zapisany w kodzie MATLAB'a.

Granice – macierz, która ma 3 kolumny i tyle wierszy, ile jest zmiennych decyzyjnych (ZD); określa zakres zmienności poszczególnych ZD (2 pierwsze kolumny – min i max) oraz typ zmiennej (3 kolumna – czy jest ciągła, dyskretna lub przyjmuje tylko wartości całkowite).

Opcje – plik tekstowy zawierający informacje o parametrach algorytmu genetycznego. Tu należy określić: ilość iteracji, która jednocześnie pełni kryterium zatrzymania algorytmu, wielkość populacji, czyli ilość chromosomów, stopień mutacji określający procentowo część populacji, która będzie podlegać mutacji, maksymalną liczbę poszukiwanych rozwiązań, część populacji, która zostanie wypełniona nowymi osobnikami, rodzaj selekcji, sposób reprezentacji wyników obliczeń, sposób graficznego przedstawienia rezultatów (wykres).

Na wyjściu zaś mamy:

RozwOpt – macierz zawierającą wektory optymalnych zmiennych decyzyjnych.

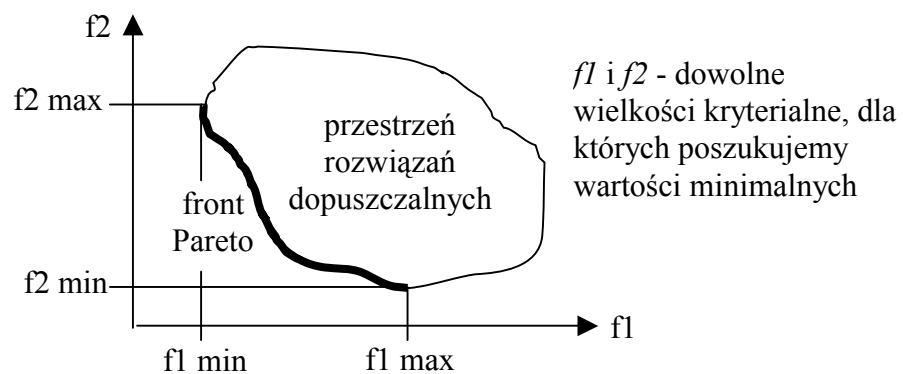
WartFun – macierz zawierającą wartości wielkości kryterialnych odpowiadających optymalnym zmiennym decyzyjnym.

⁵ m-plik – niesformatowany plik tekstowy, zawierający instrukcje przeznaczone do wykonania [Brzózka, 1998]

NajRoz – macierz najlepszych rozwiązań (najlepszych zmiennych decyzyjnych) w kolejnych generacjach.

NajWartFun – macierz wartości funkcji celów odpowiadających w kolejnych generacjach najlepszym zmiennym decyzyjnym.

Algorytm *GAMOMinBC* działa w oparciu o krzyżowanie pośrednie (*intermediate crossover*) [Michalewicz, 1999]. W konsekwencji zastosowania MOGA otrzymujemy zbiór rozwiązań Pareto- optymalnych.



Rys. 6.5. Przykładowy zbiór rozwiązań Pareto- optymalnych dla dwóch kryteriów $f1$ i $f2$

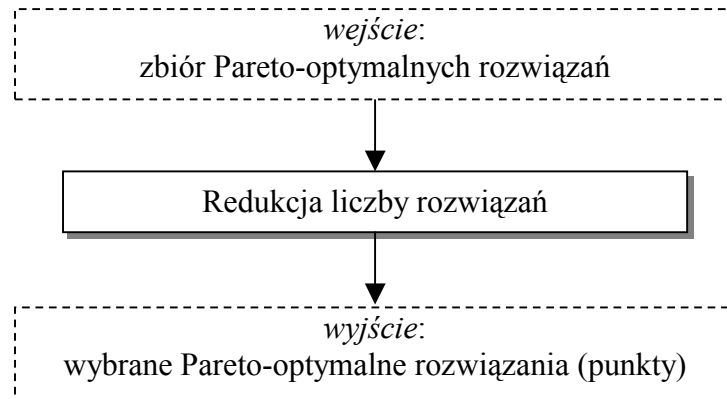
Przykładowo, dla dwóch kryteriów, które minimalizujemy (rys. 6.5) front Pareto zawiera się między dwoma punktami. Na jednym końcu frontu otrzymujemy minimalną wartość kryterium $f1$ przy maksymalnej wartości kryterium $f2$, a na drugim otrzymujemy sytuację odwrotną. Pomiędzy tymi skrajnymi rozwiązaniami znajduje się cały szereg rozwiązań pośrednich. Więcej informacji można uzyskać w podręczniku użytkownika [Popov, 2005]. Algorytm został pobrany ze strony internetowej: <http://www.tu-harburg.de/~soap0883>.

Parametry algorytmu genetycznego zostały ustalone *metodą kolejnych prób*. Za kryterium oceny przyjęto powtarzalność wyników (rozwiązań Pareto- optymalnych).

6.3. Redukcja liczby rozwiązań Pareto- optymalnych (analiza skupień)

Metody analizy skupień stosowane są w celu połączenia dużej ilości obserwacji w grupy o zbliżonych cechach. Podstawą grupowania jest przeważnie podobieństwo pomiędzy elementami wyrażone przy pomocy funkcji (metryki) podobieństwa. Kryterium podobieństwa

obserwacji jest odległość punktów w wielowymiarowej przestrzeni cech. Najpopularniejszą z nich jest metryka euklidesowa. Rysunek 6.6 przedstawia wejścia i wyjścia kroku „analiza skupień”.



Rys. 6.6. Wejścia i wyjścia kroku „analiza skupień”

W tej pracy wykorzystana została metoda hierarchiczna aglomeracyjna, z grupy metod kombinatorycznych, zwana *metodą najbliższego sąsiedztwa* (single linkage method), w której metryka D_{KL} wyraża się następującą zależnością:

$$D_{KL} = \min d(x_i, x_j) \quad (6.3)$$

gdzie:

x_i - i -ta obserwacja z C_K ,

x_j - j -ta obserwacja z C_L ,

C_K, C_L - odpowiednio k -ty i l -ty klaster, podzbiór $\{1, 2, \dots, n\}$, gdzie n to liczba obserwacji,

$$d(x_i, x_j) = \|x\|^2,$$

$\|x\|$ - pierwiastek kwadratowy sumy kwadratów elementów wektora x (tzw. metryka euklidesowa).

W prostej metodzie hierarchicznej odległość pomiędzy dwoma skupieniami to minimalna odległość pomiędzy obserwacją w jednym skupieniu, a obserwacją w drugim skupieniu.

Po wyznaczeniu skupień należy określić ich środki, które będą reprezentowały zbiór Pareto w dalszych badaniach. Do wyznaczenia środków skupień użyta została jedna z funkcji MATLAB'a o nazwie *median*. Funkcja ta służy do obliczania mediany zbioru elementów. Dla zbioru o nieparzystej liczbie elementów jest to punkt znajdujący się w środku tego zbioru (poniżej i powyżej tej wielkości znajduje się jednakowa liczba obserwacji). Dla zbioru o

parzystej liczbie elementów wybierany jest punkt, która znajduje się najbliżej średniej arytmetycznej z dwóch środkowych obserwacji.

Schemat hierarchicznych metod aglomeracyjnych

Niech dany będzie zbiór n obiektów i macierz odległości między nimi $\{d_{ij}\}$. Algorytm procedury aglomeracyjnej przedstawia się następująco [Kucharczyk, 1982]:

- Przyjmuje się, że każdy obiekt tworzy jednoelementowe skupienie.
- W macierzy odległości $\{d_{ij}\}$ poszukuje się pary skupień p i q ($p < q$) najmniej odległych od siebie:

$$d_{pq} = \min_{i>j} d_{ij} \quad (6.4)$$

- Skupienia p i q łączy się w nowe skupienie. Otrzymuje ono nr skupienia p . Skupienie q jest usuwane. Liczby skupień większe od q oraz całkowitą liczbę skupień należy zmniejszyć o jeden.
- Odległości d_{pr} ($r \neq q$) należy przekształcić stosownie do wybranej metody. Dla metod kombinatorycznych można je wyrazić następującą zależnością:

$$d_{pr} = a_1 \cdot d_{pr} + a_2 \cdot d_{qr} + b \cdot d_{pq} + c \cdot |d_{pr} - d_{qr}| \quad (6.5)$$

gdzie:

r – przebiega wszystkie wartości różne od p i q ,

a_1, a_2, b, c – parametry charakteryzujące poszczególne metody. Dla metody najbliższego sąsiedztwa: $a_1=a_2=0,5$; $b=0$; $c=-0,5$. W pracy [Kucharczyk, 1982] zawarto tabelę wartości parametrów charakteryzujących metody kombinatoryczne.

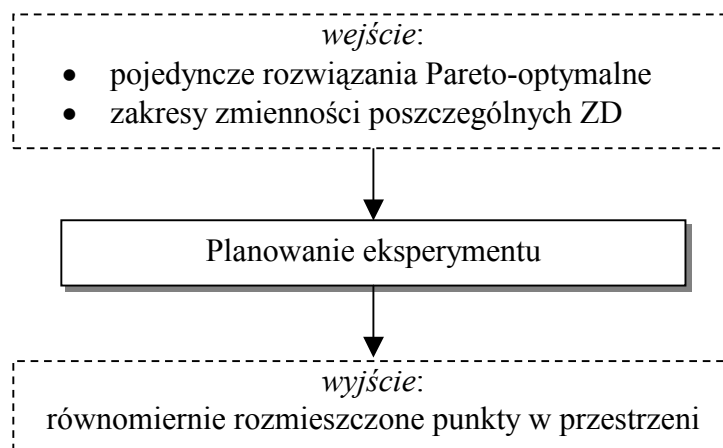
- Kroki 2-4 powtarza się do chwili, gdy wszystkie obiekty utworzą jedno skupienie.

Na wybór ilości skupień mają wpływ następujące elementy: (i) ilość rozwiązań. Większa ilość rozwiązań powinna skutkować większą ilością skupień, (ii) kształt zbioru rozwiązań. Im zbiór bardziej skupiony, tym mniejsza ilość skupień. Ponadto, narzędziem wspomagającym podjęcie decyzji może być pakiet statystyczny (np. JMP), który umożliwia wyświetlenie „chmury” rozwiązań z zastosowaniem kolorów.

6.4. Planowanie eksperymentu

Rysunek 6.7 przedstawia wejścia i wyjścia kroku „planowanie doświadczeń”. Celem planowania doświadczenia jest wyznaczenie opisu matematycznego (tzw. metamodelu)

rozważanego obiektu oraz ułatwienie obliczeń w fazie opracowywania wyników eksperymentu [Mańczak, 1976]. Stosując odpowiedni rozkład punktów w przestrzeni czynnikowej i liniowe przekształcenie współrzędnych można uniknąć korelacji między współczynnikami równania regresji, co jest wadą klasycznej analizy regresji. Planowanie eksperymentu polega na równoczesnym zmienianiu wartości wszystkich czynników, co prowadzi do uzyskania ilościowych oszacowań efektów głównych i efektów współdziałań. Zastosowanie metod planowania znacznie zwiększa efektywność badań [Achnazarowa, 1982].



Rys. 6.7. Wejścia i wyjścia kroku „planowanie doświadczeń”

Rozróżniamy następujące metody planowania eksperymentu: (i) planowanie dwupoziomowe (całkowite i ułamkowe), (ii) planowanie trójpoziomowe (całkowite), (iii) planowanie wielopoziomowe (kompozycyjne, ortogonalne, rotatabilne), (iv) planowanie optymalne (typu D, E, A, G, ciągłe) [Mańczak, 1976].

Na potrzeby tej pracy wybrano plan centralny kompozycyjny, który jest oparty na planie 2-poziomowym (stanowi on jego jądro) i uzupełniony doświadczeniami gwiazdowymi $\pm a$ (dla każdego wymiaru, gdzie a to ramię gwiazdne) oraz doświadczeniami centralnymi, realizowanymi w środku planu. Rysunek 6.8 przedstawia plan dla 3 czynników x_1 , x_2 i x_3 .

Zwykle wartości parametrów przyjmują postać znormalizowaną: -1 i +1. Tabela 6.1 przedstawia przykładowy plan dla rysunku 6.8. Pierwszych 8 doświadczeń to jądro – plan 2-poziomowy całkowity 2^k (k – liczba czynników), następnych 6 to dodatkowe doświadczenia gwiazdne dla każdego wymiaru $2m$ (m – liczba wymiarów), a ostatnie doświadczenie to punkt centralny planu, który kolejno będzie przyjmował współrzędne otrzymane po analizie skupień s_{ri} ($i=1, \dots, k$, gdzie k to liczba rozpatrywanych punktów optymalnych).

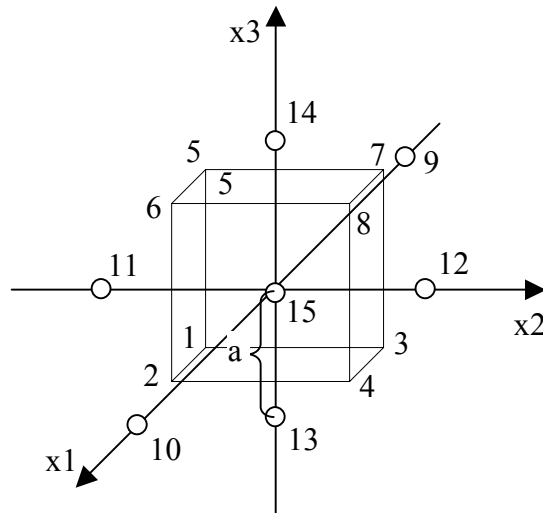
Rys. 6.8. Plan centralny kompozycyjny – ogólna idea dla 3 czynników x_1 , x_2 i x_3

Tabela 6.1. Przykładowy plan centralny kompozycyjny dla 3 czynników

Nr doświadczenia	x_1	x_2	x_3
1	-1	-1	-1
2	1	-1	-1
3	-1	1	-1
4	1	1	-1
5	-1	-1	1
6	1	-1	1
7	-1	1	1
8	1	1	1
9	-1	0	0
10	1	0	0
11	0	-1	0
12	0	1	0
13	0	0	-1
14	0	0	1
15	0	0	0

Macierz zero-jedynkowa (tabela 6.1) zamieniana jest na macierz liczb rzeczywistych, co umożliwia obliczanie wartości wielkości kryterialnych. Otrzymane w ten sposób macierze liczb rzeczywistych poddawane są weryfikacji przy pomocy współczynnika korelacji liniowej Pearsona r [Oktaba, 1963], za pomocą którego ustala się stopień korelacji między zmiennymi decyzyjnymi (równanie 6.6). Współczynnik przyjmuje wartość z przedziału od -1 do +1. Wartości skrajne oznaczają silne korelacje dodatnie (+1; wprost proporcjonalne) oraz ujemne (-1; odwrotnie proporcjonalne). Wartość współczynnika w pobliżu 0 świadczy o braku korelacji między rozważanymi zmiennymi X i Y .

$$r = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{D^2 X \cdot D^2 Y}} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \quad (6.6)$$

gdzie:

$\text{cov}(X, Y)$ – kowariancja zmiennych losowych X i Y,

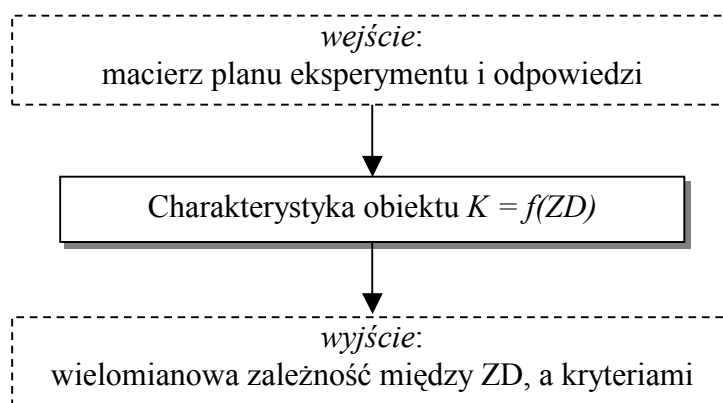
$D^2 X, D^2 Y$ – wariancje zmiennych losowych X i Y,

\bar{x}, \bar{y} - wartości średnie zmiennych losowych X i Y.

Na wybór zakresów zmienności zmiennych decyzyjnych wpływają: (i) ograniczenia (liczbowe oraz funkcyjne), (ii) związki matematyczne, np. pierwiastek kwadratowy z liczby ujemnej, (iii) wymogi logiczne, np. liczba powierzchni ciernych musi być liczbą dodatnią całkowitą.

6.5. Tworzenie charakterystyki obiektu (analiza regresji)

Zależność między zmiennymi decyzyjnymi ZD, a kryteriami K została opisana przy pomocy wielomianu stopnia drugiego. Okazuje się, że wielomiany dobrze spełniają swoją rolę, gdy służą do lokalnej aproksymacji funkcji regresji [Zieliński, 1974]. Zastosowano metody powierzchni odpowiedzi [Draper, 1998]. W konsekwencji otrzymujemy tzw. równanie powierzchni odpowiedzi (RPO). Jest to rodzaj globalnego podejścia do modelowania zależności $K = f(\text{ZD})$. Rysunek 6.9 przedstawia wejścia i wyjścia kroku „tworzenie metamodelu $K = f(\text{ZD})$ ”.



Rys. 6.9. Wejścia i wyjścia kroku „tworzenie metamodelu $K = f(\text{ZD})$ ”

RPO najczęściej przyjmuje postać wielomianu stopnia drugiego (kwadratowego) typu:

$$R = b_o + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{i=1}^k b_{ii} x_i^2 + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k b_{ij} x_i x_j \quad (6.7)$$

gdzie:

R - poszukiwana odpowiedź,

b_o - punkt przecięcia z osią współrzędnych (wyraz wolny),

b_i - współczynniki regresji dla czynników liniowych (pierwszego stopnia),

b_{ii} - współczynniki dla czynników kwadratowych,

b_{ij} - współczynniki dla czynników mieszanych,

x_i, x_j - niezależne zmienne,

k - całkowita liczba uwzględnionych zmiennych.

Dopasowanie funkcji aproksymującej (6.7) realizowane jest zgodnie z metodą najmniejszych kwadratów [Ryan, 1997]. Jej idea jest następująca:

niech ε oznacza odległość (błąd) między wartością zaobserwowaną Y , a aproksymowaną Y' (otrzymaną z modelu). Można to wyrazić matematycznie w sposób następujący:

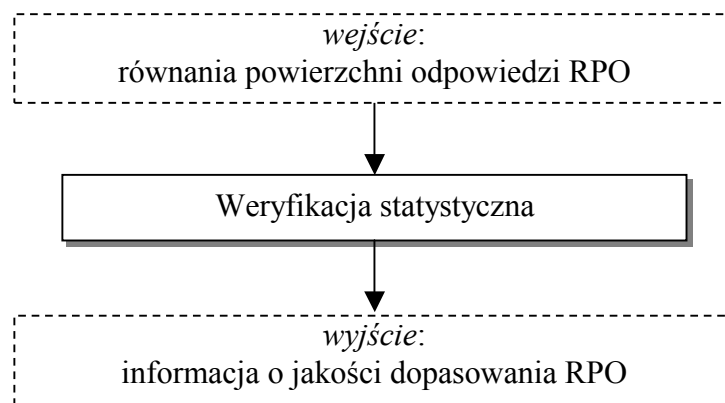
$$\varepsilon = Y - Y' = Y - (\beta_0 + \beta_1 X) \quad (6.8)$$

Oczekuje się, aby suma kwadratów błędów L była jak najmniejsza:

$$L = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)^2 \rightarrow \min \quad (6.9)$$

Do tworzenia RPO wybrano funkcję *rstoool* działającą w MATLAB'ie.

6.5.1. Weryfikacja statystyczna równań powierzchni odpowiedzi RPO



Rys. 6.10. Wejścia i wyjścia kroku „weryfikacja metamodeli”

Rysunek 6.10 przedstawia wejścia i wyjścia kroku „weryfikacja metamodeli”. Weryfikacja otrzymanych metamodeli $K = f(ZD)$ sprowadza się do ustalenia wartości kilku statystyk, które określają jakość dopasowania RPO, co jest niezbędne do dalszej analizy. Jeżeli jakość dopasowania jest zadowalająca (statystyki liczbowe dają w wyniku wartości zbliżone do wzorcowych) to można z wiarygodnością przystąpić do realizacji kolejnych kroków metody. W przeciwnym przypadku należy wrócić do kroku „planowania eksperymentu”. Do weryfikacji zostały wykorzystane 3 statystyki: (i) współczynnik determinacji R^2 , (ii) poprawiony (skorygowany) współczynnik determinacji R^2 , (iii) błąd średni kwadratowy $RMSE$.

Statystyka R^2 (6.10) to kwadrat współczynnika korelacji wielowymiarowej, który określa związek między wartościami „zaobserwowanymi” (tj. uzyskanymi z algorytmu obliczeń) zmiennej niezależnej i „prognozowanymi”, tj. otrzymanymi z funkcji aproksymującej [Draper, 1998]. Współczynnik R^2 , zwany inaczej współczynnikiem determinacji, charakteryzuje, w jakim stopniu wartości odpowiedzi są objaśniane przez model. R^2 przyjmuje wartości z zakresu od 0 do 1. Przy czym należy rozpatrzeć następujące sytuacje:

- $R^2 = 1$ - dane leżą dokładnie na "płaszczyźnie" regresji (zmiennosc jest wyjaśniona w 100 %),
- $R^2 = 0$ - regresja niczego nie wyjaśnia, dane są nieskorelowane,
- $0 < R^2 < 1$ - "płaszczyzna" regresji jest tym lepiej dopasowana do danych, im współczynnik determinacji R^2 jest bliższy jedności.

$$R^2 = \frac{\sum_{n=1}^N (\hat{y}_n - \bar{y})^2}{\sum_{n=1}^N (y_n - \bar{y})^2} \quad (6.10)$$

gdzie:

\hat{y}_n - n -ta wartość przybliżona (uzyskana na podstawie modelu),

\bar{y} - wartość średnia odpowiedzi (średnia arytmetyczna),

y_n - n -ta wartość zaobserwowana,

N - liczba obserwacji.

Poprawiona (unormowana) wartość R^2_{unorm} (6.11) umożliwia porównanie otrzymanych wyników dla różnych RPO w różnych punktach optymalnych [Ryan, 1997].

Uwzględnia ona, że R^2 jest obliczony z próby i jest trochę "za dobry", jeśli uogólnimy nasze wyniki na populację. Poprawiony R^2_{unorm} mówi nam, jak dobrze dopasowane byłoby nasze równanie regresji do innej próby z tej samej populacji. Współczynnik R^2_{unorm} jest zawsze mniejszy od R^2 .

$$R^2_{unorm} = 1 - (1 - R^2) \left(\frac{n-1}{n-p-1} \right) \quad (6.11)$$

gdzie:

n - liczba obserwacji,

p - liczba parametrów modelu (zmiennych objaśniających).

$RMSE$ to błąd średni kwadratowy, który mówi o jakości dopasowania [Krzysztofiak, 1979]. Inaczej nazywany jest też wariancją błędu dopasowania. Wyraża się następującą zależnością (6.12):

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n-p} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2} \quad (6.12)$$

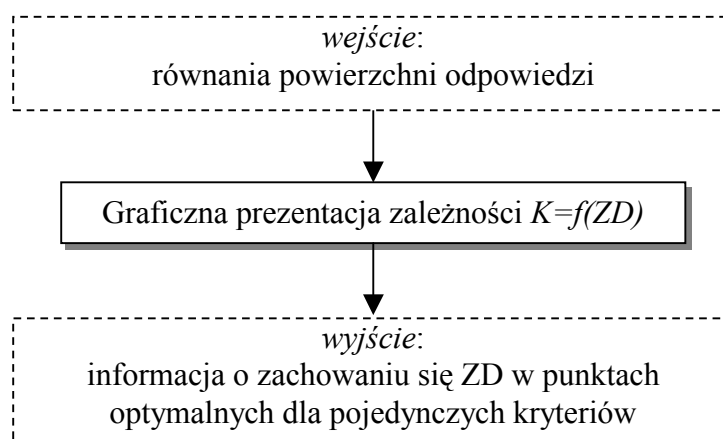
gdzie:

n - liczba obserwacji, p - liczba parametrów,

y_i - i -ta zaobserwowana wartość,

\hat{y}_i - i -ta przybliżona (obliczona na podstawie modelu) wartość.

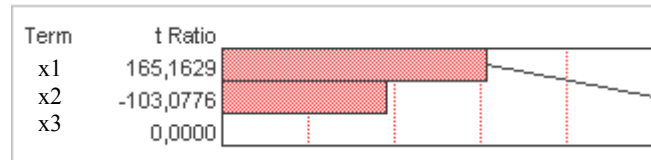
6.5.2. Wykresy Pareto i profile odpowiedzi



Rys. 6.11. Wejścia i wyjścia kroku „graficzna prezentacja zależności $K=f(ZD)$ ”

Rysunek 6.11 przedstawia wejścia i wyjścia kroku „graficzna prezentacja zależności $K=f(ZD)$ ”. Wykresy Pareto wskazują te zmienne, które mają główny wpływ na poszukiwane

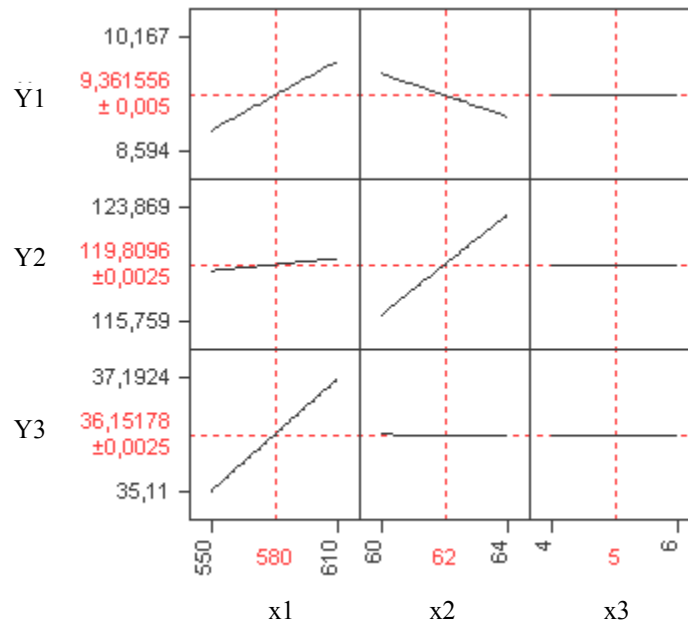
odpowiedzi układu, to znaczy te, na które badane wielkości są najbardziej wrażliwe. Wykresy te dotyczą jednego rozwiązania optymalnego i jednego kryterium. Rysunek 6.12 przedstawia przykładowy wykres Pareto.



Rys. 6.12. Przykładowy wykres Pareto [Białas-Heltowski, 2005a]

Analiza wyników w postaci liczbowej staje się trudna, gdy mamy do czynienia z zadaniem wielowymiarowym. Wykres Pareto wskazuje wielkości wejściowe, które w sposób znaczący przyczyniają się do zmiany wartości wielkości wyjściowej. Kolumna *Term* zawiera zmienne wejściowe, uszeregowane w kolejności wpływu na zmienną objaśnianą. Im większy wpływ, tym zmienna znajduje się wyżej. Kolumna *t Ratio* podaje wartości statystyki *t* (określanej jako stosunek wartości współczynnika regresji do odchylenia standardowego dla danego współczynnika [Mańczak, 1976]), używanej w teście *t*-Studenta do badania istotności danego współczynnika regresji. Im statystyka jest bardziej znacząca, tym pasek na wykresie jest dłuższy. Jak wynika z rysunku 6.12, zmienna objaśniana jest najbardziej wrażliwa na zmiany wartości zmiennej objaśniającej *x1*. Natomiast zmienna objaśniająca *x3* nie ma żadnego wpływu na zmienną objaśnianą.

Innym sposobem graficznej reprezentacji relacji $K = f(ZD)$ są profile odpowiedzi. Rysunek 6.13 przedstawia przykładowe profile. Wykres ten, w przeciwieństwie do wykresu Pareto, ukazuje pełniejszy obraz sytuacji w danym rozwiązaniu optymalnym, ponieważ przedstawia zachowanie się ZD względem wszystkich kryteriów w danym punkcie. Nachylenie linii na wykresie przedstawia wrażliwość wielkości badanej na daną zmienną wejściową. Im mniejsze nachylenie linii do osi odciętych, tym mniejszy wpływ zmiennej na wielkość zależną. Ponadto, istnieje możliwość uzyskania lepszego rozpoznania problemu przez obserwację zachowania się profili odpowiedzi przy zmianie wartości zmiennych wejściowych. Zaletą tej techniki jest możliwość dokonania zmian wartości wejściowych techniką „kliknij i przeciągnij”, przy czym następuje automatyczna aktualizacja profilów. W ten sposób można eksperymentalnie poszukiwać optymalnych wartości zmiennych wejściowych. Profile odpowiedzi uzyskano stosując pakiet statystyczny JMP 5.1 [SAS, 2003].



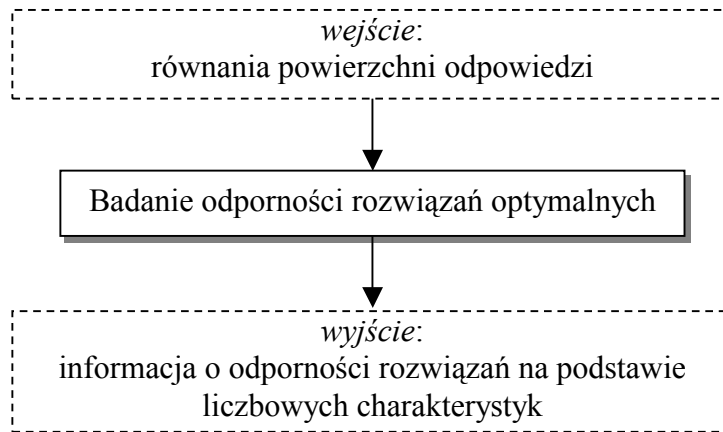
Rys. 6.13. Przykładowe profile odpowiedzi [Białas-Heltowski, 2005]

Na rysunku 6.13 wiersze reprezentują zmienne objaśniane ($Y1$, $Y2$, $Y3$), a kolumny zmienne objaśniające ($x1$, $x2$, $x3$). Z wykresu można odczytać na co wpływa dana zmienna objaśniająca (np. wzrost $x2$ najmocniej wpływa na $Y2$, powodując jej wzrost, ale wpływa również na $Y1$, powodując jej zmniejszenie) albo od czego dana zmienna objaśniana zależy (np. $Y3$ zależy tylko od $x1$, a dokładnie wzrost $Y3$ spowodowany jest wzrostem $x1$). Obraz ten, z którego możemy wyczytać kierunek i siłę wpływu, jest bardzo przydatnym narzędziem w procesie projektowania, gdy należy szybko i skutecznie podjąć decyzję o zmianach w konstrukcji. W chwili obecnej dostępny jest pakiet statystyczny JMP 6, który można znaleźć pod adresem internetowym: <http://www.sas.com/offices/europe/poland/academic> lub <http://www.jmp.com>.

6.6. Badanie odporności rozwiązań Pareto optymalnych (analiza wrażliwości)

Dziedzina zajmująca się badaniem odporności to analiza wrażliwości. W tej pracy analiza wrażliwości została zastosowana w celu ustalenia wpływu poszczególnych zmiennych decyzyjnych na wielkości kryterialne. Rysunek 6.14 przedstawia wejścia i wyjścia kroku „badanie wrażliwości”.

Do analizy wrażliwości zastosowano podejście klasyczne, wykorzystujące pochodne cząstkowe i gradienty.



Rys. 6.14. Wejścia i wyjścia kroku „badanie wrażliwości”

Metoda pochodnych cząstkowych [Żakowski, 1979] jest w tym przypadku wygodna w użyciu, ponieważ funkcje celu są wyrażone w postaci wielomianowej, dzięki czemu w łatwy sposób można ustalić postać gradientu funkcji. Gdy wpływ zmiennej decyzyjnej jest niewielki, gradient danej funkcji jest mały [Tarnowski, 1997a]. W przypadku przeciwnym gradient $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ przyjmuje odpowiednio większą wartość.

Niech K oznacza pewną funkcję kryterialną zależną od wielu zmiennych niezależnych $K = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, gdzie $n=1, \dots, k$. Gradientem funkcji K jest wektor pochodnych cząstkowych wyrażony zależnością (6.13):

$$\nabla K = \left[\frac{\partial K}{\partial x_1}, \frac{\partial K}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial K}{\partial x_n} \right] \quad (6.13)$$

Liczbowe składowe wektora gradientu ∇K (6.14), czyli gradient funkcji w punkcie $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$, wskazują kierunek najszybszej zmiany wartości funkcji, a tym samym ukazują wpływ poszczególnych zmiennych decyzyjnych x_n na odpowiedź K .

$$\nabla K(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) = \left[\frac{\partial K}{\partial x_1}(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}), \dots, \frac{\partial K}{\partial x_n}(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) \right] \quad (6.14)$$

6.6.1. Wykresy gradientów

Informacje dotyczące siły wpływu poszczególnych zmiennych decyzyjnych na kolejne kryteria można przedstawić w postaci graficznej, co znacznie ułatwia ich analizę. Aby dokonać porównania współczynników gradientów dla różnych punktów i różnych kryteriów poddano je unormowaniu według następującej formuły (6.15):

$$\left[\frac{\partial y}{\partial x_i} \right]_{norm} = \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{x_i^0}{y^0} \quad (6.15)$$

gdzie:

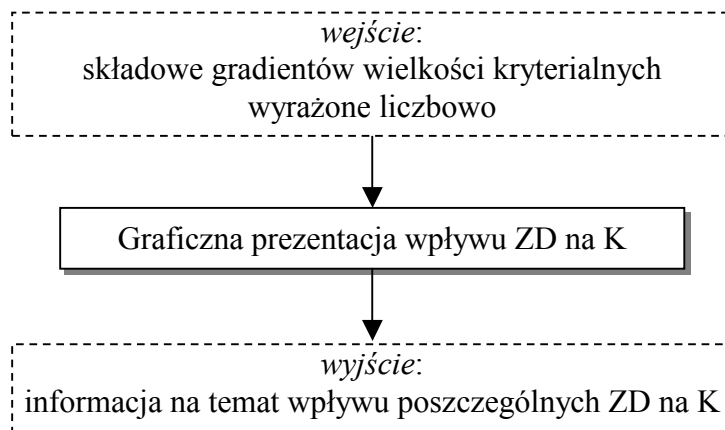
y - funkcja kryterialna,

x_i - i -ta zmienna decyzyjna,

x_i^0 - wartość i -tej zmiennej decyzyjnej w badanym rozwiązaniu optymalnym,

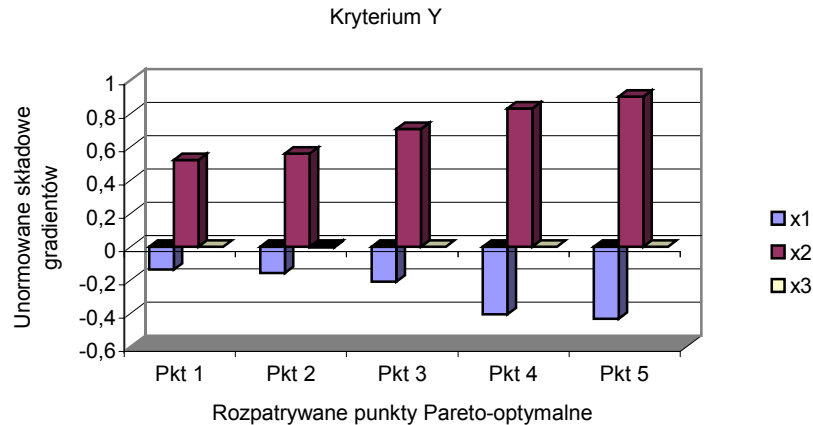
y^0 - wartość odpowiedzi dla x_i^0

Rysunek 6.15 przedstawia wejścia i wyjścia kroku „wykresy gradientów”.



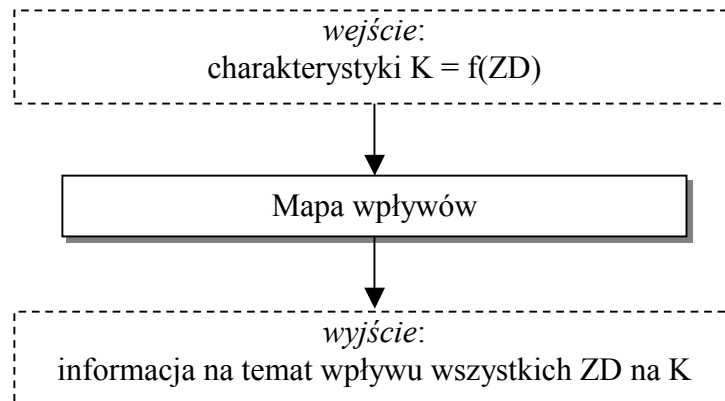
Rys. 6.15. Wejścia i wyjścia kroku „wykresy gradientów”

Wykresy zostały wykonane w Excel’u. Przykładowy wykres przedstawia rysunek 6.16. Na rysunku widzimy 3 zmienne decyzyjne (x_1 , x_2 , x_3) i ich wpływ na wielkość wynikową (Y) w kolejnych, określonych wcześniej, punktach Pareto-optymalnych. W tym prostym przypadku największy wpływ (dodatni, wprost proporcjonalny) w punkcie 1 ma zmienna x_2 i tak już pozostaje do końca, choć w punktach 4 i 5 wpływ (ujemny, odwrotnie proporcjonalny) drugiej zmiennej x_1 zwiększa się. Zmienna x_3 nie wpływa na Y w żadnym optymalnym rozwiązaniu.



Rys. 6.16. Przykładowy wykres unormowanych gradientów

6.6.2. Mapa wpływów

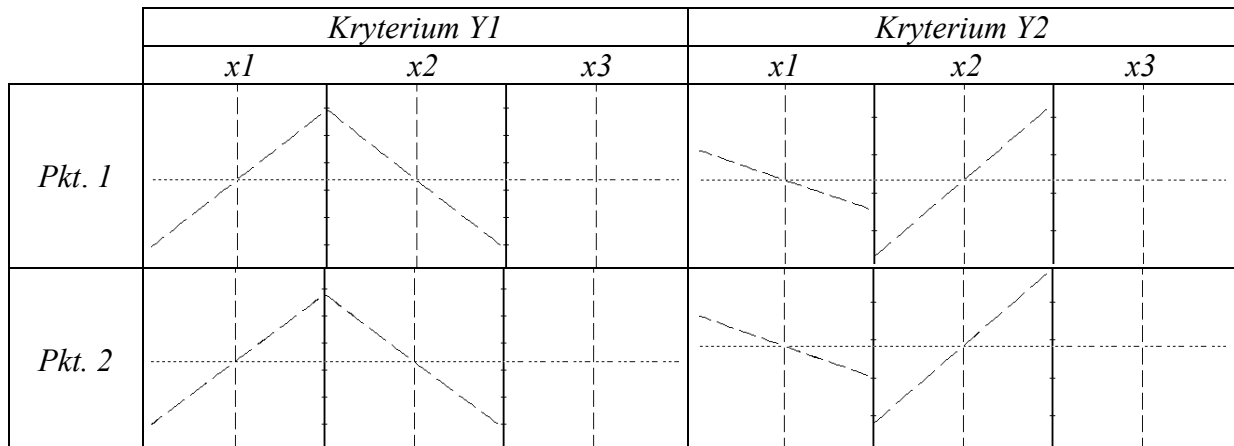


Rys. 6.17. Wejścia i wyjścia kroku „mapa wpływów”

Mapa wpływów to podsumowanie na jednym rysunku wszystkich informacji otrzymanych do tej pory. Rysunek 6.17 przedstawia wejścia i wyjścia kroku „mapa wpływów”. Przykładowa mapa przedstawiona została na rysunku 6.18. Można tu zaobserwować zachowanie się wszystkich badanych kryteriów (kolumny) we wszystkich badanych optymalnych rozwiązaniach (wiersze), co daje pełny obraz sytuacji. Linia pozioma na wykresie oznacza brak reakcji wielkości kryterialnej, linia nachylona oznacza reakcję, a linia krzywa oznacza reakcję wzmożoną, a jednocześnie dużą wrażliwość funkcji kryterialnej na zmiany wartości danej zmiennej decyzyjnej.

W tym prostym przykładzie widać np. w punkcie 1, że wzrost wartości zmiennej decyzyjnej x_1 powoduje wzrost kryterium Y_1 , ale jednocześnie wpływa na zmniejszenie wartości kryterium Y_2 . Ponadto można zobaczyć, co dzieje się w różnych punktach, gdzie

wpływ jest największy itd. W tej przykładowej sytuacji wpływ poszczególnych zmiennych w różnych punktach nie zmienia się.



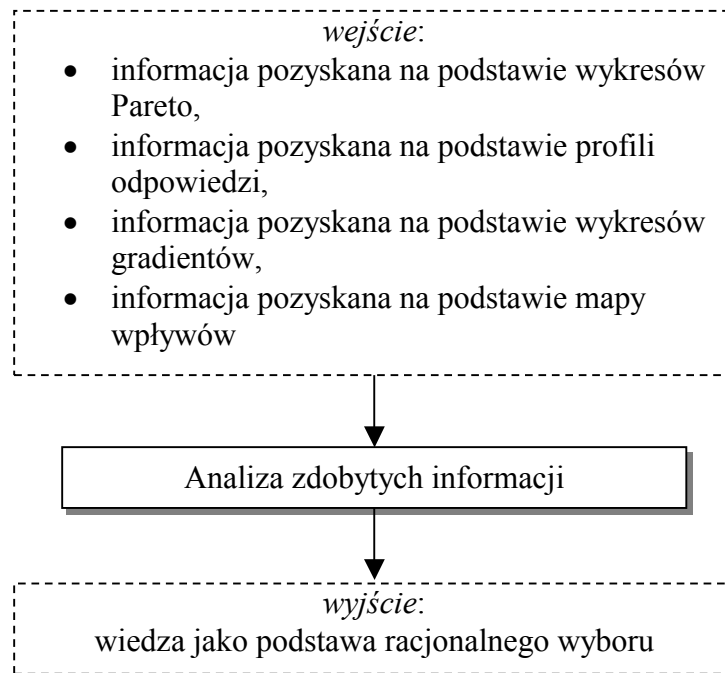
Rys. 6.18. Przykładowa mapa wpływów

6.7. Analiza informacji pozyskanej w efekcie zastosowania metody

Najważniejszym elementem proponowanej metody jest graficzna prezentacja wyników cząstkowych analizy rozwiązań. Zastosowano 4 graficzne reprezentacje, oferujące różne informacje, do których należą:

- wykres Pareto - przedstawia kolejność wpływu poszczególnych członów RPO w otoczeniu jednego punktu Pareto-optimalnego,
- wykres profili odpowiedzi - przedstawia zachowanie się (kierunek i siłę) wszystkich kryteriów wobec wszystkich zmiennych decyzyjnych w otoczeniu jednego punktu Pareto-optimalnego,
- wykres gradientów - przedstawia zachowanie się zmiennych decyzyjnych wobec jednego kryterium we wszystkich punktach Pareto-optimalnych,
- mapa wpływu zmiennych decyzyjnych - przedstawia pełny obraz zachowania się zmiennych decyzyjnych wobec wszystkich kryteriów we wszystkich punktach Pareto-optimalnych.

