UNIWERSYTET ZIELONOGÓRSKI

WYDZIAŁ MATEMATYKI, INFORMATYKI I EKONOMERII

Anna Chwastyk

# Pojęcia niezależności w algebrach z działaniami co najwyżej dwuargumentowymi

(praca doktorska)

Promotor:

Dr hab. Aleksander Grytczuk, prof. UZ

Zielona Góra 2006

# Spis treści

# Wstęp

W latach 50-tych ubiegłego wieku E. Marczewski zaobserwował związek między liniową niezależnością wektorów oraz teorio-mnogościową niezależnością zbiorów. Starając się ująć oba te pojęcia w jeden wspólny schemat, zaproponował pojęcie niezależności zdefiniowane dla dowolnej algebry ogólnej i nazwane poźniej $M$-niezależnością. Pojęcie to, rozważane w odpowiednich algebrach, dało szereg uprzednio zdefiniowanych rodzajów niezależności. Oprócz wyżej wspomnianych, także niezależność liniową punktów lub liczb, niezależność algebraiczną w teorii grup abelowych, niezależność algebraiczną w teorii liczb (lub ogólniej, w teorii rozszerzeń ciał), niezależność wielomianów, niezależność funkcji ciągłych, niezależność logiczną aksjomatów i wiele innych.

W schemacie $M$-niezależności nie udało się jednak zawrzeć wielu ważnych pojęć, między innymi niezależności ze względu na operator domknięcia, niezależności stochastycznej oraz niezależności zdefiniowanych przez J. Schmidta, S. Świerczkowskiego i G. Grätzera. W 1966 roku E. Marczewski zauważył, że pojęcia te można wyrazić w języku odwzorowań i rozszerzeń do homomorfizmów i przedstawił bardziej ogólny schemat zwany niezależnością względem rodziny odwzorowań, bądź krócej $Q$-niezależnością.

Badaniem rodzin zbiorów $Q$-niezależnych w grupach abelowych, algebrach quasiliniowych, algebrach Boole'a i ich reduktach regularnych zajmował się K. Głazek w pracy [18].

Niniejsza praca jest poświęcona badaniu $Q$-niezależności w algebrach Stone'a oraz w pewnych algebrach niełącznych.

Rozdział pierwszy zawiera podstawowe definicje i własności rodzin zbiorów $Q$-niezależnych. Twierdzenie 2 dotyczy algebr, w których wśród działań termowych występuje retrakcja. W twierdzeniu tym podany został związek między $Q$-niezależnością w danej algebrze, a niezależnością w jej retrakcie i klasach abstrakcji generowanych przez kongruencję indukowaną przez retrakcję.

W drugim rozdziale badane są rodziny zbiorów $Q$-niezależnych w algebrach Stone'a, w oparciu o trójkową reprezentację tych algebr. Szkielet algebry Stone'a, będący również jej retraktem, jest algebrą Boole'a, a każda klasa abstrakcji kongruencji Glivenki, tożsamej z kongruencją indukowaną przez retrakcję, jest kratą dystrybutywną. W związku z tym, w paragrafie 2.2, dotychchczasowe rezultaty badań zbiorów $Q$-niezależnych w kratach dystrybutywnych uzupełnione zostały o charakterystykę rodzin $S$, $S_0$, $G$ oraz $I$-niezależnych w tych algebrach. Natomiast paragraf 2.3 to krótki przegląd wyników badań nad $Q$-niezależnością w algebrach Boole'a.

Twierdzenie 10 podaje warunek konieczny i dostateczny na to, aby podzbiór pewnej klasy abstrakcji kongruencji Glivenki był $S_0$ i $A_1$-niezależny w algebrze Stone'a.

Twierdzenie 13 charakteryzuje rodzinę zbiorów $t$-niezależnych w algebrze Stone'a. W Twierdzeniach 14 i 15 zawarte są warunki konieczne dla $M$, $I$, $S$, $S_0$ oraz $A_1$-niezależności zbioru w rozważanej algebrze.

W rozdziale trzecim definiujemy pewne uogólnienia półgrup i grup przemiennych, mianowicie grupoidy i quasigrupy $^*$-łączne. Algebry te w zbiorze swych działań fundamentalnych zawierają inwolucję.

W rozdziale tym podajemy również podstawowe własności grupoidów $^*$-łącznych oraz ich związki z półkratami (Twierdzenia 21 i 22). Twierdzenia 23 i 24 opisują działania termowe w przemiennych półgrupach $^*$-łącznych, które spełniają istotną rolę w badaniu $Q$-niezależności. Wyróżniona została również pewna klasa grupoidów

$^{*}$-łącznych, których retraktem są półkraty. Wstępem do badania $Q$-niezależności w tych algebrach jest paragraf 3.3 zawierający oprócz wyników dotyczących $M$ i $t$-niezależności w półkratach także opis rodzin zbiorów $S$, $S_0$, $G$ oraz $I$-niezależnych. W paragrafie 3.5 podane zostały ogólne własności i opis działań termowych w quasigrupach $^{*}$-łącznych.

# Rozdział 1

# Podstawowe definicje i własności związane z Q-niezależnością.

Dla danej algebry $\mathfrak{A} = (A; \mathbb{F})$ oznaczmy przez $\mathbb{T}^{(n)}(\mathfrak{A})$ $(n = 1, 2, ...)$ rodzinę wszystkich *$n$-argumentowych działań termowych* algebry $\mathfrak{A}$, to znaczy najmniejszy ze względu na inkluzję zbiór spełniający warunki:

i) $e_i^n \in \mathbb{T}^{(n)}(\mathfrak{A})$, (rzutowania $e_i^n(x_1, x_2, ..., x_n) = x_i$, dla $i = 1, 2, ..., n$, są $n$-argumentowymi działaniami termowymi);

ii) jeśli $g_1, g_2, ..., g_k \in \mathbb{T}^{(n)}(\mathfrak{A})$ oraz $f \in F$ jest $k$-argumentowym działaniem fundamentalnym, to
$\hat{f}(g_1, g_2, ..., g_k)(x_1, x_2, ..., x_n) = f(g_1(x_1, x_2, ..., x_n), ..., g_k(x_1, x_2, ..., x_n)) \in \mathbb{T}^{(n)}(\mathfrak{A})$.

Przez $\mathbb{T}^{(0)}(\mathfrak{A})$ oznaczmy zbiór wszystkich stałych algebraicznych, traktowanych jako nularne działania termowe algebry $\mathfrak{A}$.

Niech $\mathfrak{A} = (A; \mathbb{F})$ będzie algebrą. Niepusty zbiór $X \subseteq A$ nazywamy *M-niezależnym* ($X \in Ind(\mathfrak{A}, M)$), jeśli

**(a)** $(\forall n \in \mathbb{N}, n \leq card(X))\ \ (\forall f, g \in \mathbb{T}^{(n)}(\mathfrak{A}))\ \ (\forall \underbrace{a_1, \ldots, a_n}_{\neq} \in X)$

$[f(a_1, \ldots, a_n) = g(a_1, \ldots, a_n) \Rightarrow f = g \text{ (w } \mathfrak{A})]$

lub równoważnie

**(b)** $(\forall n \in \mathbb{N}, n \leq card(X))(\forall f, g \in \mathbb{T}^{(n)}(\mathfrak{A}))(\forall p\colon X \to A)\ (\forall a_1, \ldots, a_n \in X)$

$[f(a_1, \ldots, a_n) = g(a_1, \ldots, a_n) \Rightarrow f(p(a_1), \ldots, p(a_n)) = g(p(a_1), \ldots, p(a_n))]$;

**(c)** $(\forall p \in A^X)\ (\exists \bar{p} \in Hom(\langle X \rangle_{\mathfrak{A}}, \mathfrak{A}))\ [\ \bar{p}|_X = p\ ]$;

**(d)** $\langle X \rangle_{\mathfrak{A}}$ jest $\mathbb{K}$-wolną algebrą, $\mathbb{K}$-wolno generowaną przez $X$, gdzie $\mathbb{K} = \{\mathfrak{A}\}$ (lub $\mathbb{K} = \mathcal{HSP}\{\mathfrak{A}\}$ co oznacza, że jest rozmaitością generowaną przez $\mathfrak{A}$).

Niech $\mathfrak{A} = (A; \mathbb{F})$ będzie algebrą oraz $\emptyset \neq X \subseteq A$.

Przyjmujemy następujące oznaczenia:

$$Q_X \subseteq A^X = \{p \mid p : X \to A\},$$
$$Q(A) = Q = \bigcup \{Q_X \mid X \subseteq A\},$$
$$H_X(\mathfrak{A}) = \{p \in A^X \mid \exists \bar{p} \in Hom(\langle X \rangle_{\mathfrak{A}}, \mathfrak{A}),\ \bar{p}|_X = p\}.$$

Zbiór $X$ nazywamy *niezależnym względem rodziny odwzorowań* $Q$ lub krótko *Q-niezależnym* ($X \in Ind(\mathfrak{A}, Q)$), jeśli

$$Q \cap A^X \subseteq H_X(\mathfrak{A})$$

lub równoważnie

$$(\forall p \in Q_X)\ (\forall n \leq card(X))\ (\forall f, g \in \mathbb{T}^{(n)}(\mathfrak{A}))\ (\forall a_1, \ldots, a_n \in X)$$
$$[f(a_1, \ldots, a_n) = g(a_1, \ldots, a_n) \Rightarrow f(p(a_1), \ldots, p(a_n)) = g(p(a_1), \ldots, p(a_n))].$$

Przyjmując w miejsce $Q$ różne rodziny odwzorowań otrzymujemy wiele uprzednio zdefiniowanych pojęć niezależności.

**Przykłady.**

**1)** $Q = M = \bigcup\{A^X \mid X \subseteq A\}$, *M-niezależność* zdefiniowana przez E. Marczewskiego w [31], czasem nazywana niezależnością algebraiczną.

**2)** $Q = S = \bigcup\{\langle X\rangle_{\mathfrak{A}}^X \mid X \subseteq A\}$, *S-niezależność* zdefiniowana przez J. Schmidta w [40] jako tak zwana *niezależność lokalna.*

**3)** $Q = S_0 = \bigcup\{X^X \mid X \subseteq A\}$, $S_0$-*niezależność* wprowadzona przez S. Świerczkowskiego w [43] pod nazwą *słabej niezależności.*

**4)** $Q = A_1 = \bigcup\{f|_X \mid f \in \mathbb{T}^{(1)}(\mathfrak{A}), X \subseteq A\}$, $A_1$-*niezależność* zdefiniowana przez K. Głazka w [18].

**5)** $Q = G = \bigcup\{p|_X \mid\ p \in A^A$ jest zmniejszające, $X \subseteq A\}$, *G-niezależność* wprowadzona przez G. Grätzera w [24] jako tak zwana *słaba niezależność.*

Odwzorowanie $p$ nazywamy *zmniejszającym*, jeśli

$$(\forall f, g \in \mathbb{T}^{(1)}(\mathfrak{A}))\ (\forall a \in A)\ [f(a) = g(a) \Rightarrow f(p(a)) = g(p(a))].$$

**6)** $Q = I = \bigcup\{p \mid p \in A^X$ różnowartościowe, $X \subseteq A\}$, *I-niezależność* wprowadzona przez K. Głazka w [18] jako *R-niezależność.*

Inny rodzaj niezależności, tak zwana *t-niezależność*, został zdefiniowany przez J. Płonkę i W. Poguntke w [38].

Zbiór $X \subseteq A$ nazywamy *t-niezależnym* w algebrze $\mathfrak{A} = (A; \mathbb{F})$, jeśli dla każdych parami różnych elementów $a_1, ..., a_n \in X$ oraz każdego $n$-argumentowego działania termowego $f$ nie będącego rzutowaniem, zachodzi $f(a_1, ..., a_n) \neq a_i$ dla wszystkich $i = 1, ..., n$. Przez $Ind_t(\mathfrak{A})$ oznaczamy rodzinę wszystkich $t$-niezależnych zbiorów algebry $\mathfrak{A}$.

Wiadomo (por. [18]), że $Ind(\mathfrak{A}, M) \subseteq Ind_t(\mathfrak{A})$ dla dowolnej algebry $\mathfrak{A} = (A; \mathbb{F})$. Zatem istnieje pewna rodzina odwzorowań $Q(A)$ taka, że $Ind_t(\mathfrak{A}) = Ind(\mathfrak{A}, Q(A))$. Problem zdefiniowania w jednolity sposób takiej rodziny $Q$, że dla dowolnej algebry zachodzi $Ind_t(\mathfrak{A}) = Ind(\mathfrak{A}, Q)$ pozostaje nadal otwarty.

Następujące własności rodzin zbiorów $Q$-niezależnych w dowolnej algebrze $\mathfrak{A} = (A; \mathbb{F})$ zostały podane w pracy K. Głazka [18]:

$$\begin{gathered} Ind(\mathfrak{A}, M) \subseteq Ind(\mathfrak{A}, Q) \text{ dla wszystkich } Q \subseteq M, \\ Ind(\mathfrak{A}, S) \subseteq Ind(\mathfrak{A}, S_0) \text{ oraz } Ind(\mathfrak{A}, S) \subseteq Ind(\mathfrak{A}, A_1), \end{gathered} \tag{1.1}$$

$$\begin{gathered} (\forall a \in A)\ [\ \{a\} \in Ind(\mathfrak{A}, S) \Leftrightarrow \{a\} \in Ind(\mathfrak{A}, A_1)\ ], \\ (\forall a \in A)\ [\ \{a\} \in Ind(\mathfrak{A}, I) \Leftrightarrow \{a\} \in Ind(\mathfrak{A}, M)\ ], \end{gathered} \tag{1.2}$$

$$(\forall a \in A)\ [\ \{a\} \in Ind(\mathfrak{A}, S_0) \cup Ind(\mathfrak{A}, G)\ ], \tag{1.3}$$

$$(\forall X \subseteq A)\ [\ X \in Ind(\mathfrak{A}, G) \Leftrightarrow X \setminus \mathbb{T}^{(0)}(\mathfrak{A}) \in Ind(\mathfrak{A}, G)\ ]. \tag{1.4}$$

Mamy też następujące twierdzenie:

**Twierdzenie 1** *Niech* $\mathfrak{A} = (A; \mathbb{F})$ *będzie algebrą,* $X \subseteq B \subseteq A$ *oraz* $\mathbb{F}' \subseteq \mathbb{F}$. *Jeśli* $\mathfrak{B}' = (B; \mathbb{F}')$ *jest podalgebrą reduktu* $(A; \mathbb{F}')$ *algebry* $\mathfrak{A}$*, to*

$$X \in Ind(\mathfrak{A}, S_0) \Rightarrow X \in Ind(\mathfrak{B}', S_0). \tag{1.5}$$

*Ponadto, jeśli* $\mathfrak{B} = (B; \mathbb{F})$ *jest podalgebrą algebry* $\mathfrak{A}$*, to*

$$X \in Ind(\mathfrak{A}, Q) \Leftrightarrow X \in Ind(\mathfrak{B}, Q) \;\; dla \;\; Q = S, S_0 \; lub \; A_1. \tag{1.6}$$

**Dowód.** Niech $X \subseteq B \subseteq A$ oraz $X \in Ind(\mathfrak{A}, S_0)$. Weźmy dwa $n$-argumentowe działania termowe $f_1, f_2$ w redukcie $(A, \mathbb{F}')$, spełniające warunek $f_1(a_1, ..., a_n) = f_2(a_1, ..., a_n)$ dla pewnych $a_1, ..., a_n \in X$, $n \in N$. Działaniom tym odpowiadają dwa termy, które mogą być również realizowane w algebrze $\mathfrak{A}$ jako działania termowe $f_3, f_4 \in \mathbb{T}^{(n)}(\mathfrak{A})$. Mamy zatem $f_3(a_1, ..., a_n) = f_1(a_1, ..., a_n) = f_2(a_1, ..., a_n) = f_4(a_1, ..., a_n)$. Z założenia otrzymujemy $f_3(p(a_1), ..., p(a_n)) = f_4(p(a_1), ..., p(a_n))$ dla dowolnego $p : X \to X$. Oczywiście $p(a_i) \in X \subseteq B$ $(i = 1, ..., n)$, co implikuje $f_1(p(a_1), ..., p(a_n)) = f_2(p(a_1), ..., p(a_n))$. W konsekwencji $X \in Ind(\mathfrak{B}', S_0)$.

