

Eligiusz PAWŁOWSKI  
 Politechnika Lubelska  
 Katedra Automatyki i Metrologii

## ESTYMACJA STAŁEJ CZASOWEJ METODĄ LINIOWEJ APROKSYMACJI POCHODNEJ FUNKCJI EKSPONENCJALNEJ

W artykule przedstawia się metodę estymacji termicznej stałej czasowej czujnika wykorzystującą liniową aproksymację pochodnej funkcji eksponencjalnej metodą najmniejszych kwadratów. Omówiona metoda została zastosowana do zaprojektowania nowego typu anemometru typu „hot-wire”. Przedstawiono odpowiednie zależności matematyczne, zrealizowany system pomiarowy oraz uzyskane przykładowe wyniki pomiarów.

### TIME CONSTANT ESTIMATION USING LINEAR APPROXIMATION OF THE EXPONENTIAL FUNCTION DERIVATIVE

The paper presents method for estimating the sensor's thermal time constant using linear approximation of the exponential function derivative by the least squares method. The discussed method was used to design a new type of hot-wire anemometer. Relevant mathematical relationships, the measurement system implemented and sample measurement results obtained were also presented.

#### 1. WSTĘP

Pomiary prędkości płynów anemometrem typu „hot-wire” zapoczątkowała praca [1] w której wykazano, że ilość ciepła oddawanego przez gorący drut czujnika anemometru do opływającego go płynu zależy od prędkości tego płynu oraz od różnicy temperatur drutu i płynu. Wymaga to stosowania drugiego czujnika do pomiaru temperatury otoczenia. W tej pracy proponuje się inne rozwiązanie, oparte na estymacji termicznej stałej czasowej czujnika, która jest zależna od prędkości przepływającego płynu i konstrukcji czujnika, nie zależy ona natomiast od temperatury płynu. Dzięki temu nie ma potrzeby stosowania drugiego czujnika do kompensacji wpływu temperatury otoczenia.

#### 2. ESTYMACJA STAŁEJ CZASOWEJ CZUJNIKA TERMOANEMOMETRU

Czujnik termoanemometru pracuje na styku obszaru zjawisk elektrycznych i zjawisk cieplnych (Rys. 1a). Prąd  $i_{heat}$  płynący przez rezystancję czujnika  $R_{sens}$  powoduje wydzielanie się mocy elektrycznej  $P_{el}=i_{heat}^2R_{sens}$ . Moc cieplna  $P_{th}$  przekazywana z czujnika do płynu poruszającego się z prędkością  $\mathcal{G}$ , posiadającego temperaturę otoczenia  $T_{amb}$  jest równa:

$$P_{th} = hS_{sens} (T_{sens} - T_{amb}), \quad (1)$$

gdzie  $h$  jest współczynnikiem przekazywania ciepła,  $S_{sens}$  jest powierzchnią czujnika. Zgodnie z prawem Kinga [1] współczynnik  $h$  jest funkcją prędkości przepływu płynu  $\mathcal{G}$ :

$$h = A + B\mathcal{G}^n, \quad (2)$$

gdzie  $A$ ,  $B$ ,  $n$  są stałymi wyznaczanymi eksperymentalnie. King wykazał, że dla czujnika w postaci długiego, cienkiego drutu przy laminarnym przepływie  $n=0,5$  [1]. Dla czujników o innej konstrukcji  $n$  przyjmuje mniejsze wartości rzędu 0,3 .. 0,45 [2]. Stosunek różnicy temperatur  $T_{sens}-T_{amb}$  do mocy  $P_{th}$  oddawanej przez czujnik do otoczenia definiowany jest jako rezystancja termiczna czujnika  $R_{th}$ :

$$R_{th} = \frac{T_{sens} - T_{amb}}{P_{th}} = \frac{1}{S_{sens} (A + B\mathcal{G}^n)}. \quad (3)$$