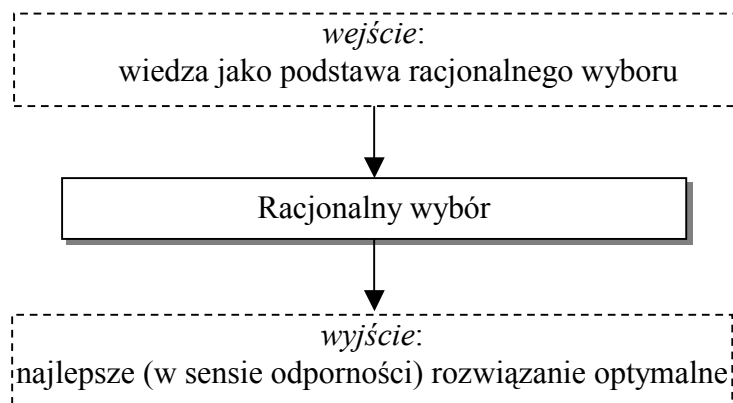
Rysunek 6.19 przedstawia wejścia i wyjścia kroku „analiza zdobytej wiedzy”.



Rys. 6.19. Wejścia i wyjścia kroku „analiza zdobytej wiedzy”

Wszechstronna wiedza uzyskana tą drogą jest podstawą do racjonalnego podjęcia decyzji o zmianach w projekcie konstrukcyjnym.

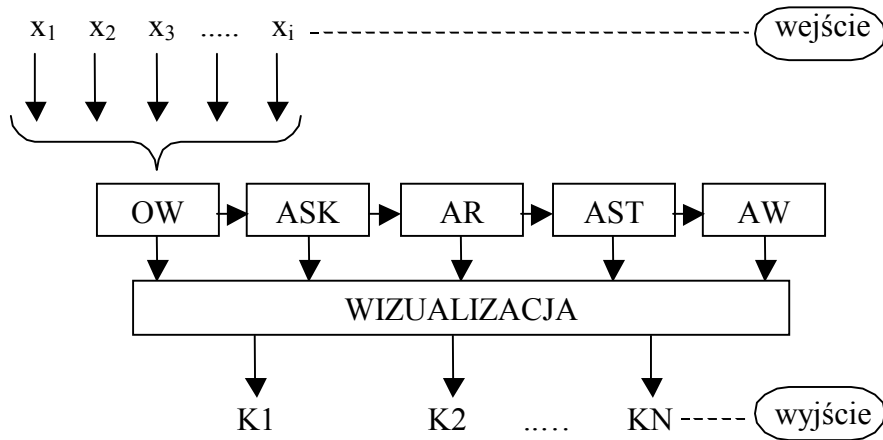
6.7.1. Racjonalny wybór rozwiązania najlepszego



Rys. 6.20. Wejścia i wyjścia kroku „racjonalny wybór”

Racjonalny wybór rozwiązania najlepszego podejmuje się na podstawie wszechstronnej analizy odporności otrzymanych rozwiązań Pareto-optymalnych. Rysunek 6.20 przedstawia wejścia i wyjścia kroku „racjonalny wybór”.

Należy podkreślić, że pozytywną cechą metody jest przedstawienie wyników w postaci graficznej (rys. 6.21), co ułatwia ich przegląd i analizę [Rudzki, 1997].



Rys. 6.21. Wizualizacja jako silna strona metody: OW (optymalizacja wielokryterialna), ASK (analiza skupień), AR (analiza regresji), AST (analiza statystyczna), AW (analiza wrażliwości)

Rozdział 7. ZASTOSOWANIE PROPONOWANEJ METODY

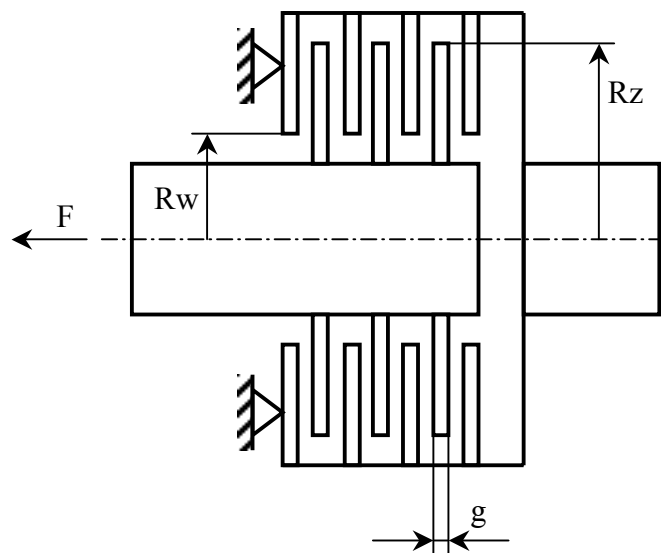
Zaproponowana metoda została przedstawiona na wybranych przykładach projektowania inżynierskiego.

Stopień skomplikowania przykładu pierwszego, w którym badany jest hamulec wielotarczowy, jest na tyle nieduży, że można sprawdzić, czy wyniki są zgodne z intuicją. Służy on do wykazania, że metoda działa poprawnie na zmiennych o charakterze dyskretnym i spełnia cele pracy. Wyniki zostały zaprezentowane w skróconej formie.

Przykład drugi, w którym badany jest reduktor zębaty trzystopniowy, jest bardziej złożony. Zaprezentowane wyniki przedstawione zostały szczegółowo. Przykład służy do wykazania, że metoda działa poprawnie na zmiennych typu ciągłego. Otrzymane wyniki zostały porównane z wynikami otrzymanymi przez innego badacza.

7.1. Analiza optymalizacyjna hamulca wielotarczowego

Pierwszym obiektem optymalizacji jest hamulec wielotarczowy, którego model matematyczny (załącznik ZI, str. 142) został zaczerpnięty z literatury [Osyczka, 2001]. Rysunek 7.1 przedstawia badany obiekt.



Rys. 7.1. Schemat hamulca wielotarczowego [Osyczka, 2001]

Sformułowanie problemu

W badaniu hamulca przyjęto 5 zmiennych decyzyjnych, których typ oraz zakres przedstawia tabela 7.1:

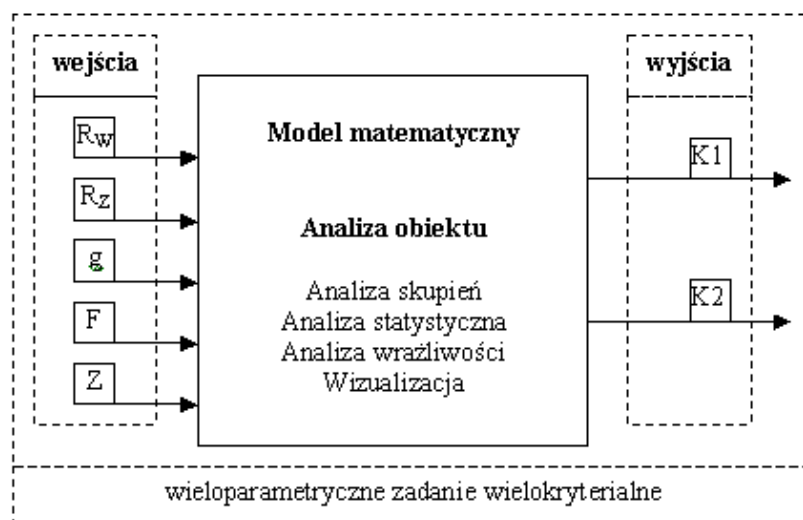
- R_w – promień wewnętrzny tarczy [mm],
- R_z – promień zewnętrzny tarczy [mm],
- g – grubość tarczy [mm],
- F – siła włączająca [N],
- Z – liczba powierzchni ciernych [-].

Tabela 7.1. Typ i zakresy zmiennych decyzyjnych (dla hamulca)

L.p.	Zmienna decyzyjna	Typ zmiennej	Przedział zmienności
1.	R_w	dyskretna	60, 61, ..., 79, 80
2.	R_z	dyskretna	90, 91, ..., 109, 110
3.	g	dyskretna	1; 1,5; 2; 2,5; 3
4.	F	dyskretna	600, 610, ..., 990, 1000
5.	Z	dyskretna	2, 3, ..., 9, 10

Przyjęto 2 następujące wielkości kryterialne:

- $f_1 = m_h$ – masa płytek hamulcowych [kg],
- $f_2 = t_h$ – czas zatrzymania hamulca [s].



Rys. 7.2. Wieloparametryczne zadanie wielokryterialne - hamulec

Rysunek 7.2 przedstawia wejścia i wyjścia dla problemu hamulca wielotarczowego.

Celem analizy hamulca wielotarczowego jest wyznaczenie takiego zestawu zmiennych decyzyjnych, dla których kryteria przyjmą wartości minimalne:

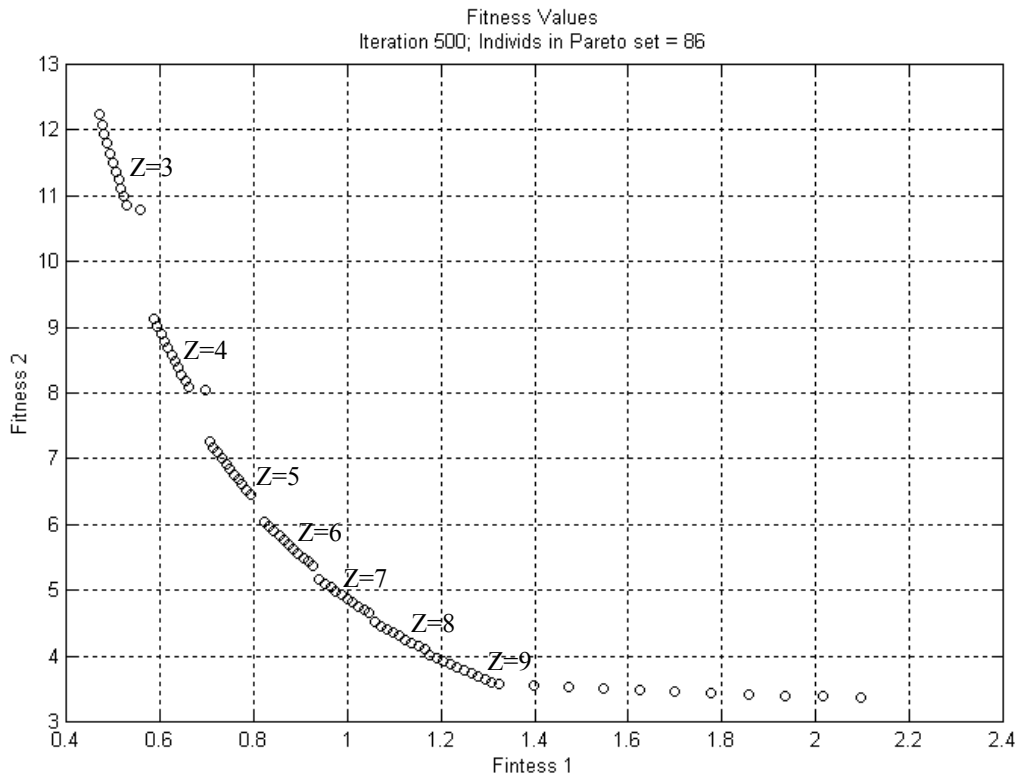
$$f_i(Rw, Rz, g, F, Z) \rightarrow \min, \quad i = 1, 2 \quad (7.1)$$

przy spełnieniu ograniczeń:

$$g_j(Rw, Rz, g, F, Z) \geq 0, \quad j = 1, \dots, 16 \quad (7.2)$$

oraz zbadanie zachowania się funkcji celów f_1 (mh) oraz f_2 (th) w otoczeniu wybranych rozwiązań optymalnych ze zbioru Pareto-optymalnego.

Optymalizacja wielokryterialna

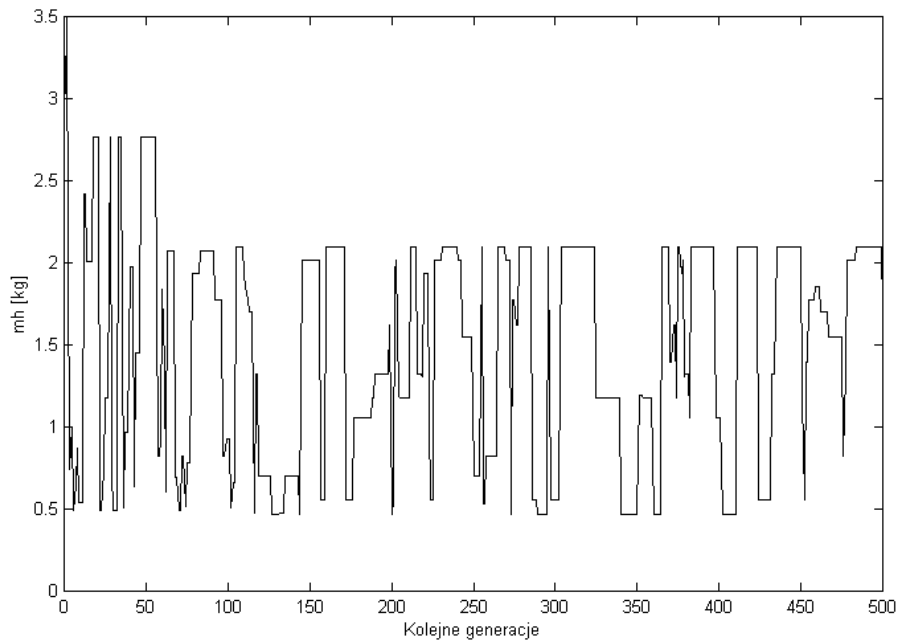


Rys. 7.3. Front Pareto-optymalnych rozwiązań dla hamulca

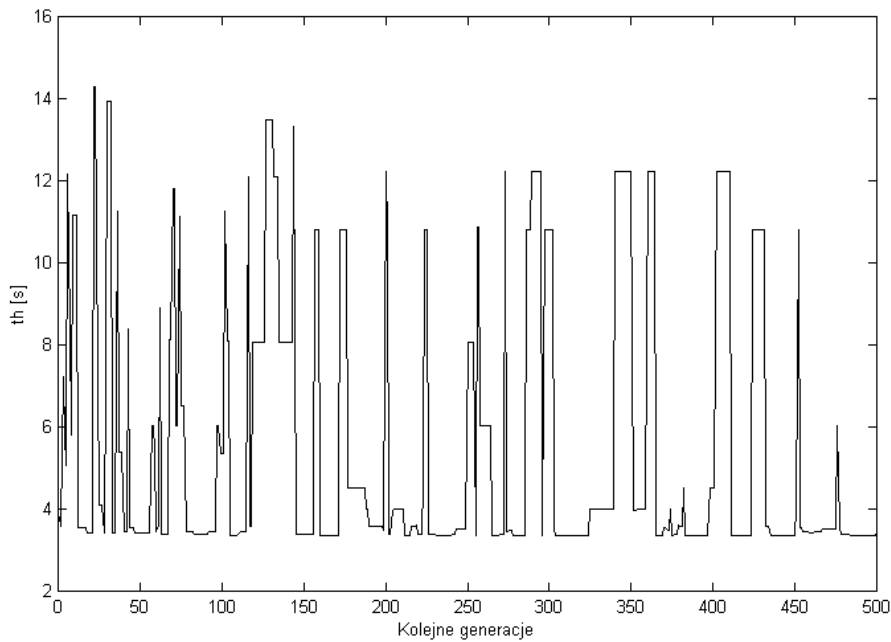
(Fitness 1 = mh [kg], Fitness 2 = th [s])

Dla każdej funkcji kryterialnej poszukiwano minimum. Metodą kolejnych prób przyjęto następujące parametry MOGA: (i) liczba iteracji – 500, (ii) rozmiar populacji – 150, (iii) stopień mutacji – 0,3. Zastosowano krzyżowanie pośrednie (*Intermediate Crossover*) oraz

selekcję opartą na sortowaniu wielkości Pareto- optymalnych (*Pareto-optimal sorting method*).



Rys. 7.4. Wartości kryterium mh w kolejnych pokoleniach



Rys. 7.5. Wartości kryterium th w kolejnych pokoleniach

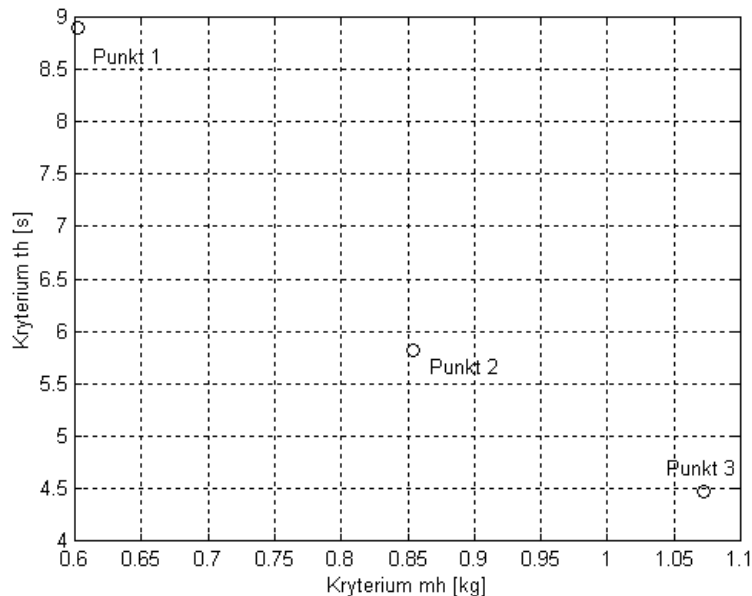
Po zastosowaniu MOGA otrzymano zbiór 86 rozwiązań Pareto- optymalnych i odpowiadające im wartości poszukiwanych kryteriów (tab. ZII.1, str. 152), które przedstawia

rysunek 7.3. Otrzymane wyniki (zbiór Pareto) są zgodne z wynikami literaturowymi [Osyczka, 2001; Deb, 2005]. Ze względu na dyskretyzację zmiennych decyzyjnych zbiór Pareto nie jest zbiorem ciągłym, lecz możemy wyodrębnić podzbiory wartości. Zmienna decyzyjna Z jest tą wielkością, która głównie wpływa na dyskretyzację zbioru Pareto.

Rysunki 7.4 i 7.5 przedstawiają zmiany wartości funkcji kryterialnych (mh , th) w kolejnych pokoleniach. Oddają one dobrze ideę poszukiwanego kompromisu. Gdy kryterium mh maleje, kryterium th rośnie.

Analiza skupień

W konsekwencji eliminacji rozwiązań otrzymano 3 punkty Pareto-optymalne (rys. 7.6 i tab. 7.2).



Rys. 7.6. Przyjęte w wyniku analizy skupień rozwiązania reprezentatywne dla frontu Pareto

Tabela 7.2. Współrzędne środków skupień (punktów Pareto-optimalnych)

Punkt 1						
Rw1	Rz1	g1	F1	Z1	mh1	th1
72	92	1,5	1000	4	0,6028	8,8985
Punkt 2						
Rw2	Rz2	g2	F2	Z2	mh2	th2
73	93	1,5	1000	6	0,8542	5,8247
Punkt 3						
Rw3	Rz3	g3	F3	Z3	mh3	th3
71	91	1,5	1000	8	1,0718	4,4628

Planowanie eksperymentu

Ponieważ w przypadku zmiennej decyzyjnej Z nie występują odchyłki od wartości nominalnej (jest to liczba całkowita, określająca ilość powierzchni ciernych), do dalszej analizy wybrano 4 pozostałe zmienne (R_w , R_z , g , F).

Przyjęto, że wartości zmiennych decyzyjnych we wszystkich trzech punktach reprezentatywnych odchylają się o 1%. Otrzymane macierze wartości wejściowych użyte zostały do obliczenia wartości wielkości kryterialnych (mh i th), zgodnie z algorytmem obliczeniowym utworzonym na podstawie modelu matematycznego (tab. ZII.2 i ZII.3, str. 153, tab. ZII.4, str. 154).

Tworzenie metamodeli $K = f(ZD)$ i ich ocena statystyczna

Otrzymane metamodele (załącznik II, str. 155) zostały poddane ocenie statystycznej, która pokazano w tabelach 7.3, 7.4 oraz 7.5.

Tabela 7.3. Ocena statystyczna otrzymanych RPO dla punktu 1

	$mh1 = f(ZD)$	$th1 = f(ZD)$
R^2	1	1
R^2 poprawione	1	1
RMSE	1,557e-7	0,000009

Tabela 7.4. Ocena statystyczna otrzymanych RPO dla punktu 2

	$mh2 = f(ZD)$	$th2 = f(ZD)$
R^2	1	1
R^2 poprawione	1	1
RMSE	4,17e-7	0,000006

Tabela 7.5. Ocena statystyczna otrzymanych RPO dla punktu 3

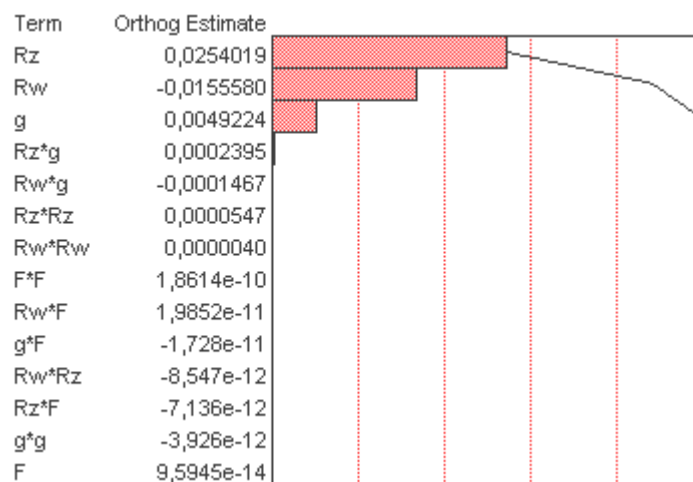
	$mh3 = f(ZD)$	$th3 = f(ZD)$
R^2	1	1
R^2 poprawione	1	1
RMSE	3,768e-7	0,000004

Wykresy Pareto i profile odpowiedzi

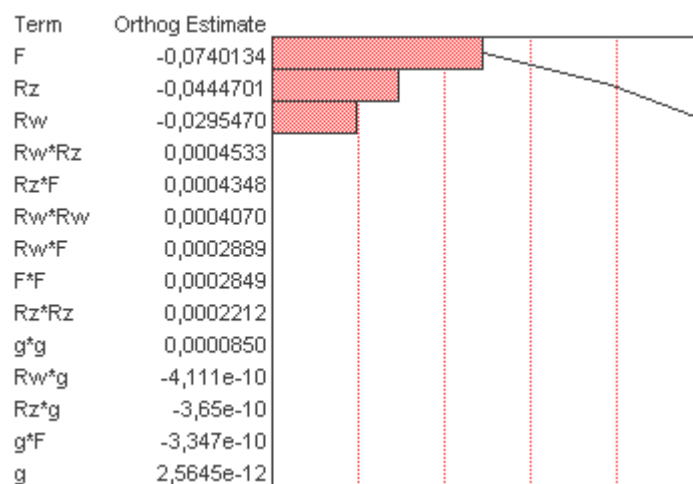
Komentarz do wykresów Pareto, profili odpowiedzi oraz oceny statystycznej znajduje się w części ‘Podsumowanie oraz wybór rozwiązania najlepszego’ (str. 88).

Punkt 1

Rysunek 7.7 przedstawia wykres Pareto dla kryterium $mh1$ w punkcie 1, a rysunek 7.8 przedstawia wykres Pareto dla kryterium $th1$ w punkcie 1.

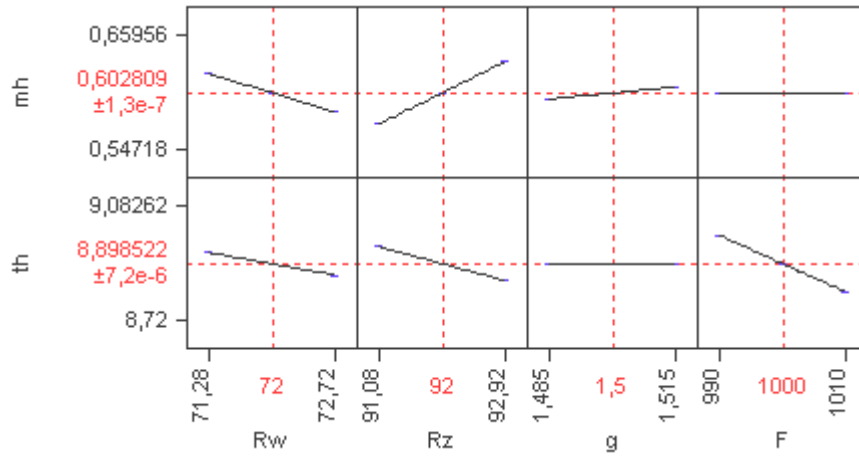


Rys. 7.7. Wykres Pareto dla kryterium $mh1$ w punkcie 1



Rys.7.8. Wykres Pareto dla kryterium $th1$ w punkcie 1

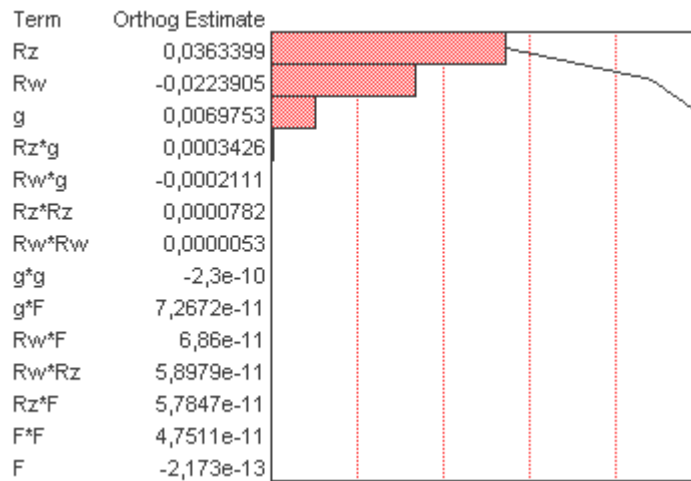
Rysunek 7.9 przedstawia wykres profili odpowiedzi dla punktu 2.



Rys. 7.9. Profile odpowiedzi dla punktu 1

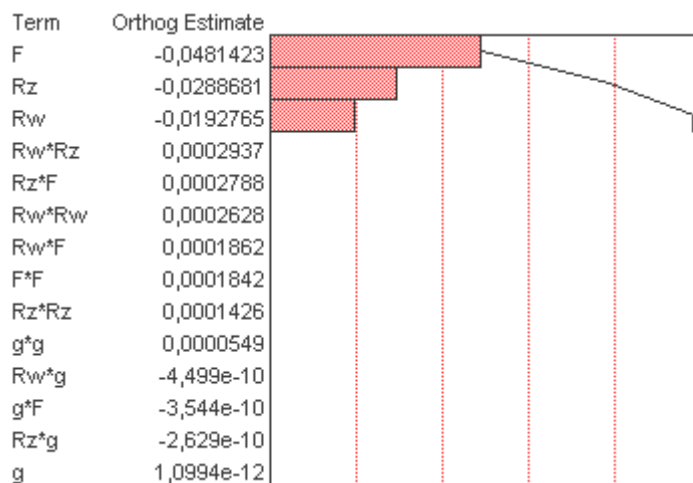
Punkt 2

Wykres Pareto dla kryterium *mh2* w punkcie 2 przedstawia rysunek 7.10.



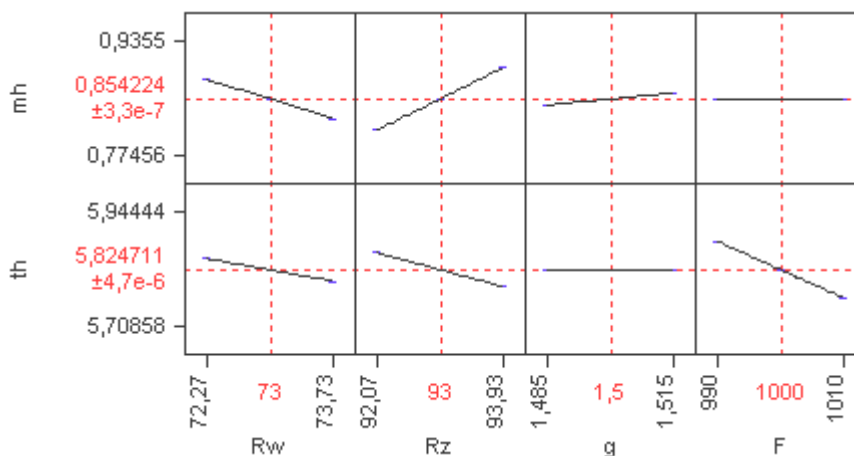
Rys. 7.10. Wykres Pareto dla kryterium *mh2* w punkcie 2

Wykres Pareto dla kryterium *th2* w punkcie 2 przedstawia rysunek 7.11.



Rys. 7.11. Wykres Pareto dla kryterium *th2* w punkcie 2

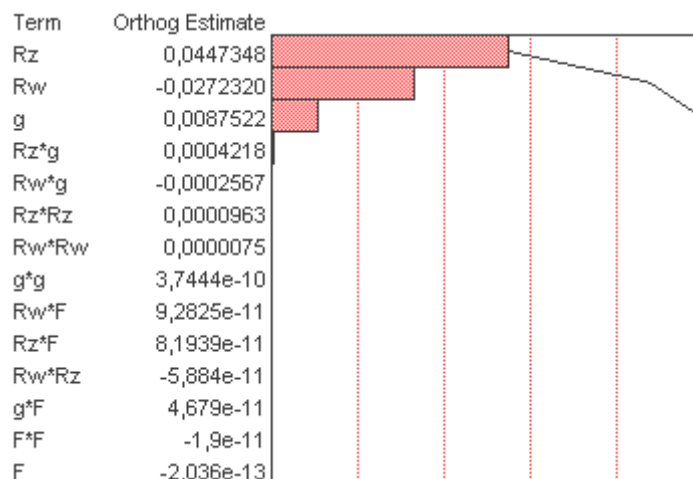
Rysunek 7.12 przedstawia wykres profili odpowiedzi dla punktu 2.



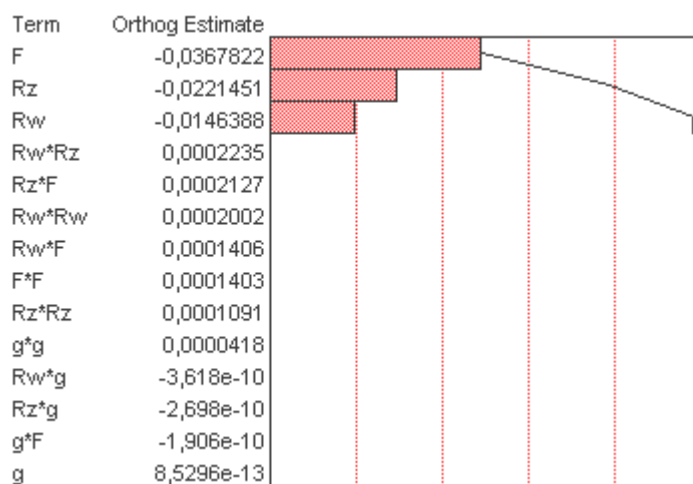
Rys. 7.12. Profile odpowiedzi dla punktu 2

Punkt 3

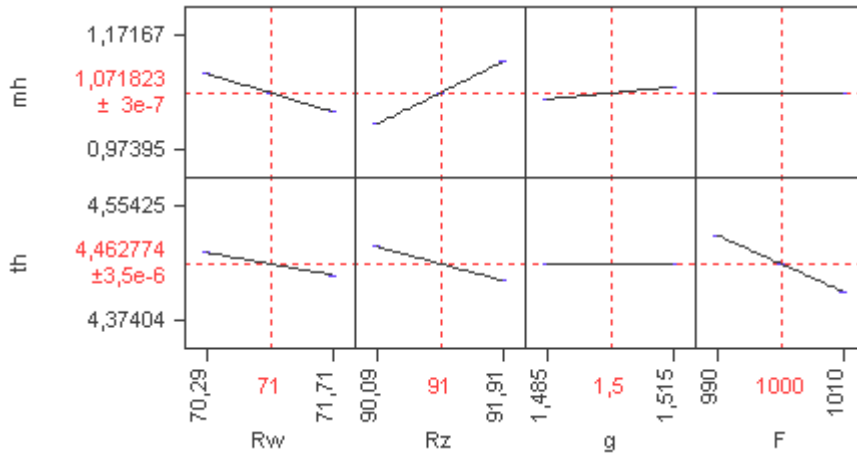
Wykres Pareto dla kryterium *mh3* w punkcie 3 przedstawia rysunek 7.13.

Rys. 7.13. Wykres Pareto dla kryterium *mh3* w punkcie 3

Wykres Pareto dla kryterium *th3* w punkcie 3 przedstawia rysunek 7.14.

Rys. 7.14. Wykres Pareto dla kryterium *th3* w punkcie 3

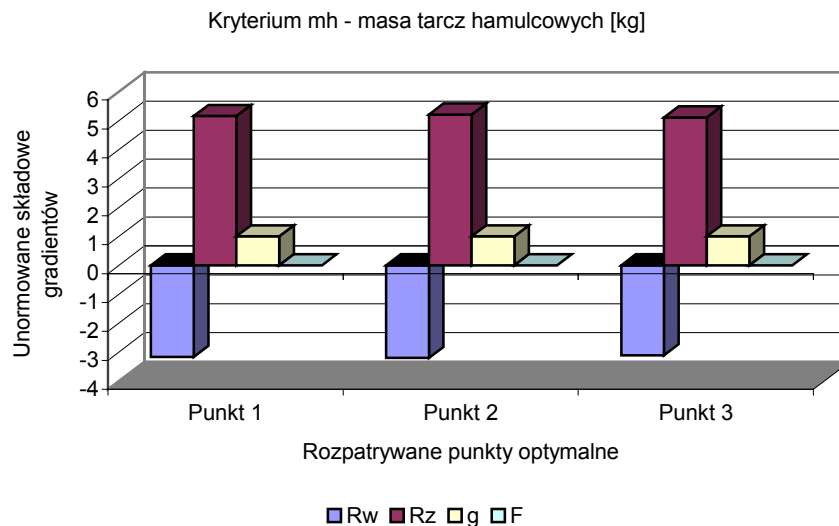
Rysunek 7.15 przedstawia wykres profili odpowiedzi dla punktu 3.



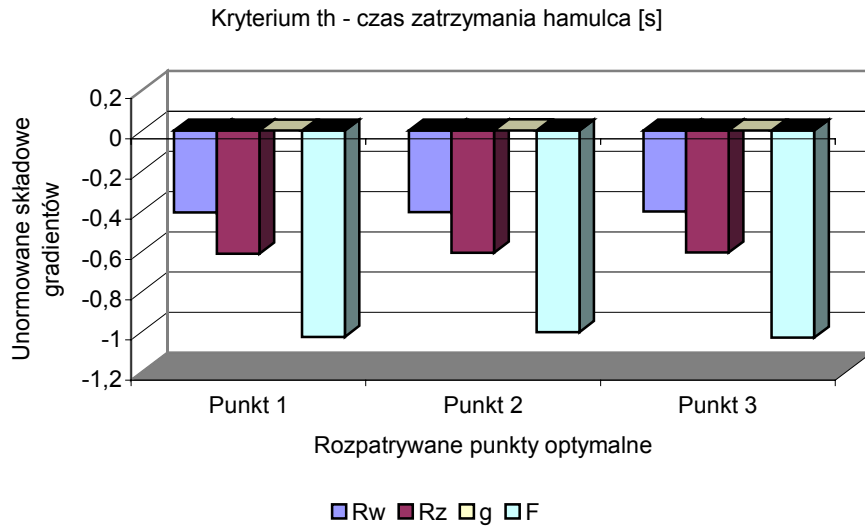
Rys. 7.15. Profile odpowiedzi dla punktu 3

Analiza wrażliwości

Do badania wrażliwości kryteriów mh i th na zmiany wartości poszczególnych zmiennych decyzyjnych ZD w badanych punktach obliczono gradienty otrzymanych funkcji celu (RPO), ustalono ich wartości liczbowe i unormowano je dla celów porównawczych. Rysunki 7.16 oraz 7.17 przedstawiają unormowane wykresy gradientów dla funkcji celów mh i th .



Rys. 7.16. Wykres unormowanych składowych gradientów dla kryterium mh



Rys. 7.17. Wykres unormowanych składowych gradientów dla kryterium th

Mapa wpływów

Rysunek 7.18 przedstawia mapę jakościową zależności między funkcjami celu (mh , th), a zmiennymi decyzyjnymi (Rw , Rz , g , F) dla 3 kolejno rozpatrywanych punktów Pareto-optimalnych.

	Kryterium mh				Kryterium th			
	Rw	Rz	g	F	Rw	Rz	g	F
Punkt 1	↓	↑	↑	↑	↓	↓	↓	↓
Punkt 2	↓	↑	↑	↑	↓	↓	↓	↓
Punkt 3	↓	↑	↑	↑	↓	↓	↓	↓

Rys. 7.18. Obraz zależności między kryteriami mh i th , a zmiennymi decyzyjnymi

Podsumowanie oraz wybór rozwiązania najlepszego

Otrzymane wartości statystyk (tabele 7.3 do 7.5) potwierdzają, że równania powierzchni odpowiedzi dostarczają wiarygodnych informacji, które mogą być podstawą dalszych analiz. Z rysunku 7.18 widać, że zachowanie funkcji kryterialnych mh (masa tarcz hamulcowych [kg]) i th (czas zatrzymania hamulca [s]) jest bardzo podobne we wszystkich trzech rozpatrywanych punktach Pareto-optimalnych.

Analiza, jak zmienne decyzyjne wpływają na masę tarcz hamulcowych mh :

- największy wpływ na masę ma zmienna Rz (średnica zewnętrzna tarczy). Jej wzrost powoduje zwiększenie masy tarcz mh (relacja wprost proporcjonalna). Relacja odwrotna występuje między zmienną Rw (średnica wewnętrzna tarczy hamulcowej) i kryterium mh . Wzrost średnicy Rw wpływa na zmniejszenie masy mh . Zmienna decyzyjna g (grubość tarczy) wpływa wprost proporcjonalnie na kryterium mh . Jej wzrost powoduje nieznaczny przyrost masy tarcz mh . Wielkość F (siła włączająca) nie wywiera żadnego wpływu na kryterium masy płytek mh .

Analiza, jak zmienne decyzyjne wpływają na czas zatrzymania hamulca th :

- największy wpływ ma zmienna decyzyjna F (siła włączająca). Jej wzrost powoduje skrócenie czasu zatrzymania th , co jest zgodne z intuicją. Wielkości geometryczne, takie jak zmienne decyzyjne Rz (średnica zewnętrzna tarcz) oraz Rw (średnica wewnętrzna tarcz), również wykazują odwrotnie proporcjonalny wpływ na czas zatrzymania hamulca th . Ich wzrost powoduje skrócenia czasu th . Zmienna decyzyjna g (grubość tarczy) nie wpływa na czas zatrzymania th .

Omówienie skutków zmian zmiennych decyzyjnych:

- wzrost średnicy wewnętrznej tarczy Rw wpływa na zmniejszenie masy tarcz hamulcowych mh oraz skrócenie czasu zatrzymania hamulca th . Wzrost średnicy zewnętrznej tarczy wpływa na zwiększenie masy tarcz mh , ale skraca czas zatrzymania th . Wzrost grubości tarczy g wpływa nieznacznie na zwiększenie masy mh , ale nie wywiera żadnego wpływu na czas zatrzymania th . Wzrost siły włączającej F nie ma wpływu na masę tarcz hamulcowych mh , ale zdecydowanie skraca czas zatrzymania hamulca th .

Z powyższego wynika, że decydujący wpływ na oba kryteria mają zmienne decyzyjne Rz oraz Rw , a zatem tym zmiennym decyzyjnym należałoby przydzielić węższe tolerancje.

Ilościowy obraz zachowania się wielkości kryterialnych przedstawiają wykresy profili odpowiedzi (rys. 7.9, 7.12 oraz 7.15). Wykresy Pareto (rys. 7.7, 7.8, 7.10, 7.11, 7.13, 7.14) przedstawiają natomiast ilościowe relacje między zmiennymi decyzyjnymi. Można z nich odczytać przewagę wpływu danej wielkości w stosunku do innej. Np. na rysunku 7.14 widać, że wpływ zmiennej F jest ponad 1,5-krotnie większy, niż wpływ zmiennej Rz oraz 2,5-krotnie większy od wpływu zmiennej Rw .

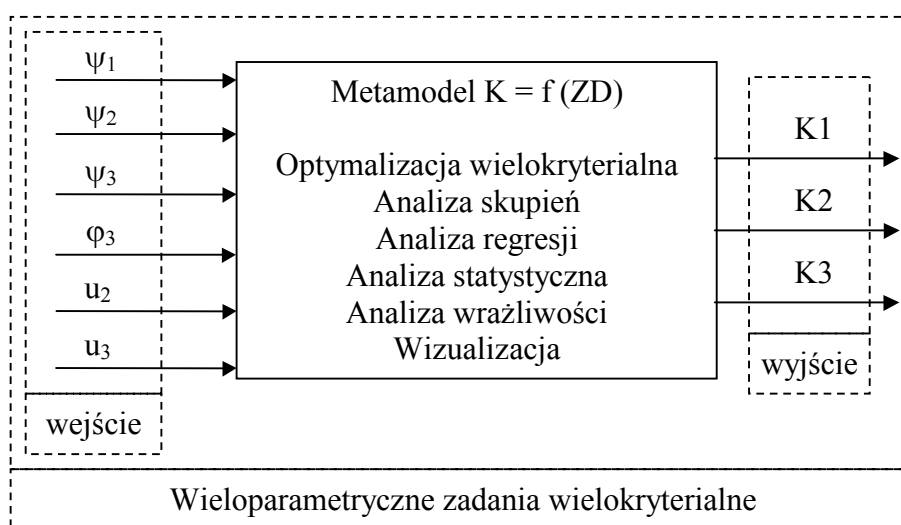
Rysunki 7.16 i 7.17 (wykresy gradientów) przedstawiają zbliżone zachowanie się wielkości kryterialnych we wszystkich rozpatrywanych punktach Pareto-optimalnych. Ponieważ reakcje wielkości kryterialnych (mh oraz th) na zmiany wartości ZD są zbliżone, o wyborze musi zdecydować inny walor, np. jeśli wymagany jest krótszy czas zatrzymania należy wybrać rozwiązanie 3, a jeśli wymagana jest mniejsza masa należy wybrać rozwiązanie 1.

W niniejszej pracy za podstawę wyboru przyjęto odporność uzyskanych rozwiązań optymalnych. Ponieważ otrzymane rozwiązania są w zasadzie równoważne w kontekście odporności osiąarów układu złożonego (kryteriów oceny) na wahania wartości zmiennych decyzyjnych (wszystkie trzy optymalne punkty reprezentatywne charakteryzują się bardzo podobną wrażliwością na zmiany wartości ZD), to rozwiązanie najlepsze nie zostało podane.