W przypadku, gdy $\mathfrak{B}$ jest podalgebrą algebry $\mathfrak{A}$ implikacja (1.5) zachodzi także dla $S$ oraz $A_1$-niezależności, ponieważ dla dowolnego odwzorowania $q : X \to \langle X \rangle_{\mathfrak{B}}$ lub $q = f_0|_X$ $(f_0 \in \mathbb{T}^{(1)}(\mathfrak{A}))$ mamy $q(a_i) \in B$.

Przypuśćmy teraz, że $X \in Ind(\mathfrak{B}, Q)$ dla $Q = S, S_0$ lub $A_1$ oraz $f_5(b_1, ..., b_n) = f_6(b_1, ..., b_n)$ dla pewnych $f_5, f_6 \in \mathbb{T}^{(n)}(\mathfrak{A})$, $a_1, ..., a_n \in X$. Ponieważ $\mathfrak{B}$ jest podalgebrą, więc $f_i(a_1, ..., a_n) \in B$ oraz $f_i|_B \in \mathbb{T}^{(n)}(\mathfrak{B})$ dla $i = 5, 6$. Zatem dla dowolnego $p \in X^X$, $p \in \langle X \rangle_{\mathfrak{A}}^X = \langle X \rangle_{\mathfrak{B}}^X$ lub $p = f_0|_X$, $f_0 \in \mathbb{T}^{(1)}(\mathfrak{A})$ otrzymujemy $f_5(p(a_1), ..., p(a_n)) = f_6(p(a_1), ..., p(a_n))$, co kończy dowód. ■

Rodzina zbiorów $J$ jest *dziedziczna*, gdy dla każdego zbioru $X \subseteq A$ spełniony jest warunek $X \in J \Rightarrow (\forall\, Y \subseteq X)[Y \in J]$.

Rodzina $Ind(\mathfrak{A}, Q)$ jest dziedziczna dla $Q = M, S, S_0, G, A_1$ oraz $I$. Własność dziedziczności posiada również rodzina zbiorów $t$-niezależnych.

Podamy teraz pojęcie rzędu elementu wprowadzone przez G. Grätzera w [24]. Niech $\mathcal{K}$ będzie klasą algebr podobnych, $\mathfrak{A} = (A; \mathbb{F}) \in \mathcal{K}$ oraz $a \in A$. Odwzorowanie $e_1^1 \mapsto a$ posiada jednoznaczne rozszerzenie do homomorfizmu $h$ z algebry termów jednej zmiennej $\mathbb{T}^{(1)}(\mathcal{K})$ klasy $\mathcal{K}$ w algebrę $\mathfrak{A}$. Relację kongruencji indukowaną przez $h$ (jądro homomorfizmu $h$) oznaczamy $O(a)$ i nazywamy *rzędem* elementu $a$. Element $a$ nazywamy *beztorsyjnym*, jeśli $O(a) = \omega$ $(= \{(f, f) \mid f \in \mathbb{T}^{(1)}(\mathcal{K})\})$.

Z rezultatu G. Grätzera przedstawionego w pracy [24] wynika, że

$$(\forall a \in X \subseteq A)\ [O(a) = \omega] \Rightarrow [X \in Ind(\mathfrak{A}, G) \Leftrightarrow X \in Ind(\mathfrak{A}, M)]. \tag{1.7}$$

Podamy teraz pewne ogólne własności rodzin zbiorów $Q$-niezależnych dla algebr, w których wśród działań termowych występuje retrakcja.

Przypomnijmy, że odwzorowanie $g$ nazywamy *retrakcją* algebry $\mathfrak{A} = (A; \mathbb{F})$, gdy $g \in End(\mathfrak{A})$ oraz $g(g(x)) = g(x)$ dla każdego $x \in A$. Zbiór $g(A)$ nazywamy *retraktem* algebry $\mathfrak{A}$. Oczywiście $g(\mathfrak{A}) = (g(A); \mathbb{F})$ jest podalgebrą algebry $\mathfrak{A}$. Klasę abstrakcji kongruencji indukowanej przez $g$ jednoznacznie wyznaczoną przez dowolny element $a$ należący do retraktu oznaczmy przez

$$F_a = \{x \in A \mid g(x) = g(a) = a\}.$$

Jeśli $Q = G$ lub $A_1$, to

$$(\forall X \subseteq A)\ (\forall a \in X \cap g(A))\ (\forall p \in Q_X)\ [p(a) \in g(A)]. \tag{1.8}$$

Jak łatwo zauważyć, w przypadku rodzin $S$ i $S_0$ własność (1.8) jest prawdziwa, jeśli $X \subseteq g(A)$.

Udowodnimy teraz następujące twierdzenie:

**Twierdzenie 2** *Jeśli w algebrze* $\mathfrak{A} = (A; \mathbb{F})$ *istnieje istotnie unarne działanie termowe* $g \neq e_1^1$ *będące retrakcją, to*

$(a)$ $(\forall a \in A)\ [a \in g(A) \Rightarrow \{a\} \notin Ind(\mathfrak{A}, I) \cup Ind_t(\mathfrak{A})]$;

$(b)$ $(\forall X \subseteq A)\ [X \in Ind(\mathfrak{A}, Q) \Rightarrow g(X) \in Ind(g(\mathfrak{A}), Q)]$ *dla* $Q = M$ *lub* $A_1$;

$(c)$ $(\forall X \subseteq g(A))\ [X \in Ind(g(\mathfrak{A}), Q) \Rightarrow X \in Ind(\mathfrak{A}, Q)]$ *dla* $Q = A_1, S, S_0$ *lub* $G$;

$(d)$ $(\forall a, b \in A)\ [g(a) = g(b) \Rightarrow \{a, b\} \notin Ind(\mathfrak{A}, I)]$;

$(e)$ $(\forall a, b, c \in A)\ [g(a) = g(b) \neq g(c) \Rightarrow \{a, b, c\} \notin Ind(\mathfrak{A}, S_0)]$;

$(f)$ $(\forall X \subseteq A)\ [X \in Ind(\mathfrak{A}, S_0) \Rightarrow [X \cap g(A) = \emptyset \vee X \subseteq g(A)]]$.

**Dowód.**

**(a)** Niech $a \in g(A)$. Wówczas $e_1^1(a) = a = g(a)$. Zgodnie z założeniem $e_1^1 \neq g \in \mathbb{T}^{(1)}(\mathfrak{A})$, a stąd $\{a\} \notin Ind(\mathfrak{A}, M)$. Wobec własności (1.2), mamy również $\{a\} \notin Ind(\mathfrak{A}, I)$, natomiast z definicji $t$-niezależności wynika, że $\{a\} \notin Ind_t(\mathfrak{A})$.

**(b)** Przypuśćmy, że $f_1(a_1, ..., a_n) = f_2(a_1, ..., a_n)$ dla pewnych $f_1, f_2 \in \mathbb{T}^{(n)}(\mathfrak{A})$, $a_1, ..., a_n \in g(X)$. Oczywiście $a_i = g(b_i)$ $(i = 1, .., n)$ dla pewnych $b_1, ..., b_n \in X$. Zatem $f_1(g(b_1), ..., g(b_n)) = f_2(g(b_1), ..., g(b_n))$, a stąd $g(f_1(b_1, ..., b_n)) = g(f_2(b_1, ..., b_n))$ oraz $\hat{g}(f_1), \hat{g}(f_2) \in \mathbb{T}^{(n)}(\mathfrak{A})$.

Jeśli przyjmiemy, że $X \in Ind(\mathfrak{A}, M)$, to $\hat{g}(f_1) = \hat{g}(f_2)$ w algebrze $\mathfrak{A}$. Zatem $\hat{g}(f_1)(c_1, ..., c_n) = \hat{g}(f_2)(c_1, ..., c_n)$ dla dowolnych $c_1, ..., c_n \in g(A)$. Ponieważ $c_i = g(c_i)$ $(i = 1, .., n)$, więc $f_1(c_1, ..., c_n) = f_2(c_1, ..., c_n)$, czyli $f_1 = f_2$ w $g(\mathfrak{A})$. Wobec tego $g(X) \in Ind(g(\mathfrak{A}), M)$.

Zakładając, że $X \in Ind(\mathfrak{A}, A_1)$ otrzymujemy $g(f_1(p(a_1), ..., p(a_n))) = g(f_2(p(a_1), ..., p(a_n)))$ dla każdego $p = f_0|_X$, $f_0 \in \mathbb{T}^{(1)}(\mathfrak{A})$. Fakt ten implikuje

$f_1(g(p(a_1)),...,g(p(a_n))) = f_1(p(g(a_1)),...,p(g(a_n))) = f_1(p(b_1),...,p(b_n)) =$
$=f_2(p(b_1),...,p(b_n))$, w konsekwencji $g(X) \in Ind(g(\mathfrak{A}), A_1)$.

**(c)** Załóżmy teraz, że $g(A) \supseteq X \in Ind(g(\mathfrak{A}), Q)$ dla $Q = A_1, S, S_0$ lub $G$ oraz $p \in Q \cap A^X$. Zgodnie z własnością (1.8) mamy $p : X \to g(A)$. Ponadto $g$ jest retrakcją, więc $\langle X\rangle_{\mathfrak{A}} = \langle X\rangle_{\mathfrak{g}(\mathfrak{A})}$. Zatem, na mocy założenia, odwzorowanie $p$ można rozszerzyć do homomorfizmu $\bar{p} : \langle X\rangle_{\mathfrak{A}} \to g(A) \subseteq A$. A stąd $X \in Ind(\mathfrak{A}, Q)$.

**(d)** Przyjmijmy, że $g(a) = g(b)$. Zdefiniujmy dwa binarne działania termowe $f_3(x, y) = g(x)$ i $f_4(x, y) = g(y)$. Ponieważ, z założenia, $g$ nie jest działaniem stałym, wobec tego $g(c) \neq g(a)$ dla pewnego $c \in A$. Rozważmy różnowartościowe odwzorowanie $p_1 : \{a, b\} \to A$ zdefiniowane przez równości $p_1(a) = a$, $p_1(b) = c$. Mamy zatem $f_3(a, b) = g(a) = g(b) = f_4(a, b)$, a także $f_3(p_1(a), p_1(b)) = g(p_1(a)) = g(a) \neq g(c) = g(p_1(b)) = f_4(p_1(a), p_1(b))$. Oznacza to, że $\{a, b\} \notin Ind(\mathfrak{A}, I)$.

**(e)** Niech $g(a) = g(b) \neq g(c)$. Rozważmy następujące działania termowe $f_5(x, y, z) = g(x)$, $f_6(x, y, z) = g(y)$ oraz odwzorowanie $p_2 : \{a, b, c\} \to \{a, b, c\}$ takie, że $p_2(a) = a, p_2(b) = p_2(c) = c$. Otrzymujemy wówczas $f_5(a, b, c) = g(a) = g(b) = f_6(a, b, c)$. Lecz $f_5(p_2(a), p_2(b), p_2(c)) = g(p_2(a)) = g(a) \neq g(c) = g(p_2(b)) = f_6(p_2(a), p_2(b), p_2(c))$, a w konsekwencji $\{a, b, c\} \notin Ind(\mathfrak{A}, S_0)$.

**(f)** Załóżmy, że $X \in Ind(\mathfrak{A}, S_0)$ oraz $a \in X \cap g(A)$, $b \in X$. Rozważmy działania termowe $f_3(x, y) = g(x)$, $e_1^2(x, y) = x$ (oczywiście $f_3 \neq e_1^2$) oraz odwzorowanie $p_3 : X \to X$ dane wzorem $p(x) = b$. Oczywiście $f_3(a, b) = g(a) = a = e_1^2(a, b)$. Z $S_0$-niezależności otrzymujemy $f_3(p_3(a), p_3(b)) = e_1^2(p_3(a), p_3(b))$. Stąd $f_3(b, b) = e_1^2(b, b)$, co implikuje $g(b) = b$. Zatem $b \in g(A)$, czyli $X \subseteq g(A)$. ∎

# Rozdział 2

# Q-niezależność w algebrach Stone'a.

## 2.1 Podstawowe pojęcia i fakty dotyczące algebr Stone'a.

Dla dowolnej kraty $(L; \vee, \wedge)$ z najmniejszym elementem $\mathbf{0}$ (lub ogólniej $\wedge$-półkraty z zerem) można zdefiniować pseudodopełnienie elementu $a \in L$ jako największy element $a^*$ spełniający równość

$$a \wedge a^* = \mathbf{0}, \tag{2.1}$$

czyli element taki, że

$$(\forall x \in L)\ [a \wedge x = \mathbf{0} \Leftrightarrow x \leq a^*]. \tag{2.2}$$

Kratę (lub odpowiednio $\wedge$-półkratę) nazywamy kratą (lub półkratą) z pseudodopełnieniem, gdy każdy jej element ma pseudodopełnienie. Z definicji pseudodopełnienia wynika, że są one określone jednoznacznie. Zatem przyporządkowanie $x \mapsto x^*$ można traktować jako działanie podstawowe, a algebrę $(L; \vee, \wedge, ^*, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ z dwoma działaniami binarnymi, jednym unarnym i z dwoma stałymi (traktowanymi jako działania zero-argumentowe) nazywamy *algebrą pseudokomplementarną* (lub krótko *p-algebrą*).

