

Mariusz KRAJEWSKI, Sergiusz SIENKOWSKI
Uniwersytet Zielonogórski
Instytut Metrologii Elektroniki i Informatyki

ALGORYTMY DO WYZNACZANIA AMPLITUDY SYGNAŁU SINUSOIDALNEGO Z ZASTOSOWANIEM WYBRANEGO ESTYMATORA CZĘSTOTLIWOŚCI

W pracy przedstawiono porównanie właściwości metrologicznych znanych i najnowszych algorytmów do wyznaczania amplitudy sygnału sinusoidalnego w oparciu o wybrany estymator częstotliwości. Analizowane były algorytmy najmniejszych kwadratów (LS), zupełnych kwadratów błędów (TLS) oraz cztery algorytmy z dziedziny częstotliwości oparte na DFT, w tym jeden algorytm rekurencyjny. Wyniki badań symulacyjnych wykazały, że w przypadku sygnału sinusoidalnego z szumem gaussowskim najdokładniejszymi algorytmami są TLS i LS.

ALGORITHMS FOR DETERMINING THE SINUSOID SIGNAL AMPLITUDE WITH THE USE OF A SELECTED FREQUENCY ESTIMATOR

The paper presents a comparison of metrological properties of known and latest algorithms for determining the amplitude of a sinusoidal signal in cooperation with a frequency estimator. Least squares (LS), Total Least Squares (TLS) algorithms and four DFT-based frequency domain algorithms, including one recursive, were analyzed. The results of simulation tests showed that in the case of sinusoidal signal with Gaussian noise, the most accurate algorithms are TLS and LS.

1. WPROWADZENIE

Praca dotyczy problematyki pomiarów amplitudy napięcia sinusoidalnego, które mogą być stosowane np. w badaniach dokładności woltomierzy napięcia skutecznego. W tym obszarze przedstawiono porównanie właściwości metrologicznych znanych i najnowszych cyfrowych algorytmów do wyznaczania amplitudy napięcia sinusoidalnego przy współpracy z wybranym estymatorem częstotliwości. Przyjęto ideę wyznaczania amplitudy polegającą na tym, że w pierwszej kolejności na podstawie danych wejściowych (próbek napięcia) wyznaczana jest częstotliwość napięcia z zastosowaniem jednego wybranego, bardzo dokładnego estymatora częstotliwości, opartego o DFT. W drugiej kolejności w oparciu o obliczoną częstotliwość i próbki napięcia wyznaczana jest amplituda z zastosowaniem różnych algorytmów działających w dziedzinie czasu i częstotliwości. Wybrane do badań algorytmy z dziedziny czasu to algorytm metody najmniejszych kwadratów (LS – Least Squares) oraz zupełnych kwadratów błędów (TLS - Total Least Squares) [1]. Z dziedziny częstotliwości to m. in. algorytmy interpolacyjne 1-punktowy (IpDFT1p) [2], 3-punktowy (IpDFT3p) [3] oraz rekurencyjny 2-punktowy (IpDFT2p_rek) [4]. Dodatkowo w pracy zastosowano zmodyfikowany algorytm DFT (MDFT) [5], który nie wykorzystuje interpolacji widma.

2. ALGORYTMY DO WYZNACZANIA AMPLITUDY

Procedura stosowania algorytmów jest następująca. W pierwszej kolejności napięcie sinusoidalne o amplitudzie U_m , częstotliwości f i fazie φ , próbkowane jest równomiernie z częstotliwością f_p i liczbą próbek M . Następnie na podstawie uzyskanych próbek $u(n) = U_m \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot n / f_p + \varphi)$ wymnożonych przez okno Hanninga wyznaczana jest częstotliwość napięcia z zastosowaniem wybranego, popularnego i bardzo dokładnego estymatora [6]:

$$\hat{f} = \frac{f_p}{M} \sqrt{\frac{(k-H)^2 X_u(k-1) + (k+H)^2 X_u(k+1) + (2H^2 - 2H - 2k^2) X_u(k)}{X_u(k-1) + X_u(k+1) - 2X_u(k)}}, \quad (1)$$

gdzie: $X_u(\cdot)$ jest to transformata Fouriera wyznaczana dla trzech prążków widma, w tym dla k -numeru najwyższego prążka w widmie amplitudowym; H jest to współczynnik, który w przypadku stosowanego okna Hanninga wynosi 2.