7.2. Analiza optymalizacyjna przekładni zębatej trzystopniowej

7.2.1. Sformułowanie problemu

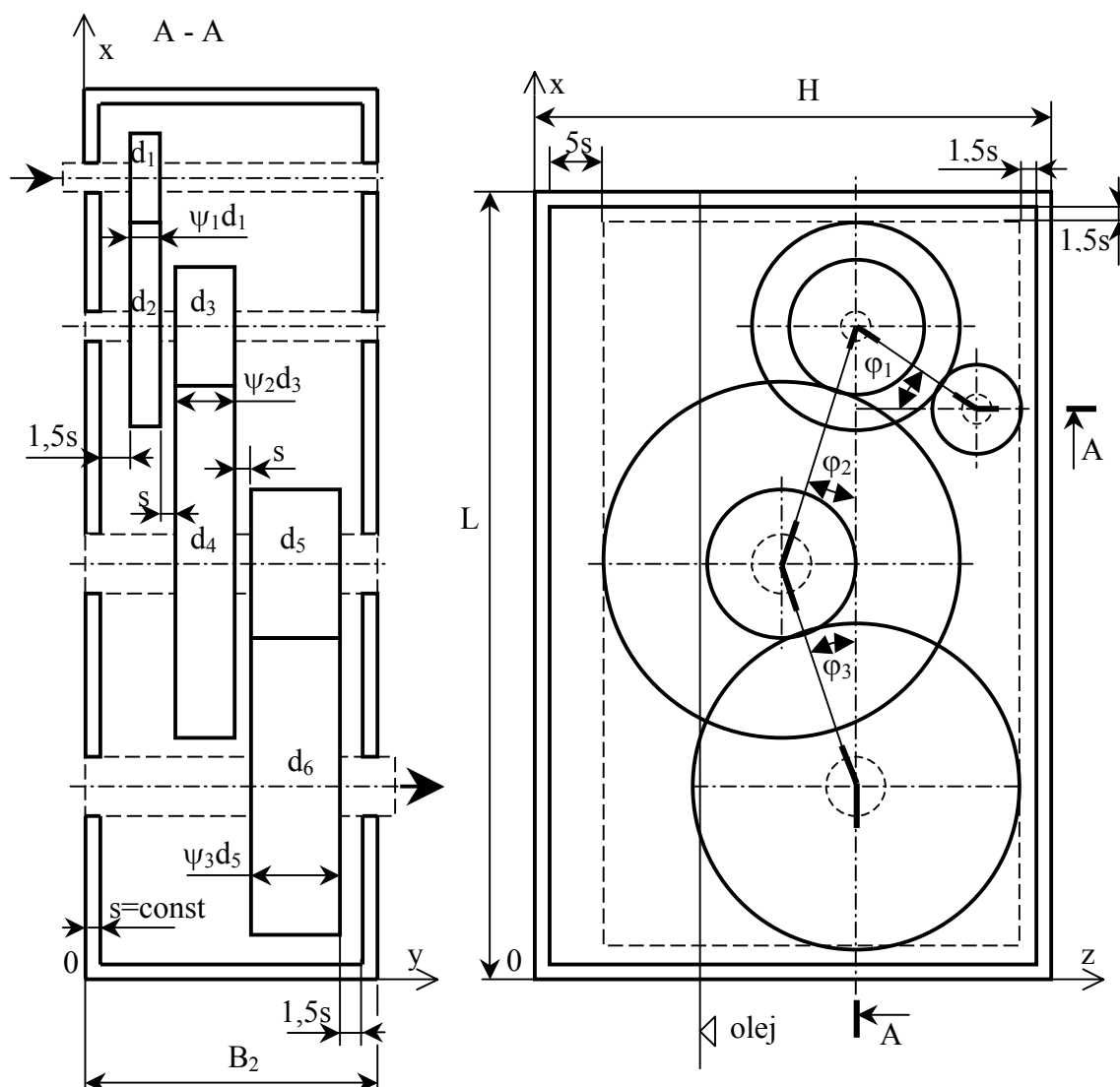
Do badania wybrano reduktor zębata walcowy trzystopniowy o zwiniętym układzie linii łączącej osie kół zębatach. Model matematyczny obiektu (załącznik ZI, str. 146) zaczerpnięty został z pozycji [Torzyński, 2000]. Rozwiązywany problem badawczy to problem typu wiele wejść – wiele wyjść (rys. 7.19).



Rys. 7.19. Przekładnia zębata w formie czarnej skrzynki

Rysunek 7.20 przedstawia model badanego reduktora. W pracy przyjęto 6 następujących zmiennych decyzyjnych, których typ i zakres zmienności zawiera tabela 7.6:

- ψ_1 – współczynnik szerokości wieńca zębatego stopnia pierwszego przekładni,
- ψ_2 – współczynnik szerokości wieńca zębatego stopnia drugiego przekładni,
- ψ_3 – współczynnik szerokości wieńca zębatego stopnia trzeciego przekładni,
- φ_3 – kąt odchylenia linii łączącej osie kół drugiego i trzeciego stopnia przekładni,
- u_2 – przełożenie częściowe drugiego stopnia przekładni,
- u_3 – przełożenie częściowe trzeciego stopnia przekładni.



Rys. 7.20. Model zębatego reduktora trzystopniowego [Torzyński, 2000]

Tabela. 7.6. Typ i zakresy zmiennych decyzyjnych

L.p.	Zmienna decyzyjna	Typ zmiennej	Przedział zmienności
1.	ψ_1	ciągła	0,3 – 1,5
2.	ψ_2	ciągła	0,3 – 1,5
3.	ψ_3	ciągła	0,3 – 1,5
4.	φ_3	ciągła	0,0002 – 0,5236 rad
5.	u_2	dyskretna	1,06 – 12,5 (wg R40) ¹
6.	u_3	dyskretna	1,06 – 12,5 (wg R40)

¹ R40 – ciąg liczb normalnych o wskaźniku n=40 wg PN-60/N-02100

W pracy przyjęto 3 następujące kryteria cząstkowe:

- K1 – stosunek masy przekładni do wyjściowego momentu obrotowego (względna materiałochłonność reduktora) [g/Nm],
- K2 – objętość całkowita reduktora zębatego [m³],
- K3 – stosunek względnych kosztów wytwarzania kół zębatach przekładni (odniesionych do znanych kosztów koła wzorcowego) [-]. Dla rozpatrywanego reduktora wyraża stosunek kosztów produkcji typowości projektowej do typowości podstawowej o znanych kosztach.

Celem analizy przekładni zębatej jest znalezienie takiego zestawu zmiennych decyzyjnych, dla których wielkości kryterialne przyjmują wartości minimalne:

$$K_i(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \varphi_3, u_2, u_3) \rightarrow \min, \quad i = 1, 2, 3 \quad (7.3)$$

przy spełnieniu ograniczeń:

$$g_j(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \varphi_3, u_2, u_3) \geq 0, \quad j = 1, \dots, 11 \quad (7.4)$$

oraz zbadanie zachowania się funkcji celów *K1*, *K2* oraz *K3* w otoczeniu wybranych rozwiązań optymalnych ze zbioru Pareto-optymalnego.

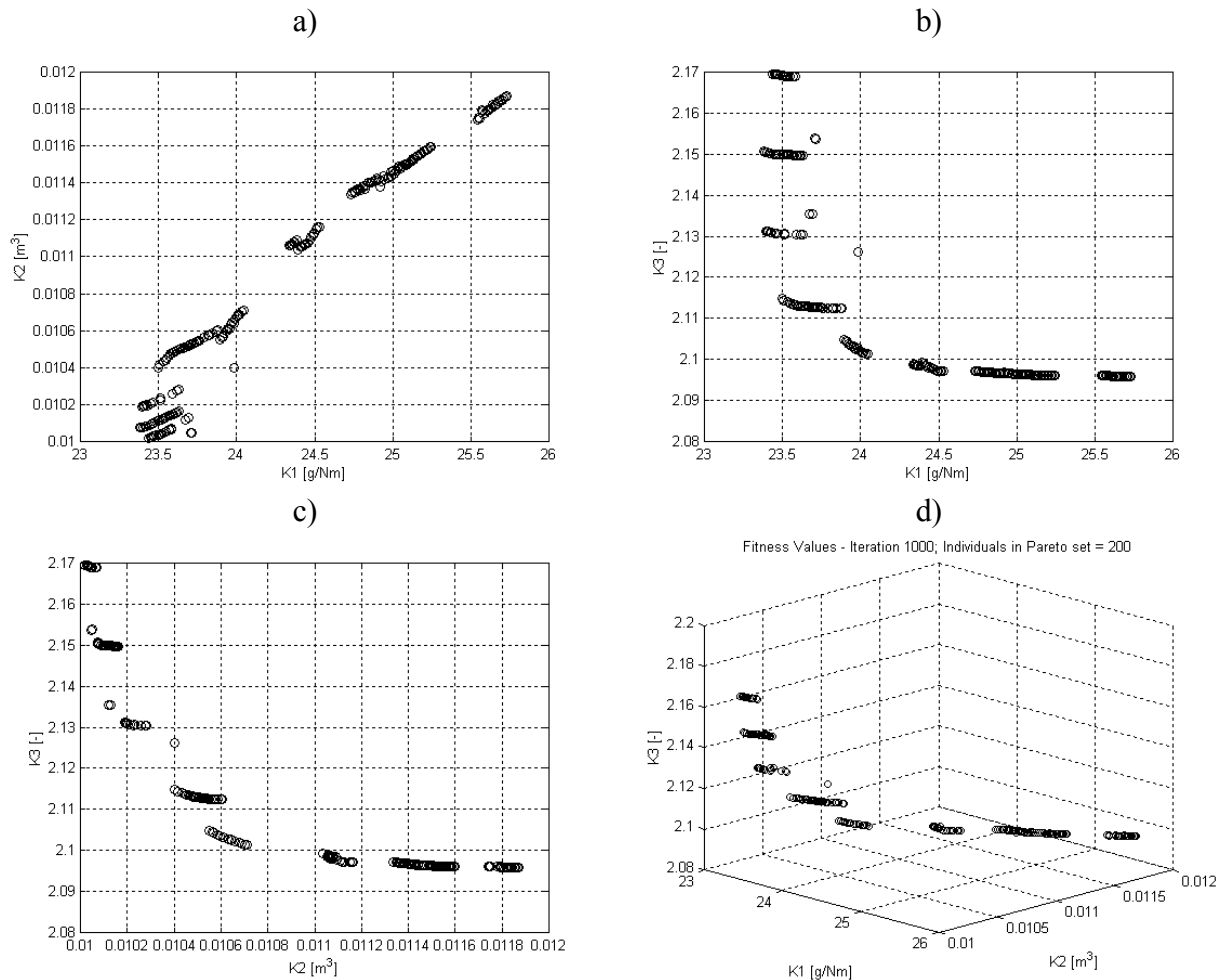
Dane charakterystyczne do obliczeń: (i) moment obrotowy na wyjściu $T_w=1000$ [Nm], (ii) przełożenie całkowite $i_c=45$, (iii) prędkość obrotowa na wejściu $n_1=1500$ [obr/min].

7.2.2. Optymalizacja wielokryterialna

Do poszukiwania Pareto-optymalnej powierzchni dla 3 odpowiedzi (*K1*, *K2*, *K3*) użyto algorytmu genetycznego do optymalizacji wielokryterialnej (*MOGA – Multiobjective Genetic Algorithm*). Dla każdej funkcji kryterialnej poszukiwana jest wartość minimalna. Metodą kolejnych prób ustalone zostały wartości parametrów algorytmu genetycznego: (i) liczba iteracji – 1000, (ii) rozmiar populacji – 200 chromosomów, (iii) stopień mutacji – 0,3. W algorytmie genetycznym użyto krzyżowanie pośrednie (*Intermediate Crossover*) oraz selekcję opartą na sortowaniu rozwiązań Pareto-optymalnych (*Pareto-optimal sorting method*). Liczba rozwiązań została arbitralnie przyjęta jako 200.

Po zastosowaniu *MOGA* otrzymano zbiór rozwiązań Pareto-optymalnych dla zmiennych decyzyjnych i odpowiadające im wartości kryteriów (tab. ZII.5, str. 156).

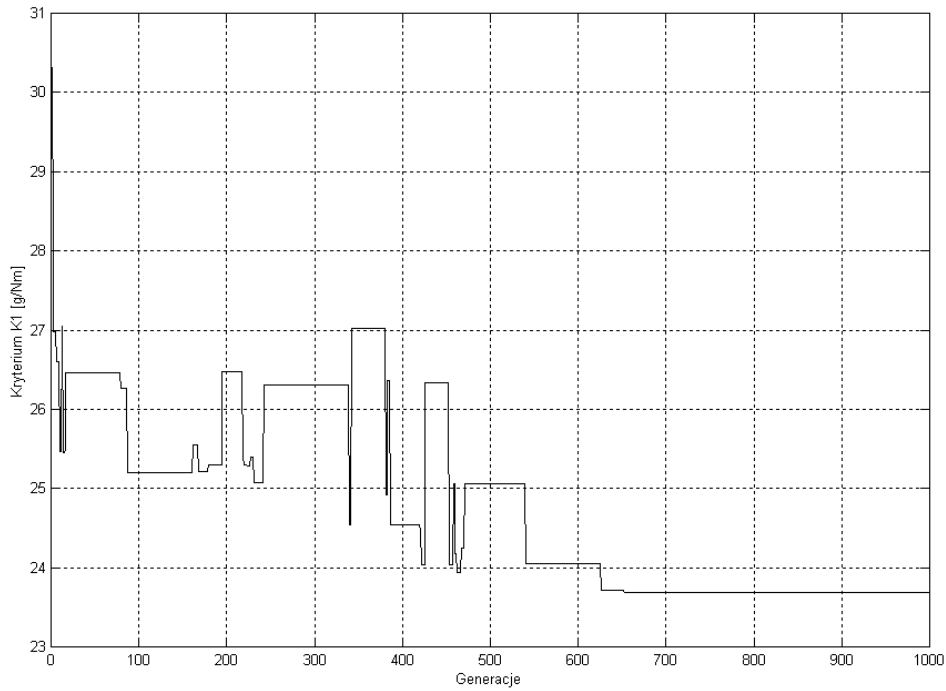
Otrzymany zbiór wartości kryteriów dla Pareto-optimalnych zmiennych decyzyjnych przedstawiono graficznie (rys. 7.21). Ponieważ zmienne decyzyjne u_2 oraz u_3 są typu dyskretnego, otrzymana powierzchnia Pareto nie jest ciągła.



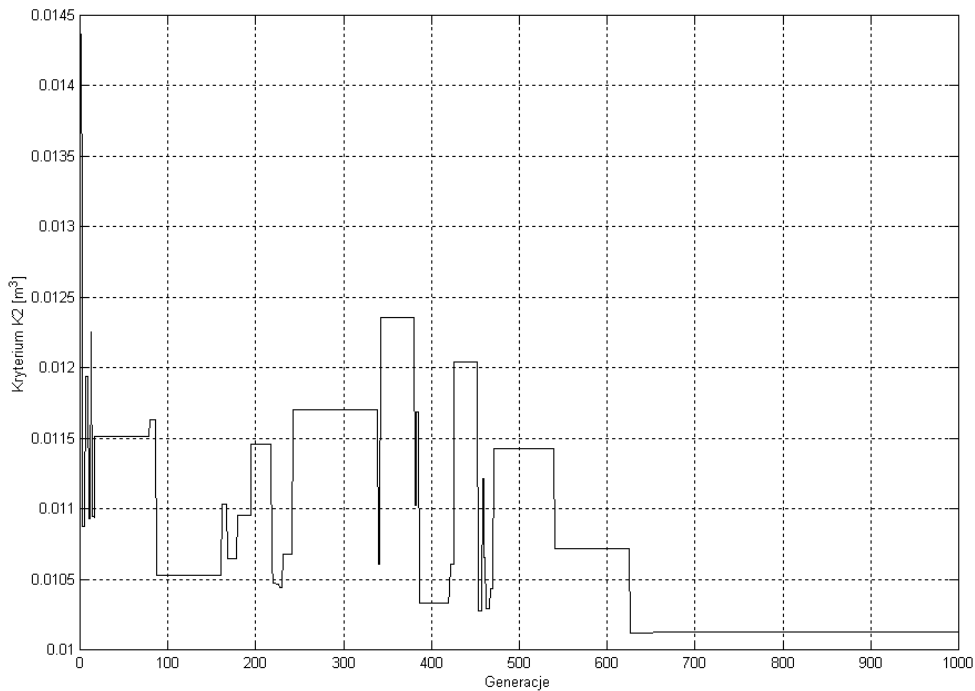
Rys. 7.21. Zbiór rozwiązań Pareto-optimalnych dla przekładni zębatej: a) obraz zbioru Pareto na płaszczyźnie $K1K2$, b) obraz zbioru Pareto na płaszczyźnie $K1K3$, c) obraz zbioru Pareto na płaszczyźnie $K2K3$, d) widok zbioru Pareto w układzie $K1K2K3$

Następne wykresy przedstawiają zmiany wartości funkcji celów $K1$ (rys. 7.22), $K2$ (rys. 7.23) oraz $K3$ (rys. 7.24) w kolejnych pokoleniach (generacjach). Wykresy te dobrze pokazują ideę poszukiwanego kompromisu. W pobliżu 660-ej generacji nastąpiła zdecydowana zmiana wartości kryterium $K3$ oraz nieznaczne zmiany wartości kryteriów $K1$ i $K2$, po czym następuje stabilizacja procesu optymalizacji. Kryteria $K1$ (względna

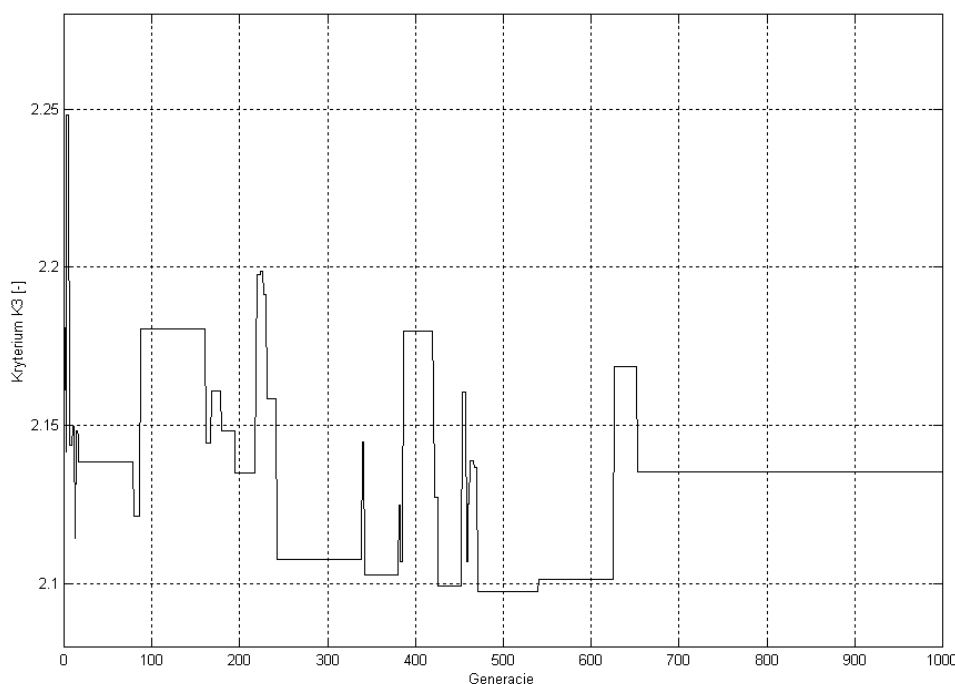
materiałochłonność reduktora) i K3 (względny koszt wykonania kół zębatych) maleją kosztem nieznacznego wzrostu kryterium K2 (objętości reduktora).



Rys. 7.22. Wartości kryterium K1 w kolejnych pokoleniach



Rys. 7.23. Wartości kryterium K2 w kolejnych pokoleniach



Rys. 7.24. Wartości kryterium K3 w kolejnych pokoleniach

7.2.3. Analiza skupień

Do poszukiwania obiektów podobnych zastosowano metodę kombinatoryczną aglomeracyjną, polegającą na łączeniu najbardziej podobnych elementów w grupy. Liczba skupień ustalona została jako 3. Kolumna *Index* oznacza skupienie, do którego należy dany punkt powierzchni Pareto-optymalnej. Wyniki przedstawiono w tabeli ZII.6 na stronie 160.

Po przegrupowaniu i rozdzieleniu wyników otrzymano 3 skupienia, które przedstawiono w tabelach ZII.7, ZII.8 oraz ZII.9 na stronach 162-165.

Kolejny krok to wyznaczenie środków otrzymanych skupień sr_i , dla $i=1, 2, 3$. Zbiór 1 zawiera parzystą liczbę elementów, zatem do dalszych obliczeń przyjęto jeden z dwóch punktów leżących najbliżej środka skupienia. Ustalając środki otrzymanych skupień dokonujemy jednocześnie zastąpienia 3 skupień przez 3 punkty Pareto-optymalne (tab. 7.7, 7.8 i 7.9). Zostaną one poddane dalszej analizie.

Tabela 7.7. Współrzędne środka skupienia 1 – Punkt 1

	K1	K2	K3
sr₁	25,7315	0,0119	2,0958

Tabela 7.8. Współrzędne środka skupienia 2 – Punkt 2

	K1	K2	K3
sr₂	24,7303	0,0113	2,0972

Tabela 7.9. Współrzędne środka skupienia 3 – Punkt 3

	K1	K2	K3
sr₃	23,3830	0,0101	2,1506

Wartościom sr_i ($i=1, 2, 3$) odpowiadają wartości Pareto-optimalnych zmiennych decyzyjnych (tabele 7.10, 7.11 i 7.12).

Tabela 7.10. Wartości Pareto-optimalnych zmiennych decyzyjnych dla K1, K2 i K3 (punkt 1)

Punkt 1								
ψ_1	ψ_2	ψ_3	ϕ_3	u_2	u_3	K1	K2	K3
1,3033	1,0919	0,7863	0,5213	5,00	5,30	25,7315	0,0119	2,0958

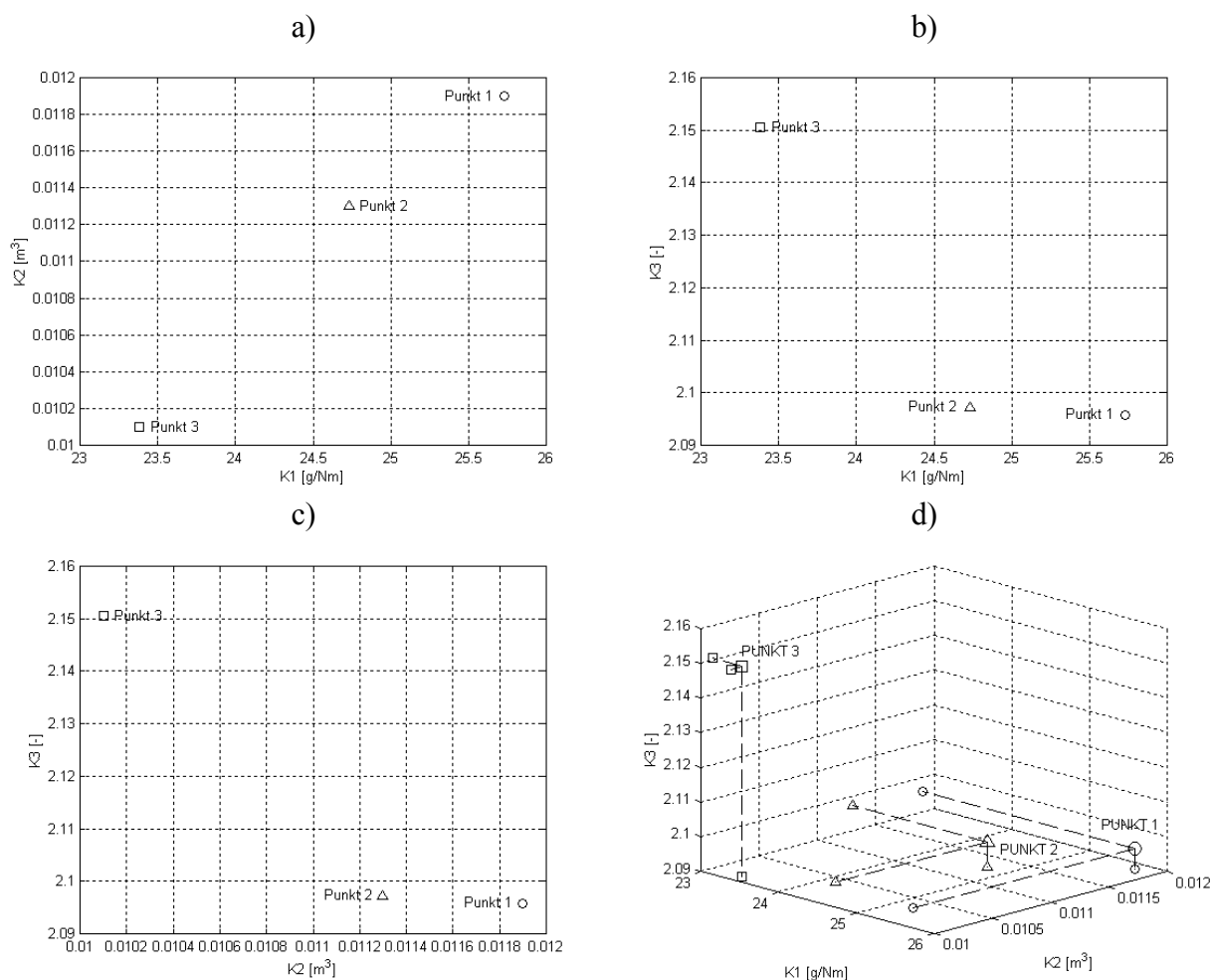
Tabela 7.11. Wartości Pareto-optimalnych zmiennych decyzyjnych dla K1, K2 i K3 (punkt 2)

Punkt 2								
ψ_1	ψ_2	ψ_3	ϕ_3	u_2	u_3	K1	K2	K3
1,2318	1,1989	0,7873	0,5222	4,75	5,30	24,7303	0,0113	2,0972

Tabela 7.12. Wartości Pareto-optimalnych zmiennych decyzyjnych dla K1, K2 i K3 (punkt 3)

Punkt 3								
ψ_1	ψ_2	ψ_3	ϕ_3	u_2	u_3	K1	K2	K3
0,4949	1,2253	0,8358	0,5160	4,00	5,00	23,3830	0,0101	2,1506

Otrzymane po analizie skupień 3 punkty z Pareto-optimalnej powierzchni przedstawiono na wykresie 7.25.



Rys. 7.25. Pareto-optymalne punkty otrzymane po analizie skupień: a) obrazy punktów na płaszczyźnie K1K2, b) obrazy punktów na płaszczyźnie K1K3, c) obrazy punktów na płaszczyźnie K2K3, d) widok punktów w układzie K1K2K3

7.2.4. Planowanie eksperymentu

Do dalszej analizy wybrano 4 zmienne decyzyjne (ψ_1 , ψ_2 , ψ_3 , ϕ_3), ponieważ dwie pozostałe wielkości (przełożenia częściowe u_2 oraz u_3) przyjmują dyskretne wartości (wg PN-76/M-88513).

Dla 4 zmiennych wejściowych oraz trzech odpowiedzi układu (K1, K2 i K3) zaplanowano plan centralny kompozycyjny, który został stworzony specjalnie na potrzeby ustalania parametrów wielomianu drugiego stopnia. Otrzymano 27 doświadczeń. Na zakresy zmienności wpłynęły ograniczenia obliczeniowe (np. pierwiastek kwadratowy z liczby ujemnej).

Dla punktu pierwszego o współrzędnych $[\psi_1, \psi_2, \psi_3, \phi_3] = [1,3033; 1,0919; 0,7863; 0,5213]$ przyjęto 1% zmianę wartości składowych ψ_1, ψ_2 w kierunkach „-” i „+”, dla zmiennej ψ_3 przyjęto 0,35% zmianę, dla zmiennej ϕ_3 przyjęto 0,44% zmianę wartości. Wyniki unormowanych i odpowiadających im rzeczywistych wartości przedstawia tabela ZII.10 (str. 165).

Dla punktu drugiego o współrzędnych $[\psi_1, \psi_2, \psi_3, \phi_3] = [1,2318; 1,1989; 0,7873; 0,5222]$ przyjęto 1% zmianę wartości zmiennych ψ_1 i ψ_2 w kierunku minus i plus, 0,35% zmianę dla zmiennej ψ_3 , 0,2% zmianę dla zmiennej ϕ_3 . Wyniki przedstawiono w tabeli ZII.11 (str. 165).

Dla punktu trzeciego o współrzędnych $[\psi_1, \psi_2, \psi_3, \phi_3] = [0,4949; 1,2253; 0,8358; 0,5160]$ przyjęto 1% zmianę wartości ψ_1 w kierunkach minus i plus, 0,15% zmianę wartości ψ_2 , 0,35% zmianę wartości ψ_3 , 0,2% zmianę wartości ϕ_3 . Wyniki przedstawia tabela ZII.12 (str. 166).

Dla przyjętych wartości zmiennych wejściowych obliczono wartości odpowiadających im odpowiedzi (kryteriów) według algorytmu utworzonego na podstawie modelu matematycznego. Wyniki przedstawiają tabele ZII.13, ZII.14 oraz ZII.15 (strony 167-169). W efekcie otrzymano zbiory punktów niezbędne do poszukiwania zależności analitycznej pomiędzy wejściami (zmiennymi decyzyjnymi), a wyjściami (kryteriami), czyli do wyznaczenia równań powierzchni odpowiedzi (RPO). Tabele 7.13, 7.14 i 7.15 zawierają wartości współczynników korelacji liniowej Pearsona r . Zmienne decyzyjne nie są ze sobą skorelowane, ponieważ wartości współczynników Pearsona r przyjmują wartości bardzo bliskie lub równe 0.

Tabela 7.13. Korelacje między zmiennymi decyzyjnymi w punkcie 1

	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ϕ_3
ψ_1	1,0000	0,0000	-0,0000	-0,0000
ψ_2	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000
ψ_3	-0,0000	0,0000	1,0000	0,0001
ϕ_3	-0,0000	0,0000	0,0001	1,0000

Tabela 7.14. Korelacje między zmiennymi decyzyjnymi w punkcie 2

	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ϕ_3
ψ_1	1,0000	0	0,0000	-0,0000
ψ_2	0	1,0000	0	0
ψ_3	0,0000	0	1,0000	-0,0001
ϕ_3	-0,0000	0	-0,0001	1,0000

Tabela. 7.15. Korelacje między zmiennymi decyzyjnymi w punkcie 3

	Ψ_1	Ψ_2	Ψ_3	Φ_3
Ψ_1	1,0000	-0,0000	-0,0000	-0,0000
Ψ_2	-0,0000	1,0000	0,0001	0,0000
Ψ_3	-0,0000	0,0001	1,0000	-0,0000
Φ_3	-0,0000	0,0000	-0,0000	1,0000

7.2.5. Tworzenie metamodeli $K = f(ZD)$ i ich ocena statystyczna

Dysponując wartościami zmiennych decyzyjnych i odpowiadających im odpowiedzi układu można przystąpić do wyznaczenia współczynników wielomianów kwadratowych aproksymujących zadane wielkości w kolejnych punktach Pareto- optymalnych i , $i = 1, 2, 3$. Dla odróżnienia poszczególnych równań powierzchni odpowiedzi (RPO) wprowadzono identyfikację typu K_{mi} , gdzie m oznacza kolejne kryterium ($m = 1, 2, 3$), a i oznacza kolejny punkt ($i = 1, 2, 3$).

Poszukiwanie RPO dla punktu 1 (rys. 7.25)

Kryterium K1 – stosunek masy przekładni do wyjściowego momentu obrotowego [g/Nm].

Parametry RPO dla K1 w punkcie 1 zawiera tabela 7.16.

Tabela 7.16. Wartości współczynników RPO dla kryterium K1 w punkcie 1

L.p.	Wartość współczynnika	Oznaczenie	Zmienna	Rodzaj
1.	-12,35958	b0	-	wyraz stały
2.	1,6896668	b1	Ψ_1	współczynniki liniowe
3.	15,224348	b2	Ψ_2	
4.	-64,50689	b3	Ψ_3	
5.	237,97981	b4	Φ_3	
6.	-0,182687	b1*b2	$\Psi_1*\Psi_2$	
7.	-0,165138	b1*b3	$\Psi_1*\Psi_3$	
8.	-1,410761	b1*b4	$\Psi_1*\Phi_3$	
9.	10,160318	b2*b3	$\Psi_2*\Psi_3$	
10.	-55,42696	b2*b4	$\Psi_2*\Phi_3$	
11.	115,65768	b3*b4	$\Psi_3*\Phi_3$	
12.	0,3197818	b1*b1	Ψ_1^2	współczynniki kwadratowe
13.	1,763524	b2*b2	Ψ_2^2	
14.	-4,459677	b3*b3	Ψ_3^2	
15.	-283,915	b4*b4	Φ_3^2	

RPO dla K1 w punkcie 1 ma postać:

$$\begin{aligned}
 K11 = f(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \varphi_3) = & \\
 -12,35958 + 1,6896668*\psi_1 + 15,224348*\psi_2 - 64,50689*\psi_3 + 237,97981*\varphi_3 - & \\
 0,182687*\psi_1*\psi_2 - 0,165138*\psi_1*\psi_3 - 1,410761*\psi_1*\varphi_3 + 10,160318*\psi_2*\psi_3 - & \quad (7.5) \\
 55,42696*\psi_2*\varphi_3 + 115,65768*\psi_3*\varphi_3 + 0,3197818*\psi_1^2 + 1,763524*\psi_2^2 - & \\
 4,459677*\psi_3^2 - 283,915*\varphi_3^2 &
 \end{aligned}$$

Kryterium K2 – objętość całkowita reduktora zębatego [m³]. Parametry RPO dla K2 w punkcie 1 zawiera tabeli 7.17.

Tabela 7.17. Wartości współczynników RPO dla kryterium K2 w punkcie 1

L.p.	Wartość współczynnika	Oznaczenie	Zmienna	Rodzaj
1.	-0,016803	b0	-	wyraz stały
2.	0,0026913	b1	ψ_1	współczynniki liniowe
3.	0,0107965	b2	ψ_2	
4.	-0,032395	b3	ψ_3	
5.	0,1406299	b4	φ_3	
6.	-0,000303	b1*b2	$\psi_1*\psi_2$	
7.	-0,000386	b1*b3	$\psi_1*\psi_3$	
8.	-0,001888	b1*b4	$\psi_1*\varphi_3$	
9.	0,0049269	b2*b3	$\psi_2*\psi_3$	
10.	-0,031688	b2*b4	$\psi_2*\varphi_3$	
11.	0,0610543	b3*b4	$\psi_3*\varphi_3$	współczynniki kwadratowe
12.	0,0002029	b1*b1	ψ_1^2	
13.	0,0008307	b2*b2	ψ_2^2	
14.	-0,002556	b3*b3	ψ_3^2	
15.	-0,15944	b4*b4	φ_3^2	

RPO dla K2 w punkcie 1 ma postać:

$$\begin{aligned}
 K21 = f(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \varphi_3) = & \\
 -0,016803 + 0,0026913*\psi_1 + 0,0107965*\psi_2 - 0,032395*\psi_3 + 0,1406299*\varphi_3 - & \\
 0,000303*\psi_1*\psi_2 - 0,000386*\psi_1*\psi_3 - 0,001888*\psi_1*\varphi_3 + 0,0049269*\psi_2*\psi_3 - & \quad (7.6) \\
 0,031688*\psi_2*\varphi_3 + 0,0610543*\psi_3*\varphi_3 + 0,0002029*\psi_1^2 + 0,0008307*\psi_2^2 - & \\
 0,002556*\psi_3^2 - 0,15944*\varphi_3^2 &
 \end{aligned}$$

Kryterium K3 – koszty względne wytwarzania kół zębatych [-]. Parametry RPO dla K3 w punkcie 1 zawiera tabela 7.18.

Tabela 7.18. Wartości współczynników RPO dla kryterium K3 w punkcie 1

L.p.	Wartość współczynnika	Oznaczenie	Zmienna	Rodzaj
1.	2,2916269	b0	-	wyraz stały
2.	-0,07274	b1	ψ_1	współczynniki liniowe
3.	-0,130532	b2	ψ_2	
4.	-0,217385	b3	ψ_3	
5.	-0,000293	b4	φ_3	
6.	0,000000076152	b1*b2	$\psi_1*\psi_2$	
7.	-0,000000735	b1*b3	$\psi_1*\psi_3$	
8.	0,0000015	b1*b4	$\psi_1*\varphi_3$	
9.	-0,0000005317	b2*b3	$\psi_2*\psi_3$	
10.	0,0000015	b2*b4	$\psi_2*\varphi_3$	
11.	0,0000199	b3*b4	$\psi_3*\varphi_3$	współczynniki kwadratowe
12.	0,0274291	b1*b1	ψ_1^2	
13.	0,0604233	b2*b2	ψ_2^2	
14.	0,1518364	b3*b3	ψ_3^2	
15.	0,000259	b4*b4	φ_3^2	

RPO dla K3 w punkcie 1 ma postać:

$$\begin{aligned}
 K31 = f(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \varphi_3) = & \\
 & 2,2916269 - 0,07274*\psi_1 - 0,130532*\psi_2 - 0,217385*\psi_3 - 0,000293*\varphi_3 + \\
 & 0,000000076152*\psi_1*\psi_2 - 0,000000735*\psi_1*\psi_3 + 0,0000015*\psi_1*\varphi_3 - \\
 & 0,0000005317*\psi_2*\psi_3 + 0,0000015*\psi_2*\varphi_3 + 0,0000199*\psi_3*\varphi_3 + 0,0274291*\psi_1^2 + \\
 & 0,0604233*\psi_2^2 + 0,1518364*\psi_3^2 + 0,000259*\varphi_3^2
 \end{aligned} \tag{7.7}$$

Poszukiwanie RPO dla punktu 2 (rys. 7.25)

Kryterium K1 – stosunek masy przekładni do wyjściowego momentu obrotowego [g/Nm].

Parametry RPO dla K1 w punkcie 2 zawiera tabela 7.19.

Tabela 7.19. Wartości współczynników RPO dla kryterium K1 w punkcie 2

L.p.	Wartość współczynnika	Oznaczenie	Zmienna	Rodzaj
1.	-715,3148	b0	-	wyraz stały
2.	2,9912461	b1	ψ_1	współczynniki liniowe
3.	255,93011	b2	ψ_2	
4.	-674,2211	b3	ψ_3	
5.	3323,931	b4	φ_3	
6.	-0,287922	b1*b2	$\psi_1*\psi_2$	
7.	0,1968662	b1*b3	$\psi_1*\psi_3$	
8.	-3,298064	b1*b4	$\psi_1*\varphi_3$	

9.	112,77228	b2*b3	$\psi_2*\psi_3$	mieszane
10.	-597,1405	b2*b4	$\psi_2*\varphi_3$	
11.	1455,4065	b3*b4	$\psi_3*\varphi_3$	
12.	0,1070377	b1*b1	ψ_1^2	współczynniki kwadratowe
13.	-15,41011	b2*b2	ψ_2^2	
14.	-135,6799	b3*b3	ψ_3^2	
15.	-3659,524	b4*b4	φ_3^2	

RPO dla K1 w punkcie 2 ma postać:

$$\begin{aligned}
 K12 = f(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \varphi_3, u_2, u_3) = & \\
 -715,3148 + 2,9912461*\psi_1 + 255,93011*\psi_2 - 674,2211*\psi_3 + 3323,931*\varphi_3 - & \\
 0,287922*\psi_1*\psi_2 + 0,1968662*\psi_1*\psi_3 - 3,298064*\psi_1*\varphi_3 + 112,77228*\psi_2*\psi_3 - & \quad (7.8) \\
 597,1405*\psi_2*\varphi_3 + 1455,4065*\psi_3*\varphi_3 + 0,1070377*\psi_1^2 - 15,41011*\psi_2^2 - & \\
 135,6799*\psi_3^2 - 3659,524*\varphi_3^2 &
 \end{aligned}$$

Kryterium K2 – objętość całkowita reduktora zębatego [m³]. Parametry RPO dla K2 w punkcie 2 zawiera tabela 7.20.

Tabela 7.20. Wartości współczynników RPO dla kryterium K2 w punkcie 2

L.p.	Wartość współczynnika	Oznaczenie	Zmienna	Rodzaj
1.	-0,407837	b0	-	wyraz stały
2.	0,0042618	b1	ψ_1	współczynniki liniowe
3.	0,144683	b2	ψ_2	
4.	-0,368362	b3	ψ_3	
5.	1,8505513	b4	φ_3	
6.	-0,000466	b1*b2	$\psi_1*\psi_2$	współczynniki mieszane
7.	0,0001936	b1*b3	$\psi_1*\psi_3$	
8.	-0,00492	b1*b4	$\psi_1*\varphi_3$	
9.	0,0615701	b2*b3	$\psi_2*\psi_3$	
10.	-0,332071	b2*b4	$\psi_2*\varphi_3$	
11.	0,7957784	b3*b4	$\psi_3*\varphi_3$	współczynniki kwadratowe
12.	0,0000753	b1*b1	ψ_1^2	
13.	-0,008729	b2*b2	ψ_2^2	
14.	-0,074119	b3*b3	ψ_3^2	
15.	-2,021424	b4*b4	φ_3^2	

RPO dla K2 w punkcie 2 ma postać:

$$\begin{aligned}
K22 = f(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \varphi_3) = & \\
& -0,407837 + 0,0042618*\psi_1 + 0,144683*\psi_2 - 0,368362*\psi_3 + 1,8505513*\varphi_3 - \\
& 0,000466*\psi_1*\psi_2 + 0,0001936*\psi_1*\psi_3 - 0,00492*\psi_1*\varphi_3 + 0,0615701*\psi_2*\psi_3 - \\
& 0,332071*\psi_2*\varphi_3 + 0,7957784*\psi_3*\varphi_3 + 0,0000753*\psi_1^2 - 0,008729*\psi_2^2 - \\
& 0,074119*\psi_3^2 - 2,021424*\varphi_3^2
\end{aligned} \tag{7.9}$$

Kryterium K3 – koszty względne wytwarzania kół zębatach [-]. Parametry RPO dla K3 w punkcie 2 zawiera tabela 7.21.

Tabela 7.21. Wartości współczynników RPO dla kryterium K3 w punkcie 2

L.p.	Wartość współczynnika	Oznaczenie	Zmienna	Rodzaj
1.	2,2855282	b0	-	wyraz stały
2.	-0,081307	b1	ψ_1	współczynniki liniowe
3.	-0,110158	b2	ψ_2	
4.	-0,217453	b3	ψ_3	
5.	-0,000004	b4	φ_3	
6.	0,000000062413	b1*b2	$\psi_1*\psi_2$	współczynniki mieszane
7.	0,00000036937	b1*b3	$\psi_1*\psi_3$	
8.	0,0000024	b1*b4	$\psi_1*\varphi_3$	
9.	0,0000035	b2*b3	$\psi_2*\psi_3$	
10.	0,0000094	b2*b4	$\psi_2*\varphi_3$	
11.	-0,000035	b3*b4	$\psi_3*\varphi_3$	współczynniki kwadratowe
12.	0,030868	b1*b1	ψ_1^2	
13.	0,0515316	b2*b2	ψ_2^2	
14.	0,1518941	b3*b3	ψ_3^2	
15.	0,0000162	b4*b4	φ_3^2	

RPO dla K3 w punkcie 2 ma postać:

$$\begin{aligned}
K32 = f(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \varphi_3) = & \\
& 2,2855282 - 0,081307*\psi_1 - 0,110158*\psi_2 - 0,217453*\psi_3 - 0,000004*\varphi_3 + \\
& 0,000000062413*\psi_1*\psi_2 + 0,00000036937*\psi_1*\psi_3 + 0,0000024*\psi_1*\varphi_3 + \\
& 0,0000035*\psi_2*\psi_3 + 0,0000094*\psi_2*\varphi_3 - 0,000035*\psi_3*\varphi_3 + 0,030868*\psi_1^2 + \\
& 0,0515316*\psi_2^2 + 0,1518941*\psi_3^2 + 0,0000162*\varphi_3^2
\end{aligned} \tag{7.10}$$

Poszukiwanie RPO dla punktu 3 (rys. 7.25)

Kryterium K1 – stosunek masy przekładni do wyjściowego momentu obrotowego [g/Nm]. Parametry RPO dla K1 w punkcie 3 zawiera tabela 7.22.