Po raz pierwszy kraty i półkraty z pseudopełnieniami rozważał V. Glivenko w 1929 roku w pracy [15], a następnie G. Birkhoff w 1933 roku w pracy [3]. Dalszy rozwój teorii takich algebr był wynikiem rozwiązania w 1957 roku przez G. Grätzera i E. T. Schmidta w pracy [26] problemu postawionego przez M. H. Stone'a (por. G. Birkhoff [2], Problem 70).

Dystrybutywne algebry pseudokomplementarne tworzą ważne klasy algebr równościowo definiowalnych. Dystrybutywna krata algebraiczna, krata ideałów dystrybutywnej kraty z zerem, krata kongruencji dowolnej kraty, algebra Boole'a są przykładami $p$-algebr.

Rozważając dystrybutywną $p$-algebrę $(L; \vee, \wedge, ^*, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ spełniającą warunek

$$x^* \vee x^{**} = \mathbf{1} \text{ (dla wszystkich } x \in L) \tag{2.3}$$

otrzymujemy uogólnienie algebry Boole'a zwane *algebrą Stone'a.*

W 1970 roku K. B. Lee udowodnił, że klasy równościowe $p$-algebr dystrybutywnych tworzą łańcuch, którego najmniejszym, nietrywialnym elementem jest klasa algebr Boole'a, a kolejnym klasa algebr Stone'a. Jest ona równościowo definiowana przez równości definiujące klasę dystrybutywnych krat ograniczonych, równość (2.3) oraz

$$x \wedge x^{**} = x, \tag{2.4}$$

$$x^* \vee x^{**} = \mathbf{1}. \tag{2.5}$$

W latach późniejszych algebry Stone'a z ograniczonym zbiorem gęstym znalazły szereg zastosowań, między innymi w badaniu algebr zdarzeń warunkowych (por. [13]) oraz zbiorów przybliżonych (por. [29], [39]).

Szczególnie pomocnym narzędziem do badaniu struktury algebr Stone'a jest trójkowa reprezentacja przedstawiona przez C. C. Chena oraz G. Grätzera w [6].

W strukturze tej szczególnie ważną rolę spełnia zbiór *gęsty*:

$$D(L) = \{x \in L \mid x^* = \mathbf{0}\}$$

oraz *szkielet*

$$S(L) = \{x \in L \mid x^{**} = x\}$$

nazywany czasem centrum algebry i oznaczany przez $C(L)$ lub $B(L)$. Algebra $\mathfrak{S}(\mathfrak{L})$ =$(S(L); \vee, \wedge, ^*, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ jest podalgebrą algebry Stone'a, będącą również algebrą Boole'a. $\mathfrak{D}(\mathfrak{L}) = (D(L); \vee, \wedge, \mathbf{1})$ jest kratą dystrybutywną z największym elementem $\mathbf{1}$. $D(L)$ jest filtrem kraty $\mathcal{L}$.

Niech $\mathfrak{F}(D(L))$ oznacza rodzinę wszystkich filtrów kraty $\mathfrak{D}(\mathfrak{L})$. Związek między $S(L)$ i $D(L)$ określony jest przez homomorfizm $\varphi_L : S(L) \to \mathfrak{F}(D(L))$ zdefiniowany $\varphi_L(a) = \{x \in D(L) \mid x \geq a^*\}$. Trójka $(S(L), D(L), \varphi_L)$ charakteryzuje algebrę Stone'a z dokładnością do izomorfizmu.

Łatwo zauważyć, że działanie termowe $g(x) = x^{**}$ jest retrakcją algebry $\mathfrak{L}$, a $S(L) = g(L)$ jej retraktem. Jądro tego homomorfizmu oznaczamy przez $\theta$ i nazywamy *kongruencją Glivenki*:

$$(x, y) \in \theta \Leftrightarrow x^* = y^* (\Leftrightarrow x^{**} = y^{**}). \tag{2.6}$$

Wiadomo, że $L/\theta$ jest algebrą izomorficzną z $S(L)$ oraz $[\mathbf{1}]_\theta = D(L)$. Każda $\theta$-klasa zawiera dokładnie jeden element z $S(L)$, który jest największym elementem w danej klasie. Dla $a \in S(L)$, zdefiniujmy zbiór $[a]_\theta = F_a = \{x \in L \mid x^{**} = a\}$. Wówczas $\mathfrak{F}_\mathfrak{a} = (F_a; \vee, \wedge, a)$ jest kratą dystrybutywną z największym elementem $a$. Jest to podkrata kraty dystrybutywnej z jednością $\mathfrak{L}_1 = (L; \vee, \wedge, \mathbf{1})$. Zdefiniujmy funkcję $\phi : L \to D(L)$ następująco:

$$\phi(x) = x \vee x^*. \tag{2.7}$$

Wówczas $\phi|_{F_a}$ jest izomorfizmem kratowym $\mathfrak{F}_\mathfrak{a}$ na $\varphi_L(a)$ dla każdego $a \in S(L)$. Mamy zatem:

$$\phi(x) = \mathbf{1} \Leftrightarrow x \in S(L). \tag{2.8}$$

Korzystając z faktu, iż wśród działań termowych algebry Stone'a występuje retrakcja, możemy do badania zbiorów $Q$-niezależnych w tej algebrze zastosować Twierdzenia 1 i 2. W tym celu opiszemy najpierw rodziny zbiorów $Q$-niezależnych w kratach dystrybutywnych oraz algebrach Boole'a.

## 2.2 $Q$-niezależność w kratach dystrybutywnych.

Przypomnijmy (por. [34] i [32]) opis działań termowych w kratach dystrybutywnych. Niech $\mathfrak{L}_D = (L; \vee, \wedge)$ będzie kratą dystrybutywną. Dla każdego $n$-argumentowego działania termowego $f$ algebry $\mathfrak{L}_D$ istnieje dokładnie jedna rodzina $P$ podzbiorów zbioru $\{1, ..., n\}$ nieporównywalnych ze względu na inkluzję zbiorów taka, że

$$f(x_1, ..., x_n) := \tilde{f}_P(x_1, ..., x_n) = \bigvee_{U \in P} \bigwedge_{j \in U} x_j. \tag{2.9}$$

Rezultaty otrzymane przez G. Szásza oraz E. Marczewskiego (por. [42] i [34]) dają opis $M$-niezależności w kratach dystrybutywnych.

**Twierdzenie 3** *Niech $(L; \vee, \wedge)$ będzie kratą dystrybutywną. Wówczas $X \subseteq L$ jest $M$-niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$c_1 \wedge ... \wedge c_m \nleq d_1 \vee ... \vee d_n \tag{2.10}$$

*dla każdych parami różnych $c_1, ..., c_m, d_1, ..., d_n \in X$.* □

Korzystając z powyższego twierdzenia otrzymujemy:

**Twierdzenie 4** *Niech $\mathfrak{L}_D = (L; \vee, \wedge)$ będzie kratą dystrybutywną (bez stałych). Wówczas*

$$Ind(\mathfrak{L}_D, M) = Ind(\mathfrak{L}_D, Q), \text{ gdzie } Q = S, S_0, G, I.$$

**Dowód.** Na mocy (1.1) wystarczy udowodnić inkluzję $\supseteq$. W tym celu przypuśćmy, że $X \notin Ind(\mathfrak{L}_D, M)$. Korzystając z Twierdzenia 3 otrzymujemy $c_1 \wedge ... \wedge c_m \leq d_1 \vee ... \vee d_n$ dla pewnych, parami różnych $c_1, ..., c_m, d_1, ..., d_n \in X$. Zatem mamy $(c_1 \wedge ... \wedge c_m) \wedge (d_1 \vee ... \vee d_n) = c_1 \wedge ... \wedge c_m$. Rozważmy następujące działania termowe: $f(x_1, ..., x_{m+n}) = (x_1 \wedge ... \wedge x_m) \wedge (x_{m+1} \vee ... \vee x_{m+n})$ oraz $g(x_1, ..., x_{m+n}) = x_1 \wedge ... \wedge x_m$.

Na początek załóżmy, że $X \in Ind(\mathfrak{L}_D, S_0)$ oraz rozważmy odwzorowanie $p : X \to X$ zdefiniowane następująco:

$$p(x) = \begin{cases} c_1 & \text{dla } x = c_i \ (i = 1, ..., m); \\ d_1 & \text{dla } x = d_j \ (j = 1, ..., n); \\ x & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Biorąc pod uwagę definicję działań $f$ i $g$ mamy $f(c_1, ..., c_m, d_1, ...., d_n) =$
$= g(c_1, ..., c_m, d_1, ..., d_n)$ oraz, na mocy $S_0$-niezależności,
$f(p(c_1), ..., p(c_m), p(d_1), ...., p(d_n)) = g(p(c_1), ...., p(c_n), p(d_1), ...., p(d_n))$. Stąd otrzymujemy $c_1 \wedge d_1 = c_1$. Przyjmijmy teraz $f_1(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$, $g_1(x_1, x_2) = x_1$ oraz $p_1(c_1) = d_1$, $p_1(d_1) = c_1$, $p_1(x) = x$ dla $x \neq c_1, d_1$. Wówczas mamy $f_1(c_1, d_1) = g_1(c_1, d_1)$ oraz $f_1(p(c_1), p(d_1)) = g_1(p(c_1), p(d_1))$. Zatem $d_1 \wedge c_1 = d_1$, a w konsekwencji $c_1 = d_1$, sprzeczność. Reasumując $Ind(\mathfrak{L}_D, M) = Ind(\mathfrak{L}_D, S_0)$ oraz $Ind(\mathfrak{L}_D, M) = Ind(\mathfrak{L}_D, S)$, dzięki własności (1.1).

Przypuśćmy teraz, że $X \in Ind(\mathfrak{L}_D, I)$. Rozważmy odwzorowanie $p : X \to L$ dane wzorami:

$$p_2(c_i) = \begin{cases} c_1 \vee ... \vee c_m & \text{dla } i = 1, \\ c_i & \text{dla } i \neq 1, \end{cases} \qquad p_2(d_j) = \begin{cases} d_1 \wedge ... \wedge d_n & \text{dla } i = 1, \\ d_j & \text{dla } i \neq 1, \end{cases},$$

$p_2(x) = x$ dla $x \neq c_i, d_j$; $i = 1, ..., m$; $j = 1, ..., n$. Łatwo wykazać, że odwzorowanie to na zbiorze $I$-niezależnym jest różnowartościowe. Dla działań uprzednio zdefiniowanych mamy zatem

$f(p_2(c_1), ..., p_2(c_m), p_2(d_1), ...., p_2(d_n)) = g(p_2(c_1), ...., p_2(c_n), p_2(d_1), ...., p_2(d_n))$.
Co prowadzi do $(c_2 \wedge ... \wedge c_m) \wedge (d_2 \vee ... \vee d_n) = c_2 \wedge ... \wedge c_m$. Po $k$ liczbie podobnych kroków ($k = max\{m, n\}$) uzyskamy $c_m \wedge d_n = c_m$. Wykorzystując różnowartościowe odwzorowanie $p_3$ zdefiniowane następująco: $p_3(c_m) = d_n$, $p_3(d_n) = c_m$, $p_3(x) = x$ dla $x \neq c_m, d_n$, otrzymamy $c_m = d_n$, wbrew założeniu.

Ponieważ w algebrze $\mathfrak{L}_D$ nie ma elementów $M$-samozależnych, mamy również $Ind(\mathfrak{L}_D, M) = Ind(\mathfrak{L}_D, G)$ (por. [18]). ■

Oczywiście $Ind(\mathfrak{L}_D, A_1) = 2^L$, ponieważ w kracie dystrybutywnej jedynym działaniem jednoargumentowych jest działanie tożsamościowe.

Badaniem $t$-niezależności w kratach dystrybutywnych zajmowali się J.Płonka i T. Poguntke w pracy [38].

**Twierdzenie 5** *Niech $\mathfrak{L}_D = (L; \vee, \wedge)$ będzie kratą dystrybutywną. Wówczas zbiór $X \subseteq L$ jest $t$-niezależny w $\mathfrak{L}_D$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdych parami różnych $a_1, ..., a_n \in X$ zachodzi:*

$$a_1 \nleq a_1 \vee ... \vee a_n \text{ oraz } a_1 \wedge ... \wedge a_n \nleq a_1.$$

□

Z powyższego twierdzenia wynika, że rodziny zbiorów $M$-niezależnych i $t$-niezależnych w kratach dystrybutywnych nie pokrywają się.

W algebrach Stone'a każda $\theta$-klasa jest kratą dystrybutywną z elementem maksymalnym, sformułujmy zatem następujący wniosek z Twierdzenia 3 oraz 4:

**Wniosek 1** *Niech* $\mathfrak{L}_c = (L; \vee, \wedge, c)$ $(c = \mathbf{0}, \mathbf{1})$ *będzie kratą dystrybutywną z największym elementem* $\mathbf{1}$ *lub najmniejszym elementem* $\mathbf{0}$. *Jeśli* $X \subseteq L$, *to dla* $Q = M, S$ *lub* $I$ *następujące warunki są równoważne:*

*(α)* $X \in Ind(\mathfrak{L}_c, Q)$ *lub* $X = \{c\}$;

*(β)* $X \in Ind(\mathfrak{L}_c, S_0)$;

*(γ)* $X \setminus \{c\} \in Ind(\mathfrak{L}_c, G)$;

*(δ)* $c_1 \wedge ... \wedge c_m \nleq d_1 \vee ... \vee d_n$ *dla każdych* $c_1, ..., c_m, d_1, ..., d_n$ *parami różnych elementów zbioru* $X$.

## 2.3 $Q$-niezależność w algebrach Boole'a.

Przypomnijmy opis działań termowych w algebrach Boole'a. Niech $x^0 = x$, $x^1 = x^*$ . W algebrze Boole'a $\mathfrak{B} = (B; \vee, \wedge, ^*, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ zdefiniujmy *atom ze względu na elementy* $x_1, ..., x_n \in B$ indeksowany ciągiem $(i_1, ..., i_n)$, gdzie $i_k \in \{0, 1\}$ $(k = 1, ..., n;$ $n \in N)$, następująco:

$$A_{(i_1,...,i_n)}(x_1, ..., x_n) := \bigwedge_{k=1}^{n} x_k^{i_k}.$$

E. Marczewski w pracy [32] udowodnił, że działania postaci

$$A_J(x_1, ...x_n) = \bigvee_{(i_1,...,i_n)\in J} A_{(i_1,...,i_n)}(x_1, ..., x_n),$$

dla dowolnej rodziny $J \subseteq \{0, 1\}^n$ $(A_\emptyset(x_1, ..., x_n) = \mathbf{0})$ tworzą zbiór wszystkich $n$-arnych działań termowych algebry $\mathfrak{B}$.