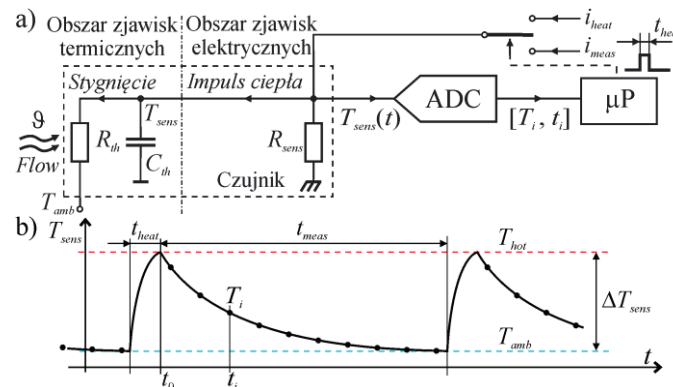
Proponowaną metodę pomiaru przedstawiono na Rys. 1a. Układ pracuje cyklicznie. Najpierw przełącznik SW w czasie  $t_{heat}$  dołącza do czujnika prąd grzania  $i_{heat}$ , w wyniku czego temperatura czujnika zwiększa się do wartości  $T_{hot}$ . Następnie w chwili  $t_0=0$  przełącznik SW przełącza do czujnika mały prąd pomiarowy  $i_{meas}$ , dla którego efekt podgrzewania czujnika można pominąć. Czujnik stygnie i jego temperatura  $T_{sens}(t)$  obniża się od temperatury  $T_{hot}$  do  $T_{amb}$  zgodnie z zależnością eksponencjalną:

$$T_{sens}(t) = (T_{hot} - T_{amb}) \exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau_{th}}\right) + T_{amb}, \quad (4)$$

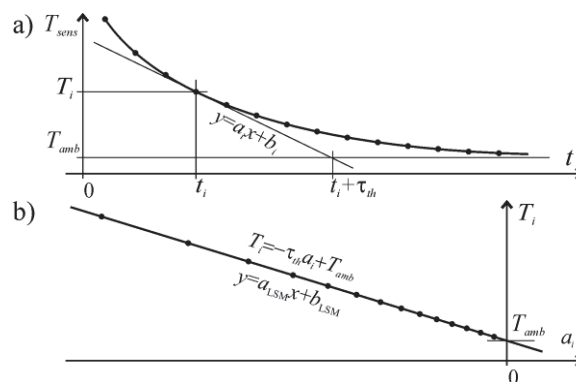
gdzie  $\tau_{th}$  jest termiczną stałą czasową czujnika definiowaną jako iloczyn rezystancji termicznej czujnika  $R_{th}$  (3) i jego pojemności cieplnej  $C_{th}$  równej iloczynowi masy  $m_{sens}$  i ciepła właściwego  $c_{th}$ :

$$\tau_{th} = R_{th} C_{th} = \frac{m_{sens} c_{th}}{S_{sens} (A + B \mathcal{G}^n)}. \quad (5)$$

Z równania (5) wynika, że termiczna stała czasowa czujnika  $\tau_{th}$  zależy tylko od prędkości płynu  $\mathcal{G}$ , nie zależy natomiast od temperatury otoczenia  $T_{amb}$ , co umożliwi pomiar prędkości płynu  $\mathcal{G}$  za pomocą tylko jednego czujnika. W tym celu mikroprocesor za pomocą przetwornika ADC (Rys. 1a) mierzy spadek napięcia na rezystancji czujnika  $V_{sens} = R_{sens} i_{meas}$  oraz oblicza i rejestruje przebieg temperatury stygnącego czujnika (3) jako ciąg wartości temperatur  $T_i$  w chwilach  $t_i$ . Na tej podstawie estymowana jest stała czasowa  $\tau_{th}$  oraz obliczana prędkość przepływu  $\mathcal{G}$ .



Rys. 1. Zasada pomiaru stałej czasowej czujnika: a) schemat układu pomiarowego, b) temperatura czujnika w funkcji czasu  
Fig. 1. The measurement principle of a sensor's time constant: a) the measurement system diagram, b) the sensor's temperature over time



Rys. 2. Wyznaczanie stałej czasowej MNK: a) różniczkowanie charakterystyki stygnięcia, b) wykres równania (7)  
Fig. 2. Determining time constant using LSM: a) differentiating of the cooling characteristics (7), b) graph of equation (7)

Sposób postępowania przedstawiono na Rys. 2. Różniczkując (4) oraz przyjmując  $t_0=t_i$ ,  $T_{hot}=T_i$  obliczymy współczynnik kierunkowy  $a_i$  stycznej  $y=a_i x+b_i$  (Rys. 2a):

$$a_i = \frac{d}{dt} T_{sens}(t) \Big|_{t=t_i} = -\frac{1}{\tau_{th}} (T_i - T_{amb}). \quad (6)$$