Tabela 7.22. Wartości współczynników RPO dla kryterium K1 w punkcie 3

L.p.	Wartość współczynnika	Oznaczenie	Zmienna	Rodzaj
1.	-124,1788	b0	-	wyraz stały
2.	-7357,278	b1	ψ_1	współczynniki liniowe
3.	734,26656	b2	ψ_2	
4.	-1506,612	b3	ψ_3	
5.	8444,4086	b4	φ_3	
6.	4,4662366	b1*b2	$\psi_1*\psi_2$	
7.	-6,482591	b1*b3	$\psi_1*\psi_3$	
8.	63,238972	b1*b4	$\psi_1*\varphi_3$	
9.	276,52954	b2*b3	$\psi_2*\psi_3$	
10.	-1479,132	b2*b4	$\psi_2*\varphi_3$	
11.	3136,4461	b3*b4	$\psi_3*\varphi_3$	współczynniki kwadratowe
12.	7366,0788	b1*b1	ψ_1^2	
13.	-85,63763	b2*b2	ψ_2^2	
14.	-260,8565	b3*b3	ψ_3^2	
15.	-9086,37	b4*b4	φ_3^2	

RPO dla K1 w punkcie 3 ma postać:

$$\begin{aligned}
 K13 = f(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \varphi_3) = & \\
 -124,1788 - 7357,278*\psi_1 + 734,26656*\psi_2 - 1506,612*\psi_3 + 8444,4086*\varphi_3 + & \\
 4,4662366*\psi_1*\psi_2 - 6,482591*\psi_1*\psi_3 + 63,238972*\psi_1*\varphi_3 + 276,52954*\psi_2*\psi_3 - & \quad (7.11) \\
 1479,132*\psi_2*\varphi_3 + 3136,4461*\psi_3*\varphi_3 + 7366,0788*\psi_1^2 - 85,63763*\psi_2^2 - & \\
 260,8565*\psi_3^2 - 9086,37*\varphi_3^2 &
 \end{aligned}$$

Kryterium K2 – objętość całkowita reduktora zębatego [m³]. Parametry RPO dla K2 w punkcie 3 zawiera tabela 7.23.

Tabela 7.23. Wartości współczynników RPO dla kryterium K2 w punkcie 3

L.p.	Wartość współczynnika	Oznaczenie	Zmienna	Rodzaj
1.	0,0109586	b0	-	wyraz stały
2.	-4,209158	b1	ψ_1	współczynniki liniowe
3.	0,3912394	b2	ψ_2	
4.	-0,785162	b3	ψ_3	
5.	4,4359106	b4	φ_3	
6.	0,0021813	b1*b2	$\psi_1*\psi_2$	
7.	-0,004555	b1*b3	$\psi_1*\psi_3$	
8.	0,0395838	b1*b4	$\psi_1*\varphi_3$	
9.	0,1444461	b2*b3	$\psi_2*\psi_3$	
10.	-0,779547	b2*b4	$\psi_2*\varphi_3$	
11.	1,6358462	b3*b4	$\psi_3*\varphi_3$	

12.	4,2143887	b1*b1	ψ_1^2	współczynniki kwadratowe
13.	-0,046095	b2*b2	ψ_2^2	
14.	-0,135976	b3*b3	ψ_3^2	
15.	-4,762216	b4*b4	φ_3^2	

RPO dla K2 w punkcie 3 ma postać:

$$\begin{aligned}
 K23 = f(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \varphi_3) = & \\
 & 0,0109586 - 4,209158*\psi_1 + 0,3912394*\psi_2 - 0,785162*\psi_3 + 4,4359106*\varphi_3 + \\
 & 0,0021813*\psi_1*\psi_2 - 0,004555*\psi_1*\psi_3 + 0,0395838*\psi_1*\varphi_3 + 0,1444461*\psi_2*\psi_3 - \\
 & 0,779547*\psi_2*\varphi_3 + 1,6358462*\psi_3*\varphi_3 + 4,2143887*\psi_1^2 - 0,046095*\psi_2^2 - \\
 & 0,135976*\psi_3^2 - 4,762216*\varphi_3^2
 \end{aligned} \quad (7.12)$$

Kryterium K3 - koszty względne wytwarzania kół zębatach [-]. Parametry RPO dla K3 w punkcie 3 zawiera tabela 7.24.

Tabela 7.24. Wartości współczynników RPO dla kryterium K3 w punkcie 3

L.p.	Wartość współczynnika	Oznaczenie	Zmienna	Rodzaj
1.	129,8048	b0	-	wyraz stały
2.	-515,3786	b1	ψ_1	współczynniki liniowe
3.	0,766344	b2	ψ_2	
4.	-0,28777	b3	ψ_3	
5.	0,4510035	b4	φ_3	
6.	-0,002128	b1*b2	$\psi_1*\psi_2$	współczynniki mieszane
7.	-0,000375	b1*b3	$\psi_1*\psi_3$	
8.	0,0028842	b1*b4	$\psi_1*\varphi_3$	
9.	-0,012902	b2*b3	$\psi_2*\psi_3$	
10.	-0,061398	b2*b4	$\psi_2*\varphi_3$	
11.	-0,006421	b3*b4	$\psi_3*\varphi_3$	współczynniki kwadratowe
12.	518,17883	b1*b1	ψ_1^2	
13.	-0,287583	b2*b2	ψ_2^2	
14.	0,2050054	b3*b3	ψ_3^2	
15.	-0,3603	b4*b4	φ_3^2	

RPO dla K3 w punkcie 3 ma postać:

$$\begin{aligned}
 K33 = f(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \varphi_3) = & \\
 & 129,8048 - 515,3786*\psi_1 + 0,766344*\psi_2 - 0,28777*\psi_3 + 0,4510035*\varphi_3 - \\
 & 0,002128*\psi_1*\psi_2 - 0,000375*\psi_1*\psi_3 + 0,0028842*\psi_1*\varphi_3 - 0,012902*\psi_2*\psi_3 - \\
 & 0,061398*\psi_2*\varphi_3 - 0,006421*\psi_3*\varphi_3 + 518,17883*\psi_1^2 - 0,287583*\psi_2^2 + \\
 & 0,2050054*\psi_3^2 - 0,3603*\varphi_3^2
 \end{aligned} \quad (7.13)$$

Otrzymane RPO dla punktów 1, 2 i 3 poddano ocenie statystycznej, której wyniki przedstawione są w tabelach 7.25, 7.26 i 7.27. Wszystkie współczynniki w pełni potwierdzają statystyczną wiarygodność otrzymanych wyników.

Błędy średnio-kwadratowe $RMSE$ są minimalne (bliskie 0), świadcząc o niskiej wartości błędów dopasowania kolejnych funkcji aproksymujących. Współczynniki determinacji R^2 przyjmują wartości maksymalne (bliskie 1), świadcząc o tym, że ilość informacji zwracana przez model aproksymujący jest zadowalająca. Poprawione współczynniki determinacji R^2_{unorm} dają obraz dopasowania funkcji w kolejnych punktach Pareto-optymalnych. Jak widać jakość dopasowania zawiera się w przedziale od 99% do 100%.

Tabela 7.25. Analiza statystyczna RPO otrzymanych dla punktu 1

	K11 = f (ZD)	K21 = f (ZD)	K31 = f (ZD)
R²	1	1	1
R² unorm	0,999999	0,999999	1
RMSE	0,000061	3,38711e-8	1,154e-8

Tabela 7.26. Analiza statystyczna RPO otrzymanych dla punktu 2

	K12 = f (ZD)	K22 = f (ZD)	K32 = f (ZD)
R²	0,999832	0,999854	1
R² unorm	0,999636	0,999683	1
RMSE	0,001612	8,891e-7	5,016e-15

Tabela 7.27. Analiza statystyczna RPO otrzymanych dla punktu 3

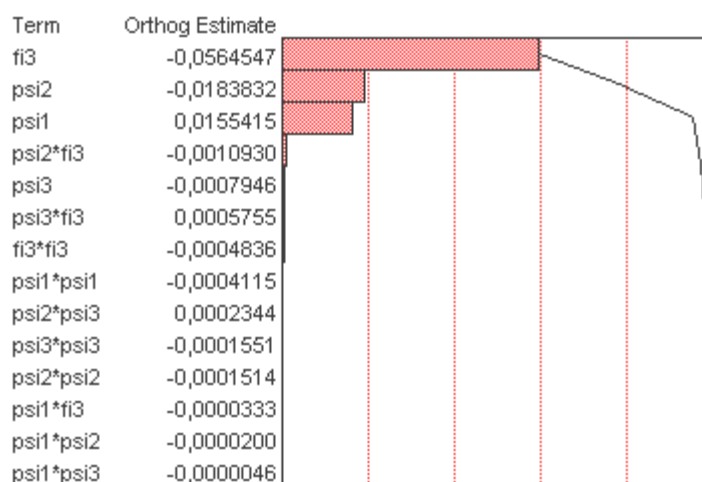
	K13 = f (ZD)	K23 = f (ZD)	K33 = f (ZD)
R²	0,999962	0,999964	1
R² unorm	0,999918	0,999922	1
RMSE	0,001668	8,883e-7	0,000003

7.2.6. Wykresy Pareto i profile odpowiedzi

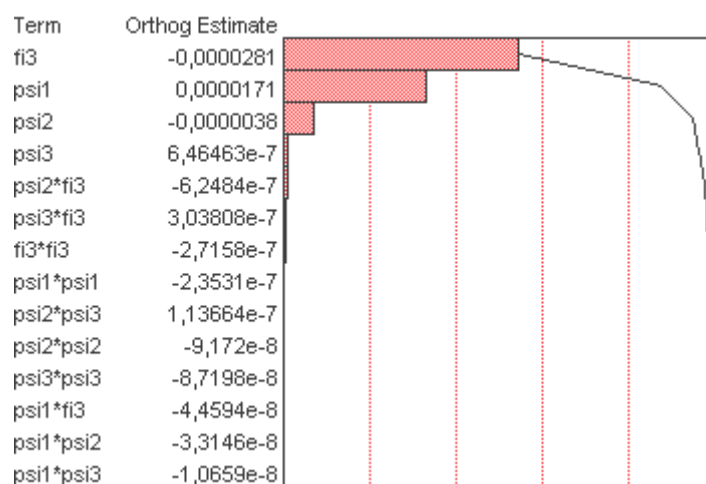
Znajomość relacji $Z = f(ZD)$ oraz pozytywna ocena statystyczna otrzymanych równań powierzchni odpowiedzi uzasadnia wykonanie wykresów Pareto i profili odpowiedzi. Wykresy zostały przedstawione dla kolejnych, rozpatrywanych punktów Pareto-optymalnych.

Punkt Pareto-optymalny 1

Wykresy Pareto umożliwiają wgląd w jedno kryterium w jednym punkcie Pareto-optymalnym. Zostały wykonane dla standaryzowanych (równe wariancje) oraz ortogonalizowanych (oceny nieskorelowane) ocen współczynników RPO.



Rys. 7.26. Wykres Pareto dla kryterium K1 w punkcie 1

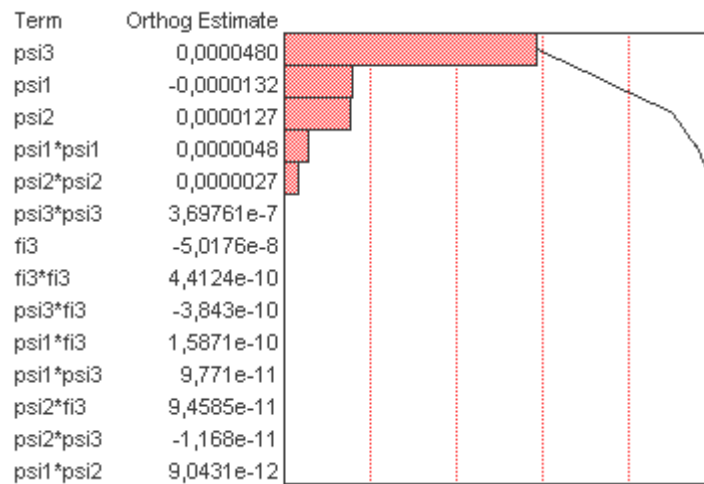


Rys.7.27. Wykres Pareto dla kryterium K2 w punkcie 1

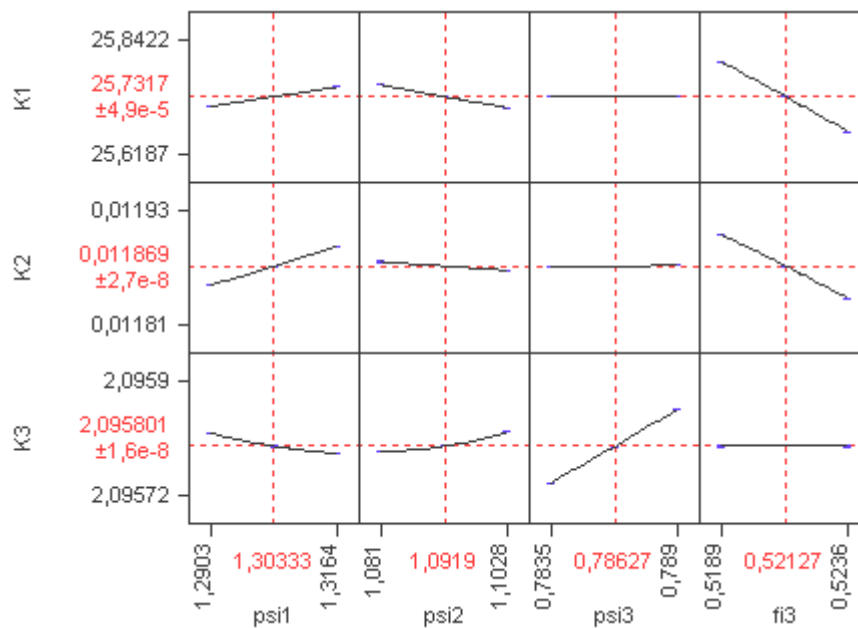
Na wykresie 7.26 widać, że największy wpływ na kryterium względnej materiałochłonności (K1 [g/Nm]) ma zmienna decyzyjna φ_3 (kąt odchylenia linii łączącej osie kół II i III stopnia), a zatem w procesie konstruowania należy tej zmiennej przydzielić węższe

tolerancje. Ponad 3-krotnie mniejszy wpływ wykazują zmienne ψ_2 (współczynnik szerokości wieńca zębatego stopnia II) oraz ψ_1 (współczynnik szerokości wieńca zębatego stopnia I). Zmienna ψ_3 wykazuje bardzo niewielki wpływ na kryterium K1, a zatem można jej przydzielić większe pole tolerancji.

Na rysunku 7.27 widać, że największy wpływ na kryterium objętości ($K2 [m^3]$) ma zmienna ϕ_3 . Kolejną zmienną jest ψ_1 (ma mniejszy wpływ o około 40% niż ϕ_3). Te zmienne powinny mieć węższe tolerancje. W przypadku ψ_2 oraz ψ_3 tolerancje można „rozluźnić”.



Rys. 7.28. Wykres Pareto dla kryterium K3 w punkcie 1

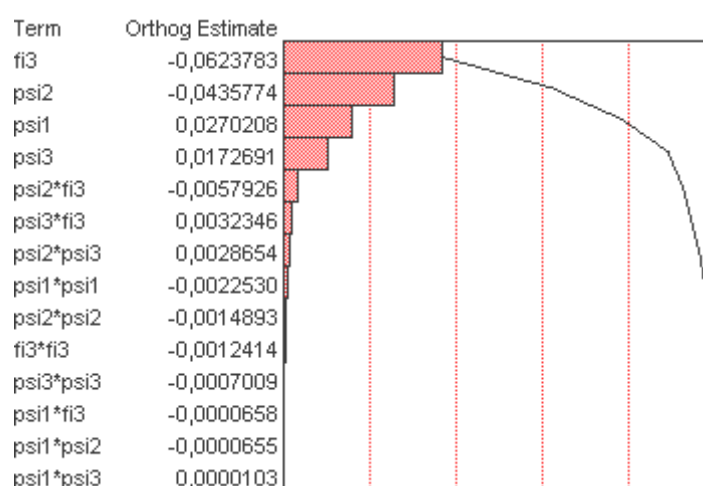


Rys. 7.29. Profile odpowiedzi dla punktu 1

Na rysunku 7.28 widać, że największy wpływ na kryterium kosztów względnych wytwarzania kół zębatach (K3 [-]) ma zmienna ψ_3 (współczynnik szerokości wieńca zębatego stopnia II). W efekcie ta zmienna ma najmniejsze pole tolerancji. Ponadto widać około 3,5-krotnie mniejszy wpływ zmiennych ψ_1 (współczynnik szerokości wieńca zębatego stopnia I) oraz ψ_2 (współczynnik szerokości wieńca zębatego stopnia II). Zmienna φ_3 (kąć odchylenia linii łączącej osie kół II i III stopnia) nie wykazuje wpływu, a zatem tolerancje można rozszerzyć.

Wykres profili odpowiedzi (rys. 7.29) daje informacje dotyczące zachowania się wszystkich kryteriów w otoczeniu pierwszego punktu Pareto-optimalnego. Na wykresie widać (śledząc kolumnami), że największy wpływ na kryteria K1 (względna materiałochłonność [g/Nm]) oraz K2 (objętość reduktora [m³]) ma zmienna decyzyjna φ_3 (kąć odchylenia linii łączącej osie kół II i III stopnia). Jej wzrost powoduje zmniejszenie wartości tych kryteriów. Na kryterium K3 (względny koszt wytwarzania kół [-]) największy wpływ wykazuje zmienna ψ_3 (współczynnik szerokości wieńca zębatego stopnia III). Jej wzrost powoduje wzrost K3. Śledząc wykres wierszami widać, że zachowanie się kryteriów K1 oraz K2 jest zbliżone. Ponadto widać, że zmiana wartości zmiennej ψ_1 (współczynnik szerokości wieńca zębatego stopnia I) wywołuje zmianę wartości wszystkich trzech kryteriów. Jej wzrost wywołuje wzrost K1 oraz K2, lecz zmniejszenie wartości K3.

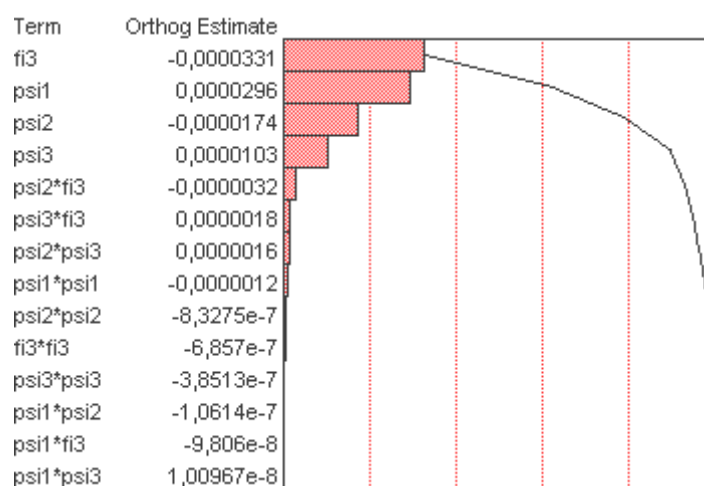
Punkt Pareto-optimalny 2



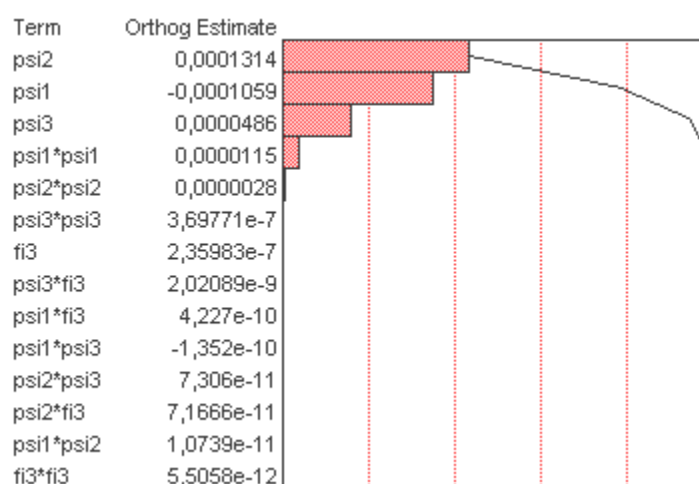
Rys. 7.30. Wykres Pareto dla kryterium K1 w punkcie 2

Największy wpływ na kryterium względnej materiałochłonności (K1 [g/Nm]) (rys. 7.30) ma zmienna decyzyjna φ_3 . Ponadto znaczące są zmienne ψ_2 (współczynnik szerokości wieńca zębatego stopnia II) i ψ_1 (około 50% wpływ względem φ_3). Zmienna ψ_3 ma najmniejszy wpływ, a zatem można jej przydzielić najszersze tolerancje.

Na wykresie 7.31 widać, że największy wpływ na kryterium objętości reduktora (K2 [m³]) mają zmienne φ_3 oraz ψ_1 . Zmiennym tym należy przydzielić węższe tolerancje. Ponadto zmienne ψ_2 i ψ_3 wykazują również wpływ na kryterium oceny obiektu.



Rys. 7.31. Wykres Pareto dla kryterium K2 w punkcie 2

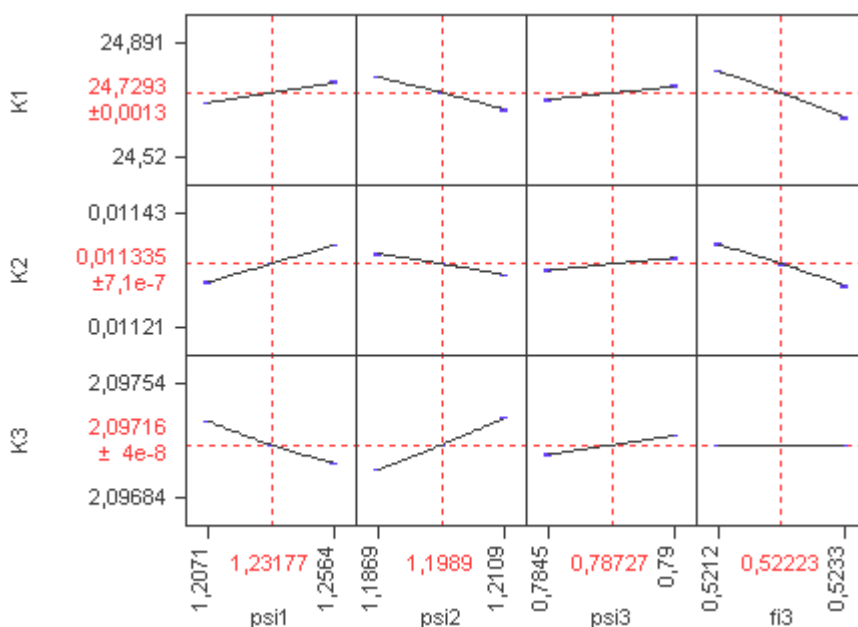


Rys. 7.32. Wykres Pareto dla kryterium K3 w punkcie 2

Na wykresie 7.32 widać, że największy wpływ na kryterium względnych kosztów wytwarzania kół zębatach (K3 [-]) mają zmienne ψ_2 (współczynnik szerokości wieńca

zębatego stopnia II) oraz ψ_1 (współczynnik szerokości wieńca zębatego stopnia I). Zmienna ψ_3 (współczynnik szerokości wieńca zębatego stopnia III) wykazuje mniejszy wpływ, a zmienna decyzyjna φ_3 (kąt odchylenia linii łączącej osie kół II i III stopnia) nie wpływa na wskaźnik jakości K3. Dla tej zmiennej tolerancje można „rozluźnić”.

Rysunek 7.33 przedstawia wykres profili odpowiedzi dla Pareto-optimalnego rozwiązania z indeksem 2. Widać tu większe zróżnicowanie w stosunku do poprzedniego wykresu profili, jednakże jest zachowane pewne podobieństwo. Reakcje kryteriów K1 i K2 są zbliżone do siebie, w przeciwieństwie do reakcji kryterium K3, które jest zdecydowanie odmienne. Na kryteria K1 (względna materiałochłonność [g/Nm]) oraz K2 (objętość reduktora [m³]) największy wpływ wykazuje zmienna decyzyjna φ_3 (kąt odchylenia linii łączącej osie kół II i III stopnia). Dla kryterium K3 (względny koszt wytwarzania kół [-]) najbardziej wpływa zmienna decyzyjna ψ_2 (współczynnik szerokości wieńca zębatego stopnia II). Wzrost ψ_1 powoduje wzrost K1 i K2 oraz zmniejszenie K3. Wzrost ψ_2 powoduje, że kryteria K1 i K2 maleją, lecz K3 rośnie. Wzrost ψ_3 powoduje nieznaczny wzrost wszystkich kryteriów. Wzrost wartości kąta φ_3 wywołuje zmniejszenie wartości K1 i K2, lecz nie wpływa na kryterium K3.

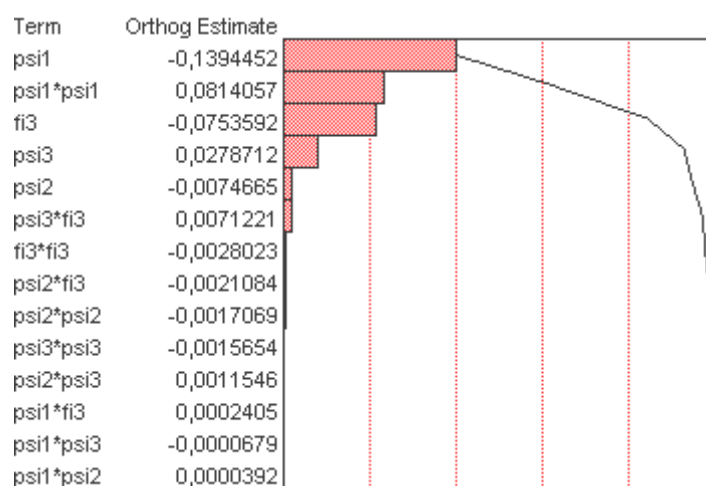


Rys. 7.33. Profile odpowiedzi dla punktu 2

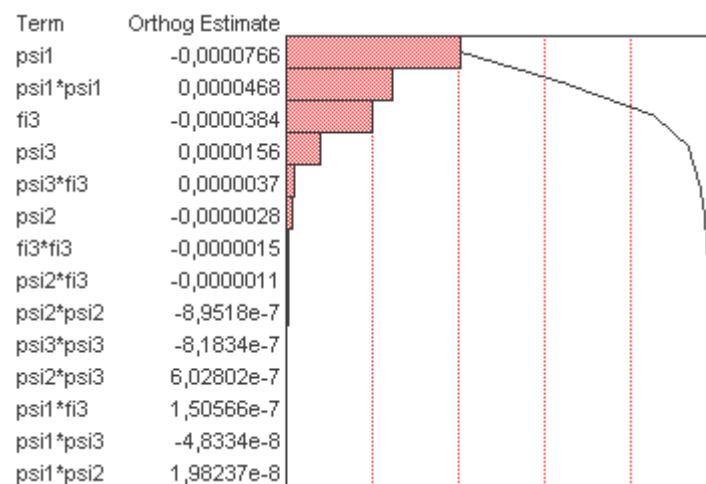
Punkt Pareto-optymalny 3

Na wykresie 7.34 widać, że największy wpływ na kryterium względnej materiałochłonności ($K1$ [g/Nm]) ma zmienna decyzyjna ψ_1 (współczynnik szerokości wieńca zębatego stopnia I). Ważny wpływ ma również zmienna φ_3 (kąt odchylenia linii łączącej osie kół II i III stopnia). Pozostałe zmienne wykazują mniejszy wpływ, a zatem w ich przypadku tolerancje należy rozszerzyć.

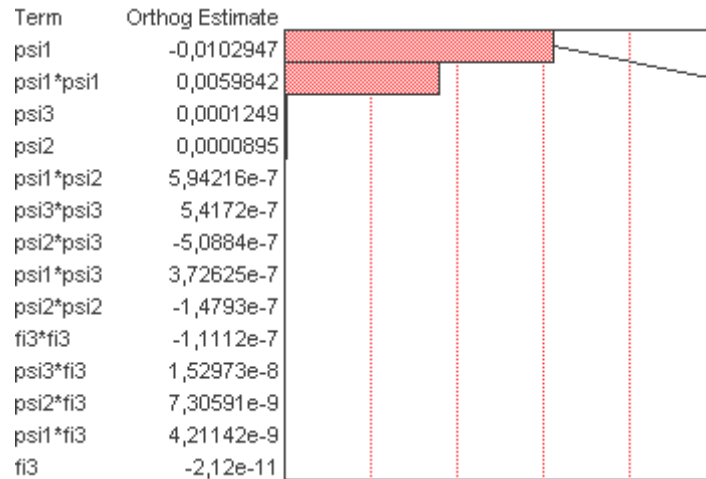
Na rysunku 7.35 widać, że największy wpływ na kryterium objętości reduktora ($K2$ [m³]) ma zmienna decyzyjna ψ_1 . Zmienna φ_3 wykazuje 50% wpływ w stosunku do ψ_1 . W przypadku pozostałych zmiennych (ψ_3, ψ_2) tolerancje mogą być szersze.



Rys. 7.34. Wykres Pareto dla kryterium K1 w punkcie 3

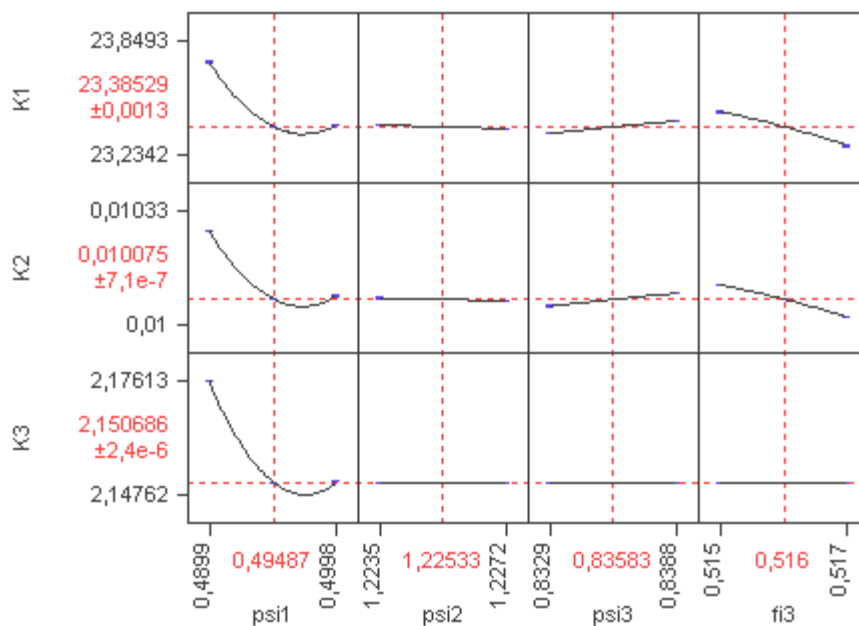


Rys. 7.35. Wykres Pareto dla kryterium K2 w punkcie 3



Rys. 7.36. Wykres Pareto dla kryterium K3 w punkcie 3

Największy wpływ na kryterium względnych kosztów wytwarzania kół zębatach (K3 [-]) (rys. 7.36) ma zdecydowanie zmienna decyzyjna ψ_1 (współczynnik szerokości wieńca zębatego stopnia I). Pozostałe zmienne nie wykazują znaczącego wpływu, zatem ich tolerancje mogą być rozszerzone.



Rys. 7.37. Profile odpowiedzi dla punktu 3

Na rysunku 7.37 (wykresie profili odpowiedzi) widać zbliżone zachowanie wielkości kryterialnych K1 (względna materiałochłonność [g/Nm]) i K2 (objętość reduktora [m³]). Reakcje kryterium K3 (koszt wytwarzania kół [-]) różnią się nieco od reakcji pozostałych

wielkości. Rzeczą charakterystyczną jest, że relacje między zmienną decyzyjną ψ_1 , a kryteriami oceny mają charakter nieliniowy, co świadczy o zwiększonej wrażliwości na zmiany wartości tej zmiennej decyzyjnej. Mało znaczący jest wpływ zmiennej ψ_2 (współczynnik szerokości wieńca zębatego stopnia II) na poszczególne wielkości wyjściowe. Kryterium K3 zależy tylko od zmiennej decyzyjnej ψ_1 . Ogólnie można powiedzieć, że punkt 3 jest dość „bezpieczny dla kryteriów”, tzn. że kryteria słabo reagują na zmiany wartości zmiennych decyzyjnych (oprócz zmiennej ψ_1) w tym punkcie.

7.2.7. Analiza wrażliwości

W celu zbadania wrażliwości poszczególnych odpowiedzi (kryteriów K1, K2, K3) na niewielkie zmiany wartości poszczególnych zmiennych decyzyjnych obliczono gradienty otrzymanych funkcji celu (RPO), ustalono ich wartości liczbowe w rozpatrywanych punktach Pareto-optimalnych oraz unormowano ich wartości dla celów porównawczych.

Gradienty dla kryterium K1

Obliczenia gradientów dla kryterium K1 w poszczególnych punktach Pareto-optimalnych znajdują się na stronach 169-170 (równania ZII.7 do ZII.18).

Gradient funkcji K11 w punkcie 1 przejmie postać:

$$\nabla K_{11} = \left[\frac{\partial K_{11}}{\partial \psi_1}, \frac{\partial K_{11}}{\partial \psi_2}, \frac{\partial K_{11}}{\partial \psi_3}, \frac{\partial K_{11}}{\partial \varphi_3} \right] = \quad (7.14)$$

$$= \begin{pmatrix} 1,6896668 + 0,6395636*\psi_1 - 0,182687*\psi_2 - 0,165138*\psi_3 - 1,410761*\varphi_3, \\ 15,224348 - 0,182687*\psi_1 + 3,527048*\psi_2 + 10,160318*\psi_3 - 55,42696*\varphi_3, \\ - 64,50689 - 0,165138*\psi_1 + 10,160318*\psi_2 - 8,919354*\psi_3 + 115,65768*\varphi_3, \\ 237,97981 - 1,410761*\psi_1 - 55,42696*\psi_2 + 115,65768*\psi_3 - 567,83*\varphi_3 \end{pmatrix}$$

Gradient funkcji K12 w punkcie 2 przejmie postać:

$$\nabla K_{12} = \left[\frac{\partial K_{12}}{\partial \psi_1}, \frac{\partial K_{12}}{\partial \psi_2}, \frac{\partial K_{12}}{\partial \psi_3}, \frac{\partial K_{12}}{\partial \varphi_3} \right] = \quad (7.15)$$

$$= \begin{pmatrix} 2,9912461 + 0,2140754*\psi_1 - 0,287922*\psi_2 + 0,1968662*\psi_3 - 3,298064*\varphi_3, \\ 255,93011 - 0,287922*\psi_1 - 30,82022*\psi_2 + 112,77228*\psi_3 - 597,1405*\varphi_3, \\ - 674,2211 + 0,1968662*\psi_1 + 112,77228*\psi_2 - 271,3598*\psi_3 + 1455,4065*\varphi_3, \\ 3323,931 - 3,298064*\psi_1 - 597,1405*\psi_2 + 1455,4065*\psi_3 - 7319,048*\varphi_3 \end{pmatrix}$$

Gradient funkcji K13 w punkcie 3 przejmie postać:

$$\nabla K_{13} = \left[\frac{\partial K_{13}}{\partial \psi_1}, \frac{\partial K_{13}}{\partial \psi_2}, \frac{\partial K_{13}}{\partial \psi_3}, \frac{\partial K_{13}}{\partial \varphi_3} \right] = \quad (7.16)$$

$$= \begin{pmatrix} - 7357,278 + 14732,1576*\psi_1 + 4,466237*\psi_2 - 6,482591*\psi_3 + 63,238972*\varphi_3, \\ 734,26656 + 4,4662366*\psi_1 - 171,27526*\psi_2 + 276,52954*\psi_3 - 1479,132*\varphi_3, \\ - 1506,612 - 6,482591*\psi_1 + 276,52954*\psi_2 - 521,713*\psi_3 + 3136,4461*\varphi_3, \\ 8444,4086 + 63,238972*\psi_1 - 1479,132*\psi_2 + 3136,4461*\psi_3 - 18172,74*\varphi_3 \end{pmatrix}$$

Wartości liczbowe gradientu w punkcie 1 o współrzędnych $[\psi_1, \psi_2, \psi_3, \varphi_3, u_2, u_3, K1]$ = [1,3303; 1,0919; 0,7863; 0,5213; 5; 5,3; 25,7315], w punkcie 2 o współrzędnych $[\psi_1, \psi_2, \psi_3, \varphi_3, u_2, u_3, K1]$ = [1,2318; 1,1989; 0,7873; 0,5222; 4,75; 5,3; 24,7303] i w punkcie 3 o współrzędnych $[\psi_1, \psi_2, \psi_3, \varphi_3, u_2, u_3, K1]$ = [0,4949; 1,2253; 0,8358; 0,516; 4; 5; 23,383] dla kryterium K1 oraz unormowane składowe gradientu przedstawia tabela 7.28.

Tabela 7.28. Rzeczywiste oraz unormowane składowe gradientu funkcji celu K1

<i>składowe rzeczywiste gradientu</i>			
ZD	Punkt 1	Punkt 2	Punkt 3
ψ_1	1,458456385	1,34249823038	-33,6475635697
ψ_2	-2,067580460	-4,4160671336	-5,49539805265
ψ_3	-0,003490097	7,59579003716	1,36987327609
φ_3	-29,44767765	-52,2086288351	-25,3670619771
<i>składowe unormowane gradientu</i>			
ψ_1	1,63870789	1,652868955	-5,121489634
ψ_2	-1,773647494	-1,742140865	-0,03579661
ψ_3	-0,000664778	0,418153236	0,156403801
φ_3	-2,965868433	-2,524742764	-0,38292947

Dla unormowanych wartości składowych gradientów funkcji K1 w 3 punktach stworzono wykres (rys. 7.38), który jasno pokazuje wpływ poszczególnych zmiennych decyzyjnych na wartość odpowiedzi układu K1 (kryterium względnej materiałochłonności) w rozpatrywanych 3 punktach.

Gradyenty dla kryterium K2

Obliczenia gradientów dla kryterium K2 w poszczególnych punktach Pareto-
optymalnych znajdują się na stronach 170-171 (równania ZII.19 do ZII.30).

Gradient funkcji K21 w punkcie 1 przyjmie postać:

$$\nabla K_{21} = \left[\frac{\partial K_{21}}{\partial \psi_1}, \frac{\partial K_{21}}{\partial \psi_2}, \frac{\partial K_{21}}{\partial \psi_3}, \frac{\partial K_{21}}{\partial \varphi_3} \right] = \quad (7.17)$$

$$= \left(\begin{array}{l} 0,0026913 + 0,0004058*\psi_1 - 0,000303*\psi_2 - 0,000386*\psi_3 - 0,001888*\varphi_3, \\ 0,0107965 - 0,000303*\psi_1 + 0,0016614*\psi_2 + 0,0049269*\psi_3 - 0,031688*\varphi_3, \\ - 0,032395 - 0,000386*\psi_1 + 0,004927*\psi_2 - 0,005112*\psi_3 + 0,0610543*\varphi_3, \\ 0,1406299 - 0,001888*\psi_1 - 0,031688*\psi_2 + 0,0610543*\psi_3 - 0,31888*\varphi_3 \end{array} \right)$$

Gradient funkcji K22 w punkcie 2 przejmie postać:

$$\nabla K_{22} = \left[\frac{\partial K_{22}}{\partial \psi_1}, \frac{\partial K_{22}}{\partial \psi_2}, \frac{\partial K_{22}}{\partial \psi_3}, \frac{\partial K_{22}}{\partial \varphi_3} \right] = \quad (7.18)$$

$$= \left(\begin{array}{l} 0,0042618 + 0,0001506*\psi_1 - 0,000466*\psi_2 + 0,0001936*\psi_3 - 0,00492*\varphi_3, \\ 0,144683 - 0,000466*\psi_1 - 0,017458*\psi_2 + 0,0615701*\psi_3 - 0,332071*\varphi_3, \\ - 0,368362 + 0,0001936*\psi_1 + 0,06157*\psi_2 - 0,148238*\psi_3 + 0,7957784*\varphi_3, \\ 1,8505513 - 0,00492*\psi_1 - 0,332071*\psi_2 + 0,7957784*\psi_3 - 4,042848*\varphi_3 \end{array} \right)$$

Gradient funkcji K23 w punkcie 3 przejmie postać:

$$\nabla K23 = \left[\frac{\partial K23}{\partial \psi_1}, \frac{\partial K23}{\partial \psi_2}, \frac{\partial K23}{\partial \psi_3}, \frac{\partial K23}{\partial \varphi_3} \right] = \quad (7.19)$$

$$= \begin{pmatrix} -4,20916 + 8,4287774*\psi_1 + 0,0021813*\psi_2 - 0,004555*\psi_3 + 0,039584*\varphi_3, \\ 0,3912394 + 0,0021813*\psi_1 - 0,09219*\psi_2 + 0,1444461*\psi_3 - 0,779547*\varphi_3, \\ -0,785162 - 0,004555*\psi_1 + 0,1444461*\psi_2 - 0,271952*\psi_3 + 1,6358462*\varphi_3, \\ 4,4359106 + 0,0395838*\psi_1 - 0,779547*\psi_2 + 1,6358462*\psi_3 - 9,524432*\varphi_3 \end{pmatrix}$$

Wartości liczbowe gradientu w punkcie 1 o współrzędnych $[\psi_1, \psi_2, \psi_3, \varphi_3, u_2, u_3, K2] = [1,3303; 1,0919; 0,7863; 0,5213; 5; 5,3; 0,0119]$, w punkcie 2 o współrzędnych $[\psi_1, \psi_2, \psi_3, \varphi_3, u_2, u_3, K2] = [1,2318; 1,1989; 0,7873; 0,5222; 4,75; 5,3; 0,0113]$ i w punkcie 3 o współrzędnych $[\psi_1, \psi_2, \psi_3, \varphi_3, u_2, u_3, K2] = [0,4949; 1,2253; 0,8358; 0,516; 4; 5; 0,0101]$ dla kryterium K2 oraz unormowane składowe gradientu przedstawia tabela 7.29.

Tabela 7.29. Rzeczywiste oraz unormowane składowe gradientu funkcji celu K2

<i>składowe rzeczywiste gradientu</i>			
ZD	Punkt 1	Punkt 2	Punkt 3
ψ_1	0,016016072	0,1471818	-0,18467042
ψ_2	-4,2925016e-2	-0,01754751	-0,02159683
ψ_3	2,8975849e-4	0,04540452	0,06372694
φ_3	-1,4656005	-0,38287969	-0,047044974
<i>składowe unormowane gradientu</i>			
ψ_1	2,150963999	2,441291587	-6,5048851
ψ_2	-0,803386408	-0,941744723	-0,036200593
ψ_3	1,91459E-07	0,516344982	0,182735624
φ_3	-3,503156911	-3,26937854	-0,453485827

Dla unormowanych wartości składowych gradientów funkcji K2 w 3 punktach stworzono wykres (rys. 7.39), który jasno pokazuje wpływ poszczególnych zmiennych decyzyjnych na wartość odpowiedzi układu K2 (kryterium objętości reduktora) w rozpatrywanych 3 punktach.