E. Marczewski zbadał również $M$-niezależność w algebrze Boole'a (por. [32]). Przypomnijmy ten rezultat.

**Twierdzenie 6** *Niech* $\mathfrak{B} = (B; \vee, \wedge, ^*, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ *będzie algebrą Boole'a oraz* $X \subseteq B$. *Wówczas* $X \in Ind(\mathfrak{B}, M)$ *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$A_{(i_1,...,i_n)}(a_1, ..., a_n) \neq \mathbf{0}$$

*dla każdego* $(i_1, ..., i_n) \in \{0, 1\}^n$ *i każdych parami różnych* $a_1, ..., a_n \in X$. □

Dla tych algebr zbadane zostały również inne rodzaje niezależności (K. Głazek, [18]). W algebrze Boole'a $\mathfrak{B}$ mamy następujące opisy rodzin zbiorów $Q$-niezależnych:

$$Ind(\mathfrak{B}, M) = Ind(\mathfrak{B}, S) = Ind(\mathfrak{B}, S_0) \setminus \{\{\mathbf{0}\}, \{\mathbf{1}\}\} = Ind(\mathfrak{B}, I) \text{ oraz}$$

$$X \in Ind(\mathfrak{B}, G) \Leftrightarrow X \setminus \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\} \in Ind(\mathfrak{B}, M).$$

Ponadto K. Golema-Hartman w [22] udowodniła, że:

$$X \in Ind_t(\mathfrak{B}) \Leftrightarrow X \in Ind(\mathfrak{B}, M).$$

Przypomnijmy również opis $A_1$-niezależności (K. Głazek, [18]).

**Twierdzenie 7** *Niech* $\mathfrak{B} = (B; \vee, \wedge, ^*, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ *będzie algebrą Boole'a oraz* $X \subseteq B$. *Wówczas* $X \in Ind(\mathfrak{B}, A_1)$ *wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych* $a_1, ..., a_n \in X$ *spełnione są następujące warunki:*

($\alpha$) $A_{(0,0,...,0)}(a_1, ..., a_n) \neq \mathbf{0}$;

($\beta$) $A_{(i_1,...,i_n)}(a_1, ..., a_n) = \mathbf{0} \Rightarrow A_{(1-i_1,...,1-i_n)}(a_1, ..., a_n) = \mathbf{0}$. □

## 2.4 $Q$-niezależność w algebrach Stone'a dla zbiorów jedno- i dwuelementowych.

Wszystkie omawiane przez nas rodziny zbiorów niezależnych są dziedziczne, zatem badanie zbiorów niezależnych rozpoczniemy od zbiorów jednoelementowych.

Odnotujmy najpierw, że $\mathbf{0}$ i $\mathbf{1}$ są jedynymi nularnymi, natomiast $x$, $x^*$, $x^{**}$, $x \vee x^*$ są jedynymi unarnymi działaniami termowymi w algebrze Stone'a. Mamy zatem

**Lemat 1** *Wszystkie unarne równości w algebrze Stone'a można zredukować do czterech następujących typów:*

$$x = \mathbf{0},\ x = \mathbf{1},\ x^* = \mathbf{0}\ \ i\ \ x^{**} = x.$$

**Dowód.** Rozważmy następujące cztery grupy równości:

$(a)$ $x = \mathbf{0},\ x^* = \mathbf{1},\ x^{**} = \mathbf{0},\ x^* = x \vee x^*$;

$(b)$ $x = \mathbf{1},\ x^{**} = x \vee x^*$;

$(c)$ $x^* = \mathbf{0},\ x^{**} = \mathbf{1},\ x = x \vee x^*$;

$(d)$ $x^{**} = x,\ \mathbf{1} = x \vee x^*$.

Łatwo wykazać, że równości każdej z tych grup są między sobą równoważne. Równości z grup $(a)$, $(b)$ są spełnione jedynie przez elementy, odpowiednio, $\mathbf{0}$ i $\mathbf{1}$. Natomiast równości z grupy $(c)$ są spełnione tylko przez elementy zbioru $D(L)$, a z grupy $(d)$ tylko przez elementy $S(L)$. ■

Z Lematu 1 wynika natychmiast następujący wniosek:

**Wniosek 2** *Niech* $(L; \vee, \wedge, ^*, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ *będzie algebrą Stone'a. Odwzorowanie* $p : X \to L$ $(X \subseteq L)$ *jest odwzorowaniem zmniejszającym wtedy i tylko wtedy, gdy zachowuje stałe oraz zbiory* $S(L)$ *i* $D(L)$ *(czyli* $p(S(L)) \subseteq S(L)$ *i* $p(D(L)) \subseteq D(L)$*).*

**Twierdzenie 8** *Niech* $\mathfrak{L} = (L; \vee, \wedge, ^*, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ *będzie algebrą Stone'a oraz* $a \in L$. *Wówczas:*

*(i)* $\{a\} \in Ind(\mathfrak{L}, M) \Leftrightarrow a \notin D(L) \cup S(L)$;

*(ii)* $\{a\} \in Ind(\mathfrak{L}, S) \Leftrightarrow a \notin D(L) \cup \{\mathbf{0}\}$;

*(iii)* $\{a\} \in Ind_t(\mathfrak{L}) \Leftrightarrow a \notin D(L) \cup S(L)$.

**Dowód.**

**(i)** Niech $\{a\} \in Ind(\mathfrak{L}, M)$. Załóżmy, nie wprost, że $a \in D(L)$. Rozważmy unarne działania termowe: $f(x) = x^*$ i $g(x) = \mathbf{0}$. Zatem $f(a) = a^* = \mathbf{0} = g(a)$ oraz $f(\mathbf{0}) = \mathbf{1}$, z czego wynika, że $f \neq g$ w $\mathfrak{L}$, wbrew założeniu. Stąd $a \notin D(L)$. Ponadto, z Twierdzenia 2(a) otrzymujemy $a \notin S(L)$.

Przypuśćmy teraz, że $a \notin D(L) \cup S(L)$. Z Lematu 1 wynika wówczas $f(a) \neq g(a)$ dla każdej pary różnych $f, g \in \mathbb{T}^{(1)}(\mathfrak{L})$. W konsekwencji $\{a\} \in Ind(\mathfrak{L}, M)$.

**(ii)** Załóżmy, że $\{a\} \in Ind(\mathfrak{L}, S)$ oraz $a \in D(L)$. Rozważmy działania $f, g$ zdefiniowane powyżej oraz odwzorowanie $p : \{a\} \to \langle a \rangle_{\mathfrak{L}}$, dane wzorem $p(x) = x^*$. Wówczas $f(a) = g(a)$, a stąd $f(p(a)) = f(\mathbf{0}) = \mathbf{1} \neq \mathbf{0} = g(p(a))$, co prowadzi do sprzeczności. W analogiczny sposób można udowodnić, że $a \neq \mathbf{0}$.

Dla wykazania implikacji przeciwnej przypuśćmy, że $a \notin D(L) \cup \{\mathbf{0}\}$. Jeśli, dodatkowo, $a \notin S(L)$, to $\{a\} \in Ind(\mathfrak{L}, M) \subseteq Ind(\mathfrak{L}, S)$, na mocy Twierdzenia 8(i) oraz własności (1.1). Zatem wystarczy rozważyć $a \in S(L) \setminus \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$. Załóżmy, że $f(a) = g(a)$ dla pewnych $f, g \in \mathbb{T}^{(1)}(\mathfrak{L})$ oraz $q : \{a\} \to \langle a \rangle_{\mathfrak{L}}$. Skoro $S(L)$ jest podalgebrą $\mathfrak{L}$, to $q(a) \in \langle a \rangle_{\mathfrak{L}} \subseteq S(L)$. Biorąc pod uwagę Lemat 1, otrzymamy $f(p(a)) = g(p(a))$. Zatem $\{a\} \in Ind(\mathfrak{L}, S)$.

**(iii)** Niech $\{a\} \in Ind_t(\mathfrak{L})$. Z Twierdzenia 2(a) wynika, że $a \notin S(L)$. Przypuśćmy zatem, że $a \in D(L)$. Wówczas $a^* = \mathbf{0}$, co implikuje $a \vee a^* = a$. Rozważając działanie termowe $\phi(x) = x \vee x^*$ otrzymamy $\phi(a) = a$ ($\phi$ nie jest rzutowaniem), wbrew założeniu.

Weźmy teraz $a \notin D(L) \cup S(L)$. Z Lematu 1 wynika natychmiast $f(a) \neq a$. Stąd $\{a\} \in Ind_t(\mathfrak{L})$.

■

Na podstawie Twierdzenia 8 oraz własności (1.2) i (1.3) otrzymujemy:

**Wniosek 3** *Niech $\mathfrak{L}$ będzie algebrą Stone'a oraz $a \in L$. Wówczas:*

(iv) $\{a\} \in Ind(\mathfrak{L}, A_1) \Leftrightarrow a \notin D(L) \cup \{\mathbf{0}\}$;

(v) $\{a\} \in Ind(\mathfrak{L}, I) \Leftrightarrow a \notin D(L) \cup S(L)$;

(vi) $\{a\} \in Ind(\mathfrak{L}, S_0) \cup Ind(\mathfrak{A}, G)$.

**Twierdzenie 9** *Niech $\mathfrak{L} = (L; \vee, \wedge, ^*, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ będzie algebrą Stone'a oraz $b_1, b_2$ będą różnymi elementami $F_a$ dla pewnego $a \in S(L)$. Wtedy $\{b_1, b_2\} \notin Ind_t(\mathfrak{L}) \cup Ind(\mathfrak{L}, Q)$, gdzie $Q = M, I$ lub $S$. Jeśli dodatkowo $a \neq \mathbf{1}$, to $\{b_1, b_2\} \notin Ind(\mathfrak{L}, G)$.*

**Dowód.** Przypuśćmy, że $b_1, b_2 \in F_a$ dla pewnego $a \in S(L)$. Przypomnijmy, że działanie termowe $g(x) = x^{**}$ jest retrakcją algebry $\mathfrak{L}$. Oczywiście $g(b_1) = g(b_2)$. Zatem, z Twierdzenia 2(d) wynika, że $\{b_1, b_2\} \notin Ind(\mathfrak{L}, I) \cup Ind(\mathfrak{L}, M)$.

Rozważmy dwa działania termowe $f_1(x, y) = x^{**}$ i $f_2(x, y) = y^{**}$ oraz odwzorowanie $p : \{b_1, b_2\} \to \langle b_1, b_2 \rangle_{\mathfrak{L}}$ takie, że $p(b_1) = \mathbf{1}, p(b_2) = \mathbf{0}$. Zatem $f_1(b_1, b_2) = a = f_2(b_1, b_2)$, a także $f_1(p(b_1), p(b_2)) = f_1(\mathbf{1}, \mathbf{0}) = \mathbf{1} \neq \mathbf{0} = f_2(p(b_1), p(b_2))$. Stąd $\{b_1, b_2\} \notin Ind(\mathfrak{L}, S)$.

Przypuśćmy teraz, że $a \neq \mathbf{1}$. Oczywiście, $a \neq \mathbf{0}$. Czyli $p$ jest odwzorowaniem zmniejszającym na mocy Wniosku 2, a w konsekwencji $\{b_1, b_2\} \notin Ind(\mathfrak{L}, G)$.

Aby udowodnić, że $\{b_1, b_2\} \notin Ind_t(\mathfrak{L})$, rozważmy działanie

$$f_3(x, y) = x \vee (x^* \wedge y) \vee (x \wedge y^*).$$

Istotnie, mamy wówczas $f_3(b_1, b_2) = b_1$ oraz $f_3(a_1, a_2) = a_1 \vee a_2$ dla dowolnych $a_1, a_2 \in S(L)$ (czyli $f_3$ nie jest rzutowaniem). ■

Z Twierdzenia 9 wynika, że badając zbiory $M$, $S$, $I$ oraz $t$-niezależne należy rozważać zbiory, których elementy należą do różnych klas abstrakcji kongruencji Glivenki $\theta$. W przypadku $S_0$ i $A_1$-niezależności należy dodatkowo analizować podzbiory dowolnej $\theta$-klasy, a w przypadku $G$- niezależności podzbiory zbioru gęstego $D(L) = F_1$.

Z Twierdzenia 2(e) wynika ponadto, że jeśli zbiór $S_0$-niezależny nie zawiera się w pewnej $\theta$-klasie, to każde dwa jego elementy muszą należeć do różnych klas abstrakcji wspomnianej kongruencji. Natomiast z Twierdzenia 2(f) wiemy, że zbiory $S$ i $S_0$-niezależne muszą być podzbiorami szkieletu $S(L)$ lub być z nim rozłączne.

## 2.5 Niezależne podzbiory $F_a$.

Zajmiemy się teraz związkiem pomiędzy $S_0$ i $A_1$-niezależnością w algebrze Stone'a, a niezależnością w danej $\theta$-klasie $\mathfrak{F}_\mathfrak{a}$ będącej kratą dystrybutywną z największym elementem $a$.

Podobnie jak w algebrze Boole'a, w algebrze Stone'a można zdefiniować:

$$A_J(x_1, ...x_n) = \bigvee\{x_1^{i_1} \wedge ... \wedge x_n^{i_n} \mid (i_1, ..., i_n) \in J\}$$

dla niepustej rodziny $J \subseteq \{0, 1, 2\}^n$, gdzie $x^0 = x$, $x^1 = x^*$, $x^2 = x^{**}$ oraz $A_\emptyset(x_1, ...x_n) = \mathbf{0}$.

Działania termowe w algebrze Stone'a opisali K. Głazek, T. Hecht i T. Katriňák w [20].

**Twierdzenie 10** *Dla każdego $n$-argumentowego działania termowego $f$ w algebrze Stone'a $(L; \vee, \wedge, ^*, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ istnieje rodzina $J \subseteq \{0,1,2\}^n$ taka, że*

$$f(x_1, ..., x_n) = A_J(x_1, ...x_n).$$

$\square$

W odróżnieniu od analogicznej reprezentacji działań termowych w algebrze Boole'a rodzina $J$ w przypadku algebr Stone'a nie jest jednoznacznie określona.

Podamy teraz kilka własności działań termowych w algebrze Stone'a, a w szczególności w klasie abstrakcji $F_a$.

**Lemat 2** *Niech $\mathfrak{L} = (L; \vee, \wedge, ^*, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ będzie algebrą Stone'a, $x \in L$ oraz $b_1, ..., b_n \in F_a$ dla pewnego $a \in S(L)$. Wówczas:*

*(a)* $(\forall k \in \{1, ..., n\})$ $[\ (i_k = 1) \Rightarrow\ A_{(i_1,...,i_n)}(b_1, ..., b_n) = a^*$ *oraz* $A_{(i_1,...,i_n)}(x, ..., x) = x^*\ ]$;

*(b)* $(\forall k \in \{1, ..., n\})$ $[\ (i_k \neq 1) \Rightarrow\ A_{(i_1,...,i_n)}(b_1, ..., b_n) \in F_a$ *oraz* $(\forall c \in S(L))(A_{(i_1,...,i_n)}(c, ..., c) = c)\ ]$;

*(c)* $(\exists k, l \in \{1, ..., n\})$ $[\ (i_k = 1 \wedge i_l \neq 1) \Rightarrow A_{(i_1,...,i_n)}(b_1, ..., b_n) = \mathbf{0} = A_{(i_1,...,i_n)}(x, ..., x)]$.