W kolejnym kroku, znając częstotliwość sygnału można wyznaczyć amplitudę napięcia z zastosowaniem odpowiedniego algorytmu. Pierwszy badany algorytm najmniejszych kwadratów (LS) stosowany jest tylko do estymacji amplitudy sygnału sinusoidalnego. W porównaniu do innych rozszerzonych algorytmów LS (stosowanych dodatkowo do estymacji fazy, częstotliwości, składowej stałej) jest najbardziej odporny na wpływ zakłóceń losowych, które mają największe znaczenie w pomiarach napięć sinusoidalnych. Dla tego algorytmu amplituda wyznaczana jest ze wzoru

$$\hat{U}_{m(LS)} = \left| (\mathbf{A}_{(LS)}^T \cdot \mathbf{A}_{(LS)})^{-1} \mathbf{A}_{(LS)}^T \cdot \mathbf{b}_{(LS)} \right|, \quad (2)$$

gdzie $\mathbf{A}_{(LS)}$ jest to macierz dwuwymiarowa zawierająca w jednej kolumnie elementy $\sin(2\pi\hat{f}n/f_p)$, a w drugiej $\cos(2\pi\hat{f}n/f_p)$ dla kolejnych wartości n , $\mathbf{b}_{(LS)}$ jest to wektor próbek (obserwacji) $u(n)$.

Drugi algorytm zupełnych kwadratów (TLS), minimalizuje zakłócenia $\boldsymbol{\varepsilon}$ wektora obserwacji $\mathbf{b}_{(TLS)}$, podobnie jak w metodzie najmniejszych kwadratów, oraz dodatkowo zakłócenia \mathbf{E} macierzy danych $\mathbf{A}_{(TLS)}$. Punktem wyjścia algorytmu jest model pomiaru, który opisać można wzorem:

$$(\mathbf{A}_{(TLS)} + \mathbf{E}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b}_{(TLS)} + \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (3)$$

Wektor \mathbf{c} jest wynikiem algorytmu TLS. Na podstawie jej elementów oblicza się wynik estymacji określonej wielkości. W pomiarze amplitudy wynik estymacji uzyskuje się na podstawie wzoru

$$\hat{U}_{m(TLS)} = \sqrt{\mathbf{c}_1^2 + \mathbf{c}_2^2}. \quad (4)$$

Szczegółowy sposób definiowania macierzy $\mathbf{A}_{(TLS)}$, $\mathbf{b}_{(TLS)}$ i wyznaczania \mathbf{c} w pomiarze amplitudy opisano w [1]. Przy czym, definiując macierz $\mathbf{A}_{(TLS)}$ należy w miejsce częstotliwości sygnału podstawić estymator \hat{f} .

Kolejny algorytm IpDFT1p, IpDFT3p, MDFT, IpDFT2p_rek, IpDFT2p_rek działają w oparciu o dyskretną transformatę Fouriera (DFT). Algorytmy te stosowane są z odpowiednim oknem czasowym zwiększającym dokładność wyznaczania amplitudy napięcia sinusoidalnego. Dla porównania właściwości algorytmów w prezentowanej pracy stosowano okno Hanninga.