Gradienty dla kryterium K3

Obliczenia gradientów dla kryterium K3 w poszczególnych punktach Pareto- optymalnych znajdują się na stronach 171-172 (równania ZII.31 do ZII.42).

Gradient funkcji K31 w punkcie 1 przejmie postać:

$$\nabla K31 = \left[\frac{\partial K31}{\partial \psi_1}, \frac{\partial K31}{\partial \psi_2}, \frac{\partial K31}{\partial \psi_3}, \frac{\partial K31}{\partial \varphi_3} \right] = \quad (7.20)$$

$$= \left(\begin{array}{l} -0,07274 + 0,0548582*\psi_1 + 0,000000076152*\psi_2 - 0,000000735*\psi_3 + 0,0000015*\varphi_3, \\ -0,130532 + 0,000000076152*\psi_1 + 0,1208466*\psi_2 - 0,0000005317*\psi_3 + 0,0000015*\varphi_3, \\ -0,217385 - 0,000000735*\psi_1 - 0,0000005317*\psi_2 + 0,3036728*\psi_3 + 0,0000199*\varphi_3, \\ -0,000293 + 0,0000015*\psi_1 + 0,0000015*\psi_2 + 0,0000199*\psi_3 + 0,000518*\varphi_3 \end{array} \right)$$

Gradient funkcji K32 w punkcie 2 przejmie postać:

$$\nabla K32 = \left[\frac{\partial K32}{\partial \psi_1}, \frac{\partial K32}{\partial \psi_2}, \frac{\partial K32}{\partial \psi_3}, \frac{\partial K32}{\partial \varphi_3} \right] = \quad (7.21)$$

$$= \left(\begin{array}{l} -0,081307 + 0,061736*\psi_1 + 0,000000062413*\psi_2 + 0,00000036937*\psi_3 + 0,0000024*\varphi_3, \\ -0,110158 + 0,000000062413*\psi_1 + 0,1030632*\psi_2 + 0,0000035*\psi_3 + 0,0000094*\varphi_3, \\ -0,217453 + 0,00000036937*\psi_1 + 0,0000035*\psi_2 + 0,3037882*\psi_3 - 0,000035*\varphi_3, \\ -0,000004 + 0,0000024*\psi_1 + 0,0000094*\psi_2 - 0,000035*\psi_3 + 0,0000324*\varphi_3 \end{array} \right)$$

Gradient funkcji K33 w punkcie 3 przejmie postać:

$$\nabla K33 = \left[\frac{\partial K33}{\partial \psi_1}, \frac{\partial K33}{\partial \psi_2}, \frac{\partial K33}{\partial \psi_3}, \frac{\partial K33}{\partial \varphi_3} \right] = \quad (7.22)$$

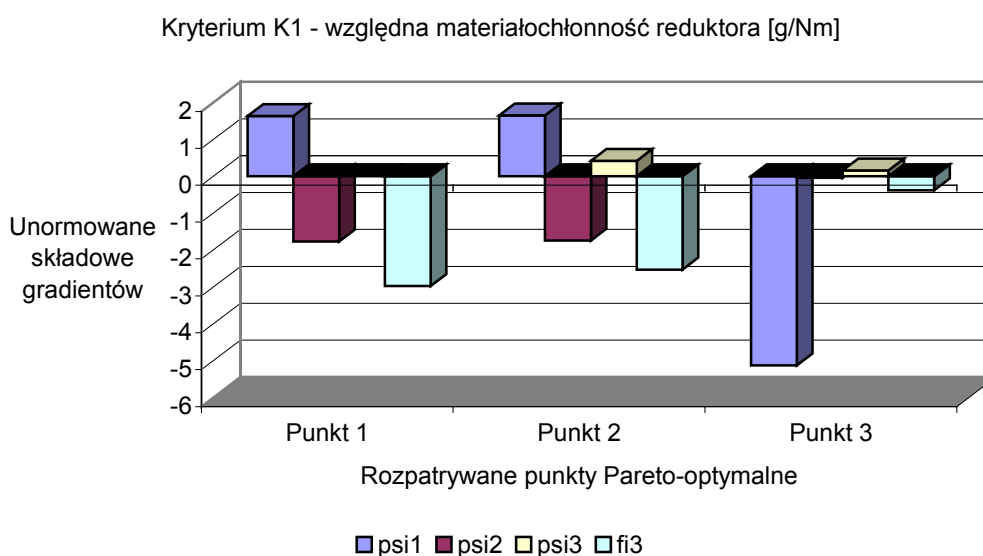
$$= \left(\begin{array}{l} -515,3786 + 1036,35766*\psi_1 - 0,002128*\psi_2 - 0,000375*\psi_3 + 0,0028842*\varphi_3, \\ 0,766344 - 0,002128*\psi_1 - 0,575166*\psi_2 - 0,012902*\psi_3 - 0,061398*\varphi_3, \\ -0,28777 - 0,000375*\psi_1 - 0,012902*\psi_2 + 0,4100108*\psi_3 - 0,006421*\varphi_3, \\ 0,4510035 + 0,0028842*\psi_1 - 0,061398*\psi_2 - 0,006421*\psi_3 - 0,7206*\varphi_3 \end{array} \right)$$

Wartości liczbowe gradientu w punkcie 1 o współrzędnych $[\psi_1, \psi_2, \psi_3, \varphi_3, u_2, u_3, K3] = [1,3303; 1,0919; 0,7863; 0,5213; 5; 5,3; 2,0958]$, w punkcie 2 o współrzędnych $[\psi_1, \psi_2, \psi_3, \varphi_3, u_2, u_3, K3] = [1,2318; 1,1989; 0,7873; 0,5222; 4,75; 5,3; 2,0972]$ i w punkcie 3 o współrzędnych $[\psi_1, \psi_2, \psi_3, \varphi_3, u_2, u_3, K3] = [0,4949; 1,2253; 0,8358; 0,516; 4; 5; 2,1506]$ dla kryterium K3 oraz unormowane składowe gradientu przedstawia tabela 7.30.

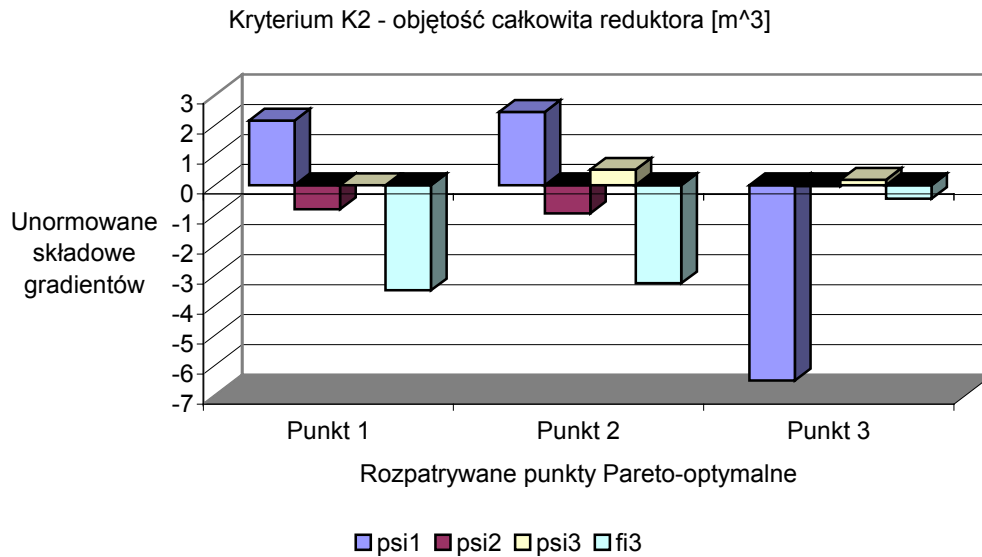
Tabela 7.30. Rzeczywiste oraz unormowane składowe gradientu funkcji celu K3

<i>składowe rzeczywiste gradientu</i>			
ZD	Punkt 1	Punkt 2	Punkt 3
ψ_1	-0,01243020	-0,05258976	-2,486626682
ψ_2	0,014208656	0,134122115	0,0180750934
ψ_3	0,214017580	0,217058239	0,0356093825
φ_3	-3,72643e-6	-4,102399e-7	3,64937999e-6
<i>składowe unormowane gradientu</i>			
ψ_1	-2,30E-01	-0,658888375	-2,272227074
ψ_2	2,10E-01	0,766731856	0,005298248
ψ_3	0,802948866	0,214848142	0,007413839
φ_3	-9,27E-06	-1,02E-06	7,46E-07

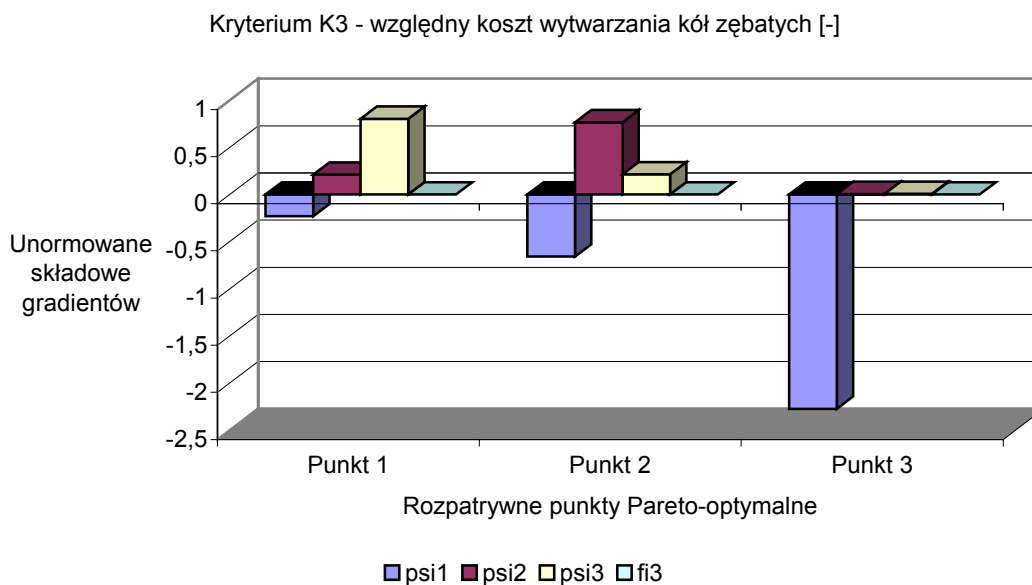
Dla unormowanych wartości składowych gradientów funkcji K3 w 3 punktach stworzono wykres (rys. 7.40), który jasno pokazuje wpływ poszczególnych zmiennych decyzyjnych na wartość odpowiedzi układu K3 (kryterium względnych kosztów wytwarzania kół zębata) w rozpatrywanych 3 punktach.



Rys. 7.38. Wykres unormowanych składowych gradientów dla kryterium K1



Rys. 7.39. Wykres unormowanych składowych gradientów dla kryterium K2



Rys. 7.40. Wykres unormowanych składowych gradientów dla kryterium K3

Na wykresie 7.38 widać, że najmniejszą wrażliwość kryterium względnej materiałochłonności reduktora (K1 [g/Nm]) na zmienne decyzyjne ψ_2 (współczynnik szerokości wieńca zębatego stopnia II), ψ_3 (współczynnik szerokości wieńca zębatego stopnia III) i φ_3 (kąt odchylenia linii łączącej osie kół II i III stopnia) wykazuje w punkcie Pareto-optymalnym z indeksem 3. W tym punkcie jednakże największy wpływ na to kryterium ma zmienna decyzyjna ψ_1 (współczynnik szerokości wieńca zębatego stopnia I). W pozostałych

rozwiązaniach jej wpływ jest znacznie mniejszy. W punktach 1 i 2 widać, że kryterium K1 reaguje w podobny sposób.

Na rysunku 7.39 widać, że kryterium K2 (objętość reduktora [m^3]) wykazuje w punkcie 3 najmniejszą wrażliwość ze względu na zmienne decyzyjne ψ_2 (współczynnik szerokości wieńca zębatego stopnia II), ψ_3 (współczynnik szerokości wieńca zębatego stopnia III) oraz φ_3 (kąt odchylenia linii łączącej osie kół II i III stopnia). W tym rozwiązaniu największy wpływ ma jednakże zmienna decyzyjna ψ_1 (współczynnik szerokości wieńca zębatego stopnia I). Zmienna ψ_3 nie wpływa znacząco na kryteria oceny w żadnym rozpatrywanym punkcie optymalnym. W rozwiązaniu 1 i 2 znaczny wpływ wykazuje również zmienna decyzyjna φ_3 . Ogólnie można stwierdzić, że reakcje kryterium K2 są zbliżone do reakcji kryterium K1.

Na rysunku 7.40 widać, że kryterium względnych kosztów wytwarzania kół zębatach (K3 [-]) najmniejszą wrażliwość wykazuje w punkcie Pareto-optymalnym z indeksem 3. Ponownie zmienna decyzyjna ψ_1 wykazuje to zdecydowanie największy wpływ. W rozwiązaniu 1 największy wpływ ma zmienna decyzyjna ψ_3 (współczynnik szerokości wieńca zębatego stopnia III), a w rozwiązaniu 2 największy wpływ mają zmienne ψ_2 oraz ψ_1 .

7.2.8. Mapa wpływów

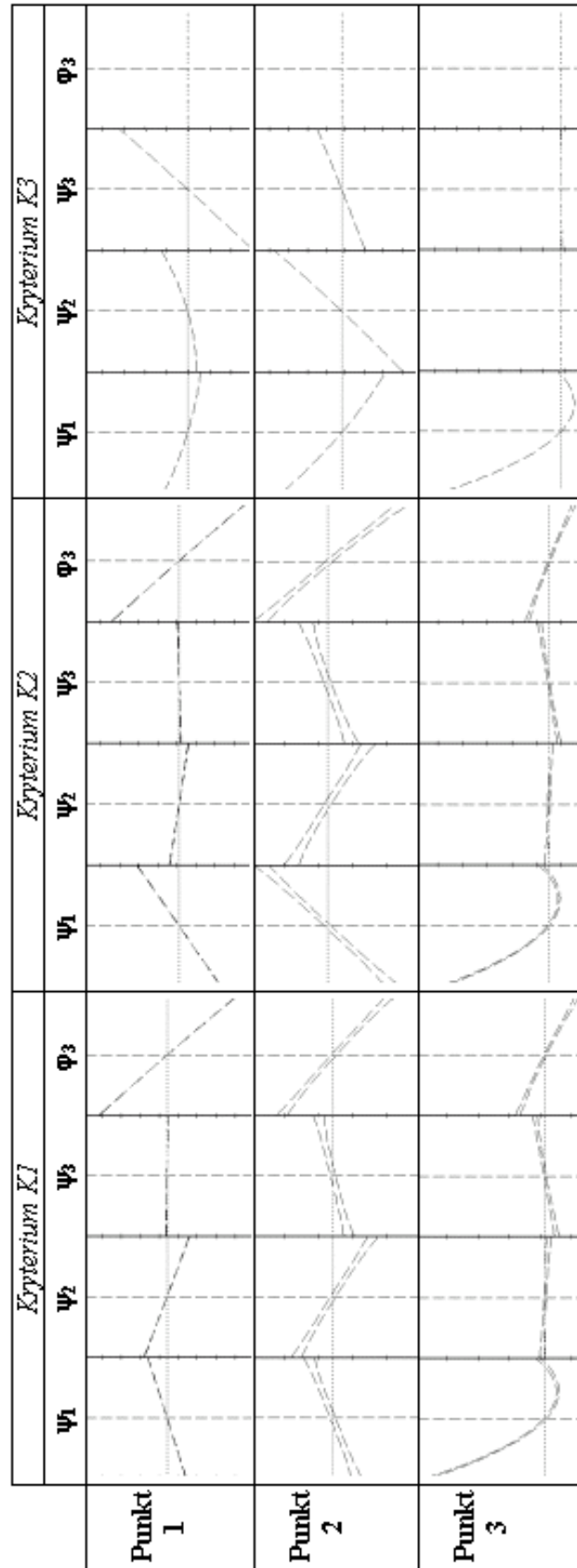
Rysunek 7.41 przedstawia mapę jakościową zależności między wszystkimi funkcjami celu (K1, K2, K3), a zmiennymi decyzyjnymi (ψ_1 , ψ_2 , ψ_3 , φ_3), dla 3 kolejno rozpatrywanych punktów. Linia kreskowa oznacza 95% przedziały ufności.

W przypadku punktu Pareto-optymalnego z indeksem 1 widać zbliżone zachowanie się wielkości kryterialnych K1 (względnej materiałochłonności) i K2 (objętości reduktora). Kryterium K3 (względny koszt wytwarzania kół zębatach) reaguje inaczej na zmiany wartości zmiennych decyzyjnych. Podobną sytuację można zaobserwować dla punktu Pareto-optymalnego z indeksem 2. W przypadku punktu Pareto-optymalnego z indeksem 3 widać, że zachowanie wszystkich trzech kryteriów jest zbliżone.

Analizując wykres kolumnami można zaobserwować w przypadku kryterium K1 zbliżone zachowanie w punktach z indeksami 1 i 2. W punkcie z indeksem 3 pojawia się nieliniowy charakter relacji między kryterium K1 (względna materiałochłonność), a zmienną decyzyjną ψ_1 (współczynnik szerokości wieńca zębatego stopnia I). Podobnie wygląda

sytuacja dla kryterium K2 (objętość reduktora). Reakcje K2 we wszystkich rozpatrywanych punktach mają zbliżony charakter, choć w punkcie 3 są one słabsze. Wyjątek stanowi zmienna decyzyjna ψ_1 , której zmniejszenie powoduje wzrost kryterium K2 w punkcie z indeksem 3. Inaczej przedstawia się sytuacja dotycząca kryterium K3 (względny koszt wytwarzania kół). Zmienna decyzyjna φ_3 (kąt odchylenia linii łączącej osie kół II i III stopnia), która dla kryteriów K1 oraz K2 była zmienną dominującą, nie wpływa na kryterium K3. W punkcie 3 widać brak relacji typu $K3=f(\psi_2, \psi_3, \varphi_3)$. W punkcie 1 dominuje zmienna decyzyjna ψ_3 (współczynnik szerokości wieńca zębatego stopnia III), a w punkcie 2 zmienna ψ_2 (współczynnik szerokości wieńca zębatego stopnia II). Można również zaobserwować krzywoliniowy charakter relacji $K3=f(\psi_1, \psi_2)$ w punkcie 1.

Analizując wpływ poszczególnych zmiennych decyzyjnych można powiedzieć, że wzrost współczynnika szerokości wieńca zębatego stopnia I ψ_1 wpływa na wzrost względnej materiałochłonności reduktora K1 oraz jego objętości K2, a jednocześnie powoduje obniżenie względnych kosztów wykonania kół zębatych K3. Taka sytuacja zachodzi dla punktów 1 i 2. W punkcie 3 sytuacja jest bardziej skomplikowana: zmniejszenie wartości współczynnika ψ_1 powoduje jednoznacznie zmniejszenie wartości wszystkich kryteriów, ale jego zwiększenie do pewnego stopnia powoduje, że kryteria również maleją, aż przychodzi taki moment, że wszystkie kryteria zaczynają rosnać. Wzrost wartości współczynnika szerokości wieńca zębatego stopnia II ψ_2 powoduje zmniejszenie względnej materiałochłonności K1 oraz objętości reduktora K2, ale podwyższa względny koszt wykonania kół zębatych K3 (taka sytuacja zachodzi dla punktów 1 i 2). W punkcie 3 współczynnik ψ_2 nie wpływa na koszt K3. Wzrost współczynnika szerokości wieńca zębatego stopnia III ψ_3 wpływa na zwiększenie względnej materiałochłonności K1 oraz objętości K2 (punkty 2 i 3), jak również zwiększa względny koszt wytwarzania kół zębatych K3 (punkty 1 i 2). W pozostałych przypadkach wpływ współczynnika jest nieznaczny. Wzrost kąta odchylenia linii łączącej osie kół II i III stopnia φ_3 powoduje zdecydowane zmniejszenie względnej materiałochłonności K1 oraz objętości reduktora K2 we wszystkich trzech punktach. Jednakże, zmienna ta nie wpływa na koszt wytwarzania kół K3.



Rys. 7.41. Obraz zależności między kryteriami K1, K2 i K3, a zmiennymi decyzyjnymi w rozpatrywanych punktach Pareto-optimalnych

7.2.9. Wybór rozwiązania najlepszego ze zbioru Pareto- optymalnego

Ostatni etap to podsumowanie uzyskanych informacji i dokonanie wyboru rozwiązania najlepszego. Na podstawie otrzymanych wykresów Pareto, profili odpowiedzi, unormowanych gradientów oraz mapy wrażliwości, można zauważyć, że kryterium względnej materiałochności, czyli stosunek masy reduktora do wyjściowego momentu obrotowego ($K1$ [g/Nm]), wykazuje najmniejszą wrażliwość w otoczeniu punktów Pareto- optymalnych z indeksem 3. W tym punkcie zmiany wartości zmiennych decyzyjnych wywołują najmniejsze reakcje funkcji celu. Jednakże trzeba zaznaczyć, że zmienna decyzyjna ψ_1 (współczynnik szerokości wieńca zębatego stopnia I) ma największy wpływ na kryterium $K1$ i jej tolerancje zależałyby „zacieśnić”. Kryterium objętości reduktora ($K2$ [m³]) wykazuje najmniejszą wrażliwość w otoczeniu punktu Pareto- optymalnych z indeksem 3. W tym typie rozwiązania optymalnego największy wpływ na $K2$ ma, podobnie jak poprzednio, zmienna decyzyjna ψ_1 . Kryterium względnego kosztu wytwarzania kół zębatach ($K3$ [-]) wykazuje zdecydowanie najmniejszą wrażliwość w otoczeniu punktu Pareto- optymalnego z indeksem 3. W tym punkcie największy wpływ na to kryterium ma współczynnik ψ_1 .

Jako rozwiązanie końcowe (najlepsze) zaproponowane zostało rozwiązanie Pareto- optymalne z indeksem 3, jednakże ze świadomością, że względna materiałochność $K1$, objętość reduktora $K2$ oraz względny koszt wytwarzania kół zębatach $K3$ są szczególnie wrażliwe na współczynnik szerokości wieńca zębatego stopnia I ψ_1 . Wybrane rozwiązanie charakteryzuje się najmniejszą masą i objętością, ale jest najdroższe z rozpatrywanych rozwiązań. Współrzędne rozwiązania najlepszego zawiera tabela 7.31.

Tabela. 7.31. Współrzędne rozwiązania najlepszego dla reduktora

ψ_1	ψ_2	ψ_3	ϕ_3	u_2	u_3	$K1$ [g/Nm]	$K2$ [m ³]	$K3$ [-]
0,4949	1,2253	0,8358	0,516	4	5	23,383	0,0101	2,1506

7.3. Porównanie otrzymanych wyników z innymi dostępnymi wynikami

Otrzymane zaproponowaną metodą rozwiązanie najlepsze zostało porównane z wynikiem otrzymanym przez dra inż. Dariusza Torzyńskiego z Politechniki Poznańskiej, który w swej rozprawie doktorskiej dokonał optymalizacji reduktorów zębatych stosując klasyczne metody optymalizacyjne. W podejściu polioptymalizacyjnym do badania reduktora zębatego przyjęto w pracy Torzyńskiego kryterium zastępcze w postaci addytywnej:

$$K = 0,39K_1 + 0,33K_2 + 0,28K_3$$

gdzie: K_1 , K_2 , K_3 to cząstkowe kryteria optymalizacji.

K_1 wyraża stosunek masy przekładni do wyjściowego momentu obrotowego (względna materiałochłonność reduktora) [g/Nm], K_2 wyraża objętość całkowitą reduktora zębatego [m^3], a K_3 wyraża stosunek względnych kosztów wytwarzania kół zębatych przekładni (odniesionych do znanych kosztów koła wzorcowego) [-].

Wyniki tych prac można znaleźć w pozycji [Torzyński, 2000], a częściowo również w pozycji [Torzyński, 2005].

Rozwiązanie uzyskane przez Torzyńskiego zawiera tabela 7.32. Tabela 7.33 zawiera rozwiązanie uzyskane przez autora niniejszej rozprawy. Oba rozwiązania zostały uzyskane dla momentu wyjściowego $T_w = 1000$ [Nm] i przełożenia całkowitego $i_c = 45$.

Tabela 7.32. Rozwiązania najlepsze uzyskane przez Torzyńskiego [Torzyński, 2000]

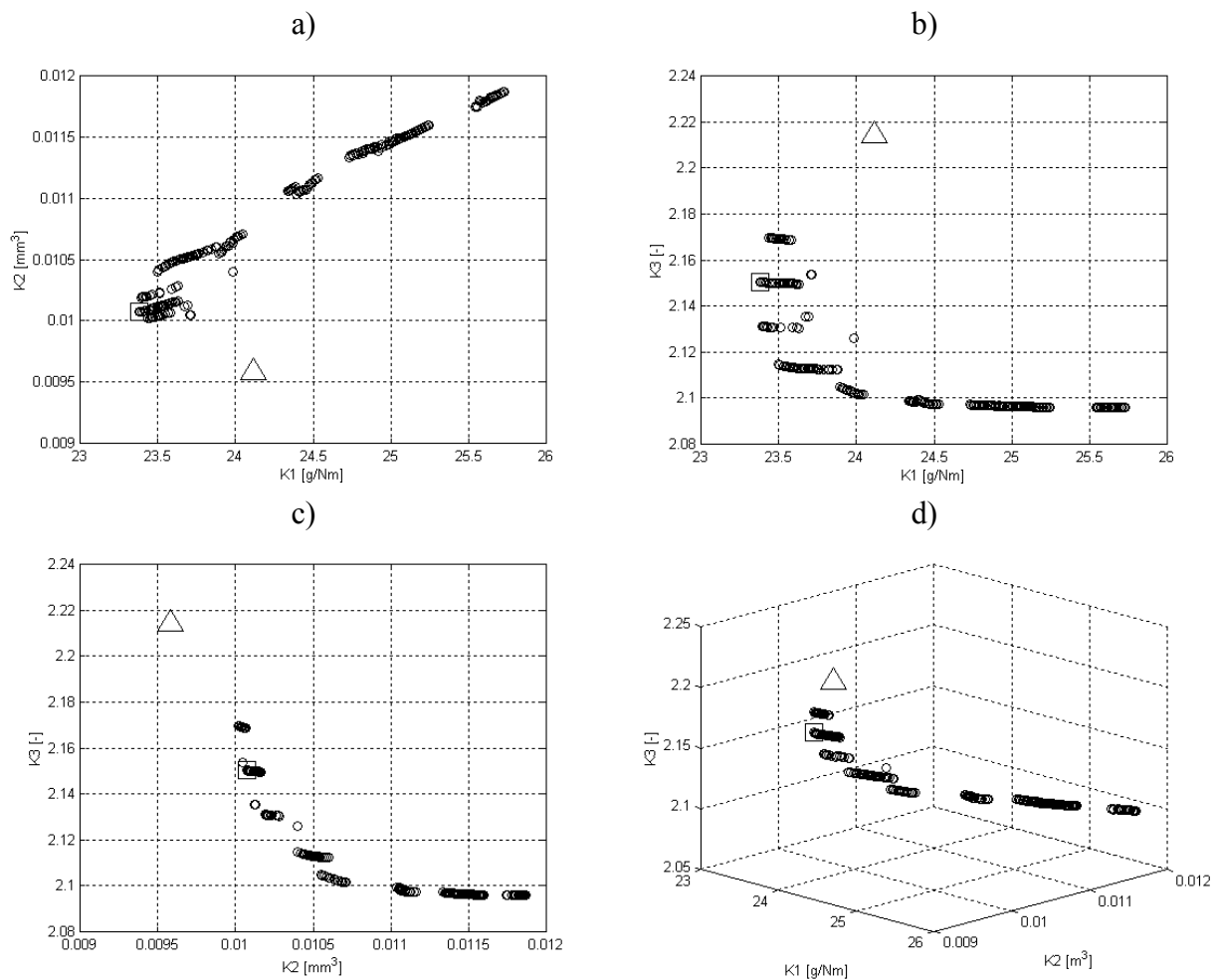
ψ_1	ψ_2	ψ_3	φ_3	u_2	u_3	K1 [g/Nm]	K2 [mm^3]	K3 [-]
0,631025	0,983602	1,295276	0,01	4,5	3,55	24,11884	9,57993E6	2,214

Tabela 7.33. Rozwiązania najlepsze uzyskane przez autora niniejszej dysertacji

ψ_1	ψ_2	ψ_3	φ_3	u_2	u_3	K1 [g/Nm]	K2 [mm^3]	K3 [-]
0,494887	1,225341	0,835847	0,516012	4	5	23,38298	10,07348E6	2,1506

Na rysunku 7.42 przedstawiono zbiór rozwiązań Pareto-optymalnych (otrzymanych dla reduktora w efekcie zastosowania algorytmu genetycznego do optymalizacji wielokryterialnej) wraz z otrzymanymi rozwiązaniami najlepszymi. Rozwiązanie Torzyńskiego zostało uzyskane w sposób tradycyjny (dla addytywnej postaci funkcji celu), lecz zaawansowany (system optymalizacyjny składał się z 5 programów optymalizacyjnych,

które były używane w odpowiedniej kolejności). Rozwiązanie zawarte w tej pracy uzyskano stosując nowe podejście (co opisano w rozdz. 6) do problemu polioptymalizacji.



Rys. 7.42. Porównanie wyników optymalizacji reduktora zębatego – kółka reprezentują zbiór Pareto, trójkąt rozwiązanie otrzymane przez Torzyńskiego, a kwadrat rozwiązanie otrzymane przez autora niniejszej dysertacji: a) obrazy rozwiązań na płaszczyźnie K1K2, b) obrazy rozwiązań na płaszczyźnie K1K3, c) obrazy rozwiązań na płaszczyźnie K2K3, d) widok całości w układzie K1K2K3

Spostrzeżenia dotyczące otrzymanych rozwiązań

- Dla otrzymanych różnych zestawów zmiennych decyzyjnych ψ_1 , ψ_2 , ψ_3 , φ_3 , u_2 i u_3 (tab. 7.32 i 7.33) uzyskano następujące wartości kryteriów oceny reduktora zębatego:
 - względna materiałochłonność (K1 [g/Nm]) została poprawiona (zmniejszona) o ponad 3%,

- względny koszt wytwarzania kół zębatach (K3 [-]) został poprawiony (zmniejszony) o 2,86%,
- objętość całkowita reduktora (K2 [mm³]) zwiększyła się o 4,9%.

Dziwi fakt pogorszenia się wartości objętości reduktora. Dalsza analiza związana z badaniem ograniczeń wykazała jednak, że rozwiązanie uzyskane przez Torzyńskiego nie leży w przestrzeni rozwiązań dopuszczalnych. Przekroczone zostało ograniczenia zanurzeniowego smarowania kół (g₁, pkt.4, str. 150).

- Otrzymane rozwiązania różnią się znacznie od siebie, co przedstawiono na wykresie 7.42. Widać wyraźnie, że rozwiązanie uzyskane przez Torzyńskiego nie leży na powierzchni Pareto, co jest konsekwencją przekroczenia ograniczenia smarowania kół.
- Uzyskane w niniejszej pracy rozwiązanie zawiera w sobie (oprócz wartości liczbowej punktu optymalnego):
 - wiedzę o zachowaniu się wielkości kryterialnych K1, K2 i K3 przy nieuniknionych wahaniami wartości zmiennych decyzyjnych ψ_1 , ψ_2 , ψ_3 i φ_3 ,
 - wiedzę o wzajemnych relacjach wielkości kryterialnych, które pozostają ze sobą w konflikcie (rys. 7.21, str. 94).

Te dodatkowe walory wpływają na wartość otrzymanego w tej pracy rozwiązania optymalnego.

Rozdział 8. PODSUMOWANIE I WNIOSKI

8.1. Podsumowanie

Celem pracy było opracowanie metody racjonalnego wyboru najlepszego rozwiązania (o najmniejszej wrażliwości na wahania wartości zmiennych decyzyjnych) ze zbioru rozwiązań polioptymalnych, otrzymywanych w konsekwencji zastosowania metody optymalizacji wielokryterialnej. Na potrzeby realizacji celu przygotowano zostało odpowiednie narzędzie.

W praktyce inżynierskiej potrzebna jest wiedza na temat zachowania się wielkości kryterialnej/ych w otoczeniu rozwiązania optymalnego. Znajomość taka prowadzi do wyboru określonego rozwiązania ze zbioru rozwiązań Pareto-optymalnych. Staje się ona również istotnym czynnikiem w procesie przydziału tolerancji, które istotnie wpływają na koszt wytwarzania i niezawodność wyrobu.

Problem wyboru został zaspokojony poprzez nałożenie dodatkowego kryterium na otrzymane rozwiązania. Kryterium tym jest wrażliwość funkcji celu na zmiany wartości zmiennych decyzyjnych, co jest naturalną konsekwencją procesu wytwarzania, ponieważ zmienne decyzyjne są z natury zmiennymi losowymi.

Na potrzeby badania otoczenia rozwiązań Pareto-optymalnych zaproponowana została autorska metoda, będąca kompilacją szeregu istniejących narzędzi: algorytmu genetycznego do optymalizacji wielokryterialnej, metod planowania eksperymentu oraz powierzchni odpowiedzi, metody wyznaczania gradientów jako miar wrażliwości wielkości kryterialnych. Aby ułatwić interpretację otrzymywanych wyników, każdy etap zaproponowanego podejścia kończy się ich wizualizacją. Wiedza o otrzymanych rozwiązaniach optymalnych została przedstawiona na 4 różne sposoby, na podstawie których można dokonać racjonalnego wyboru. Można ją podzielić na wiedzę w zakresie lokalnym (dotyczy jednego rozwiązania) oraz globalnym (dotyczy całego frontu Pareto-optymalnego). W zakresie lokalnym mamy do dyspozycji wykresy Pareto, przedstawiające relacje jednego danego kryterium ze zmiennymi decyzyjnymi oraz profile odpowiedzi, które przedstawiają relacje wielu (wszystkich) kryteriów względem zmiennych decyzyjnych. W zakresie globalnym mamy do dyspozycji wykresy gradientów, które przedstawiają relacje jednego kryterium względem wszystkich zmiennych decyzyjnych oraz mapę wpływów, która przedstawia relacje wszystkich kryteriów ze wszystkimi zmiennymi decyzyjnymi, a więc przedstawia pełny obraz sytuacji.

Taka kompilacja ułatwia konstruktorowi poszukiwanie optymalnych (w sensie Pareto) rozwiązań konstrukcyjnych elementów i zespołów maszyn. Ponieważ konstruowanie jest procesem mocno związanym z ryzykiem popełnienia błędu, wydaje się być uzasadnione tworzenie kolejnych narzędzi, które właśnie w kontekście popełniania błędów wspomagają działania konstruktora. Głównym zmysłem kontaktu człowieka ze światem jest wzrok. Ponad 80% informacji dociera do nas za jego pośrednictwem. Udowodniono, że ludzki mózg łatwiej interpretuje i zapamiętuje informacje przekazywane w postaci obrazów niż znaków (np. słów lub cyfr). Duży wysiłek został włożony w to, by każdy etap działań był zakończony obrazem graficznym, co nie tylko ułatwia, ale i przyspiesza działania konstruktora.

Metoda została przedstawiona na dwóch, wybranych z podstawowej literatury podstaw konstrukcji maszyn, przykładach projektowania. Optymalizacja hamulca wielotarczowego (wyniki analiz zostały przedstawione w skróconej postaci) jest stosunkowo prostym przykładem, można zatem otrzymane wyniki sprawdzić intuicyjnie. Został on zamieszczony w pracy w celu wykazania, że procedura jest realizowalna i że spełnia nałożone na nią wymagania. Przykład reduktora zębatego (wyniki analiz przedstawiono szczegółowo) jest bardziej złożony. Należy podkreślić fakt, że wykonana w pracy analiza optymalizacyjna reduktora zębatego wzbogaca proces projektowania przekładni o nowy element (wiedzę o wrażliwości kryteriów oceny obiektu na nieuniknione zmiany wartości pewnych zmiennych decyzyjnych).

W rozprawie nie zaproponowano formalnego sposobu podejmowania decyzji na podstawie wyników analizy wrażliwości, pozostawiając to użytkownikowi. Decydent może zastosować któryś z wariantów metody sumacyjnej (punktowej), iloczynowej itp., względnie może podjąć decyzję opierając się na własnym rozeznaniu. Spotyka się pogląd, że zbytnia formalizacja procesu podejmowania decyzji nie najlepiej służy twórczości w procesie projektowania. W związku z tym autor nie chciał preferować żadnej ze znanych metod oceny rozwiązań.

Zalety proponowanej metody

- ze względu na sprawność procesu projektowania:
 - komputerowe wspomaganie (CAD) decyzji w procesie wyboru rozwiązania optymalnego ze zbioru Pareto optymalnych rozwiązań znajdujących się na powierzchni Pareto optymalnej,

- możliwość poznania wrażliwości, a co za tym idzie i odporności, danego złożonego układu na zmiany wartości zmiennych decyzyjnych, które są wynikiem zmienności zachodzących w procesie wytwarzania, montażu itd.,
- wspomaganie nabywania doświadczenia przez konstruktora, a dzięki temu zmniejszenie ryzyka związanego z podejmowanymi decyzjami,
- polioptymalizacja umożliwia wgląd w naturę rozwiązywanego zadania, szczególnie w naturę konfliktu między sprzecznymi wymaganiami,
- ze względu na zastosowanie metody sztucznej inteligencji:
 - optymalizacja wielokryterialna została wykonana programem ewolucyjnym, który jest niezależny od rodzaju zadania optymalizacyjnego,
- ze względu na reprezentację wyników:
 - graficzna reprezentacja otrzymywanych wyników znacznie przyspiesza i ułatwia ich analizę, a co za tym idzie, przyspiesza podejmowanie decyzji, jako konsekwencja lepszego przeglądu danej sytuacji,
 - w metodzie zastosowano nowoczesne narzędzia komputerowa i wykazano, że są one skuteczne, ponieważ ułatwiają pracę konstruktora i usprawniają proces konstruowania.

Zamieszczone dwa przykłady zastosowania przedstawionej w rozprawie metody świadczą, że proponowane podejście spełnia założone cele. Na przykładach wykazano, że:

- można połączyć w jeden spójny proces kilka różnych narzędzi badawczych, które do tej pory wykorzystywane były osobno. Należą do nich algorytmy genetyczne do optymalizacji wielokryterialnej, metody analizy skupień, metody planowania eksperymentu i powierzchni odpowiedzi oraz metoda pochodnych cząstkowych,
- efektem zastosowania metody jest wiedza (w ujęciu jakościowym), na ile dana konstrukcja jest odporna na wahania wartości zmiennych decyzyjnych,
- uzyskana wiedza przyczynia się do tworzenia lepszych konstrukcji (o zwiększonej trwałości i niezawodności).

Właściwości proponowanej metody, jako propozycji poprawy stanu istniejącego

1. Metoda służy do generowania zbioru wariantów polioptymalnych i analizy wrażliwościowej wybranych elementów tego zbioru.

2. Podejście uwzględnia specyfikę zadań projektowo-konstrukcyjnych w budowie maszyn (nieliniowości modelu matematycznego, ograniczenia).
3. Metoda ma cechę uniwersalności, tj. nadaje się do rozwiązywania problemów dyskretnych (rozdz. 7.1) oraz ciągłych (rozdz. 7.2).
4. Procedura metody nie jest systemem zamkniętym: umożliwia dołączanie nowych narzędzi optymalizacji. Przewiduje się dalszy rozwój metody (rozdz. 8.3).
5. W procedurze wykorzystuje się ogólnie dostępne oprogramowanie (MATLAB, pakiet statystyczny JMP, MS Excel).
6. Nakład pracy wymagany do realizacji metody można zmniejszyć przez stworzenie odpowiedniego programu komputerowego. Należy jednak zwrócić uwagę, żeby nie ograniczyć nadmiernie możliwości ingerencji użytkownika, ponieważ wtedy metoda utraci cechę interakcyjności.
7. Ze względu na ograniczoną objętość, w rozprawie pokazano zastosowanie metody tylko na dwóch zadaniach. Nie ma zatem pewności, że metoda nadaje się do wszystkich rodzajów zadań. Mogą pojawić się zadania, które będą wymagały adaptacji metody.
8. Podejście nie wymaga przyjmowania *a priori* metody podejmowania decyzji o wyborze rozwiązania. Użytkownik może zastosować swoje preferencje.
9. Metoda jest zorientowana na procesy decyzyjne w projektowaniu maszyn. Może być stosowana dla liczby kryteriów $K > 3$, co się często zdarza. W literaturze znajdujemy zasadniczo wytyczne dla $K \leq 3$ (np. [Tarnowski, 1997; Ostwald, 2003]). Zastosowanie proponowanej metody komplikuje się przy dużej liczbie zmiennych decyzyjnych, kryteriów oraz rozpatrywanych rozwiązań Pareto-optymalnych, niemniej rozszerza ona możliwości tradycyjnych metod polioptymalizacji.
10. Metoda zawiera działania o różnym stopniu sformalizowania, od ściśle algorytmicznych do heurystycznych, podejmowanych przez decydenta na podstawie jego oceny sytuacji problemowej. Niektóre wskazówki racjonalizacji działań heurystycznych przy podejmowaniu decyzji zamieszczono w rozdz. 6.3 i 6.4.

8.2. Wnioski

Wnioski wynikające z pracy zostały podzielone na dwie grupy: wnioski dotyczące metody (szczegółowe i ogólne) oraz wnioski dotyczące przykładowych zadań (hamulca wielotarczowego i reduktora zębatego trzystopniowego).

- Wnioski szczegółowe dotyczące metody:
 - Po dobraniu odpowiedniej liczby iteracji, wielkości populacji i stopnia mutacji otrzymano powtarzalność wyników programu ewolucyjnego MOGA, co oznacza, że program daje wyniki wiarygodne. Zatem jest on dobrą i niezawodną podstawą wyjściową do dalszych badań.
 - Język programowania MATLAB'a umożliwia łatwą implementację modeli matematycznych obiektów, które często wyrażone są przez skomplikowane formuły matematyczne.
 - Grupowanie otrzymanych rozwiązań umożliwia zmniejszenie ich liczby do kilku reprezentatywnych, co prowadzi do oszczędności wysiłków związanych z ich analizą.
 - Metody planowania eksperymentu umożliwiają uzyskanie potrzebnych informacji przy ograniczonym nakładzie obliczeniowym, wyznaczenie rozwiązań niezależnych, których wpływ możemy rozpatrywać indywidualnie.
 - Metody powierzchni odpowiedzi dają możliwość szybkiego i łatwego tworzenia metamodeli relacji zachodzących pomiędzy zmiennymi decyzyjnymi, którymi chcemy sterować, a kryteriami, czyli odpowiedziami układu.
 - Postać wielomianowa metamodelu $K = f(ZD)$ umożliwia łatwe wyznaczenie gradientu danej funkcji.