**Dowód.**

**(a)** Dla każdego $k \in \{1, ..., n\}$ mamy $(b_k)^1 = (b_k)^* = a^*$. Zatem $A_{(i_1,...,i_n)}(b_1, ..., b_n) = b_1^{i_1} \wedge ... \wedge b_n^{i_n} = a^*$. Podobnie $A_{(1,...,1)}(x, ..., x) = x^*$.

**(b)** W tym przypadku mamy $(b_k)^0 = b_k \in F_a$ lub $(b_k)^2 = (b_k)^{**} = a \in F_a$ dla wszystkich $k \in \{1, ..., n\}$. Stąd $b_1^{i_1} \wedge ... \wedge b_n^{i_n} \in F_a$. Ponieważ $c^{**} = c$, więc otrzymujemy $A_{(i_1,...,i_n)}(c, ..., c) = c$.

**(c)** Niech $i_k = 1$, $i_l = 2$ dla pewnych $k, l \in \{1, ..., n\}$ (weźmy $k < l$). Wówczas $A_{(i_1,...,i_n)}(b_1, ..., b_n) = b_1^{i_1} \wedge ... \wedge b_k^{i_k} \wedge ... \wedge b_l^{i_l} \wedge ... \wedge b_n^{i_n} =$

$= b_1^{i_1} \wedge ... \wedge a^* \wedge ... \wedge a \wedge ... \wedge b_n^{i_n} = \mathbf{0}$. Dowód dla $i_k = 1$ i $i_l = 0$ przebiega analogicznie. Oczywiście $x^* \wedge x = x^* \wedge x^{**} = \mathbf{0}$, czyli $A_{(i_1,...,i_n)}(x, ..., x) = \mathbf{0}$. ■

Z Twierdzenia 10 i Lematu 2 otrzymujemy:

**Wniosek 4** *Niech $\mathfrak{L}$ będzie algebrą Stone'a, $b_1, ..., b_n \in F_a$ dla pewnego $a \in S(L)$ oraz $f \in \mathbb{T}^{(n)}(\mathfrak{L})$. Wówczas $f(b_1, ..., b_n) \in F_a \cup \varphi_L(a) \cup \{\mathbf{0}, a^*\}$. Jeśli, dodatkowo, $a \neq \mathbf{0}, \mathbf{1}$, to $F_a \cap \varphi_L(a) \cap \{\mathbf{0}, a^*\} = \emptyset$.*

W kolejnych rozważaniach użyteczna będzie pewna zredukowana postać działań termowych w algebrach Stone'a. Oznaczmy $\bar{J} = J \cap \{0, 2\}^n$.

**Wniosek 5** *Niech $\mathfrak{L}$ będzie algebrą Stone'a, $b_1, ..., b_n \in F_a$ dla pewnego $a \in S(L)$ oraz $f(b_1, ..., b_n) = A_J(b_1, ..., b_n) \in F_a$ dla pewnej rodziny $J \in \{0, 1, 2\}^n$. Wówczas $A_J(b_1, ..., b_n) = A_{\bar{J}}(b_1, ..., b_n)$.*

Niech $f(x_1, ..., x_n) = A_J(x_1, ...x_n)$ dla pewnej rodziny $J \subseteq \{0, 1, 2\}^n$.

Zdefiniujmy odwzorowanie $\phi_1 : J \to \{0, 1\}^n$ przez

$$\phi_1((i_1, ..., i_n)) = (i_1(mod2), ..., i_n(mod2)) \text{ dla } (i_1, ..., i_n) \in J \subseteq \{0, 1, 2\}^n. \quad (2.11)$$

Oznaczmy $\bar{f}(x_1, ..., x_n) = A_{\phi_1(J)}(x_1, ..., x_n)$. Łatwo zauważyć, że $\bar{f} \in \mathbb{T}^{(n)}(\mathfrak{S}(\mathfrak{L}))$.

Rozważmy teraz odwzorowanie $\phi_2 : J \to 2^{\{1,...,n\}}$ zdefiniowane następująco:

$$\phi_2((i_1, ..., i_n)) = \{k \in N |\ i_k = 0\} \text{ dla } (i_1, ..., i_n) \in J. \quad (2.12)$$

Biorąc pod uwagę definicję (2.9), otrzymujemy $\tilde{f}_{\phi_2(J)} = \tilde{f} \in \mathbb{T}^{(n)}(\mathfrak{F}_\mathfrak{a})$.

Zdefiniujmy $f_A : \{1, ..., n\} \to \{0, 1\}$, dla $A \subseteq \{1, ..., n\}$ jako funkcję charakterystyczną zbioru $A$ oraz odwzorowanie $\phi_3 : 2^{\{1,...,n\}} \to \{0, 2\}^n$ przez

$$\phi_3(X) = (i_1, ..., i_n), \text{ gdzie } i_k = 2f_{X'}(k), k \in \{1, ..., n\}, X' = \{1, ..., n\} \setminus X, \quad (2.13)$$

dla każdego $X \in 2^{\{1,\dots,n\}}$. Zauważmy, że $A_J(b_1,...,b_n) = A_{\phi 3(\phi 2(J))}(b_1,...,b_n)$ dla dowolnych $b_1,...,b_n \in F_a$, $J \subseteq \{0,2\}^n$. Przy przyjętych oznaczeniach łatwo dowieść następujący lemat:

**Lemat 3** *Niech $\mathfrak{L}$ będzie algebrą Stone'a, $f(x_1,...,x_n) = A_J(x_1,...x_n)$ dla pewnej rodziny $J \subseteq \{0,1,2\}^n$. Wówczas*

(*a*) $(\forall a_1,...,a_n \in S(L))\ [f(a_1,...,a_n) = A_{\phi 1(J)}(a_1,...,a_n)]$;

(*b*) $(\forall a \in S(L))\ (\forall b_1,...,b_n \in F_a)\ \ [f(b_1,...,b_n) \in F_a \Rightarrow f(b_1,...,b_n) = \tilde{f}_{\phi 2(\bar{J})}(b_1,...,b_n)]$;

(*c*) $(\forall a \in S(L))\ (\forall b_1,...,b_n \in F_a)(\forall P \subseteq 2^{\{1,\dots,n\}})\ [\tilde{f}_P(b_1,...,b_n) = = A_{\phi 3(P)}(b_1,...,b_n)]$.

**Dowód.**

**(a)** Oczywiste, ponieważ $a^{**} = a$ dla wszystkich $a \in S(L)$.

**(b)** Biorąc pod uwagę Wniosek 5, otrzymujemy $f(b_1,...,b_n) = A_J(b_1,...,b_n) = A_{\bar{J}}(b_1,...,b_n)$, gdzie $\bar{J} = J \cap \{0,2\}^n$. Ponieważ $b_i^2 = b_i^{**} = a$ oraz $b_i \wedge a = b_i$ dla każdego $b_i \in F_a$, więc $A_{\bar{J}}(b_1,...,b_n) = \tilde{f}_{\phi 2(\bar{J})}(b_1,...,b_n)$.

**(c)** Oczywiście $b_i \wedge a = b_i$ dla każdego $b_i \in F_a$ $(i = 1,...,n)$. Stąd $\tilde{f}_P(b_1,...,b_n) = A_{\phi 3(P)}(b_1,...,b_n)$. ■

**Twierdzenie 11** *Niech $\mathfrak{L} = (L; \vee, \wedge, ^*, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ będzie algebrą Stone'a oraz $X \subseteq F_a$ dla pewnego $a \in S(L)$. Wówczas*

$$X \in Ind(\mathfrak{L}, S_0) \Leftrightarrow X \in Ind(\mathfrak{F}_{\mathfrak{a}}, S_0).$$

*Ponadto, jeśli $a \neq \mathbf{0}, \mathbf{1}$, to* $X \in Ind(\mathfrak{L}, A_1)$.

**Dowód.** Wobec Twierdzenia 1 pozostaje udowodnić implikację $(\Leftarrow)$. Przypuśćmy zatem, że $X \in Ind(\mathfrak{F}_{\mathfrak{a}}, S_0)$ oraz $p \in X^X$. Wtedy $p(b_i) \in F_a$ dla wszystkich $b_i \in X$

$(i = 1, ..., n)$. Niech $f(b_1, ..., b_n) = g(b_1, ..., b_n)$ dla pewnych $f, g \in \mathbb{T}^{(n)}(\mathfrak{L})$. Z Twierdzenia 10 wynika, że $f(b_1, ..., b_n) = A_{J_1}(b_1, ..., b_n)$ oraz $g(b_1, ..., b_n) = A_{J_2}(b_1, ..., b_n)$ dla pewnych $J_1, J_2 \subseteq \{0, 1, 2\}^n$.

Zgodnie z Wnioskiem 4 musimy rozważyć następujące 4 przypadki:

(1) $f(b_1, ..., b_n) = \mathbf{0}$,

(2) $f(b_1, ..., b_n) = a^*$,

(3) $f(b_1, ..., b_n) \in F_a$,

(4) $f(b_1, ..., b_n) \in \varphi_L(a)$.

**Ad. (1) i (2)** W tych przypadkach wszystkie atomy działań $f$ i $g$ są równe $\mathbf{0}$ lub $a^*$. Z Lematu 2 (a),(c), mamy $f(p(b_1), ..., p(b_n)) = g(p(b_1), ..., p(b_n))$.

**Ad. (3)** Korzystając z Wniosku 5 otrzymujemy $f(b_1, ..., b_n) = A_{\bar{J}_1}(b_1, ..., b_n) = A_{\bar{J}_2}(b_1, ..., b_n) = g(b_1, ..., b_n)$. Na mocy Lematu 3(b) mamy zatem $f(b_1, ..., b_n) = \tilde{f}_{\phi_2(\bar{J}_1)}(b_1, ..., b_n) = \tilde{f}_{\phi_2(\bar{J}_2)}(b_1, ..., b_n) = g(b_1, ..., b_n)$ oraz $\tilde{f}_{\phi_2(\bar{J}_i)} \in \mathbb{T}^{(n)}(\mathfrak{F}_\mathfrak{a})$ dla $i = 1, 2$. Wówczas $\tilde{f}_{\phi_2(\bar{J}_1)}(p(b_1), ..., p(b_n)) = \tilde{f}_{\phi_2(\bar{J}_2)}(p(b_1), ..., p(b_n))$, ponieważ $X \in Ind(\mathfrak{F}_\mathfrak{a}, S_0)$. Lemat 3(c) implikuje

$$\tilde{f}_{\phi_2(\bar{J}_i)}(p(b_1), ..., p(b_n)) = A_{\phi_3(\phi_2(\bar{J}_i))}(p(b_1), ..., p(b_n)) = A_{\bar{J}_i}(p(b_1), ..., p(b_n))$$

dla $i = 1, 2$. W konsekwencji mamy $f(p(b_1), ..., p(b_n)) = g(p(b_1), ..., p(b_n))$.

**Ad. (4)** Biorąc pod uwagę Twierdzenie 10 i Lemat 2 otrzymamy
$f(b_1, ..., b_n) = A_{\bar{J}_1}(b_1, ..., b_n) \vee a^* = A_{\bar{J}_2}(b_1, ..., b_n) \vee a^* = g(b_1, ..., b_n)$. Ponieważ odwzorowanie $\phi$, zdefiniowane wzorem 2.7, jest bijekcją $F_a$ na $\varphi_L(a)$, więc $A_{\bar{J}_1}(b_1, ..., b_n) = A_{\bar{J}_2}(b_1, ..., b_n) \in F_a$. Zgodnie z rozważaniami zawartymi w punkcie (3) mamy zatem $A_{\bar{J}_1}(p(b_1), ..., p(b_n)) = A_{\bar{J}_2}(p(b_1), ..., p(b_n))$. A stąd $A_{\bar{J}_1}(p(b_1), ..., p(b_n)) \vee a^* =$
$= A_{\bar{J}_2}(p(b_1), ..., p(b_n)) \vee a^*$, czyli $f(p(b_1), ..., p(b_n)) = g(p(b_1), ..., p(b_n))$.

Wykażemy teraz, że $X \in Ind(\mathfrak{L}, A_1)$ dla dowolnego $X \subseteq F_a$, $a \in S(L) \setminus \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$.

Oczywiście, $a^* \neq \mathbf{0}$, $a^* \notin \varphi_L(a)$ oraz $F_a \cap \varphi_L(a) = \emptyset$.

Rozważmy teraz wszystkie unarne działania termowe na zbiorze $X$. Definiują one pięć nietożsamościowych odwzorowań $p_i : X \to L$:

$$p_i(x) = x^i \text{ dla } i = 1, 2;\ p_3(x) = \mathbf{0},\ p_4(x) = \mathbf{1} \text{ oraz } p_5(x) = \phi(x) = x \vee x^*. \quad (2.14)$$

Dla każdego $b \in F_a$, mamy $p_1(b) = a^*$, $p_2(b) = a$, $p_3(b) = \mathbf{0}$ oraz $p_4(b) = \mathbf{1}$. Oczywiście $a^*, a, \mathbf{0}, \mathbf{1} \in S(L)$. Ponadto, $p_5(b) = b \vee b^* \in D(L) = F_{\mathbf{1}}$. Niech $f(b_1, ..., b_n) = g(b_1, ..., b_n)$ dla pewnych $b_1, ..., b_n \in X$ i $f, g \in \mathbb{T}^{(n)}(\mathfrak{L})$. Musimy rozpatrzyć przypadki (1)-(4) wspomniane powyżej.

Na początek załóżmy, że $f(b_1, ..., b_n) = \mathbf{0}$. Wówczas wszystkie atomy działań $f$ i $g$ dla elementów $b_1, ..., b_n$ są równe $\mathbf{0}$. Z Lematu 2(c) otrzymujemy zatem

$$f(p_i(b_1), ..., p_i(b_n)) = \mathbf{0} = g(p_i(b_1), ..., p_i(b_n)) \text{ dla } i = 0, ..., 5.$$

Przypuśćmy teraz, że $f(b_1, ..., b_n) = a^*$. Wtedy wszystkie atomy działań $f$ i $g$ są równe $\mathbf{0}$ lub $a^*$. Zatem $f(p_j(b_1), ..., p_j(b_n)) = [p_j(b_k)]^* = g(p_j(b_1), ..., p_j(b_n))$, dla $j = 0, ..., 5$, na mocy Lematu 2(a), (c).