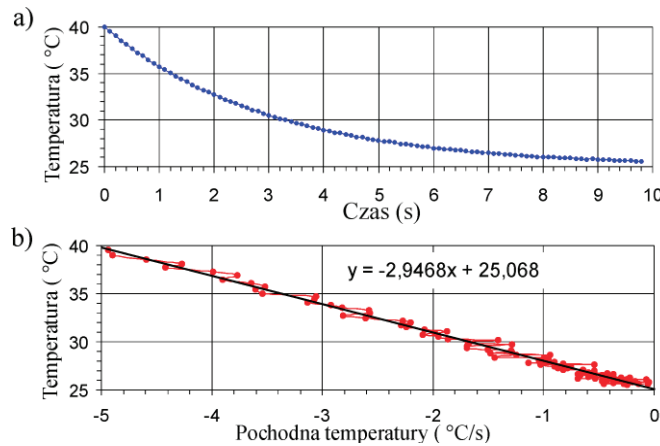
Zależność (6) można przekształcić do postaci równania linii prostej, traktując  $a_i$ ,  $T_i$  jako zmienne oraz  $\tau_{th}$ ,  $T_{amb}$  jako stałe współczynniki:

$$T_i = -\tau_{th} a_i + T_{amb}, \quad (7)$$

a następnie przedstawić na wykresie (Rys. 2b). Pochodną (6) oblicza się numerycznie z danych pomiarowych  $t_i$ ,  $T_i$ . Otrzymane punkty  $a_i$ ,  $T_i$  aproksymuje się linią prostą  $y=a_{LMS}x+b_{LMS}$  metodą najmniejszych kwadratów MNK. Estymowana wartość stałej czasowej  $\tau_{th}$  będzie równa:

$$\tau_{th} = -a_{LMS}. \quad (8)$$

Poprawność przedstawionej metody estymacji stałej czasowej za pomocą MNK zweryfikowano symulacyjnie. Na podstawie (4) wygenerowano ciąg wartości temperatury czujnika  $T_i$  w chwilach  $t_i$  równomiernie rozmieszczonych w czasie z okresem próbkowania  $\Delta t_{sampl}=t_i-t_{i-1}$ . Przyjęto parametry symulacji:  $\tau_{th}=3$  s,  $T_{hot}=40$  °C,  $T_{amb}=25$  °C,  $\Delta t_{sampl}=0,1$  s. Wartości temperatury  $T_i$  zakłócono szumem gaussowskim o wartości skutecznej  $\Delta T_{RMS}=0,02$  °C symulującym błędy pomiarowe. Zasymlowany przebieg temperatury przedstawiono na Rys. 3a. Na Rys. 3b przedstawiono uzyskaną liniową zależność (7) aproksymowaną MNK. Estymowana stała czasowa  $\tau_{th}=-a_{LMS}=2,947$  s, temperatura otoczenia  $T_{amb}=b_{LMS}=25,07$  °C. Uzyskane wyniki potwierdziły poprawność przedstawionej metody.



Rys.3. Badania symulacyjne: a) przebieg temperatury w funkcji czasu, b) liniowa aproksymacja MNK  
Fig. 3. Simulation studies: a) changes in temperature over time, b) linear approximation using the LSM