Wnioski ogólne dotyczące metody:

- Metoda wykazuje charakter uniwersalny, dzięki czemu można ją stosować w różnych przypadkach (bardziej i mniej złożonych, dla zmiennych decyzyjnych dyskretnych i ciągłych), co pokazane zostało na przykładach.
- Metoda umożliwia analizę odporności otrzymanych rozwiązań Pareto- optymalnych na wahania wartości zmiennych sterujących, co z punktu widzenia niezawodności produktu jest bardzo cenne.

- Kompilacja istniejących metod umożliwia osiągnięcie pewnego efektu synergii, jaki byłby niemożliwy do osiągnięcia w przypadku stosowanie tych metod niezależnie.
 - Wiedza o zachowaniu się kryterium jest użyteczna w procesie przydziału tolerancji. Brak reakcji kryterium prowadzi do tego, że tolerancje można „rozluźnić”, co w efekcie prowadzi do oszczędności finansowych. Dla tych zmiennych decyzyjnych, które najbardziej wpływają na dane kryterium, należy ostrożnie określić „węższe” tolerancje.
- Wnioski dotyczące hamulca wielotarczowego:
 - Zachowanie się funkcji kryterialnych mh (masa tarcz hamulcowych [kg]) i th (czas zatrzymania hamulca [s]) jest bardzo podobne w różnych punktach frontu Pareto.
 - Masa tarcz mh rośnie wraz ze wzrostem średnicy zewnętrznej tarczy Rz (ta wielkość wykazuje największy wpływ na masę), a maleje wraz ze wzrostem średnicy wewnętrznej tarczy Rw . czas zatrzymania hamulca th skraca się wraz ze wzrostem siły włączającej F (ta wielkość wykazuje największy wpływ na czas zatrzymania). Ponadto, wzrost średnic tarczy (Rz i Rw) powoduje skrócenia czasu zatrzymania hamulca.
 - Decydujący wpływ na masę tarcz mh i czas zatrzymania hamulca th mają średnice zewnętrzna Rz i wewnętrzna Rw , a zatem tym zmiennym decyzyjnym należy przydzielić węższe tolerancje.

Wnioski dotyczące reduktora zębatego:

- Zachowanie się kryteriów oceny $K1$ (stosunku masy do momentu wyjściowego [g/Nm]) i $K2$ (objętości reduktora [m^3]) jest zbliżone we wszystkich rozpatrywanych punktach. Kryterium $K3$ (koszt wytwarzania kół zębatych [-]) zachowuje się inaczej niż kryteria $K1$ i $K2$.
- Największy wpływ na względną materiałochłonność $K1$ i objętość reduktora $K2$ ma kąt odchylenia linii łączącej osie kół drugiego i trzeciego stopnia φ_3 . Jego wzrost wpływa na zmniejszenie wartości $K1$ i $K2$. Największy wpływ na koszt wytwarzania kół $K3$ ma współczynnik szerokości wieńca zębatego stopnia pierwszego ψ_1 . Jego wzrost wpływa na zmniejszenie kosztu.

- Najmniejsza wrażliwość wielkości kryterialnych K_1 , K_2 i K_3 występuje dla rozwiązania 3. Jednakże, wszystkie kryteria są w tym punkcie szczególnie wrażliwe na współczynnik szerokości wieńca zębatego stopnia pierwszego ψ_1 .
- Węższe tolerancje należy przydzielić zmiennym decyzyjnym ψ_1 (współczynnikowi szerokości wieńca zębatego stopnia pierwszego) i φ_3 (kątowni odchylenia linii łączącej osie kół drugiego i trzeciego stopnia).

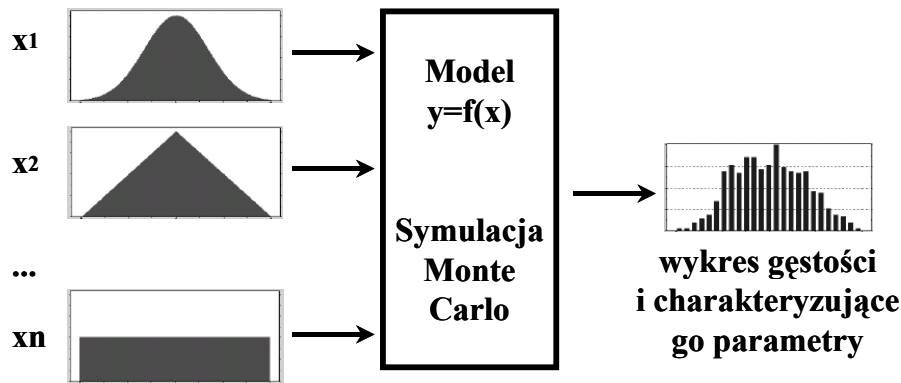
8.3. Plany na przyszłość – kierunki rozwoju metody

Metod powinna być sprawdzona na większej liczbie zadań. Jedną z możliwości rozwoju metody jest identyfikacja reguł wiążących zmienne decyzyjne, kryteria i ograniczenia [Deb, 2005]. Jest to forma globalnego podejścia do wpływu pełnego zakresu zmiennych decyzyjnych. Ogólnie można powiedzieć, że podejście to składa się z dwóch etapów: (i) analizy wstępnej (badanie zachowania się funkcji celu dla wartości zmiennych decyzyjnych z zakresu zmienności) oraz (ii) analizy wyższego rzędu (badanie zachowania funkcji celu dla wartości wybranych zmiennych decyzyjnych spoza zakresu zmienności).

Innym pomysłem jest wykorzystanie w optymalizacji analizy monotoniczności [Dixon, 1995; Rohatyński, 2002; Rohatyński, 2003]. Zaletą stosowania zasad monotoniczności (ZM) jest lepsze zrozumienie problemu i redukcja wymiarowości zadania optymalizacyjnego. Zostały sformułowane 2 zasady monotoniczności: (i) 1ZM – dotyczy sytuacji, gdy wszystkie zmienne projektowe należą do funkcji celu, (ii) 2ZM – opisuje przypadek, gdy nie wszystkie zmienne decyzyjne należą do funkcji celu. Każda zmienna projektowania, posiadająca własność monotoniczności względem funkcji celu, musi być ograniczona przez nierówność. W przeciwnym przypadku obszar poszukiwań byłby nieograniczony. Ograniczenie (nierówność) aktywne staje się równością, a zatem może być wykorzystane do eliminacji jednej zmiennej, co zmniejsza wymiarowość zadania oraz prowadzi do uproszczenia modelu. Zasady monotoniczności można zastosować, gdy (i) zmienne projektowe posiadają własność monotoniczności względem funkcji celu, (ii) stopień skomplikowania zadania jest umiarkowany.

Kolejną możliwość rozwinięcia metody to zastosowanie w analizie wrażliwości metody opartej na równaniu wariancji [Booker, 2001]. W tym podejściu miarą wrażliwości jest stosunek zmienności i -tego czynnika (np. zmiennej decyzyjnej) do zmienności

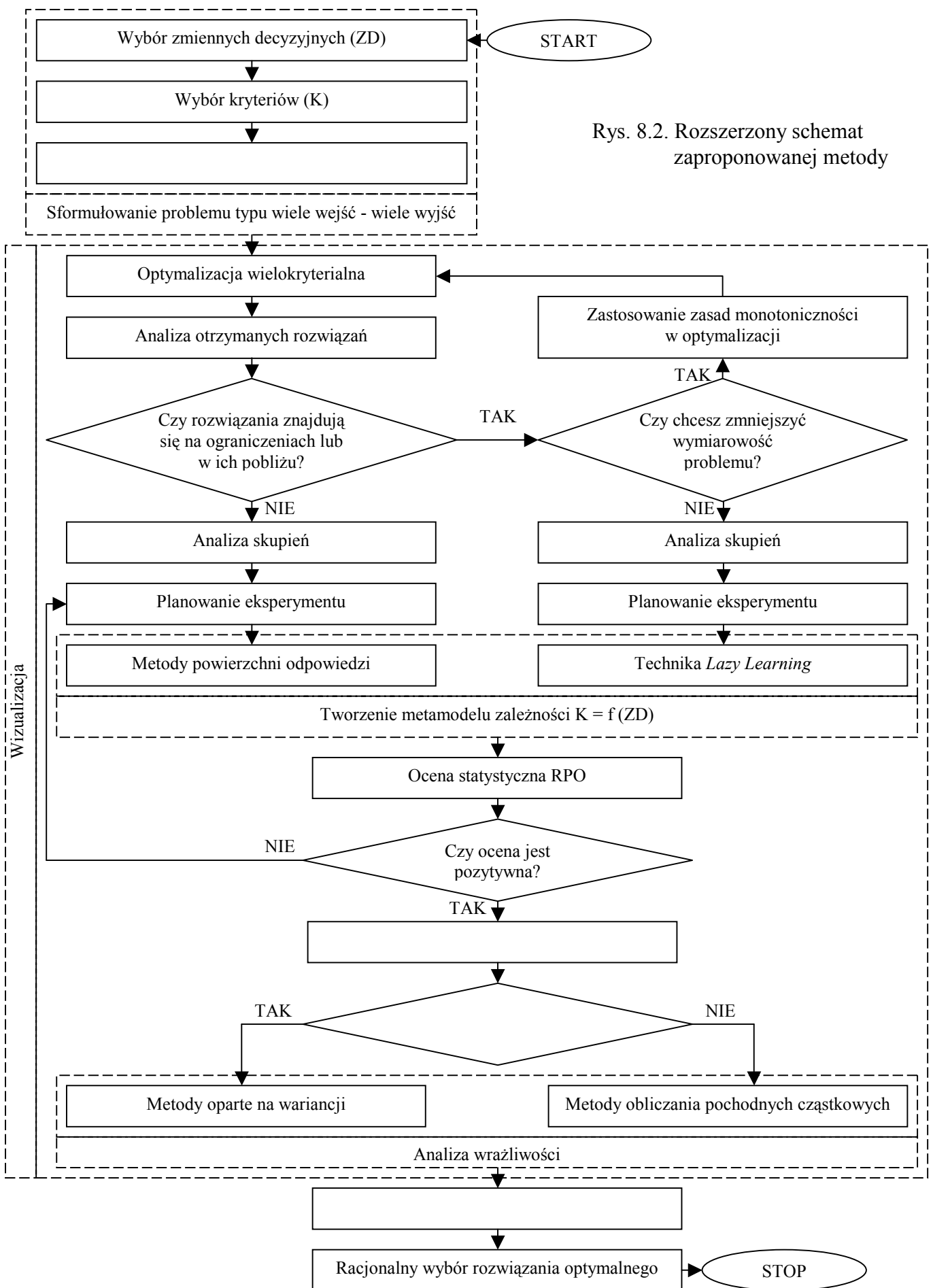
odpowiedzi układu (np. kryterium oceny). W kontekście oszczędności czasowych ta propozycja wydaje się być uzasadniona, ponieważ jest szybsza, lecz niestety, nie zawsze jest możliwe zastosowanie tej metody z powodu braku informacji o rozkładach niektórych zmiennych decyzyjnych. Rysunek 8.1 przedstawia tę propozycję.



Rys. 8.1. Zastosowanie w analizie wrażliwości metody opartej na równaniu wariancji

Do wyznaczania metamodelu w proponowanej metodzie stosuje się powierzchnie odpowiedzi. Istnieje również inne podejście, które można zastosować. Jest to technika o nazwie *Lazy Learning*, które została zaimplementowana w toolboxie LLT (Lazy Learning Toolbox) [Birattari, 1999]. Jej zaletą jest możliwość różnicowania siły wpływu wejść (np. zmiennych decyzyjnych) na wyjścia (np. kryteria oceny) poprzez zastosowanie w równaniu regresji wektora wag. LLT można znaleźć pod adresem: <http://iridia.ulb.ac.be/~lazy/>. Toolbox składa się z 4 funkcji: wielomianu stałego, liniowego, kwadratowego i łączonego, będącego „mieszanką” trzech poprzednich, które służą do prognozowania wartości metodą aproksymacji. To podejście zostało zastosowane do prognozowania wartości pośrednich oraz wyznaczania wrażliwości funkcji na zmiany danych wejściowych [Białas-Heltowski, 2005a].

Rysunek 8.2 przedstawia schemat blokowy rozszerzonej metody.



Rys. 8.2. Rozszerzony schemat zaproponowanej metody

Otwartym zagadnieniem pozostaje opracowanie interakcyjnego systemu komputerowego łączącego w całość wszystkie wykorzystane w metodzie narzędzia komputerowe.

Autor traktuje przedstawioną w rozprawie metodę jako swoją pierwszą próbę odpowiedzi na potrzeby procesu projektowo-konstrukcyjnego. Zdając sobie sprawę z niedoskonałości tej próby zamierza ją konsekwentnie udoskonalać i rozwijać.

LITERATURA

1. Achnazarowa S. Ł., Kafarow W. W., *Optymalizacja eksperymentu w chemii i technologii chemicznej*, WNT, Warszawa, 1982
2. Arabas J., *Wykłady z algorytmów ewolucyjnych*, WNT, Warszawa, 2001
3. Białas S., *Tolerancje geometryczne*, PWN, Warszawa, 1986
4. Białas-Heltowski K., Rohatyński R., *Narzędzia do badania zależności między wielkościami konstrukcyjnymi w obliczeniach inżynierskich*, W: XXII Sympozjon Podstaw Konstrukcji Maszyn, Gdynia-Jurata, Polska, 2005, Wydaw. Fundacji Rozwoju Akademii Morskiej, T. 2: Referaty sesyjne i plakatowe, 2005, s. 81-88
5. Białas-Heltowski K., Rohatyński R., *A method for intelligent prediction of missed data*, W: Recent Developments in Artificial Intelligence Methods - AI-METH 2005, Gliwice, Polska - Gliwice: Silesian University of Technology, 2005a, s. 29-32
6. Birattari M., Bontempi G., *The Lazy Learning Toolbox for use with MATLAB*, Universite Libre de Bruxelles, 1999
7. Booker J. D., Raines M., Swift K. G., *Designing capable and reliable products*, Butterworth-Heinemann, Oxford, 2001
8. Branowski B., *Wprowadzenie do projektowania*, PWN, Warszawa, 1998
9. Brzózka J., Dorobczyński L., *Programowanie w Matlab*, Mikom, Warszawa, 1998
10. Całczyński A., red. wyd., *Metody optymalizacji decyzji w przemyśle*, cz. I, Wyższa Szkoła Inżynierska, Radom, 1988
11. Cempel C., *Teoria i inżynieria systemów*, Wydanie dostępne w wersji elektronicznej na stronie: http://neur.am.put.poznan.pl/is_2005/index.htm, 2005
12. Chlebus E., *Techniki komputerowe CAx w inżynierii produkcji*, WNT, Warszawa, 2000
13. Cichosz K., Borek T., *Wprowadzenie do optymalizacji wielokryterialnej*, Katedra Informatyki (projekt studencki), AGH, Kraków, 2006
14. Corne D., Dorigo M., Glover F., *New ideas in optimization*, McGraw-Hill Publishing Company, 1999
15. Cytowski J., *Algorytmy genetyczne. Podstawy i zastosowania*, Akademicka Oficyna Wydawnicza PLJ, Warszawa, 1996
16. Deb K., Srinivasan A., *Innovization: Innovative design principles through optimization*, KanGAL Report Number 2005007, Indian Institute of Technology, Kanpur, India, 2005
17. de Weck O. L., *Multiobjective optimization: history and promise*, The Third China-Japan-Korea Joint Symposium on Optimization of Structural and Mechanical Systems, Kanazawa, Japan, October 30-November 2, 2004
18. Dietrich M., red., *Podstawy konstrukcji maszyn*, t. 1 i 3, WNT, Warszawa, 1995
19. Dietrych J., *Projektowanie i konstrukcja*, WNT, Warszawa, 1974
20. Dietrych J., *System i konstrukcja*, WNT, Warszawa, 1985
21. Dixon J. R., Corrado P., *Engineering design and design for manufacturing. A structured approach*, Field Stone Publishers, 1995
22. Draper N. R., Smith H., *Applied regression analysis*, John Wiley and Sons, New York, 1998
23. Dziama A., *Metodyka konstruowania maszyn*, PWN, Warszawa, 1985
24. Frey C. H., *Identification and review of sensitivity analysis methods*, NCSU/USDA Workshop on Sensitivity Analysis Methods held on June 11 through 12 at North Carolina State University, 2001
25. Goldberg D. E., *Algorytmy genetyczne i ich zastosowanie*, WNT, Warszawa, 1995

26. Goliński J., *Metody optymalizacyjne w projektowaniu technicznym. Rozwiązywanie na maszynach cyfrowych*, WNT, Warszawa, 1974
27. Goliński J., *Adaptacyjne systemy poszukiwania konstrukcji optymalnej*, PWN, Warszawa, 1976
28. Helton J. C., Davis F. J., *Illustration of sampling-based method for uncertainty and sensitivity analysis*, NCSU/USDA Workshop on Sensitivity Analysis Methods held on June 11 through 12 at North Carolina State University, 2001
29. Hummienny Z., red., *Specyfikacje geometrii wyrobów (GPS). Podręcznik europejski*, WNT, Warszawa, 2004
30. Isukapalli S. S., *Uncertainty Analysis of Transport-Transformation Models*, Dysertacja dostępna jest na stronie: www.ccl.rutgers.edu/~ssi/thesis, New Jersey, 1999
31. Johnson R. C., *Mechanical design synthesis with optimization applications*, Van Nostrand Reinhold Company, 1971
32. Johnson R. C., *Optimum design of mechanical elements*, John Wiley & Sons, 1980
33. Krzysztofiak M., red., *Ekonometria*, PWE, Warszawa, 1979
34. Kucharczyk J., *Algorytmy analizy skupień w języku ALGOL 60*, PWN, Warszawa, 1982
35. Kunkle D., *A summary and comparison of MOEA algorithms*, Northeastern University (NU) in Boston (raport), Massachusetts, 2005
36. Lamont G. B. i inni, *Multi-objective Evolutionary Algorithms: What, Why and Where. A tutorial*, The Third International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization, Guanajuato, Meksyk, 2005
37. Leśniak Z. K., *Metody optymalizacji konstrukcji przy zastosowaniu maszyn matematycznych*, Arkady, Warszawa, 1970
38. Lyman O., *An introduction to statistical methods and data analysis*, Duxbury Press, Boston, 1984
39. Mańczak K., *Technika planowania eksperymentu*, WNT, Warszawa, 1976
40. Michalewicz Z., *Algorytmy genetyczne + struktury danych = programy ewolucyjne*, WNT, Warszawa, 1999
41. Miczek M., *Algorytmy genetycznie i ich zastosowanie do dopasowywania zależności teoretycznych do doświadczalnych*, Instytut Fizyki (referat w Zakładzie Fizyki Stosowanej), Politechnika Śląska, Gliwice, 2004
42. Milkiewicz F., *Wstęp do metod optymalizacji i identyfikacji obiektów przemysłowych*, Politechnika Gdańska, Gdańsk, 1979
43. Mrozek B., Mrozek Z., *Matlab 5.x, Simulink 2.x. Poradnik użytkownika*, PLJ, Warszawa, 1998
44. Nikiel G., *Optymalizacja wielokryterialna w projektowaniu procesów wytwarzania – wybrane zagadnienia*, Bielsko-Biała (raport z badań własnych), 2004
45. Oktaba W., *Elementy statystyki matematycznej i metodyka doświadczeń*, PWN, Warszawa-Łódź, 1963
46. Osiński J., red., *Wspomagane komputerowo projektowanie typowych zespołów i elementów maszyn*, WNT, Warszawa, 1994
47. Osiński Z., Wróbel J., *Teoria konstrukcji maszyn*, PWN, Warszawa, 1982
48. Osiński Z., Bajon W., Szucki T., *Podstawy konstrukcji maszyn*, PWN, Warszawa, 1986
49. Osiński Z., Wróbel J., *Wybrane metody komputerowo wspomaganego konstruowania maszyn*, PWN, Warszawa, 1988
50. Osiński Z., red., *Podstawy konstrukcji maszyn*, PWN, Warszawa, 2002
51. Ostwald M., *Podstawy optymalizacji konstrukcji*, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań, 2003

52. Osyczka A., *Evolutionary algorithms for single and multicriteria design optimization*, Physica-Verlag, 2001
53. Ölvander J., *Robustness considerations in multi-objective optimal design*, Journal of Engineering Design, Vol. 16, No. 5, October 2005, pp. 511-523
54. Pahl G., Beitz W., *Nauka konstruowania*, WNT, Warszawa, 1984
55. Papalambros P. Y., Douglass J. W., *Principals of optimal design. Modeling and computation*, Cambridge University Press, 2000
56. Peschel M., Riedel C., *Poliptymalizacja: metody podejmowania decyzji kompromisowych w zagadnieniach inżyniersko-technicznych*, WNT, Warszawa, 1979
57. Pogorzelski W., *Optymalizacja układów technicznych w przykładach*, WNT, Warszawa, 1978
58. Popov A., *Genetic algorithms for optimization. Programs for MATLAB*, Podręcznik użytkownika, Hamburg, 2005
59. Porębska M., *Poliptymalizacja przekładni pasowych z pasem klinowym wspomagana komputerowo*, W: XVIII Sympozjon PKM, cz. III, Kielce-Ameliówka, 16-20.09.1997
60. Rohatyński R., Klekiel T., Białas-Heltowski K., *Evolutionary algorithms in cooperation with traditional optimization at optimal synthesis of a planar linkage mechanism*, W: Methods of Artificial Intelligence - AI-METH 2002, Gliwice, Polska, 2002 - Gliwice: Silesian University of Technology, 2002, s. 91-96
61. Rohatyński R., Klekiel T., Białas-Heltowski K., *Investigation of evolutionary algorithm effectiveness in optimal synthesis of certain mechanism*, W: Evolutionary methods in mechanics: proceedings of the IUTAM Symposium, Kraków, 2002 - Dordrecht: Kluwer Academic Publishers (Solid Mechanics and its Application; 117), 2004, s. 13-22
62. Rohatyński R., *Wpływ monotoniczności zmiennych i aktywności ograniczeń na położenie optimum*, W: Poliptymalizacja i komputerowe wspomaganie projektowania, Mielno 2002, Warszawa, WNT, 2002
63. Rohatyński R., Jasion P., *Zastosowanie zasad monotoniczności w optymalizacji. Przykład hamulca klockowego*, W: Metody i środki projektowania wspomaganego komputerowo, IV konferencja, Warszawa, 2003
64. Rudzki K., Tarnowski W., *Wykorzystanie poliptymalizacji do graficznej prezentacji złożonych modeli matematycznych w konstruowaniu na przykładzie przekładni zębatej*, W: XVIII Sympozjon PKM, cz. III, Kielce-Ameliówka, 16-20 września 1997
65. Ryan T. P., *Modern regression methods*, John Wiley and Sons, New York, 1997
66. Saltelli A., Ratto M., Tarantola S., Campolongo F., *Sensitivity analysis for chemical models*, Chemical Reviews, Vol. 105, No. 7, pp. 2811–2828, 2005
67. SAS Institute Inc., *Pakiet statystyczny JMP 5.1.*, 2003
68. Soban D., Mavris D., *Formulation of a methodology for the probabilistic assessment of system effectiveness*, W: AIAA 2000 Missile Sciences Conference, Monterey, CA, November 7-9, 2000
69. Siddall J. N., *Analytical decision-making in engineering design*, Prentice Hall Englewood Cliffs, New Jersey, 1972
70. Stolc L., *Wstęp do metod optymalizacji i identyfikacji*, Politechnika Gdańska, Gdańsk, 1985
71. Szymanowski J. i inni, *Metody optymalizacji w języku FORTRAN*, PWN, Warszawa, 1984
72. Szymczak C., *Elementy teorii projektowania*, Politechnika Gdańska, Gdańsk, 1991
73. Tarnowski W., *Model procesu wyboru w projektowaniu technicznym*, Monografie WSI Koszalin, Koszalin, 1987

74. Tarnowski W., *Podstawy projektowania technicznego*, Skrypt, Wydawnictwo Uczelniane Wyższej Szkoły Inżynierskiej w Koszalinie, Koszalin, 1989
75. Tarnowski W., red., *Komputerowe wspomaganie projektowania. Laboratorium*, WSI, Koszalin, 1991
76. Tarnowski W., *Podstawy projektowania technicznego*, WNT, Warszawa, 1997
77. Tarnowski W., *Poliptymalizacja procesu jako narzędzie projektowania i konstruowania*, W: XVIII Sympozjon PKM, cz. III, Kielce-Ameliówka, 16-20 września 1997a
78. Tarnowski W., *Soft approach to computer aided optimization*, W: IVth International Seminar and Workshop, Engineering Design and Integrated Product Development, Zielona Góra-Rydzyń 2004, 7-9 październik 2004
79. Tarnowski W., *Soft optimization – computer aided intuitive decision making*, W: Poliptymalizacja i komputerowe wspomaganie projektowania, WNT, Warszawa, 2004a
80. Torzyński D., *Wpływ wyboru ograniczeń modelu konstrukcji na wyniki optymalizacji reduktora zębatego*, W: XII Konferencja nt. Metody i środki projektowania wspomaganego komputerowo, Warszawa, listopad 1999
81. Torzyński D., *Metoda zintegrowanego projektowania zębatych reduktorów przemysłowych*, Rozprawa doktorska, Politechnika Poznańska, Poznań, 2000
82. Torzyński D., *Analiza wpływu przełożeń częściowych na objętość całkowitą reduktorów zębatych*, W: Metody i środki projektowania wspomaganego komputerowo: XV Konferencja, Kazimierz Dolny, 2005
83. Vanderplaats G. N., *Numerical optimization techniques for engineering design with applications*, McGraw-Hill Book Company, 1984
84. Whitney D. E., *Mechanical assemblies. Their design, manufacture and role in product development*, Oxford University Press, 2004
85. Zaporski P., Tarnowski W., *Soft optimization of objects with the heat flow in 2D and 3D continuous space*, W: Poliptymalizacja i komputerowe wspomaganie projektowania, WNT, Warszawa, 2004
86. Zieliński R., *Wybrane zagadnienia optymalizacji statycznej*, PWN, Warszawa, 1974
87. Zitzler E., *Evolutionary algorithms for multiobjective optimization: methods and applications*, rozprawa doktorska, Institute of Technology, Zurich, 1999
88. Żakowski W., Kołodziej W., *Matematyka*, cz. 2, WNT, Warszawa, 1979

Strony www

89. <http://sensitivity-analysis.jrc.cec.eu.int/> - Analiza wrażliwości
90. <http://www.ccl.rutgers.edu/~ssi/thesis/thesis-node15.html> - Metody analizy wrażliwości
91. http://en.wikipedia.org/wiki/Sensitivity_analysis - Analiza wrażliwości
92. <http://home.ubalt.edu/ntsbarsh/senanaly/SenAnaly.htm> - Analiza wrażliwości
93. <http://panda.bg.univ.gda.pl/~sielim/genetic/index.htm> - Algorytmy genetyczne
94. <http://www.lania.mx/~ccoello/EMOO/> - Optymalizacja wielokryterialna przy zastosowaniu metod ewolucyjnych

Normy

95. PN-ISO 54:2001, *Przekładnie zębate walcowe ogólnego przeznaczenia oraz dla przemysłu ciężkiego – Moduły*, wprowadza: ISO 54:1996, zastępuje: PN-78/M-88502
96. PN-76/M-88513, *Reduktory zębate ogólnego przeznaczenia – Przełożenia*
97. PN-60/N-02100, *Liczby normalne i ciągi liczb normalnych*

ZAŁĄCZNIK I. MODELE MATEMATYCZNE OBIEKTÓW

I. Model matematyczny hamulca wielotarczowego [Osyczka, 2001]

1. Parametry optymalizacji

$R_{w \min}$ – minimalny wewnętrzny promień tarczy [mm],

$R_{z \max}$ – maksymalny zewnętrzny promień tarczy [mm],

ΔR – minimalna różnica między promieniami [mm],

g_{\max} – maksymalna grubość tarczy [mm],

δ – odległość między tarczami przy braku obciążenia [mm],

L_{\max} – maksymalna długość [mm],

Z_{\max} – maksymalna liczba tarcz [-],

$V_{sr \max}$ – maksymalna relatywna prędkość poślizgu [m/s],

μ – współczynnik tarcia [-],

ρ – gęstość materiału [kg/mm³],

s – współczynnik bezpieczeństwa [-],

M_s – moment statyczny na wejściu [Nm],

M_f – moment oporu tarcia [Nm],

n – prędkość obrotowa na wejściu [obr/min],

p_{\max} – maksymalny dopuszczalny nacisk na tarczę [MPa],

I_z – moment bezwładności [kg*m²],

t_{\max} – maksymalny czas zatrzymania [s],

F_{\max} – maksymalna siła włączająca [N].

2. Zmienne decyzyjne

Wektor zmiennych decyzyjnych ma następującą postać:

$$x = [R_w, R_z, g, F, Z]^T$$

gdzie:

R_w – wewnętrzny promień tarczy [mm],

R_z – zewnętrzny promień tarczy [mm],

g – grubość tarczy [mm],

F – siła włączająca [N],

Z – liczba powierzchni ciernych [-].

3. Funkcje celu

Wektor wielkości kryterialnych ma następującą postać:

$$f(x) = [f_1(x), f_2(x)]^T$$

gdzie:

$f_1(x)$ – masa tarcz hamulcowych [kg],

$f_2(x)$ – czas zatrzymania hamulca [s].

Funkcje celu zostały wyrażone w następujący sposób:

$$f_1(x) = m_h = \pi \cdot (R_z^2 - R_w^2) \cdot g \cdot (Z + 1) \cdot \rho$$

$$f_2(x) = t_h = \frac{I_z \cdot \omega}{M_h - M_f}$$

gdzie:

M_h – moment hamujący

$$M_h = \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot F \cdot Z \cdot \frac{R_z^3 - R_w^3}{R_z^2 - R_w^2} \text{ [Nmm]}$$

ω – prędkość kątowna

$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30} \text{ [rad/s]}$$

W przypadku obu funkcji dąży się do ich minimalizacji.

4. Ograniczenia

- Średnica wewnętrzna nie może być mniejsza od wartości minimalnej:

$$g_1(x) = R_w - R_{w \min} \geq 0$$

- Średnica zewnętrzna nie może przekroczyć określonej wartości maksymalnej:

$$g_2(x) = R_{z \max} - R_z \geq 0$$

- Różnica między promieniem zewnętrznym, a wewnętrznym nie może przekroczyć określonej wartości minimalnej:

$$g_3(x) = R_z - R_w - \Delta R \geq 0$$

- Grubość tarczy musi przekraczać określone minimum:

$$g_4(x) = g - g_{\min} \geq 0$$

- Grubość tarczy nie może przekraczać określonego maksimum:

$$g_5(x) = g_{\max} - g \geq 0$$

- Długość hamulca nie może przekroczyć określonej wartości maksymalnej:

$$g_6(x) = L_{\max} - (Z + 1) \cdot (A + \delta) \geq 0$$

- Liczba powierzchni ciernych nie może przekroczyć określonego maksimum:

$$g_7(x) = Z_{\max} - (Z + 1) \geq 0$$

- Liczba powierzchni ciernych nie może być mniejsza niż od 1:

$$g_8(x) = Z - 1 \geq 0$$

- Naciski dopuszczalne muszą przewyższać naciski rzeczywiste:

$$g_9(x) = p_{\max} - p_{rz} \geq 0$$

gdzie:

p_{rz} – naciski rzeczywiste

$$p_{rz} = \frac{F}{S} \text{ [N/mm}^2\text{]}$$

S – powierzchni tarcia

$$S = \pi \cdot (R_z^2 - R_w^2) \text{ [mm}^2\text{]}$$

- Warunek na rozgrzewanie ma postać:

$$g_{10}(x) = p_{\max} \cdot V_{sr \max} - p_{rz} \cdot V_{sr} \geq 0$$

gdzie:

V_{sr} – średnia względna prędkość poślizgu

$$V_{sr} = \frac{\pi \cdot R_{sr} \cdot n}{30} \text{ [mm/s]}$$

R_{sr} – średni promień tarcia

$$R_{sr} = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{R_z^3 - R_w^3}{R_z^2 - R_w^2} \right) \text{ [mm]}$$

- Warunek na prędkość poślizgu:

$$g_{11}(x) = V_{sr \max} - V_{sr} \geq 0$$

- Czas zatrzymania nie może przekroczyć określonej wartości maksymalnej:

$$g_{12}(x) = t_{\max} - t_h \geq 0$$

- Moment generowany musi być większy od wejściowego momentu mnożonego przez współczynnik bezpieczeństwa s :

$$g_{13}(x) = M_h - s \cdot M_s \geq 0$$

- Czas zatrzymania musi być dodatni:

$$g_{14}(x) = t_h \geq 0$$

- Siła włączająca musi być dodatnia:

$$g_{15}(x) = F \geq 0$$

- Siła włączająca nie może być większa od określonej wartości maksymalnej:

$$g_{16}(x) = F_{\max} - F \geq 0$$

5. Dane wykorzystane w procesie polioptymalizacji

- Parametry do obliczania hamulca:

$$R_{w \min} = 55 \text{ [mm]}, R_{z \max} = 110 \text{ [mm]}, \Delta R = 20 \text{ [mm]}, g_{\min} = 1,5 \text{ [mm]}, g_{\max} = 3 \text{ [mm]},$$

$$\delta = 0,5 \text{ [mm]}, L_{\max} = 30 \text{ [mm]}, \mu = 0,5, \rho = 0,0000078 \text{ [kg/mm}^3\text{]}, p_{\max} = 1 \text{ [MPa]},$$

$$Z_{\max} = 10, V_{sr \max} = 10 \text{ [m/s]}, s = 1,5, F_{\max} = 1000 \text{ [N]},$$

$$t_{\max} = 15 \text{ [s]}, n = 250 \text{ [obr/min]}, M_s = 40 \text{ [Nm]}, M_f = 3 \text{ [Nm]}, I_z = 55 \text{ [kg*m}^2\text{]}$$

- Dyskretne wartości zmiennych decyzyjnych:

$$R_w = \{60,61,62, \dots, 78,79,80\}$$

$$R_z = \{90,91,92, \dots, 108,109,110\}$$

$$g = \{1;1,5;2;2,5;3\}$$

$$F = \{600,610,620, \dots, 980,990,1000\}$$

$$Z = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$$

II. Model matematyczny reduktora trzystopniowego [Torzyński, 2000]

1. Obliczanie średnic zębników z warunku na naciski

- Naprężenie stykowe dopuszczalne σ_{HP} :

$$\sigma_{HP} = \frac{\sigma_{Hlim} Z_N Z_L Z_R Z_V Z_W Z_X}{S_{Hmin}}$$

Przyjęte wartości:

$$Z_L=1, Z_R=1, Z_V=1, Z_W=1, Z_X=1, S_{Hmin}=1,25, Z_N=1, \sigma_{Hlim}=1500 \text{ MPa}$$

- Moment obrotowy T_1 na wale zębника 1.:

$$T_1 = \frac{T_w}{i \eta_1 \eta_2 \eta_3}$$

Przyjęte wartości:

$$\eta_1=0.98, \eta_2=0.98, \eta_3=0.98$$

- Przełożenie u_1 na stopniu 1.:

$$u_1 = \frac{i}{u_2 u_3}$$

- Przyjęte różne stałe:

$$Z_E=189,8, Z_H=2,5, Z_B=1, Z_\epsilon=0,875, Z_\beta=1, K_A=1, K_V=1, K_{H\alpha}=1, K_{F\beta}=1,2$$

$$A=1,09, B=0,26, C=3,3e-4 \text{ dla } K_{H\beta} \text{ mniejszego równego } 1,34$$

$$A=1,05, B=0,31, C=3,8e-4 \text{ dla } K_{H\beta} \text{ większego od } 1,34$$

- Stałe R_j i S_j :

$$R_j = \frac{1000(Z_E Z_H Z_B Z_\epsilon Z_\beta)^2 K_A K_V K_{H\alpha} (A + B \psi_j^2) T_j}{\psi_j \sigma_{HP}^2} \frac{u_j + 1}{u_j}, j = 1, 2, 3$$

$$S_j = 1 - \frac{8000(Z_E Z_H Z_B Z_\epsilon Z_\beta)^2 K_A K_V K_{H\alpha} C^3 \psi_j^3 T_j}{27 \psi_j \sigma_{HP}^2 (A + B \psi_j^2)^2} \frac{u_j + 1}{u_j}, j = 1, 2, 3$$

- Średnica podziałowa zębника (z warunku na naciski):

$$d_i \geq \sqrt[3]{R_j(1+\sqrt{S_j})} + \sqrt[3]{R_j(1-\sqrt{S_j})}, \quad i = 1, 3, 5$$

2. Obliczanie średnic zębów z warunku wytrzymałościowego na zginanie

- Naprężenia dopuszczalne na zginanie σ_{FP} :

$$\sigma_{FP} = \frac{\sigma_{F\lim} Y_N Y_\delta Y_R Y_X}{S_{F\min}}$$

Przyjęte wartości:

$$Y_X=1, Y_R=1, Y_\delta=1, S_{F\min}=1,3, Y_N=1, \sigma_{F\lim}=420 \text{ MPa}$$

- Wskaźnik liczby zębów W_z :

$$W_z = \frac{\sigma_{FP} C_A}{\sigma_{HP}^2 Y_F} \frac{0,35E}{\sin \alpha \cos \alpha}$$

Przyjęte wartości:

$$E=210000 \text{ MPa}, \alpha = 20^\circ, C_A=1, Y_F=Y_{FS}=3,9$$

- Liczba zębów zębownika z_i :

$$z_i = W_z \frac{u_i + 1}{u_i}, \quad i = 1, 3, 5$$

- Moduł zębownika m_{ni} :

$$m_{ni} = 18 \cdot \sqrt[3]{\frac{T_j K_F}{\psi_j z_i^2 \sigma_{FP}}}, \quad i = 1, 3, 5; j = 1, 2, 3$$

K_F – współczynnik wpływu warunków obciążenia

$$K_F = K_A K_V K_{F\beta} K_{F\alpha}$$

$$K_{F\alpha} = K_{H\alpha}$$

- Średnica podziałowa zębownika (z warunku na zginanie):

$$d_i = z_i m_{ni}, \quad i = 1, 3, 5$$

- Wybór średnicy zębniaka: dobór większej z otrzymanych warunków na naprężenia stykowe i zginanie.

3. Obliczanie kryteriów polioptymalizacji

- Moment obrotowy T_2 na wale zębniaka 2.:

$$T_2 = \frac{T_w u_1}{i \eta_2 \eta_3}$$

- Moment obrotowy T_3 na wale zębniaka 3.:

$$T_3 = \frac{T_w u_1 u_2}{i \eta_3}$$

- Odległość osi 3 od 6:

$$a_{3-6} = 0,5d_5(1+u_3)\cos\varphi_3 + 0,5d_3(1+u_2)\cos\varphi_2$$

- Średnice wałów zębniaków:

$$d_{wj} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1000 T_j}{\pi k_s}}, j = 1, 2, 3$$

Przyjęte wartości: $k_s = 40$ MPa

- Średnice stóp zębniaków:

$$d_{fi} = d_i - 2m_{ni}(h_{a0} - x), i = 1, 3, 5$$

Przyjęte wartości: $h_{a0}=1,25$, $x=0,5$

- Objętość wszystkich kół V_z :

$$V_z = \frac{\pi}{4} [\psi_1(1+u_1)d_1^3 + \psi_2(1+u_2)d_3^3 + \psi_3(1+u_3)d_5^3]$$

- Długość obrysu kół zębatych l_z :

$$l_z = 0,5d_1u_1 + a_{3-6} + 0,5d_5u_3$$

- Długość reduktora L :

$$L = \frac{l_z + 22,5}{0,975}$$

- Grubość ścianki s :

$$s = 0,005L + 4,5$$

- Wysokość obrysu kół zębatych y :

$$y_1 = 0,5d_5u_3 + 0,5d_5(1+u_3)\sin\varphi_3 + 0,5d_3u_2$$

$$y_2 = 0,5d_1 + 0,5d_1(1+u_1)\sin\varphi_1 + 0,5d_5(1+u_3)\sin\varphi_3 + 0,5d_3u_2$$

$$y = \max\{y_1, y_2\}$$

- Wysokość reduktora H :

$$H = y + 6,5s$$

- Szerokość reduktora B_1 :

$$B_1 = \psi_1d_1 + \psi_2d_3 + \psi_3d_5 + 7s$$

- **Kryterium K_2** – objętość całkowita reduktora:

$$K_2 = L \cdot H \cdot B_1 \text{ [mm}^3\text{]}$$

- Objętość materiału na korpus V_G :

$$V_G = 2[LHs + LB_1s + H(B_1 - 2s)s]$$

- **Kryterium K_1** – masa całkowitej przekładni odniesiona do momentu obrotowego:

$$K_1 = \frac{V_z\rho_{st} + F_1V_G\rho_{zl}}{1000T_w} \text{ [g/Nm]}$$

Przyjęte wartości:

gęstość stali $\rho_{st} = 7,85 \text{ kg/dm}^3$

gęstość żeliwa $\rho_{zl} = 7,4 \text{ kg/dm}^3$

współczynnik zwiększenia masy korpusu $F_1 = 1,5$

- Przełożenie całkowite u :

$$u = u_1 u_2 u_3$$

Przyjęte wartości:

udział kosztów przygotowawczo zakończeniowych $rk_{o1}=0,5$

udział kosztów wytwarzania $fke_o=0,4$

udział kosztów materiałowych w całkowitych kosztach produkcji kół zębatych $mk_o=0,1$

wielkość partii $n=1$

dane wzorcowego walcowego koła zębatego:

średnica $d_o=200$ mm, szerokość wieńca zębatego $b_o=100$ mm, uzębienie proste, koło

wykonane ze stali 16MnCr55, w 6 klasie dokładności wg DIN (5 wg ISO i PN), koło jest

hartowane po nawęglaniu i szlifowaniu.