Następnie rozważmy przypadek, gdy $f(b_1, ..., b_n) \in F_a$. Korzystając z Wniosku 4 otrzymujemy $f(b_1, ..., b_n) = A_{\bar{J}_1}(b_1, ..., b_n) = A_{\bar{J}_2}(b_1, ..., b_n) = g(b_1, ..., b_n)$. Skoro $p_j(b_k) \in S(L)$, dla $j = 1, ..., 4$, zatem $f(p_j(b_1), ..., p_j(b_n)) = p_j(b_k) = g(p_j(b_1), ..., p_j(b_n))$, na mocy Lematu 2(b). Ponieważ $\phi|_{F_a}$ jest homomorfizmem kratowym, więc $f(p_5(b_1), ..., p_5(b_n)) = g(p_5(b_1), ..., p_5(b_n))$.

Rozważanie dotyczące przypadku (4) możemy przeprowadzić analogicznie do dowodu tego przypadku dla $S_0$-niezależności. ■

Ze względu na dziedziczność rodziny zbiorów $A_1$-niezależnych oraz Wniosek 3(iv), oczywiste jest, że $X \notin Ind(\mathfrak{L}, A_1)$ dla każdego $X \subseteq F_1$.

Opiszemy teraz związek między $G$-niezależnością podzbiorów zbioru gęstego $D(L)$ w algebrze Stone'a, a $G$-niezależnością w kracie dystrybutywnej.

**Twierdzenie 12** *Niech $\mathfrak{L}$ będzie algebrą Stone'a oraz $X \subseteq D(L)$. Wówczas*

$$X \in Ind(\mathfrak{L}, G) \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } X \in Ind(\mathfrak{D}(\mathfrak{L}), G).$$

**Dowód.** Zauważmy, że implikacja $X \in Ind(\mathfrak{L}, G) \Rightarrow X \in Ind(\mathfrak{D}(\mathfrak{L}), G)$ ma dowód analogiczny do dowodu implikacji (1.5) z Twierdzenia 1, ponieważ dla każdego $a \in X \subseteq D(L)$ oraz $p \in G$ zachodzi $p(a) \in D(L)$.

Aby udowodnić implikację przeciwną przypuśćmy, że $X \in Ind(\mathfrak{D}(\mathfrak{L}), G)$. Możemy założyć również, że $\mathbf{1} \notin X$, ponieważ w dowolnej algebrze $\mathfrak{A}$ zachodzi własność (1.4).

Niech $f(b_1, ..., b_n) = g(b_1, ..., b_n)$ dla pewnych $b_1, ..., b_n \in X \subseteq D(L)$ oraz $f, g \in \mathbb{T}^{(n)}(\mathfrak{L})$. Z Twierdzenia 10 wynika, że

$$f(x_1, ..., x_n) = A_{J_1}(x_1, ..., x_n), \;\; g(x_1, ..., x_n) = A_{J_2}(x_1, ..., x_n),$$

dla pewnych $J_1, J_2 \in \{0, 1, 2\}^n$. Zatem $A_{J_1}(b_1, ..., b_n) = A_{J_2}(b_1, ..., b_n)$. Wobec Lematu 2 mamy $A_{(i_1,...,i_n)}(b_1, ..., b_n) = \mathbf{0}$, jeśli $i_k = 1$ dla pewnego $k \in \{1, ..., n\}$. Zatem $f(b_1, ..., b_n) = A_{\bar{J}_1}(b_1, ..., b_n) = A_{\bar{J}_2}(b_1, ..., b_n) = g(b_1, ..., b_n)$. Łatwo zauważyć, że $D(L) \cup \{\mathbf{0}\}$ jest podalgebrą algebry Stone'a $\mathfrak{L}$. Tak więc

$$f(b_1, ..., b_n) = g(b_1, ..., b_n) \in D(L) \text{ lub } f(b_1, ..., b_n) = g(b_1, ..., b_n) = \mathbf{0}.$$

Przypuśćmy, że $f(b_1, ..., b_n) \in D(L)$. Korzystając z Lematu 3(b) otrzymujemy $\tilde{f}_{\phi_2(J_1)}(b_1, ..., b_n) = \tilde{f}_{\phi_2(J_2)}(b_1, ..., b_n)$ oraz $\tilde{f}_{\phi_2(J_i)} \in \mathbb{T}^{(n)}(\mathfrak{D}(\mathfrak{L}))$ dla $i = 1, 2$.

Niech $p$ będzie odwzorowaniem zmniejszającym. Z Wniosku 2 wynika, że $p(b_i) \in D(L)$ dla każdego $i = 1, ..., n$. Z założenia otrzymujemy

$$\tilde{f}_{\phi_2(J_1)}(p(b_1), ..., p(b_n)) = \tilde{f}_{\phi_2(J_2)}(p(b_1), ..., p(b_n)).$$

Ponadto $\tilde{f}_{\phi_2(J_i)}(p(b_1), ..., p(b_n)) = A_{\phi_3(\phi_2(J_i))}(p(b_1), ..., p(b_n)) = A_{J_i}(p(b_1), ..., p(b_n))$ dla $i = 1, 2$, na mocy Lematu 3(c). Czyli $f(p(b_1), ..., p(b_n)) = g(p(b_1), ..., p(b_n))$.

W drugim przypadku wszystkie atomy działań $f$ i $g$ muszą być równe zero, będą również równe zero dla obrazów elementów $b_1, ..., b_n$, ponieważ $p(b_i) \in D(L)$, dla każdego $i = 1, ..., n$, Lemat 2(c). ■

## 2.6 Związki między niezależnością w algebrze Stone'a i algebrze Boole'a $\mathfrak{S}(L)$.

Podamy teraz charakterystykę rodziny $t$-niezależnych podzbiorów algebry Stone'a $\mathfrak{L}$ wykorzystując odpowiadające im elementy ze szkieletu (tj. algebry Boole'a $\mathfrak{S}(\mathfrak{L}) = (S(L); \vee, \wedge, ^*, \mathbf{0}, \mathbf{1})$).

**Twierdzenie 13** *Niech $\mathfrak{L} = (L; \vee, \wedge, ^*, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ będzie algebrą Stone'a oraz $X \subseteq L$. Wówczas $X \in Ind_t(\mathfrak{L})$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdych parami różnych $b_1, ..., b_n \in X$ istnieją $a_1, ..., a_n \in S(L)$ spełniające warunki:*

*a)* $a_i \neq b_i \in F_{a_i}$ $(i = 1, ..., n)$ *oraz*

*b)* $\{a_1, ..., a_n\} \in Ind_t(\mathfrak{S}(\mathfrak{L}))$.

**Dowód.** Niech $X \in Ind_t(\mathfrak{L})$ oraz $b_1, ..., b_n$ będą różnymi elementami zbioru $X$. Z Twierdzeń 8(iii) i 9 wynika, że $b_i \in F_{a_i}$ oraz $b_i \neq a_i$ $(i = 1, ..., n)$ dla pewnych, różnych $a_1, ..., a_n \in S(L) \setminus \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$.

Załóżmy nie wprost, że $\{a_1, ..., a_n\} \notin Ind_t(\mathfrak{S}(\mathfrak{L}))$. Ponieważ w algebrach Boole'a rodziny zbiorów $M$-niezależnych i $t$-niezależnych pokrywają się, więc z Twierdzenia 6 mamy

$$a_1^{i_1} \wedge .... \wedge a_n^{i_n} = \mathbf{0} \text{ dla pewnych } i_k \in \{0, 1\} \ (k = 1, ..., n). \tag{2.15}$$

Zatem $b_1^{i_n} \wedge ... \wedge b_n^{i_n} \in F_{\mathbf{0}} = \{\mathbf{0}\}$. Czyli

$$b_1^{i_n} \wedge ... \wedge b_n^{i_n} = \mathbf{0}. \tag{2.16}$$

Przypuśćmy, że $i_1 = ... = i_n = 0$. Wtedy $b_1^* \vee ... \vee b_n^* = \mathbf{1}$, a stąd, wykorzystując dystrybutywność, otrzymujemy $b_1 = b_1 \wedge (b_1^* \vee ... \vee b_n^*) = b_1 \wedge (b_2^* \vee ... \vee b_n^*)$. Rozważmy następujące działanie termowe $f(x_1, ..., x_n) = x_1 \wedge (x_2^* \vee ... \vee x_n^*)$. Wówczas $f \in \mathbb{T}^{(n)}(\mathfrak{L})$, $f(b_1, ..., b_n) = b_1$ oraz $f(\mathbf{1}, ..., \mathbf{1}) = \mathbf{0}$ (czyli $f$ nie jest rzutowaniem), wbrew założeniu.

Załóżmy teraz, że $i_k = 1$ dla pewnego $k \in \{1, ..., n\}$. Bez ograniczenia ogólności możemy przyjąć, że $k = 1$. Zatem $b_1^* \wedge b_2^{i_2} \wedge ... \wedge b_n^{i_n} = \mathbf{0}$, a stąd $b_1 \vee (b_1^* \wedge b_2^{i_2} \wedge ... \wedge b_n^{i_n}) = = b_1$. Rozważmy $g(x_1, ..., x_n) = x_1 \vee (x_1^* \wedge x_2^{i_2} \wedge ... \wedge x_n^{i_n})$. Wówczas $g \in \mathbb{T}^{(n)}(\mathfrak{L})$, $g(b_1, ..., b_n) = b_1$ oraz, co łatwo udowodnić, $g$ nie jest rzutowaniem. Czyli również w tym przypadku otrzymujemy sprzeczność.

W celu udowodnienia implikacji przeciwnej załóżmy, że dla każdych parami różnych elementów $b_1, ..., b_n \in X$ istnieją $a_1, ..., a_n \in S(L)$ takie, że $a_i \neq b_i \in F_{a_i}$ $(i = 1, ..., n)$ oraz $\{a_1, ..., a_n\} \in Ind_t(\mathfrak{S}(\mathfrak{L}))$.

Przypuśćmy, że $b_k = f(b_1, ..., b_n)$ dla pewnego $f \in \mathbb{T}^{(n)}(\mathfrak{L})$ oraz $k \in \{1, ..., n\}$. Wówczas $f(b_1, ..., b_n) \in F_{f(a_1,...,a_n)}$ i $b_k \in F_{a_k}$. Stąd $a_k = f(a_1, ..., a_n) = \bar{f}(a_1, ..., a_n)$ oraz $\bar{f} \in \mathbb{T}^{(n)}(\mathfrak{S}(\mathfrak{L}))$ (definicja (2.11)). Z założenia mamy zatem $\bar{f} = e_n^k$ w $S(L)$. Czyli $f(x_1, ..., x_n) = x_k^{**}$ (co jest sprzeczne z założeniem) lub $f$ jest rzutowaniem. Stąd $X \in Ind_t(\mathfrak{L})$. ∎

Twierdzenie 8 oraz Wniosek 3 charakteryzują jednolementowe zbiory niezależne. Obecnie rozważać będziemy zbiory co najmniej dwuelementowe. Udowodnimy w tym celu następujący lemat:

**Lemat 4** *Niech $\mathfrak{L}$ będzie algebrą Stone'a, $a \in D(L)$ i $b \notin D(L)$ (lub $a = \mathbf{0}$ i $b \neq \mathbf{0}$). Wówczas $\{a, b\} \notin Ind(\mathfrak{L}, S_0)$.*

**Dowód.** Niech $a \in D(L)$ i $b \notin D(L)$. Rozważmy dwa binarne działania termowe $f_1(x, y) = x^* \wedge y$, $g_1(x, y) = x^* \wedge y^*$ oraz odwzorowanie $p : \{a, b\} \to \{a, b\}$ dane wzorem $p(x) = b$. Wtedy $f_1(a, b) = g_1(a, b)$, ale $f_1(p(a), p(b)) = f_1(b, b) = \mathbf{0} \neq b^* = g_1(p(a), p(b))$. Stąd $\{a, b\} \notin Ind(\mathfrak{L}, S_0)$.

Analogiczny wniosek dla $a = \mathbf{0}$ i $b \neq \mathbf{0}$ uzyskamy rozważając działania $f_2(x, y) = x \wedge y$ i $g_2(x, y) = \mathbf{0}$. ■

Dla zbioru $X \subseteq L$ zdefiniujmy $X^{**} = \{x^{**} \mid x \in X\}$. Oczywiście $X^{**} = g(X)$ dla retrakcji $g$. Kolejne twierdzenie formułuje warunek konieczny na to, aby zbiór $X$ należał do rodziny zbiorów $Q$-niezależnych.

**Twierdzenie 14** *Niech $\mathfrak{L} = (L; \vee, \wedge, ^*, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ będzie algebrą Stone'a, $X \subseteq L$ oraz $|X| > 1$. Jeśli $X \in Ind(\mathfrak{L}, Q)$, to $X^{**} \in Ind(\mathfrak{S}(\mathfrak{L}), Q)$ dla $Q = M, A_1, S, S_0, I$ oraz $G$.*

**Dowód.** Wobec Twierdzenia 2(b) implikacja ta jest prawdziwa dla $Q = M, A_1$. Przypuśćmy zatem, że $X \in Ind(\mathfrak{L}, Q)$ oraz $X^{**} \notin Ind(\mathfrak{S}(\mathfrak{L}), Q)$ dla $Q = S, S_0$ lub $I$. Ponieważ dla zbiorów co najmniej dwuelementowych w algebrze Boole'a rodziny te pokrywają się, więc zgodnie z Twierdzeniem 6 otrzymujemy (2.15) dla pewnych, parami różnych $a_1, ..., a_n \in X^{**}$. Z definicji zbioru $X^{**}$ istnieją $b_1, ..., b_n \in X$ takie, że $b_i \in F_{a_i}$ $(i = 1, ..., n)$, czyli (2.16). Rozważmy następujące $n$-argumentowe działania termowe algebry Stone'a $\mathfrak{L}$:

$$f(x_1, ..., x_n) = x^{i_1} \wedge .... \wedge x^{i_n}, \quad g(x_1, ..., x_n) = \mathbf{0}. \tag{2.17}$$

Oczywiście

$$f(b_1, ..., b_n) = g(b_1, ..., b_n) \text{ oraz } f \neq g. \tag{2.18}$$

Na mocy założenia, dla dowolnego $p_i \in Q \cap L^X$, mamy

$$f(p_i(b_1), ..., p_i(b_n)) = g(p_i(b_1), ..., p_i(b_n)). \tag{2.19}$$

Zdefiniujmy teraz odwzorowanie $p_1 : X \to X$ następująco:

$$p_1(x) = \begin{cases} b_1 & \text{dla } x = b_k \text{ oraz } i_k = 0, \\ b_2 & \text{dla } x = b_k \text{ oraz } i_k = 1, \quad (k = 1, ..., n). \\ x & \text{dla } x \neq b_k. \end{cases}$$

Jeśli $i_k = 0$ (lub $i_k = 1$) dla wszystkich $k = 1, ..., n$, to otrzymamy $b_1 = \mathbf{0}$ lub $b_2^* = \mathbf{0}$ (czyli $b_2 \in D(L)$), co jest sprzeczne z Lematem 4. W przypadku, gdy $i_k = 0$ oraz $i_l = 1$ dla pewnych $k, l \in \{1, .., n\}$ mamy $b_1 \wedge b_2^* = \mathbf{0}$. Stąd $a_1 \wedge a_2^* = \mathbf{0}$, co implikuje $a_1 \leq a_2^{**} = a_2$. Wobec dziedziczności, $\{b_1, b_2\} \in Ind(\mathfrak{S}(\mathfrak{L}), S_0)$. Rozważmy teraz dwa binarne działania termowe: $f_1(x, y) = x \wedge y^*, g_1(x, y) = \mathbf{0}$ oraz odwzorowanie $p_2 : \{b_1, b_2\} \to \{b_1, b_2\}$, zdefiniowane $p_2(b_1) = b_2, p_2(b_2) = b_1$. Wówczas $f_1(p_2(b_1), p_2(b_2)) = f_1(b_2, b_1) = b_2 \wedge b_1^* = \mathbf{0} = g_1(b_2, b_1)$. Oznacza to, że $a_2 \wedge a_1^* = \mathbf{0}$ oraz $a_2 \leq a_1$. W konsekwencji otrzymamy $a_1 = a_2$, wbrew założeniu. Zatem powyższa implikacja jest prawdziwa dla $S_0$-niezależności, jak również, na mocy własności (1.1), dla $S$-niezależności.