Algorytm IpDFT1p, działający dla najwyższego prążka widma $|X_u(k)|$ napięcia $u(n)$ z zastosowanym oknem Hanninga, bazuje na zależności

$$\hat{U}_{m(\text{IpDFT1p})} = \frac{4\pi\delta \cdot (1 - \delta^2) \cdot |X_u(k)|}{M \sin(\pi\delta)}, \quad \text{gdzie } \delta = \hat{f} \frac{M}{f_p} - k. \quad (5a, 5b)$$

IpDFT3p działa na trzech najwyższych prążkach widma. Dla okna Hanninga używany jest wzór

$$\hat{U}_{m(\text{IpDFT3p})} = \frac{\pi\delta \cdot (1 - \delta^2) (4 - \delta^2) (|X_u(k-1)| + 2|X_u(k)| + |X_u(k+1)|)}{3M \sin(\pi\delta)}. \quad (6)$$

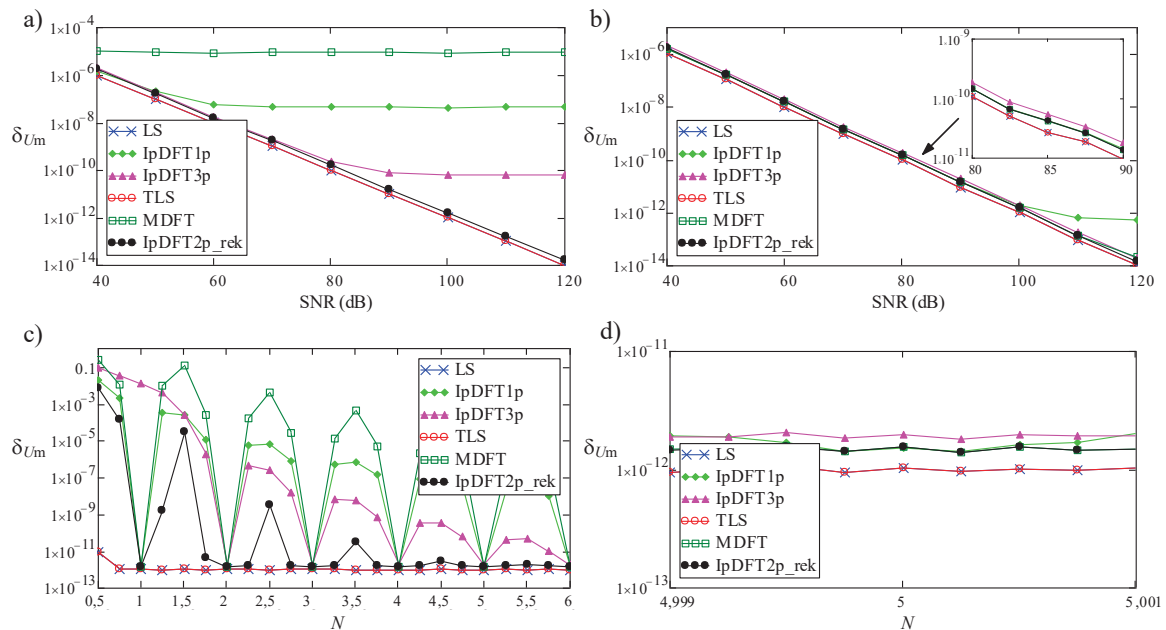
Jednym z prostszych algorytmów jest także algorytm MDFT, w którym stosowana jest modyfikacja transformaty Fouriera i okna czasowego poprzez wyznaczenie zmiennej $M' = f_p k / \hat{f}$ i zastąpienie zmiennej M (liczby próbek) we wzorze na okno Hanninga oraz w funkcji Eulera transformaty Fouriera. Amplituda $\hat{U}_{m(\text{MDFT})}$ wyznaczana jest jako moduł ze zmodyfikowanej

transformaty Fouriera, dla prążka o numerze k oraz próbek napięcia $u(n)$ wymnożonych przez zmodyfikowane okno Hanninga.