- **Kryterium K_3** – stosunek względnych kosztów wytwarzania kół zębatych przekładni odniesionych do znanych kosztów koła wzorcowego:

$$K_3 = \frac{HK}{HK_0} = \frac{rk_{o1}}{n} \left[\left(\frac{d_1}{d_0} \right)^{0,5} \left(1 + \frac{u^{0,5}}{(u_2 u_3)^{0,5}} \right) + \left(\frac{d_3}{d_0} \right)^{0,5} (1 + u_2^{0,5}) + \left(\frac{d_5}{d_0} \right)^{0,5} (1 + u_3^{0,5}) \right] +$$

$$+ \frac{fke_o}{(b_o / d_o)} \left[\left(\frac{d_1}{d_0} \right)^2 \left(1 + \frac{u}{u_2 u_3} \right) \psi_1 + \left(\frac{d_3}{d_0} \right)^2 (1 + u_2) \psi_2 + \left(\frac{d_5}{d_0} \right)^2 (1 + u_3) \psi_3 \right] +$$

$$+ \frac{mk_o}{(b_o / d_o)} \left[\left(\frac{d_1}{d_0} \right)^3 \left(1 + \frac{u^2}{u_2^2 u_3^2} \right) \psi_1 + \left(\frac{d_3}{d_0} \right)^3 (1 + u_2^2) \psi_2 + \left(\frac{d_5}{d_0} \right)^3 (1 + u_3^2) \psi_3 \right]$$

4. Ograniczenia

- Zanurzeniowe smarowanie kół:

$$g_1 = 0,5d_5(1 + u_3) \sin \varphi_3 + 0,5d_3u_2 - 0,5d_5u_3 - m_{n5}$$

$$g_2 = 6m_{n5} - 0,5d_5(1 + u_3) \sin \varphi_3 - 0,5d_3u_2 + 0,5d_5u_3$$

$$g_1 \geq 0, \quad g_2 \geq 0$$

- Równoległość linii łączącej środki wałów kół 3 i 6 z linią podstawy korpusu:

$$g_3 = \sin \varphi_2 - \frac{d_5(1 + u_3)}{d_3(1 + u_2)} \sin \varphi_3$$

$$g_3 = 0$$

- Bezkolizyjność koła 4 z wałem koła 6:

$$g_4 = 0,5d_5(1+u_3) - 0,5d_3u_2 - 0,5 \cdot \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1000T_w}{\pi k_s}} - m_{n5}$$

$$g_4 \geq 0$$

- Bezkolizyjność koła 2 z wałem koła 4:

$$g_5 = 0,5d_3(1+u_2) - 0,5d_1u_1 - 0,5 \cdot \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1000T_w}{\pi \eta_3 u_3 k_s}} - m_{n3}$$

$$g_5 \geq 0$$

- Bezkolizyjność koła 6 z wałem koła 2:

$$g_6 = a_{3-6} - 0,5d_3u_3 - 0,5 \cdot \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1000T_w}{\pi \eta_3 \eta_2 u_3 u_2 k_s}} - m_{n3}$$

$$g_6 \geq 0$$

- Kąt graniczny odchylenia zębniaka 1. ($\sin \varphi_1 \leq 1$):

$$g_7 = d_5u_3 - d_1(2+u_1)$$

$$\text{gdy } d_1(2+u_1) \leq u_3d_5$$

$$\text{to } \cos \varphi_1 = \frac{u_3 - d_1}{u_3 + d_1}; \text{ w przypadku przeciwnym } \cos \varphi_1 = \frac{d_5u_3 - d_1}{d_1(1+u_1)}$$

- Bezkolizyjność kół 2 i 5:

$$g_8 = 0,5d_3(u_2 + 1) - 0,5d_1u_1 - 1,5m_{n1} - 1,5d_5 - 1,5m_{n5}$$

$$g_8 \geq 0$$

- Technologiczność konstrukcji zębniaków poszczególnych stopni (średnica stóp większa od średnicy wału):

$$g_9 = d_{f1} - d_{w1}$$

$$g_{10} = d_{f3} - d_{w2}$$

$$g_{11} = d_{f5} - d_{w3}$$

$$g_9 \geq 0, g_{10} \geq 0, g_{11} \geq 0$$

ZAŁĄCZNIK II. WYNIKI OBLICZEŃ Z ROZDZIAŁU 7.

1. Wyniki optymalizacji wielokryterialnej hamulca (rozdz. 7.1, str. 78)

Tabela ZII.1. Pareto-optymalne wartości zmiennych decyzyjnych i kryteriów (86 rozwiązań)

Rw [mm], Rz [mm], g [mm], F [N], Z [-], mh [kg], th [s]

L.p.	zmiennne decyzyjne					kryteria		L.p.	zmiennne decyzyjne					kryteria	
	Rw	Rz	g	F	Z	mh	th		Rw	Rz	g	F	Z	mh	th
1.	80	105	1,5	1000	9	1,7000	3,4631	44.	80	102	1,5	1000	9	1,4717	3,5249
2.	80	100	1,5	1000	3	0,5293	10,8626	45.	80	110	1,5	1000	9	2,0951	3,3638
3.	80	104	1,5	1000	9	1,6232	3,4835	46.	78	98	1,5	1000	4	0,6469	8,2868
4.	78	98	1,5	1000	9	1,2938	3,6480	47.	76	96	1,5	1000	6	0,8851	5,6210
5.	80	101	1,5	1000	9	1,3971	3,5459	48.	72	92	1,5	1000	7	0,9645	5,0448
6.	80	100	1,5	1000	5	0,7939	6,4591	49.	80	103	1,5	1000	9	1,5471	3,5041
7.	80	101	1,5	1000	4	0,6986	8,0526	50.	75	95	1,5	1000	4	0,6249	8,5818
8.	70	90	1,5	1000	7	0,9410	5,1710	51.	77	97	1,5	1000	8	1,1512	4,1552
9.	75	95	1,5	1000	9	1,2497	3,7766	52.	79	99	1,5	1000	7	1,0468	4,6477
10.	77	97	1,5	1000	3	0,5117	11,2426	53.	73	93	1,5	1000	6	0,8542	5,8247
11.	72	92	1,5	1000	9	1,2056	3,9146	54.	79	99	1,5	1000	3	0,5234	10,9864
12.	79	99	1,5	1000	9	1,3085	3,6071	55.	76	96	1,5	1000	3	0,5058	11,3753
13.	78	98	1,5	1000	3	0,5175	11,1130	56.	77	97	1,5	1000	5	0,7675	6,6830
14.	71	91	1,5	1000	4	0,5955	9,0093	57.	70	90	1,5	1000	9	1,1762	4,0123
15.	79	99	1,5	1000	4	0,6543	8,1929	58.	73	93	1,5	1000	8	1,0983	4,3553
16.	73	93	1,5	1000	3	0,4881	11,7925	59.	78	98	1,5	1000	6	0,9057	5,4929
17.	77	97	1,5	1000	4	0,6396	8,3829	60.	79	99	1,5	1000	5	0,7851	6,5320
18.	72	92	1,5	1000	3	0,4822	11,9385	61.	77	97	1,5	1000	7	1,0233	4,7546
19.	70	90	1,5	1000	3	0,4705	12,2414	62.	72	92	1,5	1000	4	0,6028	8,8985
20.	78	98	1,5	1000	5	0,7763	6,6066	63.	73	93	1,5	1000	4	0,6102	8,7904
21.	80	108	1,5	1000	9	1,9349	3,4030	64.	74	94	1,5	1000	8	1,1115	4,3035
22.	80	100	1,5	1000	6	0,9263	5,3705	65.	80	107	1,5	1000	9	1,8558	3,4228
23.	80	101	1,5	1000	3	0,5588	10,7971	66.	74	94	1,5	1000	6	0,8645	5,7552
24.	71	91	1,5	1000	9	1,1909	3,9628	67.	72	92	1,5	1000	8	1,0851	4,4084
25.	71	91	1,5	1000	6	0,8336	5,9689	68.	78	98	1,5	1000	7	1,0351	4,7005
26.	72	92	1,5	1000	5	0,7234	7,0925	69.	71	91	1,5	1000	5	0,7145	7,1805
27.	70	90	1,5	1000	5	0,7057	7,2707	70.	74	94	1,5	1000	3	0,4940	11,6501
28.	80	109	1,5	1000	9	2,0146	3,3833	71.	74	94	1,5	1000	9	1,2350	3,8215
29.	70	90	1,5	1000	6	0,8233	6,0436	72.	73	93	1,5	1000	9	1,2203	3,8675
30.	76	96	1,5	1000	8	1,1380	4,2035	73.	77	97	1,5	1000	6	0,8954	5,5562
31.	71	91	1,5	1000	3	0,4764	12,0881	74.	76	96	1,5	1000	5	0,7587	6,7611
32.	76	96	1,5	1000	4	0,6322	8,4812	75.	77	97	1,5	1000	9	1,2791	3,6899
33.	80	100	1,5	1000	9	1,3232	3,5670	76.	74	94	1,5	1000	7	0,9880	4,9246
34.	71	91	1,5	1000	8	1,0718	4,4628	77.	73	93	1,5	1000	7	0,9763	4,9840
35.	76	96	1,5	1000	7	1,0115	4,8100	78.	72	92	1,5	1000	6	0,8439	5,8959
36.	74	94	1,5	1000	4	0,6175	8,6849	79.	75	95	1,5	1000	5	0,7498	6,8410
37.	70	90	1,5	1000	4	0,5881	9,1229	80.	76	96	1,5	1000	9	1,2644	3,7328
38.	75	95	1,5	1000	3	0,4999	11,5110	81.	74	94	1,5	1000	5	0,7410	6,9228

39.	75	95	1,5	1000	7	0,9998	4,8666	82.	75	95	1,5	1000	8	1,1248	4,2529
40.	71	91	1,5	1000	7	0,9527	5,1071	83.	79	99	1,5	1000	6	0,9160	5,4310
41.	70	90	1,5	1000	8	1,0586	4,5185	84.	78	98	1,5	1000	8	1,1645	4,1079
42.	80	106	1,5	1000	9	1,7776	3,4429	85.	75	95	1,5	1000	6	0,8748	5,6873
43.	80	100	1,5	1000	4	0,6616	8,1011	86.	73	93	1,5	1000	5	0,7322	7,0067

2. Wartości zmiennych decyzyjnych i kryteriów (hamulec) (rozd. 7.1, str. 81)

Tabela ZII.2. Wartości rzeczywiste zmiennych decyzyjnych i kryteriów dla punktu 1

L.p.	Rw [mm]	Rz [mm]	g [m]	F [N]	Z [-]	mh [kg]	th [s]
1.	71,28	91,08	1,485	990	4	0,5849	9,0826
2.	72,72	91,08	1,485	990	4	0,5472	9,0083
3.	71,28	92,92	1,485	990	4	0,6465	8,9714
4.	72,72	92,92	1,485	990	4	0,6088	8,8994
5.	71,28	91,08	1,515	990	4	0,5967	9,0826
6.	72,72	91,08	1,515	990	4	0,5582	9,0083
7.	71,28	92,92	1,515	990	4	0,6596	8,9714
8.	72,72	92,92	1,515	990	4	0,6211	8,8994
9.	71,28	91,08	1,485	1010	4	0,5849	8,8994
10.	72,72	91,08	1,485	1010	4	0,5472	8,8266
11.	71,28	92,92	1,485	1010	4	0,6465	8,7905
12.	72,72	92,92	1,485	1010	4	0,6088	8,7200
13.	71,28	91,08	1,515	1010	4	0,5967	8,8994
14.	72,72	91,08	1,515	1010	4	0,5582	8,8266
15.	71,28	92,92	1,515	1010	4	0,6596	8,7905
16.	72,72	92,92	1,515	1010	4	0,6211	8,7200
17.	71,28	92	1,5	1000	4	0,6218	8,9348
18.	72,72	92	1,5	1000	4	0,5836	8,8624
19.	72	91,08	1,5	1000	4	0,5718	8,9532
20.	72	92,92	1,5	1000	4	0,6341	8,8443
21.	72	92	1,485	1000	4	0,5968	8,8985
22.	72	92	1,515	1000	4	0,6088	8,8985
23.	72	92	1,5	990	4	0,6028	8,9900
24.	72	92	1,5	1010	4	0,6028	8,8088
25.	72	92	1,5	1000	4	0,6028	8,8985
26.	72	92	1,5	1000	4	0,6028	8,8985
27.	72	92	1,5	1000	4	0,6028	8,8985

Tabela ZII.3. Wartości rzeczywiste zmiennych decyzyjnych i kryteriów dla punktu 2

L.p.	Rw [mm]	Rz [mm]	g [mm]	F [N]	Z [-]	mh [kg]	th [s]
1.	72,27	92,07	1,485	990	6	0,8288	5,9444
2.	73,73	92,07	1,485	990	6	0,7745	5,8959
3.	72,27	93,93	1,485	990	6	0,9169	5,8722

4.	73,73	93,93	1,485	990	6	0,8627	5,8253
5.	72,27	92,07	1,515	990	6	0,8456	5,9444
6.	73,73	92,07	1,515	990	6	0,7902	5,8959
7.	72,27	93,93	1,515	990	6	0,9355	5,8722
8.	73,73	93,93	1,515	990	6	0,8801	5,8253
9.	72,27	92,07	1,485	1010	6	0,8288	5,8253
10.	73,73	92,07	1,485	1010	6	0,7745	5,7778
11.	72,27	93,93	1,485	1010	6	0,9169	5,7545
12.	73,73	93,93	1,485	1010	6	0,8626	5,7085
13.	72,27	92,07	1,515	1010	6	0,8456	5,8253
14.	73,73	92,07	1,515	1010	6	0,7902	5,7778
15.	72,27	93,93	1,515	1010	6	0,9355	5,7545
16.	73,73	93,93	1,515	1010	6	0,8801	5,7085
17.	72,27	93	1,5	1000	6	0,8815	5,8484
18.	73,73	93	1,5	1000	6	0,8266	5,8011
19.	73	92,07	1,5	1000	6	0,8099	5,8602
20.	73	93,93	1,5	1000	6	0,8989	5,7895
21.	73	93	1,485	1000	6	0,8456	5,8247
22.	73	93	1,515	1000	6	0,8628	5,8247
23.	73	93	1,5	990	6	0,8542	5,8842
24.	73	93	1,5	1010	6	0,8542	5,7663
25.	73	93	1,5	1000	6	0,8542	5,8247
26.	73	93	1,5	1000	6	0,8542	5,8247
27.	73	93	1,5	1000	6	0,8542	5,8247

Tabela ZII.4. Wartości rzeczywiste zmiennych decyzyjnych i kryteriów dla punktu 3

L.p.	Rw [mm]	Rz [mm]	g [mm]	F [N]	Z [-]	mh [kg]	th [s]
1.	70,29	90,09	1,485	990	8	1,0399	4,5542
2.	71,71	90,09	1,485	990	8	0,9739	4,5174
3.	70,29	91,91	1,485	990	8	1,1485	4,4989
4.	71,71	91,91	1,485	990	8	1,0824	4,4632
5.	70,29	90,09	1,515	990	8	1,0609	4,5542
6.	71,71	90,09	1,515	990	8	0,9936	4,5174
7.	70,29	91,91	1,515	990	8	1,1717	4,4989
8.	71,71	91,91	1,515	990	8	1,1043	4,4632
9.	70,29	90,09	1,485	1010	8	1,0399	4,4632
10.	71,71	90,09	1,485	1010	8	0,9739	4,4271
11.	70,29	91,91	1,485	1010	8	1,1485	4,4089
12.	71,71	91,91	1,485	1010	8	1,0824	4,3740
13.	70,29	90,09	1,515	1010	8	1,0609	4,4632
14.	71,71	90,09	1,515	1010	8	0,9936	4,4271
15.	70,29	91,91	1,515	1010	8	1,1717	4,4089
16.	71,71	91,91	1,515	1010	8	1,1043	4,3740
17.	70,29	91	1,5	1000	8	1,1051	4,4807
18.	71,71	91	1,5	1000	8	1,0383	4,4449
19.	71	90,09	1,5	1000	8	1,0173	4,4900
20.	71	91,91	1,5	1000	8	1,1269	4,4358

21.	71	91	1,485	1000	8	1,0611	4,4628
22.	71	91	1,515	1000	8	1,0825	4,4628
23.	71	91	1,5	990	8	1,0718	4,5083
24.	71	91	1,5	1010	8	1,0718	4,4182
25.	71	91	1,5	1000	8	1,0718	4,4628
26.	71	91	1,5	1000	8	1,0718	4,4628
27.	71	91	1,5	1000	8	1,0718	4,4628

3. Metamodelę $K = f(Rw, Rz, g, F)$ (hamulec) (rozdz. 7.1, str. 81)

RPO dla $mh1$ w punkcie 1 ma postać:

$$\begin{aligned}
 mh1 = f(Rw, Rz, g, F) = & \\
 & 0,6027559 + 0,0264649 * Rw - 0,033816 * Rz - 0,401835 * g - 0,00000001236 * F - \\
 & 0,017643 * Rw * g + 0,0225441 * Rz * g - 0,000184 * Rw^2 + 0,0001838 * Rz^2 - \\
 & 0,0000008201 * g^2
 \end{aligned} \tag{ZII.1}$$

RPO dla $th1$ w punkcie 1 ma postać:

$$\begin{aligned}
 th1 = f(Rw, Rz, g, F) = & \\
 & 54,896229 - 0,204767 * Rw - 0,241192 * Rz - 0,000359 * g - 0,036932 * F + \\
 & 0,0008889 * Rw * Rz - 0,00000007691 * Rw * g + 0,0000521 * Rw * F - \\
 & 0,00000005093 * Rz * g + 0,0000614 * Rz * F - 0,000000002798 * g * F + \\
 & 0,0001431 * Rw^2 + 0,0003076 * Rz^2 + 0,0001242 * g^2 + 0,0000092 * F^2
 \end{aligned} \tag{ZII.2}$$

RPO dla $mh2$ w punkcie 2 ma postać:

$$\begin{aligned}
 mh2 = f(Rw, Rz, g, F) = & \\
 & 0,8541504 + 0,0375649 * Rw - 0,047857 * Rz - 0,569422 * g - 0,025044 * Rw * g + \\
 & 0,0319048 * Rz * g + 0,000257 * Rw^2 + 0,0002573 * Rz^2 - 0,000003 * g^2
 \end{aligned} \tag{ZII.3}$$

RPO dla $th2$ w punkcie 2 ma postać:

$$\begin{aligned}
 th2 = f(Rw, Rz, g, F) = & \\
 & 35,592962 - 0,130933 * Rw - 0,153914 * Rz - 0,000208 * g - 0,023871 * F + \\
 & 0,000562 * Rw * Rz - 0,00000008952 * Rw * g + 0,0000331 * Rw * F - \\
 & 0,00000003707 * Rz * g + 0,0000389 * Rz * F - 0,000000004177 * g * F + \\
 & 0,0000904 * Rw^2 + 0,0001932 * Rz^2 + 0,0000739 * g^2 + 0,000006 * F^2
 \end{aligned} \tag{ZII.4}$$

RPO dla $mh3$ w punkcie 3 ma postać:

$$\begin{aligned}
 mh3 = f(Rw, Rz, g) = & \\
 & 1,0717323 + 0,0469751 * Rw - 0,060207 * Rz - 0,714503 * g - 0,031317 * Rw * g + \\
 & 0,0401383 * Rz * g - 0,000331 * Rw^2 + 0,0003308 * Rz^2 + 0,0000052 * g^2
 \end{aligned} \tag{ZII.5}$$

RPO dla $th3$ w punkcie 3 ma postać:

$$\begin{aligned}
 th3 = f(Rw, Rz, g, F) = & 27,155482 - 0,101945 * Rw - 0,120326 * Rz - 0,000178 * g - 0,018187 * F + \\
 & 0,0004493 * Rw * Rz - 0,00000006051 * Rw * g + 0,0000257 * Rw * F - \\
 & 0,00000002926 * Rz * g + 0,0000304 * Rz * F + 0,000071 * Rw^2 + \\
 & 0,0001553 * Rz^2 + 0,0000624 * g^2 + 0,0000045 * F^2
 \end{aligned}
 \tag{ZII.6}$$

4. Wyniki optymalizacja wielokryterialnej reduktora (rozdz. 7.2.2, str. 92)

Tabela ZII.5. Pareto-optymalne wartości zmiennych decyzyjnych i kryteriów (200 rozwiązań)

L.p.	zmiennne decyzyjne						kryteria		
	ψ_1	ψ_2	ψ_3	φ_3 [rad]	u_2	u_3	K1 [g/Nm]	K2 [m ³]	K3 [-]
1.	0,4927	1,0820	0,7978	0,5101	4,25	5,30	23,6899	0,0101	2,1354
2.	0,3844	1,2292	0,8372	0,5160	4,00	5,00	23,4365	0,0100	2,1695
3.	1,2794	1,0866	0,8033	0,5107	4,25	5,30	24,3413	0,0111	2,0987
4.	1,2790	1,0880	0,8045	0,5108	4,25	5,30	24,3338	0,0111	2,0987
5.	0,8982	1,0883	0,8030	0,5105	4,25	5,30	23,8933	0,0106	2,1047
6.	0,9571	1,1612	0,8304	0,5141	4,00	5,00	23,8816	0,0106	2,1125
7.	0,3827	1,0822	0,7981	0,5102	4,25	5,30	23,7153	0,0100	2,1536
8.	0,4928	1,0843	0,7986	0,5102	4,25	5,30	23,6700	0,0101	2,1354
9.	1,2791	1,0828	0,7983	0,5103	4,25	5,30	24,3575	0,0111	2,0985
10.	0,6552	1,1772	0,8317	0,5145	4,00	5,00	23,6327	0,0103	2,1304
11.	0,6579	1,2189	0,8340	0,5160	4,00	5,00	23,3957	0,0102	2,1313
12.	0,4949	1,2253	0,8358	0,5160	4,00	5,00	23,3830	0,0101	2,1506
13.	1,1869	1,1012	0,7867	0,5214	4,50	5,30	24,4052	0,0111	2,0990
14.	1,0177	1,0824	0,7976	0,5101	4,25	5,30	24,0433	0,0107	2,1014
15.	0,3851	1,2016	0,8305	0,5149	4,00	5,00	23,5822	0,0101	2,1688
16.	0,4929	1,1771	0,8321	0,5145	4,00	5,00	23,6290	0,0102	2,1496
17.	0,3846	1,2227	0,8356	0,5157	4,00	5,00	23,4744	0,0100	2,1693
18.	0,4928	1,0841	0,7985	0,5102	4,25	5,30	23,6719	0,0101	2,1354
19.	0,9835	1,0850	0,8003	0,5104	4,25	5,30	23,9919	0,0107	2,1022
20.	1,3047	1,0932	0,7863	0,5212	4,75	5,30	25,2428	0,0116	2,0961
21.	1,3033	1,0919	0,7863	0,5213	5,00	5,30	25,7315	0,0119	2,0958
22.	1,2438	1,1273	0,7862	0,5223	5,00	5,30	25,5414	0,0117	2,0961
23.	1,1672	1,0998	0,7902	0,5216	4,50	5,30	24,3943	0,0110	2,0992
24.	0,3867	1,2041	0,8315	0,5158	4,00	5,00	23,5227	0,0100	2,1690
25.	1,2608	1,0827	0,7915	0,5212	4,50	5,30	24,5200	0,0112	2,0972
26.	0,4941	1,2190	0,8339	0,5159	4,00	5,00	23,4024	0,0101	2,1504
27.	0,9558	1,2086	0,8305	0,5162	4,00	5,00	23,5777	0,0105	2,1132
28.	0,4923	1,2046	0,8318	0,5154	4,00	5,00	23,4800	0,0101	2,1500
29.	0,3845	1,2246	0,8360	0,5158	4,00	5,00	23,4660	0,0100	2,1694
30.	0,6552	1,1799	0,8317	0,5146	4,00	5,00	23,6195	0,0103	2,1305
31.	1,3003	1,0954	0,7863	0,5213	4,75	5,30	25,2244	0,0116	2,0961
32.	1,1947	1,0869	0,7913	0,5213	4,50	5,30	24,4314	0,0111	2,0979
33.	1,2551	1,0818	0,7928	0,5210	4,50	5,30	24,5340	0,0112	2,0972

34.	0,6548	1,1813	0,8319	0,5151	4,00	5,00	23,5874	0,0103	2,1305
35.	1,2935	1,0827	0,7982	0,5102	4,25	5,30	24,3841	0,0111	2,0985
36.	0,4937	1,2157	0,8330	0,5158	4,00	5,00	23,4148	0,0101	2,1503
37.	0,4931	1,1790	0,8323	0,5147	4,00	5,00	23,6164	0,0102	2,1497
38.	0,6575	1,2177	0,8336	0,5160	4,00	5,00	23,4032	0,0102	2,1312
39.	0,4930	1,1809	0,8319	0,5147	4,00	5,00	23,6072	0,0102	2,1497
40.	0,9969	1,0867	0,8021	0,5105	4,25	5,30	24,0015	0,0107	2,1019
41.	0,9571	1,1875	0,8305	0,5160	4,00	5,00	23,6840	0,0105	2,1128
42.	0,3845	1,2259	0,8364	0,5158	4,00	5,00	23,4577	0,0100	2,1694
43.	1,0129	1,0830	0,7979	0,5102	4,25	5,30	24,0333	0,0107	2,1015
44.	0,6548	1,2068	0,8312	0,5159	4,00	5,00	23,4290	0,0102	2,1308
45.	0,4919	1,2059	0,8317	0,5151	4,00	5,00	23,4978	0,0101	2,1500
46.	0,9571	1,1620	0,8304	0,5143	4,00	5,00	23,8711	0,0106	2,1125
47.	1,2513	1,1816	0,7862	0,5223	4,75	5,30	24,8141	0,0114	2,0968
48.	1,0043	1,0860	0,8014	0,5105	4,25	5,30	24,0107	0,0107	2,1018
49.	0,6555	1,1836	0,8306	0,5161	4,00	5,00	23,5135	0,0102	2,1305
50.	1,1822	1,0943	0,7906	0,5215	4,50	5,30	24,4140	0,0111	2,0986
51.	0,9433	1,0874	0,8025	0,5105	4,25	5,30	23,9420	0,0106	2,1033
52.	0,3853	1,2036	0,8310	0,5150	4,00	5,00	23,5683	0,0101	2,1689
53.	0,3864	1,2005	0,8304	0,5155	4,00	5,00	23,5484	0,0101	2,1689
54.	0,3866	1,2024	0,8306	0,5156	4,00	5,00	23,5346	0,0100	2,1690
55.	0,9570	1,1989	0,8305	0,5161	4,00	5,00	23,6327	0,0105	2,1130
56.	1,2954	1,1010	0,7863	0,5214	4,75	5,30	25,1968	0,0116	2,0961
57.	0,4946	1,2226	0,8350	0,5160	4,00	5,00	23,3914	0,0101	2,1505
58.	0,9567	1,1921	0,8305	0,5161	4,00	5,00	23,6580	0,0105	2,1129
59.	0,4925	1,2120	0,8319	0,5158	4,00	5,00	23,4216	0,0101	2,1501
60.	1,2462	1,1877	0,7865	0,5223	4,75	5,30	24,7858	0,0114	2,0969
61.	0,4930	1,1914	0,8320	0,5151	4,00	5,00	23,5547	0,0101	2,1498
62.	0,4931	1,1890	0,8319	0,5150	4,00	5,00	23,5662	0,0101	2,1498
63.	1,2981	1,0958	0,7863	0,5214	5,00	5,30	25,7124	0,0119	2,0958
64.	1,1865	1,0917	0,7908	0,5214	4,50	5,30	24,4201	0,0111	2,0984
65.	1,2437	1,1987	0,7866	0,5223	4,75	5,30	24,7361	0,0113	2,0971
66.	0,9573	1,1678	0,8305	0,5160	4,00	5,00	23,7616	0,0105	2,1126
67.	1,1863	1,0880	0,7919	0,5212	4,50	5,30	24,4391	0,0111	2,0981
68.	0,9125	1,0859	0,8010	0,5104	4,25	5,30	23,9160	0,0106	2,1042
69.	0,6579	1,2110	0,8319	0,5159	4,00	5,00	23,4207	0,0102	2,1310
70.	0,3847	1,2263	0,8365	0,5159	4,00	5,00	23,4473	0,0100	2,1694
71.	0,4926	1,1983	0,8319	0,5152	4,00	5,00	23,5166	0,0101	2,1499
72.	1,2071	1,0834	0,7927	0,5211	4,50	5,30	24,4696	0,0111	2,0976
73.	0,9571	1,2067	0,8305	0,5161	4,00	5,00	23,5940	0,0105	2,1131
74.	0,3856	1,2132	0,8334	0,5158	4,00	5,00	23,4971	0,0100	2,1692
75.	0,3854	1,2159	0,8341	0,5158	4,00	5,00	23,4870	0,0100	2,1692
76.	1,0025	1,0830	0,7979	0,5102	4,25	5,30	24,0217	0,0107	2,1017
77.	0,3858	1,2113	0,8329	0,5157	4,00	5,00	23,5037	0,0100	2,1691
78.	0,9064	1,0875	0,8022	0,5105	4,25	5,30	23,9044	0,0106	2,1044
79.	0,9413	1,0842	0,7992	0,5103	4,25	5,30	23,9527	0,0106	2,1033
80.	0,4933	1,2067	0,8319	0,5156	4,00	5,00	23,4579	0,0101	2,1501
81.	0,4930	1,1998	0,8319	0,5153	4,00	5,00	23,5065	0,0101	2,1499

82.	0,4933	1,2059	0,8319	0,5156	4,00	5,00	23,4668	0,0101	2,1500
83.	0,9568	1,1837	0,8305	0,5161	4,00	5,00	23,6928	0,0105	2,1128
84.	0,4927	1,1966	0,8319	0,5152	4,00	5,00	23,5254	0,0101	2,1499
85.	0,9300	1,2124	0,8308	0,5162	4,00	5,00	23,5304	0,0104	2,1140
86.	0,9464	1,2089	0,8306	0,5162	4,00	5,00	23,5692	0,0105	2,1135
87.	0,9223	1,2135	0,8306	0,5163	4,00	5,00	23,5087	0,0104	2,1142
88.	0,4926	1,2095	0,8319	0,5157	4,00	5,00	23,4408	0,0101	2,1501
89.	0,9075	1,2138	0,8307	0,5163	4,00	5,00	23,4965	0,0104	2,1147
90.	0,9572	1,1905	0,8304	0,5161	4,00	5,00	23,6648	0,0105	2,1129
91.	1,2875	1,1048	0,7863	0,5216	5,00	5,30	25,6712	0,0118	2,0959
92.	0,4932	1,1863	0,8321	0,5150	4,00	5,00	23,5761	0,0101	2,1498
93.	0,9570	1,1884	0,8305	0,5161	4,00	5,00	23,6737	0,0105	2,1128
94.	0,9571	1,1747	0,8305	0,5159	4,00	5,00	23,7404	0,0105	2,1127
95.	0,9315	1,2099	0,8307	0,5162	4,00	5,00	23,5490	0,0104	2,1139
96.	0,9578	1,2078	0,8304	0,5161	4,00	5,00	23,5872	0,0105	2,1131
97.	1,2850	1,1042	0,7863	0,5216	4,75	5,30	25,1627	0,0115	2,0962
98.	0,9572	1,1644	0,8304	0,5150	4,00	5,00	23,8245	0,0106	2,1125
99.	0,9572	1,1649	0,8305	0,5152	4,00	5,00	23,8160	0,0106	2,1125
100.	0,9657	1,0831	0,7981	0,5102	4,25	5,30	23,9821	0,0106	2,1026
101.	0,9564	1,1799	0,8305	0,5161	4,00	5,00	23,7093	0,0105	2,1127
102.	1,1868	1,0850	0,7930	0,5210	4,50	5,30	24,4523	0,0111	2,0979
103.	1,2429	1,1642	0,7867	0,5221	4,75	5,30	24,8857	0,0114	2,0967
104.	0,9629	1,0872	0,8022	0,5105	4,25	5,30	23,9635	0,0106	2,1028
105.	0,3869	1,0854	0,8006	0,5104	4,25	5,30	23,7079	0,0100	2,1539
106.	1,2533	1,0827	0,7915	0,5212	4,50	5,30	24,5123	0,0111	2,0973
107.	1,2675	1,1232	0,7862	0,5221	4,75	5,30	25,0596	0,0115	2,0963
108.	1,2412	1,1313	0,7866	0,5222	4,75	5,30	24,9912	0,0114	2,0964
109.	0,9279	1,2100	0,8306	0,5163	4,00	5,00	23,5354	0,0104	2,1140
110.	1,2873	1,1028	0,7863	0,5216	4,75	5,30	25,1732	0,0116	2,0961
111.	0,6548	1,2056	0,8313	0,5158	4,00	5,00	23,4471	0,0102	2,1308
112.	1,2556	1,1772	0,7862	0,5222	4,75	5,30	24,8432	0,0114	2,0968
113.	0,9251	1,0872	0,8020	0,5104	4,25	5,30	23,9245	0,0106	2,1038
114.	1,2872	1,0836	0,7985	0,5102	4,25	5,30	24,3667	0,0111	2,0985
115.	0,9397	1,2090	0,8306	0,5162	4,00	5,00	23,5572	0,0105	2,1136
116.	0,9580	1,1757	0,8304	0,5161	4,00	5,00	23,7296	0,0105	2,1127
117.	1,2487	1,1258	0,7862	0,5224	4,75	5,30	25,0095	0,0115	2,0964
118.	0,4928	1,1954	0,8320	0,5152	4,00	5,00	23,5307	0,0101	2,1499
119.	1,2823	1,0852	0,8021	0,5106	4,25	5,30	24,3490	0,0111	2,0986
120.	1,2696	1,1126	0,7862	0,5220	4,75	5,30	25,1013	0,0115	2,0962
121.	1,2647	1,1302	0,7862	0,5221	4,75	5,30	25,0304	0,0115	2,0963
122.	1,2497	1,1694	0,7864	0,5222	4,75	5,30	24,8654	0,0114	2,0967
123.	0,9572	1,1716	0,8305	0,5160	4,00	5,00	23,7476	0,0105	2,1126
124.	1,2318	1,1989	0,7873	0,5222	4,75	5,30	24,7303	0,0113	2,0972
125.	1,2622	1,1178	0,7862	0,5221	4,75	5,30	25,0677	0,0115	2,0963
126.	1,2354	1,0819	0,7914	0,5211	4,50	5,30	24,4941	0,0111	2,0973
127.	1,2480	1,1901	0,7863	0,5224	4,75	5,30	24,7736	0,0114	2,0969
128.	1,2906	1,1015	0,7863	0,5215	4,75	5,30	25,1838	0,0116	2,0961
129.	1,2617	1,1192	0,7862	0,5221	5,00	5,30	25,5918	0,0118	2,0960

130.	1,2683	1,1196	0,7863	0,5220	5,00	5,30	25,6029	0,0118	2,0960
131.	1,2820	1,1054	0,7863	0,5217	4,75	5,30	25,1538	0,0115	2,0962
132.	1,2847	1,1070	0,7863	0,5217	5,00	5,30	25,6612	0,0118	2,0959
133.	0,9571	1,2017	0,8305	0,5161	4,00	5,00	23,6170	0,0105	2,1130
134.	1,2516	1,1722	0,7863	0,5223	4,75	5,30	24,8548	0,0114	2,0967
135.	0,9572	1,1824	0,8305	0,5161	4,00	5,00	23,7016	0,0105	2,1127
136.	0,9576	1,1785	0,8304	0,5161	4,00	5,00	23,7179	0,0105	2,1127
137.	0,6550	1,1996	0,8316	0,5153	4,00	5,00	23,5097	0,0102	2,1307
138.	1,2689	1,1148	0,7862	0,5220	4,75	5,30	25,0927	0,0115	2,0962
139.	1,2948	1,0980	0,7863	0,5214	4,75	5,30	25,2063	0,0116	2,0961
140.	1,2681	1,1137	0,7862	0,5220	5,00	5,30	25,6148	0,0118	2,0959
141.	1,2739	1,1105	0,7863	0,5218	4,75	5,30	25,1192	0,0115	2,0962
142.	1,2716	1,1225	0,7863	0,5219	4,75	5,30	25,0751	0,0115	2,0963
143.	0,3864	1,2068	0,8321	0,5157	4,00	5,00	23,5157	0,0100	2,1691
144.	1,2640	1,1402	0,7863	0,5220	4,75	5,30	25,0017	0,0115	2,0964
145.	1,2361	1,1455	0,7871	0,5220	4,75	5,30	24,9486	0,0114	2,0966
146.	0,9572	1,1638	0,8304	0,5147	4,00	5,00	23,8429	0,0106	2,1125
147.	1,2282	1,1775	0,7878	0,5221	4,75	5,30	24,8222	0,0114	2,0969
148.	1,2732	1,1121	0,7863	0,5219	4,75	5,30	25,1107	0,0115	2,0962
149.	1,2884	1,1147	0,7862	0,5220	5,00	5,30	25,6424	0,0118	2,0959
150.	1,2524	1,1584	0,7864	0,5222	4,75	5,30	24,9098	0,0114	2,0966
151.	1,2478	1,1263	0,7862	0,5223	5,00	5,30	25,5502	0,0118	2,0961
152.	0,9571	1,2045	0,8305	0,5161	4,00	5,00	23,6048	0,0105	2,1131
153.	1,2886	1,0828	0,7982	0,5102	4,25	5,30	24,3737	0,0111	2,0985
154.	0,4932	1,1846	0,8320	0,5149	4,00	5,00	23,5862	0,0101	2,1497
155.	1,2744	1,1102	0,7862	0,5219	5,00	5,30	25,6345	0,0118	2,0959
156.	1,2813	1,1085	0,7863	0,5217	5,00	5,30	25,6519	0,0118	2,0959
157.	0,9354	1,0876	0,8025	0,5105	4,25	5,30	23,9320	0,0106	2,1036
158.	1,2604	1,1220	0,7862	0,5222	4,75	5,30	25,0490	0,0115	2,0963
159.	1,2317	1,1916	0,7873	0,5222	4,75	5,30	24,7632	0,0113	2,0971
160.	1,3013	1,0934	0,7863	0,5213	5,00	5,30	25,7249	0,0119	2,0958
161.	1,2968	1,0966	0,7863	0,5214	4,75	5,30	25,2145	0,0116	2,0961
162.	0,4930	1,1835	0,8320	0,5148	4,00	5,00	23,5964	0,0101	2,1497
163.	1,2627	1,1425	0,7862	0,5221	4,75	5,30	24,9865	0,0115	2,0964
164.	1,2569	1,1642	0,7863	0,5221	4,75	5,30	24,9002	0,0114	2,0966
165.	1,2415	1,1215	0,7871	0,5221	5,00	5,30	25,5577	0,0117	2,0961
166.	1,2778	1,1391	0,7863	0,5222	5,00	5,30	25,5705	0,0118	2,0960
167.	1,2658	1,1152	0,7862	0,5220	4,75	5,30	25,0842	0,0115	2,0962
168.	1,2446	1,1956	0,7866	0,5223	4,75	5,30	24,7515	0,0114	2,0970
169.	0,4931	1,1928	0,8320	0,5152	4,00	5,00	23,5422	0,0101	2,1498
170.	0,9722	1,0872	0,8023	0,5105	4,25	5,30	23,9732	0,0106	2,1025
171.	0,9572	1,1661	0,8305	0,5155	4,00	5,00	23,7933	0,0106	2,1125
172.	0,6578	1,2137	0,8326	0,5160	4,00	5,00	23,4121	0,0102	2,1311
173.	1,2591	1,1531	0,7862	0,5222	4,75	5,30	24,9411	0,0114	2,0965
174.	1,2948	1,0973	0,7863	0,5214	5,00	5,30	25,7030	0,0119	2,0958
175.	1,2774	1,1085	0,7863	0,5218	4,75	5,30	25,1332	0,0115	2,0962
176.	1,2366	1,1384	0,7869	0,5221	4,75	5,30	24,9656	0,0114	2,0965
177.	0,9568	1,1952	0,8305	0,5161	4,00	5,00	23,6466	0,0105	2,1129

178.	1,2575	1,1292	0,7862	0,5222	4,75	5,30	25,0198	0,0115	2,0963
179.	1,2293	1,1839	0,7876	0,5221	4,75	5,30	24,7961	0,0114	2,0970
180.	0,6566	1,1997	0,8306	0,5158	4,00	5,00	23,4658	0,0102	2,1308
181.	0,3851	1,2022	0,8306	0,5149	4,00	5,00	23,5791	0,0101	2,1689
182.	1,2711	1,1141	0,7862	0,5219	5,00	5,30	25,6197	0,0118	2,0959
183.	1,2400	1,1377	0,7869	0,5221	4,75	5,30	24,9749	0,0114	2,0965
184.	1,2458	1,1828	0,7866	0,5223	4,75	5,30	24,8067	0,0114	2,0969
185.	1,2733	1,1322	0,7863	0,5221	5,00	5,30	25,5801	0,0118	2,0960
186.	1,2720	1,1302	0,7862	0,5221	4,75	5,30	25,0396	0,0115	2,0963
187.	1,2445	1,1762	0,7865	0,5223	4,75	5,30	24,8320	0,0114	2,0968
188.	1,2300	1,1497	0,7867	0,5219	4,75	5,30	24,9278	0,0114	2,0966
189.	1,3031	1,0946	0,7863	0,5212	4,75	5,30	25,2347	0,0116	2,0961
190.	1,2494	1,1679	0,7865	0,5222	4,75	5,30	24,8740	0,0114	2,0967
191.	1,2802	1,1129	0,7863	0,5217	4,75	5,30	25,1258	0,0115	2,0962
192.	0,9572	1,1693	0,8305	0,5160	4,00	5,00	23,7554	0,0105	2,1126
193.	1,2925	1,1015	0,7864	0,5215	5,00	5,30	25,6906	0,0118	2,0958
194.	1,2534	1,1641	0,7863	0,5222	4,75	5,30	24,8903	0,0114	2,0966
195.	1,2242	1,0825	0,7912	0,5211	4,50	5,30	24,4785	0,0111	2,0974
196.	1,2322	1,0820	0,7912	0,5211	4,50	5,30	24,4883	0,0111	2,0973
197.	1,2003	1,1471	0,7893	0,5216	4,75	5,30	24,9203	0,0114	2,0968
198.	1,2907	1,1055	0,7863	0,5215	5,00	5,30	25,6773	0,0118	2,0959
199.	1,2807	1,1079	0,7863	0,5217	4,75	5,30	25,1434	0,0115	2,0962
200.	0,6031	1,1034	0,7938	0,5210	4,50	5,30	23,9841	0,0104	2,1261

5. Wyniki obliczeń uzyskane po zastosowaniu analizy skupień (rozdz. 7.2.3, str. 95)

Tabela ZII.6. Wartości funkcji celu (K1,K2, K3) po analizie skupień

<i>L.p.</i>	<i>Index</i>	K1 [g/Nm]	K2 [m³]	K3 [-]	<i>L.p.</i>	<i>Index</i>	K1 [g/Nm]	K2 [m³]	K3 [-]
1.	1	23,6899	0,0101	2,1354	101.	1	23,7093	0,0105	2,1127
2.	3	23,4365	0,0100	2,1695	102.	2	24,4523	0,0111	2,0979
3.	2	24,3413	0,0111	2,0987	103.	2	24,8857	0,0114	2,0967
4.	2	24,3338	0,0111	2,0987	104.	1	23,9635	0,0106	2,1028
5.	1	23,8933	0,0106	2,1047	105.	1	23,7079	0,0100	2,1539
6.	1	23,8816	0,0106	2,1125	106.	2	24,5123	0,0111	2,0973
7.	1	23,7153	0,0100	2,1536	107.	2	25,0596	0,0115	2,0963
8.	1	23,6700	0,0101	2,1354	108.	2	24,9912	0,0114	2,0964
9.	2	24,3575	0,0111	2,0985	109.	1	23,5354	0,0104	2,1140
10.	1	23,6327	0,0103	2,1304	110.	2	25,1732	0,0116	2,0961
11.	1	23,3957	0,0102	2,1313	111.	1	23,4471	0,0102	2,1308
12.	1	23,3830	0,0101	2,1506	112.	2	24,8432	0,0114	2,0968
13.	2	24,4052	0,0111	2,0990	113.	1	23,9245	0,0106	2,1038
14.	1	24,0433	0,0107	2,1014	114.	2	24,3667	0,0111	2,0985
15.	3	23,5822	0,0101	2,1688	115.	1	23,5572	0,0105	2,1136
16.	1	23,6290	0,0102	2,1496	116.	1	23,7296	0,0105	2,1127
17.	3	23,4744	0,0100	2,1693	117.	2	25,0095	0,0115	2,0964