### 3. POMIARY W UKŁADZIE RZECZYWISTYM

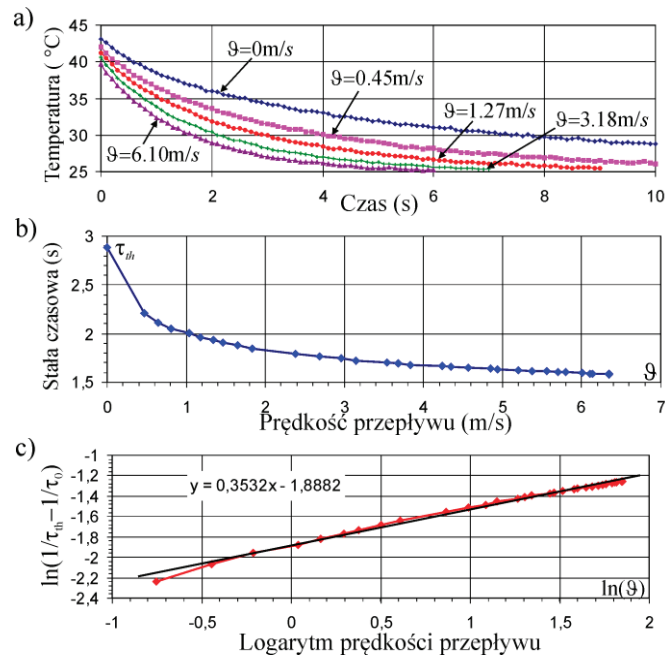
Układ pomiarowy zgodny z Rys. 1a zrealizowano w oparciu o kartę pomiarową NI USB 6009 dołączoną do komputera PC. Jako czujnik temperatury zastosowano termistor PTC KTY83/110 umieszczony w tunelu aerodynamicznym. Sterowanie nagrzewaniem czujnika, pomiary temperatury stygnącego czujnika oraz algorytm obliczeniowy zrealizowano w środowisku LabVIEW. Czujnik o rezystancji  $R_{sens} \approx 1$  kΩ zasilany jest napięciem  $V_{heat}=24$  V w czasie  $t_{heat}=1,5$  s, co powoduje wydzielenie się w nim energii  $Q_{heat} \approx 0,87$  J i skutkuje przyrostem temperatury czujnika  $\Delta T_{sens} \approx 15$  K przy pojemności cieplnej czujnika  $C_{th} \approx 0,0625$  J/K. Pomiary przeprowadzono w powietrzu poruszającym się z prędkością w zakresie  $\mathcal{S} = 0..6$  m/s. Na Rys. 4a przedstawiono charakterystyki stygnięcia dla różnych prędkości powietrza, a na Rys. 4b estymowane wartości termicznej stałej czasowej. Aby wyznaczyć współczynniki równania Kinga (2) zależność (5) przekształcono do postaci:

$$\frac{1}{\tau_{th}} = A' + B' \mathcal{S}^n, \quad (9)$$

gdzie współczynniki  $A'$ ,  $B'$  uwzględniają wartości stałych parametrów  $S_{sens}$ ,  $m_{sens}$ ,  $C_{th}$  w równaniu (5). Następnie przeniesiono  $A' = 1/\tau_{th}(\vartheta=0)$  na lewą stronę równania i zlogarytmowano je obustronnie:

$$\ln\left(\frac{1}{\tau_{th}} - \frac{1}{\tau_{th0}}\right) = \ln B' \vartheta^n = \ln B' + n \ln \vartheta. \quad (10)$$

Dane pomiarowe zgodnie z zależnością (10) przedstawiono w postaci wykresu na Rys. 4c, który aproksymowano linią prostą  $y = a_{LSM}x + b_{LSM}$  za pomocą MNK. Uwzględniając że  $b_{LSM} = \ln B'$ ,  $a_{LSM} = n$  obliczono wartości parametrów  $A' = 0,3467$ ,  $B' = 0,1513$ ,  $n = 0,3532$ . Należy zauważyć, że wartość  $n = 0,5$  podana została przez Kinga dla czujnika w postaci długiego cienkiego drutu [1]. Dla czujników o innych kształtach autorzy podają wartości  $n \approx 0,31..0,44$  [2], a więc uzyskaną wartość  $n = 0,3532$  można uznać za zasadną.



Rys. 4. Wyniki eksperymentu: a) charakterystyki stygnięcia, b) wartości stałej czasowej, c) aproksymacja zależności (10)  
Fig. 4. Real-world experiment results: a) cooling characteristics, b) thermal time constant values, c) approximation of (10)

#### 4. PODSUMOWANIE

Przedstawiona metoda estymacji termicznej stałej czasowej czujnika wykorzystuje liniową aproksymację pochodnej funkcji eksponencjalnej metodą najmniejszych kwadratów. Zastosowano ją w nowym rodzaju termooanemometru wykorzystującym zależność termicznej stałej czasowej czujnika temperatury od prędkości poruszania się płynu wokół czujnika. Zaletą proponowanego rozwiązania jest brak konieczności stosowania drugiego czujnika do pomiaru temperatury otoczenia. Układ przebadano w powietrzu w zakresie prędkości od 0 m/s do 6 m/s, uzyskując zmianę stałej czasowej od 2,9 s do 1,5 s. Otrzymane współczynniki równania Kinga są zgodne z danymi literaturowymi.

#### LITERATURA

1. King L.: On the Convection of Heat from Small Cylinders in a Stream of Fluid: Determination of the Convection Constants of Small Platinum Wires, with Applications to Hot-Wire Anemometry, Phil. Trans. Roy. Soc. London, vol. A214, pp. 373-432, 1914.
2. Pawłowski E.: Design and evaluation of a flow-to-frequency converter circuit with thermal feedback, IOP Publishing Ltd, Measurement Science and Technology, vol. 28, pp. 054004, 2017.