Jeśli $X \in Ind(\mathfrak{L}, I)$, to zgodnie z Wnioskiem 3, mamy $X \cap S(L) = \emptyset$. Rozważmy zatem różnowartościowe odwzorowanie :

$$p_3(b_k) = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{dla } x = b_1 \text{ oraz } i_1 = 0, \\ \mathbf{0} & \text{dla } x = b_1 \text{ oraz } i_1 = 1, \\ x & \text{dla } x \neq b_1. \end{cases}$$

Wówczas $f(p_3(b_1), ..., p_3(b_n)) = g(p_3(b_1), ..., p_3(b_n))$, czyli $b_2^{i_2} \wedge .... \wedge b_n^{i_n} = \mathbf{0}$. Po $n-1$ podobnych krokach otrzymamy $b_n = \mathbf{0}$ lub $b_n^* = \mathbf{0}$. Co, na mocy Wniosku 3, prowadzi do sprzeczności.

Załóżmy teraz, że $X \in Ind(\mathfrak{L}, G)$ oraz $X^{**} \notin Ind(\mathfrak{S}(\mathfrak{L}), G)$. Korzystając z własności (1.4) możemy przyjąć, że w zbiorze $X^{**}$ nie ma stałych. Czyli następujące odwzorowanie jest zmniejszające (Wniosek 2):

$$p_4(b_k) = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{dla } x = b_k \text{ oraz } i_k = 0, \\ \mathbf{0} & \text{dla } x = b_k \text{ oraz } i_k = 1, \quad (k = 1, ..., n). \\ x & \text{dla } x \neq b_k. \end{cases}$$

Przypomnijmy, że w algebrze Boole'a rodzina zbiorów $G$-niezależnych nie zawierających stałych pokrywa się z rodziną zbiorów $M$-niezależnych. Mamy zatem (2.19) dla $i = 4$. A stąd $\mathbf{1} = \mathbf{0}$, sprzeczność. ■

**Wniosek 6** *Niech $\mathfrak{L}$ będzie algebrą Stone'a, $X \subseteq L$, $|X| > 1$ oraz $X \in Ind(\mathfrak{L}, Q)$ dla $Q = M, S$ oraz $I$ . Wówczas*

$$f(b_1, ..., b_n) = g(b_1, ..., b_n) \Rightarrow \bar{f} = \bar{g} \text{ w } \mathfrak{S}(\mathfrak{L}) \tag{2.20}$$

*dla każdych $f, g \in \mathbb{T}^{(n)}(\mathfrak{L})$ oraz parami różnych $b_1, .., b_n \in X$.*

Istotnie, jeśli $f(b_1, ..., b_n) = g(b_1, ..., b_n)$ dla pewnych $f, g \in \mathbb{T}^{(n)}(\mathfrak{L})$ oraz parami różnych $b_1, .., b_n \in X$. Wówczas $f(b_1, ..., b_n) \in F_{f(a_1,...,a_n)}$ i $g(b_1, ..., b_n) \in F_{g(a_1,...,a_n)}$, gdzie $a_i = b_i^{**} \in X^{**} \in Ind(\mathfrak{S}(\mathfrak{L}), Q)$. Z założenia oraz Twierdzenia 9, elementy $a_1, ..., a_n$ są parami różne. Czyli $f(a_1, ..., a_n) = g(a_1, ..., a_n)$, co implikuje $\bar{f}(a_1, ..., a_n) = \bar{g}(a_1, ..., a_n)$. Ponieważ rozważane rodziny zbiorów niezależnych w algebrze Boole'a pokrywają się z rodziną zbiorów $M$-niezależnych zatem otrzymujemy $\bar{f} = \bar{g}$ w $\mathfrak{S}(\mathfrak{L})$, na mocy definicji $M$-niezależności.

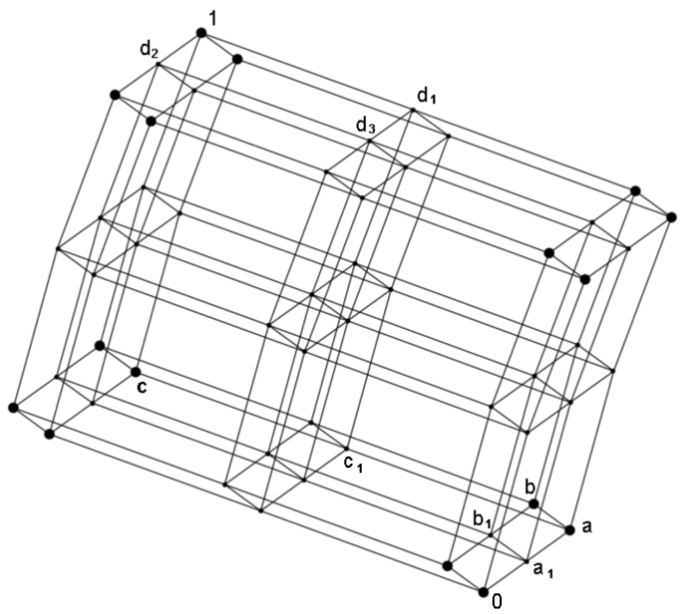
Podzbiory szkieletu $S(L)$ nie mogą być zbiorami $M$, $I$, oraz $t$-niezależnymi. Dla pozostałych rozważanych przez nas rodzajów niezależności Twierdzenia 2 i 14 pozwalają sformułować następujący wniosek:

**Wniosek 7** *Niech $\mathfrak{L}$ będzie algebrą Stone'a oraz $X \subseteq S(L)$; $|X| > 1$. Wówczas*

$$X \in Ind(\mathfrak{L}, Q) \Leftrightarrow X \in Ind(\mathfrak{S}(\mathfrak{L}), Q)$$

*dla $Q = S_0, S, G$ oraz $A_1$.*

Za wyjątkiem $t$-niezależności przedstawiony w Twierdzeniu 14 warunek nie jest warunkiem wystarczającym dla rozważanych przez nas rodzajów niezależności.




Rysunek 2.1:

**Przykład 1.** Rozważmy algebrę Stone'a $\mathfrak{L}$, przedstawioną na Rysunku 2.1. Jest to produkt prosty trzech trójelementowych i jednej dwuelementowej algebry Stone'a. Korzystając z Twierdzenia 6, łatwo zauważyć, że $\{b, c\} \in Ind(\mathfrak{S}(\mathfrak{L}), M)$. Natomiast $\{b_1, c_1\} \notin Ind(\mathfrak{L}, Q)$ dla $Q = M, S, S_0, I, G$. Rzeczywiście, rozważmy dwa binarne działania $f(x, y) = x \wedge y$ i $g(x, y) = x \wedge y^{**}$. Wówczas $f(b_1, c_1) = a_1 = b_1 \wedge c_1^{**} = g(b_1, c_1)$. Jeśli zdefiniujemy odwzorowanie $p$ następująco: $p(b_1) = c_1$, $p(c_1) = b_1$, to $p \in M \cup S \cup S_0 \cup G \cup I$. Otrzymujemy zatem $f(p(b_1), p(c_1)) = f(c_1, b_1) = a_1$ oraz $g(p(b_1), p(c_1)) = c_1 \wedge b_1^{**} = c_1 \wedge b = a$. Rozważając odwzorowanie $\phi(x) = x \vee x^*$ analogiczny wniosek otrzymamy również dla $A_1$-niezależności.

**Twierdzenie 15** *Niech* $\mathfrak{L} = (L; \vee, \wedge, ^*, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ *będzie algebrą Stone'a,* $X \subseteq L$, $|X| > 1$ *oraz* $X = \{b_k \mid a_k \neq b_k \in F_{a_k} \ \ dla\ różnych\ \ a_k \in S(L), k \in K\} \in Ind(\mathfrak{L}, Q)$ *dla* $Q = M, S, S_0$ *lub* $I$. *Wówczas* $\phi(X) \in Ind(\mathfrak{D}(\mathfrak{L}), M)$.

**Dowód.** Przypuśćmy, że $\phi(X) \notin Ind(\mathfrak{D}(\mathfrak{L}), M)$. Z Twierdzenia 3 wynika zatem, że $\phi(c_1) \wedge ... \wedge \phi(c_m) \leq \phi(d_1) \vee ... \vee \phi(d_n)$ dla pewnych $\phi(c_1), ..., \phi(c_m)$, $\phi(d_1), ..., \phi(d_n)$ parami różnych elementów zbioru $\phi(X)$. Zdefiniujmy następujące działania termowe: $f(x_1, .., x_{m+n}) = (x_1 \vee x_1^*) \wedge ... \wedge (x_m \vee x_m^*) \wedge [x_{m+1} \vee x_{m+1}^* \vee ... \vee x_{m+n} \vee x_{m+n}^*]$, $g(x_1, .., x_{m+n}) = (x_1 \vee x_1^*) \wedge ... \wedge (x_m \vee x_m^*)$. Z założenia otrzymujemy

$$f(c_1, .., c_m, d_1, ..., d_n) = g(c_1, .., c_m, d_1, ..., d_n). \tag{2.21}$$

Przypuśćmy teraz, że $X \in Ind(\mathfrak{L}, Q)$ dla $Q = M, S, S_0$. Rozważmy odwzorowanie $p_1 \in Q_X$ dane wzorem:

$$p_1(x) = \begin{cases} c_1 & \text{dla } x = c_k, \\ d_1 & \text{dla } x = d_l, \\ x & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases} \qquad (k = 1, ..., m;\ l = 1, ..., n).$$

Z $Q$-niezależności zbioru $X$ w algebrze $\mathfrak{L}$ otrzymujemy zatem

$$(c_1 \vee c_1^*) \wedge (d_1 \vee d_1^*) = c_1 \vee c_1^*, \tag{2.22}$$

a stąd $\phi(c_1) \leq \phi(d_1)$. Jeśli w tym samym celu wykorzystamy odwzorowanie

$$p_2(x) = \begin{cases} d_1 & \text{dla } x = c_k, \\ c_1 & \text{dla } x = d_l, \\ x & \text{w pozostałych przypadkach,} \end{cases} \qquad (k = 1, ..., m;\ l = 1, ..., n),$$

to uzyskamy $\phi(d_1) \leq \phi(c_1)$. Reasumując $\phi(c_1) = \phi(d_1)$, wbrew założeniu.

Załóżmy teraz, że $X \in Ind(\mathfrak{L}, I)$ i rozważmy odwzorowanie

$$p_3(x) = \begin{cases} c_1 & \text{dla } x = c_1, \\ x^{**} & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Zgodnie z definicją zbioru $X$ odwzorowanie to jest różnowartościowe. Zatem równość (2.21) implikuje $(c_1 \vee c_1^*) \wedge [d_1 \vee d_1^* \vee ... \vee d_n \vee d_n^*] = (c_1 \vee c_1^*)$. Jeśli $n = 1$, to mamy (2.22). W przeciwnym wypadku rozważmy działania termowe $f_1(x_1, .., x_{m+n}) = (x_1 \vee x_1^*) \wedge [x_{m+1} \vee x_{m+1}^* \vee ... \vee x_{m+n} \vee x_{m+n}^*]$, $g_1(x_1, .., x_{m+n}) = (x_1 \vee x_1^*)$

oraz odwzorowanie

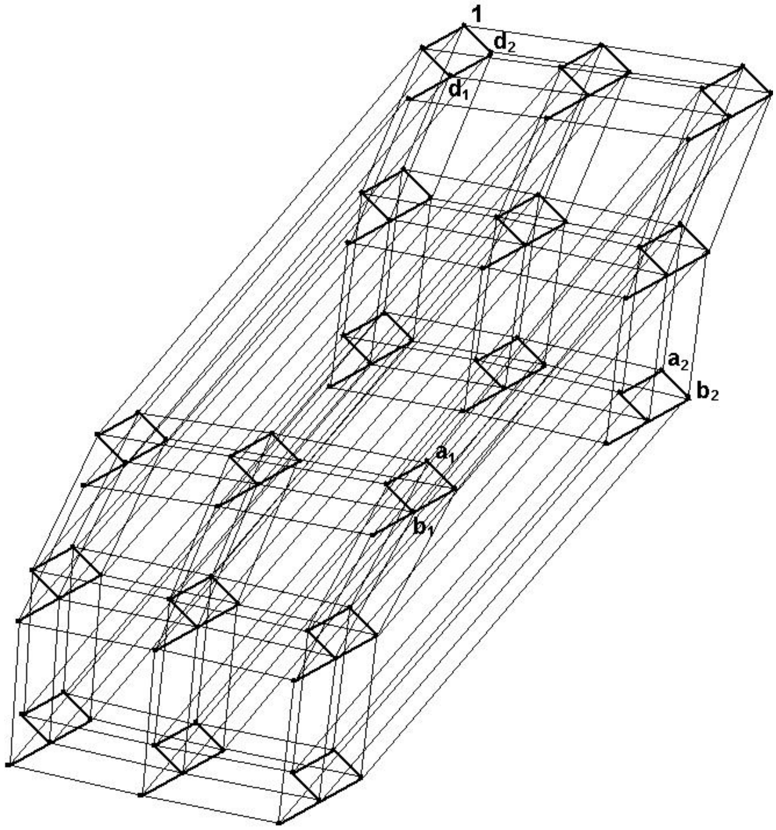
$$p_4(x) = \begin{cases} d_1 & \text{dla } x = d_1, \\ \phi(d_1) & \text{dla } x = d_2, \\ x & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Z $I$-niezależności zbioru $X$ oraz Twierdzenia 14 wynika, że $d_1 \notin D(L)$ (czyli $d_1 \neq \phi(d_1)$), zatem odwzorowanie $p_4$ jest różnowartościowe. Mamy zatem $f_1(c_1, .., c_m, d_1, ..., d_n) = g_1(c_1, .., c_m, d_1, ..., d_n)$, a stąd $(c_1 \vee c_1^*) \wedge [d_1 \vee d_1^* \vee d_1 \vee d_1^* \vee ... \vee d_n \vee d_n^*] = (c_1 \vee c_1^*)$. Po $n-1$ podobnych krokach uzyskamy równość (2.22), na podstawie której łatwo wywnioskować sprzeczną z założeniem równość $\phi(c_1) = \phi(d_1)$. ■

Powyższe twierdzenie nie jest prawdziwe dla $A_1$-niezależności, na co mamy następujący:

**Przykład 2.** Rozważmy podzbiór $X = \{b_1, b_2\}$ algebry przedstawionej na Rysunku 2.2 (strona 39). Jak łatwo zauważyć $\phi(b_1) = d_1 \leq d_2 = \phi(b_2)$. Zatem z Twierdzenia 3 otrzymujemy $\phi(X) \notin Ind(\mathfrak{D}(\mathfrak{L}), M)$. Ponieważ $X$ spełnia warunek konieczny $A_1$-niezależności zawarty w Twierdzeniu 14 ($\{a_1, a_2\} \in Ind(\mathfrak{S}(\mathfrak{L}), A_1)$), więc analizując binarne działania termowe algebry Stone'a generowane przez termy opisane poniżej możemy wykazać, że $X \in Ind(\mathfrak{L}, A_1)$.