Ostatni algorytm IpDFT2p_rek jest najbardziej złożony spośród prezentowanych. Szczegółowy jego opis przedstawiono w pracy [4]. Jest to algorytm, który w sposób rekurencyjny, w oparciu o dwa najwyższe prążki widma (2 punkty), wyznacza w pierwszej kolejności parametr δ , który związany jest z częstotliwością sygnału mierzonego, a następnie amplitudę sygnału oraz fazę początkową sygnału mierzonego φ . Do celów niniejszej pracy algorytm ten, został nieznacznie zmodyfikowany. W warunkach początkowych algorytmu prezentowanego w pracy [4] (Tabela 1, Krok 2) wzór na δ , został zastąpiony wzorem (5b). Badania własne wykazały, że taka zmiana jest korzystna, ponieważ pozwalała na osiągnięcie tej samej dokładności estymacji częstotliwości przy mniejszej liczbie iteracji. W kolejnym rozdziale przedstawiono wyniki badań tego algorytmu dla przyjętych dwóch iteracji.

3. WYNIKI BADAŃ SYMULACYJNYCH

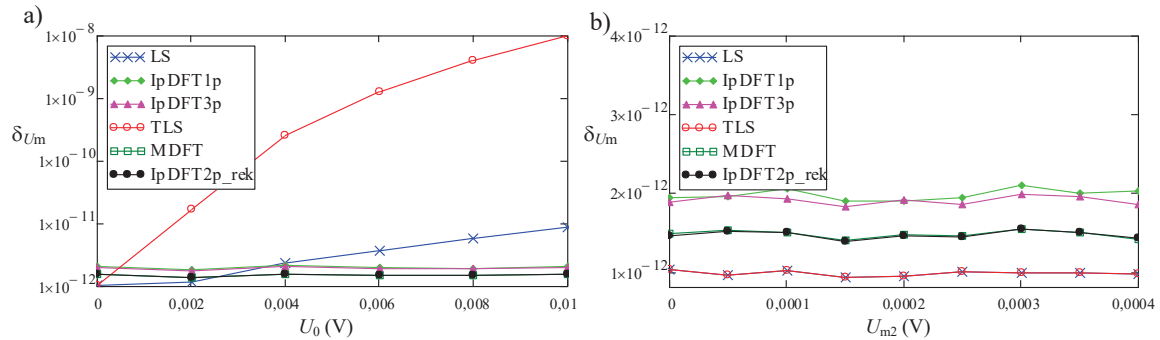
Badania symulacyjne algorytmów przeprowadzono analizując ich względne błędy średniokwadratowe δ_{Um} estymacji amplitudy napięcia sinusoidalnego dla wybranych wielkości wpływowych wykonując tysiąckrotne powtórzenia eksperymentów. Wpływ szumu gaussowskiego dodawanego do próbek napięcia sinusoidalnego, wyrażonego w SNR (Signal to Noise Ratio) w szerokim zakresie został przedstawiony na rys. 1a i 1b, dla określonej liczby okresów N napięcia sinusoidalnego przypadających na okno pomiarowe. Liczba N jest dla wielu algorytmów bardzo istotna. Jak wskazuje rysunek 1c najwyższe dokładności większość algorytmów uzyskuje w pobliżu pełnej liczby okresów. W praktyce stosując komercyjne źródła napięć sinusoidalnych, nawet te najlepsze, które charakteryzują się SNR = 100 dB (np. kalibratory) oraz układy analogowo - cyfrowe trudno jest uzyskać pełną synchronizację częstotliwości tak, aby N było całkowite. Występujący w takich przypadkach błąd nastawy stosunku częstotliwości rzędu 0,02% powoduje, że N może zawierać się w przedziale np. 4,999..5,001 (rys. 1d) dla $f/f_p = 1/20$ i $M = 100$.



Rys. 1. Względne błędy średniokwadratowe estymacji amplitudy w funkcji: a) SNR, dla $N = 5,4, M = 100$; b) SNR, dla $N = 5,001, M = 100$; c), d) liczby okresów N , dla SNR = 100dB, $M = 100$,

Fig. 1. Relative mean square errors of amplitude estimation as a function of: a) SNR, for $N = 5.4, M = 100$; b) SNR, for $N = 5.001, M = 100$; c), d) number of periods N , for SNR = 100dB, $M = 100$.