18.	1	23,6719	0,0101	2,1354	118.	1	23,5307	0,0101	2,1499
19.	1	23,9919	0,0107	2,1022	119.	2	24,3490	0,0111	2,0986
20.	2	25,2428	0,0116	2,0961	120.	2	25,1013	0,0115	2,0962
21.	2	25,7315	0,0119	2,0958	121.	2	25,0304	0,0115	2,0963
22.	2	25,5414	0,0117	2,0961	122.	2	24,8654	0,0114	2,0967
23.	2	24,3943	0,0110	2,0992	123.	1	23,7476	0,0105	2,1126
24.	3	23,5227	0,0100	2,1690	124.	2	24,7303	0,0113	2,0972
25.	2	24,5200	0,0112	2,0972	125.	2	25,0677	0,0115	2,0963
26.	1	23,4024	0,0101	2,1504	126.	2	24,4941	0,0111	2,0973
27.	1	23,5777	0,0105	2,1132	127.	2	24,7736	0,0114	2,0969
28.	1	23,4800	0,0101	2,1500	128.	2	25,1838	0,0116	2,0961
29.	3	23,4660	0,0100	2,1694	129.	2	25,5918	0,0118	2,0960
30.	1	23,6195	0,0103	2,1305	130.	2	25,6029	0,0118	2,0960
31.	2	25,2244	0,0116	2,0961	131.	2	25,1538	0,0115	2,0962
32.	2	24,4314	0,0111	2,0979	132.	2	25,6612	0,0118	2,0959
33.	2	24,5340	0,0112	2,0972	133.	1	23,6170	0,0105	2,1130
34.	1	23,5874	0,0103	2,1305	134.	2	24,8548	0,0114	2,0967
35.	2	24,3841	0,0111	2,0985	135.	1	23,7016	0,0105	2,1127
36.	1	23,4148	0,0101	2,1503	136.	1	23,7179	0,0105	2,1127
37.	1	23,6164	0,0102	2,1497	137.	1	23,5097	0,0102	2,1307
38.	1	23,4032	0,0102	2,1312	138.	2	25,0927	0,0115	2,0962
39.	1	23,6072	0,0102	2,1497	139.	2	25,2063	0,0116	2,0961
40.	1	24,0015	0,0107	2,1019	140.	2	25,6148	0,0118	2,0959
41.	1	23,6840	0,0105	2,1128	141.	2	25,1192	0,0115	2,0962
42.	3	23,4577	0,0100	2,1694	142.	2	25,0751	0,0115	2,0963
43.	1	24,0333	0,0107	2,1015	143.	3	23,5157	0,0100	2,1691
44.	1	23,4290	0,0102	2,1308	144.	2	25,0017	0,0115	2,0964
45.	1	23,4978	0,0101	2,1500	145.	2	24,9486	0,0114	2,0966
46.	1	23,8711	0,0106	2,1125	146.	1	23,8429	0,0106	2,1125
47.	2	24,8141	0,0114	2,0968	147.	2	24,8222	0,0114	2,0969
48.	1	24,0107	0,0107	2,1018	148.	2	25,1107	0,0115	2,0962
49.	1	23,5135	0,0102	2,1305	149.	2	25,6424	0,0118	2,0959
50.	2	24,4140	0,0111	2,0986	150.	2	24,9098	0,0114	2,0966
51.	1	23,9420	0,0106	2,1033	151.	2	25,5502	0,0118	2,0961
52.	3	23,5683	0,0101	2,1689	152.	1	23,6048	0,0105	2,1131
53.	3	23,5484	0,0101	2,1689	153.	2	24,3737	0,0111	2,0985
54.	3	23,5346	0,0100	2,1690	154.	1	23,5862	0,0101	2,1497
55.	1	23,6327	0,0105	2,1130	155.	2	25,6345	0,0118	2,0959
56.	2	25,1968	0,0116	2,0961	156.	2	25,6519	0,0118	2,0959
57.	1	23,3914	0,0101	2,1505	157.	1	23,9320	0,0106	2,1036
58.	1	23,6580	0,0105	2,1129	158.	2	25,0490	0,0115	2,0963
59.	1	23,4216	0,0101	2,1501	159.	2	24,7632	0,0113	2,0971
60.	2	24,7858	0,0114	2,0969	160.	2	25,7249	0,0119	2,0958
61.	1	23,5547	0,0101	2,1498	161.	2	25,2145	0,0116	2,0961
62.	1	23,5662	0,0101	2,1498	162.	1	23,5964	0,0101	2,1497
63.	2	25,7124	0,0119	2,0958	163.	2	24,9865	0,0115	2,0964
64.	2	24,4201	0,0111	2,0984	164.	2	24,9002	0,0114	2,0966
65.	2	24,7361	0,0113	2,0971	165.	2	25,5577	0,0117	2,0961

66.	1	23,7616	0,0105	2,1126	166.	2	25,5705	0,0118	2,0960
67.	2	24,4391	0,0111	2,0981	167.	2	25,0842	0,0115	2,0962
68.	1	23,9160	0,0106	2,1042	168.	2	24,7515	0,0114	2,0970
69.	1	23,4207	0,0102	2,1310	169.	1	23,5422	0,0101	2,1498
70.	3	23,4473	0,0100	2,1694	170.	1	23,9732	0,0106	2,1025
71.	1	23,5166	0,0101	2,1499	171.	1	23,7933	0,0106	2,1125
72.	2	24,4696	0,0111	2,0976	172.	1	23,4121	0,0102	2,1311
73.	1	23,5940	0,0105	2,1131	173.	2	24,9411	0,0114	2,0965
74.	3	23,4971	0,0100	2,1692	174.	2	25,7030	0,0119	2,0958
75.	3	23,4870	0,0100	2,1692	175.	2	25,1332	0,0115	2,0962
76.	1	24,0217	0,0107	2,1017	176.	2	24,9656	0,0114	2,0965
77.	3	23,5037	0,0100	2,1691	177.	1	23,6466	0,0105	2,1129
78.	1	23,9044	0,0106	2,1044	178.	2	25,0198	0,0115	2,0963
79.	1	23,9527	0,0106	2,1033	179.	2	24,7961	0,0114	2,0970
80.	1	23,4579	0,0101	2,1501	180.	1	23,4658	0,0102	2,1308
81.	1	23,5065	0,0101	2,1499	181.	3	23,5791	0,0101	2,1689
82.	1	23,4668	0,0101	2,1500	182.	2	25,6197	0,0118	2,0959
83.	1	23,6928	0,0105	2,1128	183.	2	24,9749	0,0114	2,0965
84.	1	23,5254	0,0101	2,1499	184.	2	24,8067	0,0114	2,0969
85.	1	23,5304	0,0104	2,1140	185.	2	25,5801	0,0118	2,0960
86.	1	23,5692	0,0105	2,1135	186.	2	25,0396	0,0115	2,0963
87.	1	23,5087	0,0104	2,1142	187.	2	24,8320	0,0114	2,0968
88.	1	23,4408	0,0101	2,1501	188.	2	24,9278	0,0114	2,0966
89.	1	23,4965	0,0104	2,1147	189.	2	25,2347	0,0116	2,0961
90.	1	23,6648	0,0105	2,1129	190.	2	24,8740	0,0114	2,0967
91.	2	25,6712	0,0118	2,0959	191.	2	25,1258	0,0115	2,0962
92.	1	23,5761	0,0101	2,1498	192.	1	23,7554	0,0105	2,1126
93.	1	23,6737	0,0105	2,1128	193.	2	25,6906	0,0118	2,0958
94.	1	23,7404	0,0105	2,1127	194.	2	24,8903	0,0114	2,0966
95.	1	23,5490	0,0104	2,1139	195.	2	24,4785	0,0111	2,0974
96.	1	23,5872	0,0105	2,1131	196.	2	24,4883	0,0111	2,0973
97.	2	25,1627	0,0115	2,0962	197.	2	24,9203	0,0114	2,0968
98.	1	23,8245	0,0106	2,1125	198.	2	25,6773	0,0118	2,0959
99.	1	23,8160	0,0106	2,1125	199.	2	25,1434	0,0115	2,0962
100.	1	23,9821	0,0106	2,1026	200.	1	23,9841	0,0104	2,1261

Tabela ZII.7. Elementy skupienia 1 (20 elementów)

<i>L.p.</i>	K1 [g/Nm]	K2 [m³]	K3 [-]	<i>L.p.</i>	K1 [g/Nm]	K2 [m³]	K3 [-]
1.	25,7315	0,0119	2,0958	46.	25,6345	0,0118	2,0959
2.	25,5414	0,0117	2,0961	47.	25,6519	0,0118	2,0959
3.	25,7124	0,0119	2,0958	48.	25,7249	0,0119	2,0958
4.	25,6712	0,0118	2,0959	49.	25,5577	0,0117	2,0961
5.	25,5918	0,0118	2,0960	50.	25,5705	0,0118	2,0960
6.	25,6029	0,0118	2,0960	51.	25,7030	0,0119	2,0958
7.	25,6612	0,0118	2,0959	52.	25,6197	0,0118	2,0959
8.	25,6148	0,0118	2,0959	53.	25,5801	0,0118	2,0960
9.	25,6424	0,0118	2,0959	54.	25,6906	0,0118	2,0958

10.	25,5502	0,0118	2,0961	55.	25,6773	0,0118	2,0959
-----	---------	--------	--------	-----	---------	--------	--------

Tabela ZII.8. Elementy skupienia 2 (75 elementów)

L.p.	K1 [g/Nm]	K2 [m ³]	K3 [-]	L.p.	K1 [g/Nm]	K2 [m ³]	K3 [-]
1.	24,3413	0,0111	2,0987	9.	25,1538	0,0115	2,0962
2.	24,3338	0,0111	2,0987	40.	24,8548	0,0114	2,0967
3.	24,3575	0,0111	2,0985	41.	25,0927	0,0115	2,0962
4.	24,4052	0,0111	2,0990	42.	25,2063	0,0116	2,0961
5.	25,2428	0,0116	2,0961	43.	25,1192	0,0115	2,0962
6.	24,3943	0,0110	2,0992	44.	25,0751	0,0115	2,0963
7.	24,5200	0,0112	2,0972	45.	25,0017	0,0115	2,0964
8.	25,2244	0,0116	2,0961	46.	24,9486	0,0114	2,0966
9.	24,4314	0,0111	2,0979	47.	24,8222	0,0114	2,0969
10.	24,5340	0,0112	2,0972	48.	25,1107	0,0115	2,0962
11.	24,3841	0,0111	2,0985	49.	24,9098	0,0114	2,0966
12.	24,8141	0,0114	2,0968	50.	24,3737	0,0111	2,0985
13.	24,4140	0,0111	2,0986	51.	25,0490	0,0115	2,0963
14.	25,1968	0,0116	2,0961	52.	24,7632	0,0113	2,0971
15.	24,7858	0,0114	2,0969	53.	25,2145	0,0116	2,0961
16.	24,4201	0,0111	2,0984	54.	24,9865	0,0115	2,0964
17.	24,7361	0,0113	2,0971	55.	24,9002	0,0114	2,0966
18.	24,4391	0,0111	2,0981	56.	25,0842	0,0115	2,0962
19.	24,4696	0,0111	2,0976	57.	24,7515	0,0114	2,0970
20.	25,1627	0,0115	2,0962	58.	24,9411	0,0114	2,0965
21.	24,4523	0,0111	2,0979	59.	25,1332	0,0115	2,0962
22.	24,8857	0,0114	2,0967	60.	24,9656	0,0114	2,0965
23.	24,5123	0,0111	2,0973	61.	25,0198	0,0115	2,0963
24.	25,0596	0,0115	2,0963	62.	24,7961	0,0114	2,0970
25.	24,9912	0,0114	2,0964	63.	24,9749	0,0114	2,0965
26.	25,1732	0,0116	2,0961	64.	24,8067	0,0114	2,0969
27.	24,8432	0,0114	2,0968	65.	25,0396	0,0115	2,0963
28.	24,3667	0,0111	2,0985	66.	24,8320	0,0114	2,0968
29.	25,0095	0,0115	2,0964	67.	24,9278	0,0114	2,0966
30.	24,3490	0,0111	2,0986	68.	25,2347	0,0116	2,0961
31.	25,1013	0,0115	2,0962	69.	24,8740	0,0114	2,0967
32.	25,0304	0,0115	2,0963	70.	25,1258	0,0115	2,0962
33.	24,8654	0,0114	2,0967	71.	24,8903	0,0114	2,0966
34.	24,7303	0,0113	2,0972	72.	24,4785	0,0111	2,0974
35.	25,0677	0,0115	2,0963	73.	24,4883	0,0111	2,0973
36.	24,4941	0,0111	2,0973	74.	24,9203	0,0114	2,0968
37.	24,7736	0,0114	2,0969	75.	25,1434	0,0115	2,0962
38.	25,1838	0,0116	2,0961				

Tabela ZII.9. Elementy skupienia 3 (105 elementów)

L.p.	K1 [g/Nm]	K2 [m ³]	K3 [-]	L.p.	K1 [g/Nm]	K2 [m ³]	K3 [-]
1.	23,6899	0,0101	2,1354	54.	24,0217	0,0107	2,1017

2.	23,4365	0,0100	2,1695	55.	23,5037	0,0100	2,1691
3.	23,8933	0,0106	2,1047	56.	23,9044	0,0106	2,1044
4.	23,8816	0,0106	2,1125	57.	23,9527	0,0106	2,1033
5.	23,7153	0,0100	2,1536	58.	23,4579	0,0101	2,1501
6.	23,6700	0,0101	2,1354	59.	23,5065	0,0101	2,1499
7.	23,6327	0,0103	2,1304	60.	23,4668	0,0101	2,1500
8.	23,3957	0,0102	2,1313	61.	23,6928	0,0105	2,1128
9.	23,3830	0,0101	2,1506	62.	23,5254	0,0101	2,1499
10.	24,0433	0,0107	2,1014	63.	23,5304	0,0104	2,1140
11.	23,5822	0,0101	2,1688	64.	23,5692	0,0105	2,1135
12.	23,6290	0,0102	2,1496	65.	23,5087	0,0104	2,1142
13.	23,4744	0,0100	2,1693	66.	23,4408	0,0101	2,1501
14.	23,6719	0,0101	2,1354	67.	23,4965	0,0104	2,1147
15.	23,9919	0,0107	2,1022	68.	23,6648	0,0105	2,1129
16.	23,5227	0,0100	2,1690	69.	23,5761	0,0101	2,1498
17.	23,4024	0,0101	2,1504	70.	23,6737	0,0105	2,1128
18.	23,5777	0,0105	2,1132	71.	23,7404	0,0105	2,1127
19.	23,4800	0,0101	2,1500	72.	23,5490	0,0104	2,1139
20.	23,4660	0,0100	2,1694	73.	23,5872	0,0105	2,1131
21.	23,6195	0,0103	2,1305	74.	23,8245	0,0106	2,1125
22.	23,5874	0,0103	2,1305	75.	23,8160	0,0106	2,1125
23.	23,4148	0,0101	2,1503	76.	23,9821	0,0106	2,1026
24.	23,6164	0,0102	2,1497	77.	23,7093	0,0105	2,1127
25.	23,4032	0,0102	2,1312	78.	23,9635	0,0106	2,1028
26.	23,6072	0,0102	2,1497	79.	23,7079	0,0100	2,1539
27.	24,0015	0,0107	2,1019	80.	23,5354	0,0104	2,1140
28.	23,6840	0,0105	2,1128	81.	23,4471	0,0102	2,1308
29.	23,4577	0,0100	2,1694	82.	23,9245	0,0106	2,1038
30.	24,0333	0,0107	2,1015	83.	23,5572	0,0105	2,1136
31.	23,4290	0,0102	2,1308	84.	23,7296	0,0105	2,1127
32.	23,4978	0,0101	2,1500	85.	23,5307	0,0101	2,1499
33.	23,8711	0,0106	2,1125	86.	23,7476	0,0105	2,1126
34.	24,0107	0,0107	2,1018	87.	23,6170	0,0105	2,1130
35.	23,5135	0,0102	2,1305	88.	23,7016	0,0105	2,1127
36.	23,9420	0,0106	2,1033	89.	23,7179	0,0105	2,1127
37.	23,5683	0,0101	2,1689	90.	23,5097	0,0102	2,1307
38.	23,5484	0,0101	2,1689	91.	23,5157	0,0100	2,1691
39.	23,5346	0,0100	2,1690	92.	23,8429	0,0106	2,1125
40.	23,6327	0,0105	2,1130	93.	23,6048	0,0105	2,1131
41.	23,3914	0,0101	2,1505	94.	23,5862	0,0101	2,1497
42.	23,6580	0,0105	2,1129	95.	23,9320	0,0106	2,1036
43.	23,4216	0,0101	2,1501	96.	23,5964	0,0101	2,1497
44.	23,5547	0,0101	2,1498	97.	23,5422	0,0101	2,1498
45.	23,5662	0,0101	2,1498	98.	23,9732	0,0106	2,1025
46.	23,7616	0,0105	2,1126	99.	23,7933	0,0106	2,1125
47.	23,9160	0,0106	2,1042	100.	23,4121	0,0102	2,1311
48.	23,4207	0,0102	2,1310	101.	23,6466	0,0105	2,1129
49.	23,4473	0,0100	2,1694	102.	23,4658	0,0102	2,1308

50.	23,5166	0,0101	2,1499	103.	23,5791	0,0101	2,1689
51.	23,5940	0,0105	2,1131	104.	23,7554	0,0105	2,1126
52.	23,4971	0,0100	2,1692	105.	23,9841	0,0104	2,1261
53.	23,4870	0,0100	2,1692				

6. Wyniki otrzymane po zastosowaniu metody planowania eksperymentu (rozd. 7.2.4, strona 97)

Tabela ZII.10. Wartości unormowane i rzeczywiste zmiennych decyzyjnych dla punktu 1

L.p.	wartości unormowane				wartości rzeczywiste			
	ψ_1	ψ_2	ψ_3	φ_3	ψ_1	ψ_2	ψ_3	φ_3 [rad]
1.	-1	-1	-1	-1	1,2903	1,081	0,7835	0,5189
2.	1	-1	-1	-1	1,3164	1,081	0,7835	0,5189
3.	-1	1	-1	-1	1,2903	1,1028	0,7835	0,5189
4.	1	1	-1	-1	1,3164	1,1028	0,7835	0,5189
5.	-1	-1	1	-1	1,2903	1,081	0,789	0,5189
6.	1	-1	1	-1	1,3164	1,081	0,789	0,5189
7.	-1	1	1	-1	1,2903	1,1028	0,789	0,5189
8.	1	1	1	-1	1,3164	1,1028	0,789	0,5189
9.	-1	-1	-1	1	1,2903	1,081	0,7835	0,5236
10.	1	-1	-1	1	1,3164	1,081	0,7835	0,5236
11.	-1	1	-1	1	1,2903	1,1028	0,7835	0,5236
12.	1	1	-1	1	1,3164	1,1028	0,7835	0,5236
13.	-1	-1	1	1	1,2903	1,081	0,789	0,5236
14.	1	-1	1	1	1,3164	1,081	0,789	0,5236
15.	-1	1	1	1	1,2903	1,1028	0,789	0,5236
16.	1	1	1	1	1,3164	1,1028	0,789	0,5236
17.	-1	0	0	0	1,2903	1,0919	0,7863	0,5213
18.	1	0	0	0	1,3164	1,0919	0,7863	0,5213
19.	0	-1	0	0	1,3033	1,081	0,7863	0,5213
20.	0	1	0	0	1,3033	1,1028	0,7863	0,5213
21.	0	0	-1	0	1,3033	1,0919	0,7835	0,5213
22.	0	0	1	0	1,3033	1,0919	0,789	0,5213
23.	0	0	0	-1	1,3033	1,0919	0,7863	0,5189
24.	0	0	0	1	1,3033	1,0919	0,7863	0,5236
25.	0	0	0	0	1,3033	1,0919	0,7863	0,5213
26.	0	0	0	0	1,3033	1,0919	0,7863	0,5213
27.	0	0	0	0	1,3033	1,0919	0,7863	0,5213

Tabela ZII.11. Wartości unormowane i rzeczywiste zmiennych decyzyjnych dla punktu 2

L.p.	wartości unormowane				wartości rzeczywiste			
	ψ_1	ψ_2	ψ_3	φ_3	ψ_1	ψ_2	ψ_3	φ_3 [rad]
1.	-1	-1	-1	-1	1,2071	1,1869	0,7845	0,5212
2.	1	-1	-1	-1	1,2564	1,1869	0,7845	0,5212

3.	-1	1	-1	-1	1,2071	1,2109	0,7845	0,5212
4.	1	1	-1	-1	1,2564	1,2109	0,7845	0,5212
5.	-1	-1	1	-1	1,2071	1,1869	0,79	0,5212
6.	1	-1	1	-1	1,2564	1,1869	0,79	0,5212
7.	-1	1	1	-1	1,2071	1,2109	0,79	0,5212
8.	1	1	1	-1	1,2564	1,2109	0,79	0,5212
9.	-1	-1	-1	1	1,2071	1,1869	0,7845	0,5233
10.	1	-1	-1	1	1,2564	1,1869	0,7845	0,5233
11.	-1	1	-1	1	1,2071	1,2109	0,7845	0,5233
12.	1	1	-1	1	1,2564	1,2109	0,7845	0,5233
13.	-1	-1	1	1	1,2071	1,1869	0,79	0,5233
14.	1	-1	1	1	1,2564	1,1869	0,79	0,5233
15.	-1	1	1	1	1,2071	1,2109	0,79	0,5233
16.	1	1	1	1	1,2564	1,2109	0,79	0,5233
17.	-1	0	0	0	1,2071	1,1989	0,7873	0,5222
18.	1	0	0	0	1,2564	1,1989	0,7873	0,5222
19.	0	-1	0	0	1,2318	1,1869	0,7873	0,5222
20.	0	1	0	0	1,2318	1,2109	0,7873	0,5222
21.	0	0	-1	0	1,2318	1,1989	0,7845	0,5222
22.	0	0	1	0	1,2318	1,1989	0,79	0,5222
23.	0	0	0	-1	1,2318	1,1989	0,7873	0,5212
24.	0	0	0	1	1,2318	1,1989	0,7873	0,5233
25.	0	0	0	0	1,2318	1,1989	0,7873	0,5222
26.	0	0	0	0	1,2318	1,1989	0,7873	0,5222
27.	0	0	0	0	1,2318	1,1989	0,7873	0,5222

Tabela ZII.12. Wartości unormowane i rzeczywiste zmiennych decyzyjnych dla punktu 3

L.p.	wartości unormowane				wartości rzeczywiste			
	ψ_1	ψ_2	ψ_3	φ_3	ψ_1	ψ_2	ψ_3	φ_3 [rad]
1.	-1	-1	-1	-1	0,4899	1,2235	0,8329	0,515
2.	1	-1	-1	-1	0,4998	1,2235	0,8329	0,515
3.	-1	1	-1	-1	0,4899	1,2272	0,8329	0,515
4.	1	1	-1	-1	0,4998	1,2272	0,8329	0,515
5.	-1	-1	1	-1	0,4899	1,2235	0,8388	0,515
6.	1	-1	1	-1	0,4998	1,2235	0,8388	0,515
7.	-1	1	1	-1	0,4899	1,2272	0,8388	0,515
8.	1	1	1	-1	0,4998	1,2272	0,8388	0,515
9.	-1	-1	-1	1	0,4899	1,2235	0,8329	0,517
10.	1	-1	-1	1	0,4998	1,2235	0,8329	0,517
11.	-1	1	-1	1	0,4899	1,2272	0,8329	0,517
12.	1	1	-1	1	0,4998	1,2272	0,8329	0,517
13.	-1	-1	1	1	0,4899	1,2235	0,8388	0,517
14.	1	-1	1	1	0,4998	1,2235	0,8388	0,517
15.	-1	1	1	1	0,4899	1,2272	0,8388	0,517
16.	1	1	1	1	0,4998	1,2272	0,8388	0,517
17.	-1	0	0	0	0,4899	1,2253	0,8358	0,516
18.	1	0	0	0	0,4998	1,2253	0,8358	0,516

19.	0	-1	0	0	0,4949	1,2235	0,8358	0,516
20.	0	1	0	0	0,4949	1,2272	0,8358	0,516
21.	0	0	-1	0	0,4949	1,2253	0,8329	0,516
22.	0	0	1	0	0,4949	1,2253	0,8388	0,516
23.	0	0	0	-1	0,4949	1,2253	0,8358	0,515
24.	0	0	0	1	0,4949	1,2253	0,8358	0,517
25.	0	0	0	0	0,4949	1,2253	0,8358	0,516
26.	0	0	0	0	0,4949	1,2253	0,8358	0,516
27.	0	0	0	0	0,4949	1,2253	0,8358	0,516

Tabela ZII.13. Wartości rzeczywiste wejść i odpowiadających im wyjść dla punktu 1

L.p.	ψ_1	ψ_2	ψ_3	φ_3 [rad]	u_2	u_3	K1 [g/Nm]	K2*10 ⁶ [mm ³]	K3 [-]
1.	1,2903	1,081	0,7835	0,5189	5	5,3	25,8040	11,98525	2,09575
2.	1,3164	1,081	0,7835	0,5189	5	5,3	25,8422	11,92729	2,09572
3.	1,2903	1,1028	0,7835	0,5189	5	5,3	25,7613	11,87738	2,09579
4.	1,3164	1,1028	0,7835	0,5189	5	5,3	25,7994	11,91925	2,09575
5.	1,2903	1,081	0,789	0,5189	5	5,3	25,8001	11,88583	2,09587
6.	1,3164	1,081	0,789	0,5189	5	5,3	25,8382	11,92781	2,09584
7.	1,2903	1,1028	0,789	0,5189	5	5,3	25,7584	11,87846	2,09590
8.	1,3164	1,1028	0,789	0,5189	5	5,3	25,7965	11,92028	2,09587
9.	1,2903	1,081	0,7835	0,5236	5	5,3	25,6672	11,81742	2,09575
10.	1,3164	1,081	0,7835	0,5236	5	5,3	25,7052	11,85923	2,09572
11.	1,2903	1,1028	0,7835	0,5236	5	5,3	25,6187	11,80622	2,09579
12.	1,3164	1,1028	0,7835	0,5236	5	5,3	25,6566	11,84785	2,09575
13.	1,2903	1,081	0,789	0,5236	5	5,3	25,6661	11,81948	2,09587
14.	1,3164	1,081	0,789	0,5236	5	5,3	25,7041	11,86124	2,09584
15.	1,2903	1,1028	0,789	0,5236	5	5,3	25,6189	11,80895	2,09590
16.	1,3164	1,1028	0,789	0,5236	5	5,3	25,6569	11,85054	2,09587
17.	1,2903	1,0919	0,7863	0,5213	5	5,3	25,7117	11,84746	2,09582
18.	1,3164	1,0919	0,7863	0,5213	5	5,3	25,7498	11,88927	2,09579
19.	1,3033	1,081	0,7863	0,5213	5	5,3	25,7533	11,87298	2,09579
20.	1,3033	1,1028	0,7863	0,5213	5	5,3	25,7084	11,86372	2,09582
21.	1,3033	1,0919	0,7835	0,5213	5	5,3	25,7316	11,86744	2,09574
22.	1,3033	1,0919	0,789	0,5213	5	5,3	25,7296	11,86899	2,09586
23.	1,3033	1,0919	0,7863	0,5189	5	5,3	25,7997	11,90249	2,09580
24.	1,3033	1,0919	0,7863	0,5236	5	5,3	25,6614	11,83372	2,09580
25.	1,3033	1,0919	0,7863	0,5213	5	5,3	25,7306	11,86825	2,09580
26.	1,3033	1,0919	0,7863	0,5213	5	5,3	25,7306	11,86825	2,09580
27.	1,3033	1,0919	0,7863	0,5213	5	5,3	25,7306	11,86825	2,09580

Tabela ZII.14. Wartości rzeczywiste wejść i odpowiadających im wyjść dla punktu 2

L.p.	ψ_1	ψ_2	ψ_3	φ_3 [rad]	u_2	u_3	K1 [g/Nm]	K2*10 ⁶ [mm ³]	K3 [-]
1.	1,2071	1,1869	0,7845	0,5212	4,75	5,3	24,7954	11,34216	2,09709
2.	1,2564	1,1869	0,7845	0,5212	4,75	5,3	24,8619	11,41520	2,09684
3.	1,2071	1,2109	0,7845	0,5212	4,75	5,3	24,6984	11,30522	2,09742

4.	1,2564	1,2109	0,7845	0,5212	4,75	5,3	24,7646	11,37774	2,09716
5.	1,2071	1,1869	0,79	0,5212	4,75	5,3	24,8245	11,36017	2,09721
6.	1,2564	1,1869	0,79	0,5212	4,75	5,3	24,8909	11,43322	2,09695
7.	1,2071	1,2109	0,79	0,5212	4,75	5,3	24,7376	11,32875	2,09754
8.	1,2564	1,2109	0,79	0,5212	4,75	5,3	24,8038	11,40131	2,09728
9.	1,2071	1,1869	0,7845	0,5233	4,75	5,3	24,6517	11,26639	2,09710
10.	1,2564	1,1869	0,7845	0,5233	4,75	5,3	24,7179	11,33895	2,09684
11.	1,2071	1,2109	0,7845	0,5233	4,75	5,3	24,5199	11,21021	2,09742
12.	1,2564	1,2109	0,7845	0,5233	4,75	5,3	24,5857	11,28213	2,09716
13.	1,2071	1,1869	0,79	0,5233	4,75	5,3	24,6928	11,29097	2,09722
14.	1,2564	1,1869	0,79	0,5233	4,75	5,3	24,7590	11,36358	2,09696
15.	1,2071	1,2109	0,79	0,5233	4,75	5,3	24,5806	11,24546	2,09754
16.	1,2564	1,2109	0,79	0,5233	4,75	5,3	24,6465	11,31750	2,09728
17.	1,2071	1,1989	0,7873	0,5222	4,75	5,3	24,6989	11,29987	2,09731
18.	1,2564	1,1989	0,7873	0,5222	4,75	5,3	24,7651	11,37245	2,09705
19.	1,2318	1,1869	0,7873	0,5222	4,75	5,3	24,7815	11,35528	2,09701
20.	1,2318	1,2109	0,7873	0,5222	4,75	5,3	24,6781	11,31458	2,09733
21.	1,2318	1,1989	0,7845	0,5222	4,75	5,3	24,7107	11,32344	2,09710
22.	1,2318	1,1989	0,79	0,5222	4,75	5,3	24,7506	11,34736	2,09722
23.	1,2318	1,1989	0,7873	0,5212	4,75	5,3	24,7994	11,37181	2,09716
24.	1,2318	1,1989	0,7873	0,5233	4,75	5,3	24,6494	11,29227	2,09716
25.	1,2318	1,1989	0,7873	0,5222	4,75	5,3	24,7319	11,33611	2,09716
26.	1,2318	1,1989	0,7873	0,5222	4,75	5,3	24,7319	11,33611	2,09716
27.	1,2318	1,1989	0,7873	0,5222	4,75	5,3	24,7319	11,33611	2,09716

Tabela ZII.15. Wartości rzeczywiste wejść i odpowiadających im wyjść dla punktu 3

L.p.	ψ_1	ψ_2	ψ_3	φ_3 [rad]	u_2	u_3	K1 [g/Nm]	K2*10 ⁶ [mm ³]	K3 [-]
1.	0,4899	1,2235	0,8329	0,515	4	5	23,8014	10,30186	2,17585
2.	0,4998	1,2235	0,8329	0,515	4	5	23,4605	10,11455	2,15072
3.	0,4899	1,2272	0,8329	0,515	4	5	23,7849	10,29590	2,17592
4.	0,4998	1,2272	0,8329	0,515	4	5	23,4441	10,10865	2,15079
5.	0,4899	1,2235	0,8388	0,515	4	5	23,8493	10,32947	2,17606
6.	0,4998	1,2235	0,8388	0,515	4	5	23,5081	10,14200	2,15093
7.	0,4899	1,2272	0,8388	0,515	4	5	23,8355	10,32494	2,17613
8.	0,4998	1,2272	0,8388	0,515	4	5	23,4945	10,13751	2,15100
9.	0,4899	1,2235	0,8329	0,517	4	5	23,6044	10,20129	2,17585
10.	0,4998	1,2235	0,8329	0,517	4	5	23,2647	10,01482	2,15072
11.	0,4899	1,2272	0,8329	0,517	4	5	23,5736	10,18781	2,17592
12.	0,4998	1,2272	0,8329	0,517	4	5	23,2342	10,00146	2,15079
13.	0,4899	1,2235	0,8388	0,517	4	5	23,6861	10,24657	2,17606
14.	0,4998	1,2235	0,8388	0,517	4	5	23,3460	10,05977	2,15093
15.	0,4899	1,2272	0,8388	0,517	4	5	23,6647	10,23798	2,17613
16.	0,4998	1,2272	0,8388	0,517	4	5	23,3247	10,05126	2,15100
17.	0,4899	1,2253	0,8358	0,516	4	5	23,7365	10,27170	2,17599
18.	0,4998	1,2253	0,8358	0,516	4	5	23,3960	10,08467	2,15086
19.	0,4949	1,2235	0,8358	0,516	4	5	23,3927	10,07721	2,15057

20.	0,4949	1,2272	0,8358	0,516	4	5	23,3742	10,07019	2,15064
21.	0,4949	1,2253	0,8329	0,516	4	5	23,3514	10,05571	2,15050
22.	0,4949	1,2253	0,8388	0,516	4	5	23,4133	10,09054	2,15071
23.	0,4949	1,2253	0,8358	0,515	4	5	23,4657	10,11534	2,15060
24.	0,4949	1,2253	0,8358	0,517	4	5	23,2843	10,02311	2,15060
25.	0,4949	1,2253	0,8358	0,516	4	5	23,3838	10,07386	2,15060
26.	0,4949	1,2253	0,8358	0,516	4	5	23,3838	10,07386	2,15060
27.	0,4949	1,2253	0,8358	0,516	4	5	23,3838	10,07386	2,15060

7. Postacie gradientów (rozd. 7.2.7, str. 114)

Obliczenia gradientów dla kryterium K1

Pochodne cząstkowe w punkcie 1 dla kryterium K1 mają następującą postać:

$$\frac{\partial K11}{\partial \psi_1} = 1,6896668 + 0,6395636*\psi_1 - 0,182687*\psi_2 - 0,165138*\psi_3 - 1,410761*\varphi_3 \quad (\text{ZII.7})$$

$$\frac{\partial K11}{\partial \psi_2} = 15,224348 - 0,182687*\psi_1 + 3,527048*\psi_2 + 10,160318*\psi_3 - 55,42696*\varphi_3 \quad (\text{ZII.8})$$

$$\frac{\partial K11}{\partial \psi_3} = -64,50689 - 0,165138*\psi_1 + 10,160318*\psi_2 - 8,919354*\psi_3 + 115,65768*\varphi_3 \quad (\text{ZII.9})$$

$$\frac{\partial K11}{\partial \varphi_3} = 237,97981 - 1,410761*\psi_1 - 55,42696*\psi_2 + 115,65768*\psi_3 - 567,83*\varphi_3 \quad (\text{ZII.10})$$

Pochodne cząstkowe w punkcie 2 dla kryterium K1 mają następującą postać:

$$\frac{\partial K12}{\partial \psi_1} = 2,9912461 + 0,2140754*\psi_1 - 0,287922*\psi_2 + 0,1968662*\psi_3 - 3,298064*\varphi_3 \quad (\text{ZII.11})$$

$$\frac{\partial K12}{\partial \psi_2} = 255,93011 - 0,287922*\psi_1 - 30,82022*\psi_2 + 112,77228*\psi_3 - 597,1405*\varphi_3 \quad (\text{ZII.12})$$

$$\frac{\partial K12}{\partial \psi_3} = -674,2211 + 0,196866*\psi_1 + 112,7723*\psi_2 - 271,3598*\psi_3 + 1455,4065*\varphi_3 \quad (\text{ZII.13})$$

$$\frac{\partial K12}{\partial \varphi_3} = 3323,931 - 3,298064*\psi_1 - 597,1405*\psi_2 + 1455,4065*\psi_3 - 7319,048*\varphi_3 \quad (\text{ZII.14})$$

Pochodne cząstkowe w punkcie 3 dla kryterium K1 mają następującą postać:

$$\frac{\partial K13}{\partial \psi_1} = -7357,278 + 14732,1576 \cdot \psi_1 + 4,46624 \cdot \psi_2 - 6,48259 \cdot \psi_3 + 63,238972 \cdot \varphi_3 \quad (\text{ZII.15})$$

$$\frac{\partial K13}{\partial \psi_2} = 734,26656 + 4,466237 \cdot \psi_1 - 171,27526 \cdot \psi_2 + 276,52954 \cdot \psi_3 - 1479,132 \cdot \varphi_3 \quad (\text{ZII.16})$$

$$\frac{\partial K13}{\partial \psi_3} = -1506,612 - 6,482591 \cdot \psi_1 + 276,52954 \cdot \psi_2 - 521,713 \cdot \psi_3 + 3136,446 \cdot \varphi_3 \quad (\text{ZII.17})$$

$$\frac{\partial K13}{\partial \varphi_3} = 8444,4086 + 63,238972 \cdot \psi_1 - 1479,132 \cdot \psi_2 + 3136,4461 \cdot \psi_3 - 18172,74 \cdot \varphi_3 \quad (\text{ZII.18})$$

Obliczenia gradientów dla kryterium K2

Pochodne cząstkowe w punkcie 1 dla kryterium K2 mają następującą postać:

$$\frac{\partial K21}{\partial \psi_1} = 0,0026913 + 0,0004058 \cdot \psi_1 - 0,000303 \cdot \psi_2 - 0,000386 \cdot \psi_3 - 0,001888 \cdot \varphi_3 \quad (\text{ZII.19})$$

$$\frac{\partial K21}{\partial \psi_2} = 0,0107965 - 0,000303 \cdot \psi_1 + 0,0016614 \cdot \psi_2 + 0,0049269 \cdot \psi_3 - 0,031688 \cdot \varphi_3 \quad (\text{ZII.20})$$

$$\frac{\partial K21}{\partial \psi_3} = -0,032395 - 0,000386 \cdot \psi_1 + 0,004927 \cdot \psi_2 - 0,005112 \cdot \psi_3 + 0,0610543 \cdot \varphi_3 \quad (\text{ZII.21})$$

$$\frac{\partial K21}{\partial \varphi_3} = 0,1406299 - 0,001888 \cdot \psi_1 - 0,031688 \cdot \psi_2 + 0,0610543 \cdot \psi_3 - 0,31888 \cdot \varphi_3 \quad (\text{ZII.22})$$

Pochodne cząstkowe w punkcie 2 dla kryterium K2 mają następującą postać:

$$\frac{\partial K22}{\partial \psi_1} = 0,0042618 + 0,0001506 \cdot \psi_1 - 0,000466 \cdot \psi_2 + 0,0001936 \cdot \psi_3 - 0,00492 \cdot \varphi_3 \quad (\text{ZII.23})$$

$$\frac{\partial K22}{\partial \psi_2} = 0,144683 - 0,000466 \cdot \psi_1 - 0,017458 \cdot \psi_2 + 0,0615701 \cdot \psi_3 - 0,332071 \cdot \varphi_3 \quad (\text{ZII.24})$$

$$\frac{\partial K22}{\partial \psi_3} = -0,368362 + 0,0001936*\psi_1 + 0,06157*\psi_2 - 0,148238*\psi_3 + 0,7957784*\varphi_3 \quad (\text{ZII.25})$$

$$\frac{\partial K22}{\partial \varphi_3} = 1,8505513 - 0,00492*\psi_1 - 0,332071*\psi_2 + 0,7957784*\psi_3 - 4,042848*\varphi_3 \quad (\text{ZII.26})$$

Pochodne cząstkowe w punkcie 3 dla kryterium K2 mają następującą postać:

$$\frac{\partial K23}{\partial \psi_1} = -4,20916 + 8,4287774*\psi_1 + 0,0021813*\psi_2 - 0,004555*\psi_3 + 0,039584*\varphi_3 \quad (\text{ZII.27})$$

$$\frac{\partial K23}{\partial \psi_2} = 0,3912394 + 0,0021813*\psi_1 - 0,09219*\psi_2 + 0,1444461*\psi_3 - 0,779547*\varphi_3 \quad (\text{ZII.28})$$

$$\frac{\partial K23}{\partial \psi_3} = -0,785162 - 0,004555*\psi_1 + 0,1444461*\psi_2 - 0,271952*\psi_3 + 1,6358462*\varphi_3 \quad (\text{ZII.29})$$

$$\frac{\partial K23}{\partial \varphi_3} = 4,4359106 + 0,0395838*\psi_1 - 0,779547*\psi_2 + 1,6358462*\psi_3 - 9,524432*\varphi_3 \quad (\text{ZII.30})$$

Obliczenia gradientów dla kryterium K3

Pochodne cząstkowe w punkcie 1 dla kryterium K3 mają następującą postać:

$$\frac{\partial K31}{\partial \psi_1} = -0,07274 + 0,0548582*\psi_1 + 0,000000076152*\psi_2 - 0,000000735*\psi_3 + 0,0000015*\varphi_3 \quad (\text{ZII.31})$$

$$\frac{\partial K31}{\partial \psi_2} = -0,130532 + 0,000000076152*\psi_1 + 0,1208466*\psi_2 - 0,0000005317*\psi_3 + 0,0000015*\varphi_3 \quad (\text{ZII.32})$$

$$\frac{\partial K31}{\partial \psi_3} = -0,217385 - 0,000000735*\psi_1 - 0,0000005317*\psi_2 + 0,3036728*\psi_3 + 0,0000199*\varphi_3 \quad (\text{ZII.33})$$

$$\frac{\partial K31}{\partial \varphi_3} = -0,000293 + 0,0000015*\psi_1 + 0,0000015*\psi_2 + 0,0000199*\psi_3 + 0,000518*\varphi_3 \quad (\text{ZII.34})$$

Pochodne cząstkowe w punkcie 2 dla kryterium K3 mają następującą postać:

$$\frac{\partial K32}{\partial \psi_1} = -0,081307 + 0,061736*\psi_1 + 0,000000062413*\psi_2 + 0,00000036937*\psi_3 + 0,0000024*\varphi_3 \quad (\text{ZII.35})$$

$$\frac{\partial K32}{\partial \psi_2} = -0,110158 + 0,000000062413*\psi_1 + 0,1030632*\psi_2 + 0,0000035*\psi_3 + 0,0000094*\varphi_3 \quad (\text{ZII.36})$$

$$\frac{\partial K32}{\partial \psi_3} = -0,217453 + 0,00000036937*\psi_1 + 0,0000035*\psi_2 + 0,3037882*\psi_3 - 0,000035*\varphi_3 \quad (\text{ZII.37})$$

$$\frac{\partial K32}{\partial \varphi_3} = -0,000004 + 0,0000024*\psi_1 + 0,0000094*\psi_2 - 0,000035*\psi_3 + 0,0000324*\varphi_3 \quad (\text{ZII.38})$$

Pochodne cząstkowe w punkcie 3 dla kryterium K3 mają następującą postać:

$$\frac{\partial K33}{\partial \psi_1} = -515,3786 + 1036,3577*\psi_1 - 0,00213*\psi_2 - 0,000375*\psi_3 + 0,0028842*\varphi_3 \quad (\text{ZII.39})$$

$$\frac{\partial K33}{\partial \psi_2} = 0,766344 - 0,002128*\psi_1 - 0,575166*\psi_2 - 0,012902*\psi_3 - 0,061398*\varphi_3 \quad (\text{ZII.40})$$

$$\frac{\partial K33}{\partial \psi_3} = -0,28777 - 0,000375*\psi_1 - 0,012902*\psi_2 + 0,4100108*\psi_3 - 0,006421*\varphi_3 \quad (\text{ZII.41})$$

$$\frac{\partial K33}{\partial \varphi_3} = 0,4510035 + 0,0028842*\psi_1 - 0,061398*\psi_2 - 0,006421*\psi_3 - 0,7206*\varphi_3 \quad (\text{ZII.42})$$