W dalszej kolejności rozważano wpływ niepożądanego składnika stałej U_0 (rys. 2a) oraz amplitudy drugiej harmonicznej U_{m2} (rys. 2b), które mogą wystąpić w mierzonym napięciu przemiennym. W praktyce w napięciu poza drugą harmoniczną mogą występować także inne, ale mają one mniejszy wpływ. Przyjęta w badaniach maksymalna wartość $U_{m2}/U_m = 0,0004$ odpowiada współczynnikowi THD = 0,04% podawanej typowo dla generatorów napięć sinusoidalnych. Poza tym przyjęta maksymalna wartość U_0 wynosząca 10 mV jest zwykle nie przekraczana w generatorach.



Rys. 2. Względne błędy średniokwadratowe estymacji amplitudy $U_m = 1$ V dla $N=5,001$, $M=100$, $\text{SNR}=100$ dB, w funkcji: a) składowej stałej U_0 , b) amplitudy drugiej harmonicznej U_{m2} .

Fig. 2. Relative mean square errors of $U_m = 1$ V amplitude estimation for $N = 5.001$, $M = 100$, $\text{SNR} = 100$ dB, as a function of: a) the constant component U_0 , b) the second harmonic amplitude U_{m2} .

4. PODSUMOWANIE

Wyniki przeprowadzonych badań symulacyjnych wskazują, że najdokładniejszymi algorytmami do estymacji amplitudy napięcia sinusoidalnego w obecności szumu gaussowskiego są TLS i LS. Zbliżone dokładności estymacji amplitudy można uzyskać z zastosowaniem DFT2p_rek. Algorytm ten, podobnie jak pozostałe z dziedziny częstotliwości, najlepsze właściwości wykazuje przy większej liczbie okresów mierzonego sygnału. W przypadku pozostałych algorytmów, gdy liczba okresów N jest zbliżona do całkowitej i większa od 1, to najdokładniejszym z nich jest algorytm MDFT, a najmniej dokładny IpDFT1p. Z kolei przy niepełnych okresach sygnału (np. $N = 5,4$) dobrymi właściwościami charakteryzuje się DFT3p, a najgorszymi MDFT.

Składowa stała oraz wyższe harmoniczne pogarszają dokładność estymacji amplitudy napięcia sinusoidalnego wszystkich algorytmów. Przy czym wraz ze wzrostem N wpływ tych wielkości jest mniej istotny dla algorytmów częstotliwościowych. Powoduje to, że jeżeli N będzie wystarczająco duże i najlepiej całkowite (np. $N = 3$), to w pomiarach napięć z małym szumem (np. $\text{SNR} = 100$ dB), można spodziewać się, że algorytmy częstotliwościowe będą dokładniejsze od algorytmów LS i TLS.

LITERATURA

1. Zhang J. Q., Xinmin Z., Xiao H., Jinwei S.: Sinewave fit algorithms based on Total Least-Squares Method with application to ADC effective bits measurement, IEEE Trans. on Instr. and Meas., vol. 46, No 4, 1997.
2. Wang Y., Wei W., Xiang J.: Multipoint interpolated DFT for sine waves in short records with DC components, Signal Processing 131, 2017.
3. Lušin T., Agrež D.: Estimation of the amplitude square using the interpolated Discrete Fourier Transform. Metrology and Measurement System, vol. XVIII, No. 4, 2011.
4. Belega D., Petri D. Effect of noise and harmonics on sine-wave frequency estimation by interpolated DFT algorithms based on few observed cycles, Signal Processing 140, 2017.
5. Kłosiński R.: Synchronizacja okien czasowych przy wyznaczaniu widma za pomocą MDFT. PAK vol. 60, nr 11, 2014.
6. Borkowski J., Kania D., Mroczka J.: Interpolated-DFT-based fast and accurate frequency estimation for the control of power, IEEE Trans. on Indus. Electronics, vol. 61, No. 12, 2014.