Algebra termów dwuargumentowych algebry Stone'a jest oczywiście izomorficzna z wolną algebrą Stone'a generowaną przez zbiór dwuelementowy $X = \{x, y\}$:
$\mathfrak{F}_X = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, x, y, x^*, y^*, x^{**}, y^{**}, x \vee x^*, y \vee y^*, x \wedge y, x \wedge y^{**}, x^{**} \wedge y, x^{**} \wedge y^{**}, x \wedge y^*,$
$x^{**} \wedge y^*, x^* \wedge y, x^* \wedge y^{**}, x^* \wedge y^*, (x \wedge y) \vee (x \wedge y^*), (x \wedge y) \vee (x^{**} \wedge y^*), (x \wedge y) \vee (x^* \wedge y),$
$(x \wedge y) \vee (x^* \wedge y^{**}), (x \wedge y) \vee (x^* \wedge y^*), (x \wedge y^{**}) \vee (x^{**} \wedge y), (x \wedge y^{**}) \vee (x^{**} \wedge y),$
$(x \wedge y^{**}) \vee (x^* \wedge y), (x \wedge y^{**}) \vee (x^* \wedge y^{**}), (x \wedge y^{**}) \vee (x^* \wedge y^*), (x^{**} \wedge y) \vee (x \wedge y^*),$
$(x^{**} \wedge y) \vee (x^{**} \wedge y^*), (x^{**} \wedge y) \vee (x^* \wedge y^{**}), (x^{**} \wedge y) \vee (x^* \wedge y^*), (x^{**} \wedge y^{**}) \vee (x^* \wedge y),$




Rysunek 2.2:

$(x^{**} \wedge y^{**}) \vee (x \wedge y^*), (x^{**} \wedge y^{**}) \vee (x^* \wedge y^*), (x \wedge y^*) \vee (x^* \wedge y), (x \wedge y^*) \vee (x^* \wedge y^{**}),$
$(x \wedge y^*) \vee (x^* \wedge y^*), (x^{**} \wedge y^*) \vee (x^* \wedge y), (x^{**} \wedge y^*) \vee (x^* \wedge y^{**}), (x^* \wedge y) \vee (x^* \wedge y^*),$
$(x^* \wedge y^{**}) \vee (x^* \wedge y^*), (x \wedge y) \vee (x \wedge y^*) \vee (x^* \wedge y), (x \wedge y) \vee (x \wedge y^*) \vee (x^* \wedge y^{**}),$
$(x \wedge y) \vee (x \wedge y^*) \vee (x^* \wedge y^*), (x \wedge y) \vee (x^{**} \wedge y^*) \vee (x^* \wedge y), (x \wedge y) \vee (x^{**} \wedge y^*) \vee (x^* \wedge y^{**}),$
$(x \wedge y) \vee y^*, (x \wedge y) \vee (x^* \wedge y) \vee (x^* \wedge y^*), (x \wedge y) \vee (x^* \wedge y^{**}) \vee (x^* \wedge y^*), x \vee (x^{**} \wedge y),$
$(x \wedge y^{**}) \vee (x^{**} \wedge y) \vee (x^{**} \wedge y^*), (x \wedge y^{**}) \vee y, (x \wedge y^{**}) \vee (x^{**} \wedge y) \vee (x^* \wedge y^{**}),$
$(x \wedge y^{**}) \vee (x^{**} \wedge y) \vee (x^* \wedge y^*), x \vee (x^* \wedge y), x \vee (x^* \wedge y^{**}), x \vee (x^* \wedge y^*),$
$(x \wedge y^{**}) \vee (x^{**} \wedge y^*) \vee (x^* \wedge y), (x \wedge y^{**}) \vee (x^{**} \wedge y^*) \vee (x^* \wedge y^{**}), (x \wedge y^{**}) \vee y^*,$
$(x \wedge y^{**}) \vee (x^* \wedge y) \vee (x^* \wedge y^*), (x \wedge y^{**}) \vee (x^* \wedge y^{**}) \vee (x^* \wedge y^*), (x^{**} \wedge y) \vee (x \wedge y^*) \vee (x^* \wedge y),$
$(x^{**} \wedge y) \vee (x \wedge y^*) \vee (x^* \wedge y^{**}), (x^{**} \wedge y) \vee (x \wedge y^*) \vee (x^* \wedge y^*), (x^{**} \wedge y^*) \vee y,$

$(x^{**} \wedge y) \vee (x^{**} \wedge y^*) \vee (x^* \wedge y^{**}), (x^{**} \wedge y) \vee y^*, y \vee (x^* \wedge y^*),$

$(x^{**} \wedge y) \vee (x^* \wedge y^{**}) \vee (x^* \wedge y^*), (x^{**} \wedge y^{**}) \vee (x \wedge y^*) \vee (x^* \wedge y),$

$y^{**} \vee (x \wedge y^*), (x^{**} \wedge y^{**}) \vee (x \wedge y^*) \vee (x^* \wedge y^*), x^{**} \vee (x^* \wedge y), x^{**} \vee (x^* \wedge y^{**}),$

$(x^{**} \wedge y^{**}) \vee y^*, (x^{**} \wedge y^{**}) \vee (x^* \wedge y) \vee (x^* \wedge y^*), y^{**} \vee (x^* \wedge y^*), (x \wedge y^*) \vee (x^* \wedge y) \vee (x^* \wedge y^*),$

$(x \wedge y^*) \vee x^*, y^* \vee (x^* \wedge y), (x^{**} \wedge y) \vee x^*, (x \wedge y) \vee (x^* \wedge y) \vee (x \wedge y^*) \vee (x^* \wedge y^*),$

$(x \wedge y) \vee (x \wedge y^*) \vee x^*, (x \wedge y) \vee y^* \vee (x^* \wedge y), (x \wedge y) \vee (x^{**} \wedge y^*) \vee x^*,$

$x \vee (x^{**} \wedge y) \vee (x^* \wedge y), x \vee (x^{**} \wedge y) \vee (x^* \wedge y^{**}), x \vee (x^{**} \wedge y) \vee (x^* \wedge y^*),$

$(x \wedge y^{**}) \vee y \vee (x^{**} \wedge y^*), (x \wedge y^{**}) \vee (x^{**} \wedge y) \vee (x^{**} \wedge y^*) \vee (x^* \wedge y^{**}),$

$(x \wedge y^{**}) \vee (x^{**} \wedge y) \vee y^*, (x \wedge y^{**}) \vee y \vee (x^* \wedge y^*), (x \wedge y^{**}) \vee (x^{**} \wedge y) \vee x^*,$

$x \vee (x^* \wedge y) \vee (x^* \wedge y^*), (x \wedge y^{**}) \vee y^* \vee (x^{**} \wedge y), (x \wedge y^{**}) \vee (x^{**} \wedge y^*) \vee x^*,$

$(x^{**} \wedge y) \vee (x^* \wedge y) \vee (x \wedge y^*) \vee (x^* \wedge y^*), (x^{**} \wedge y) \vee (x \wedge y^*) \vee x^*,$

$(x^{**} \wedge y) \vee (x^{**} \wedge y^*) \vee x^*, (x^{**} \wedge y^{**}) \vee (x^* \wedge y) \vee (x \wedge y^*) \vee (x^* \wedge y^*),$

$(x^{**} \wedge y^{**}) \vee (x \wedge y^*) \vee x^*, (x^{**} \wedge y^{**}) \vee (x^* \wedge y) \vee y^*, x \vee (x^{**} \wedge y) \vee x^*,$

$x \vee (x^{**} \wedge y) \vee (x^* \wedge y) \vee (x^* \wedge y^*), (x \wedge y^{**}) \vee (x^{**} \wedge y) \vee (x^{**} \wedge y^*) \vee x^*,$

$(x \wedge y^{**}) \vee y \vee y^*\}.$

**Twierdzenie 16** *Niech* $\mathfrak{L} = (L; \vee, \wedge, ^*, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ *będzie algebrą Stone'a oraz* $X \subseteq L$. *Wówczas* $X \in Ind(\mathfrak{L}, A_1)$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $X^{**} \in Ind(\mathfrak{S}(\mathfrak{L}), A_1)$ *oraz*

$$f(b_1, ..., b_n) = g(b_1, ..., b_n) \Rightarrow \tilde{f}(\phi(b_1), ..., \phi(b_1)) = \tilde{g}(\phi(b_1), ..., \phi(b_n)) \tag{2.23}$$

*dla każdych* $f, g \in \mathbb{T}^{(n)}(\mathfrak{L})$, $b_1, .., b_n \in X$.

**Dowód.** Przypuśćmy, że $L \supseteq X \in Ind(\mathfrak{L}, A_1)$. Z Twierdzenia 14 otrzymujemy natychmiast $X^{**} \in Ind(\mathfrak{S}(\mathfrak{L}), A_1)$.

Niech $f(b_1, ..., b_n) = g(b_1, ..., b_n)$ dla pewnych $f, g \in \mathbb{T}^{(n)}(\mathfrak{L})$, $b_1, .., b_n \in X$. Ponieważ $\phi \in \mathbb{T}^{(1)}(\mathfrak{L})$, więc $f(\phi(b_1), ..., \phi(b_n)) = g(\phi(b_1), ..., \phi(b_n))$. Na mocy Twierdzenia 10 mamy $f(x_1, ..., x_n) = A_{J_1}(x_1, ..., x_n)$ i $g(x_1, ..., x_n) = A_{J_2}(x_1, ..., x_n)$ dla pewnych $J_1, J_2 \in \{0, 1, 2\}^n$.

Oczywiście $\phi(x) \in D(L)$ dla wszystkich $x \in L$, zatem $[\phi(b_i)]^* = \mathbf{0}$, a także $[\phi(b_i)]^{**} = \mathbf{1}$. Wobec tego $f(\phi(b_1), ..., \phi(b_n)) = A_{\bar{J}_1}(\phi(b_1), ..., \phi(b_n)) =$ $= \tilde{f}_{\phi_2(\bar{J}_1)}(\phi(b_1), ..., \phi(b_n))$, gdzie $\tilde{f}_{\phi_2(\bar{J}_1)}$ zdefiniowane jest wzorem (2.12). Podobnie $g(\phi(b_1), ..., \phi(b_n)) = \tilde{f}_{\phi_2(\bar{J}_2)}(\phi(b_1), ..., \phi(b_n))$. Zatem otrzymujemy (2.23).

W celu udowodnienia implikacji przeciwnej przypuśćmy, że $f_1(b_1, ..., b_n) = g_1(b_1, ..., b_n)$ dla pewnych $f_1, g_1 \in \mathbb{T}^{(n)}(\mathfrak{L})$, $b_1, .., b_n \in X$. Przypomnijmy zbiór nietożsamościowych unarnych działań termowych w algebrze Stone'a: $p_1(x) = x^*, p_2(x) = x^{**}, p_3(x) = \mathbf{0}, p_4(x) = \mathbf{1}$ i $p_5(x) = \phi(x) = x \vee x^*$. Oczywiście, dla $i = 1, ..., 4$, mamy $p_i(b_k) \in S(L)$ $(k = 1, ..., n)$, ponadto $p_i(b_k) = p_i(a_k)$. Z założenia otrzymujemy zatem $f_1(p_i(a_1), ..., p_i(a_n)) = g_1(p_i(a_1), ..., p_i(a_n))$, a stąd $f_1(p_i(b_1), ..., p_i(b_n)) = g_1(p_i(b_1), ..., p_i(b_n))$. Natomiast z (2.23) mamy $f_1(\phi(b_1), ..., \phi(b_1)) = g_1(\phi(b_1), ..., \phi(b_n))$. ∎

Z definicji $\tilde{f} \in \mathbb{T}^{(n)}(\mathfrak{D}(\mathfrak{L}))$ dla dowolnego $f \in \mathbb{T}^{(n)}(\mathfrak{L})$. Ponieważ $\mathfrak{D}(\mathfrak{L})$ jest kratą, więc działania $\vee, \wedge$ są idempotentne. Mamy zatem następujący wniosek:

**Wniosek 8** *Niech* $\mathfrak{L} = (L; \vee, \wedge, ^*, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ *będzie algebrą Stone'a oraz* $X \in L$. *Jeśli* $X^{**} \in Ind(\mathfrak{S}(\mathfrak{L}), A_1)$ *oraz* $|\phi(X)| = 1$, *to* $X \in Ind(\mathfrak{L}, A_1)$.

Warunek $|\phi(X)| = 1$ nie jest warunkiem koniecznym $A_1$-niezależności zbioru $X$ w algebrze Stone'a. Istotnie:

**Przykład 3.** Rozważmy podzbiór $X = \{c, b_1\}$ algebry przedstawionej w Przykładzie 1 (Rysunek 2.1, strona 36). Jak łatwo zauważyć $\phi(c) = \mathbf{1} \neq \phi(\mathbf{b_1})$. Analizując binarne działania termowe tej algebry możemy wykazać, że $X \in Ind(\mathfrak{L}, A_1)$.

Zbiór ten nie spełnia również warunku (f) Twierdzenia 2, ponieważ $c \in S(L)$ oraz $b_1 \notin S(L) = g(L)$. Zauważmy również, że w przykładzie tym zbiór $\{b, b_1, c\} \in Ind(\mathfrak{L}, A_1)$, zatem Twierdzenie 2(e) i (f) nie jest prawdziwe dla $A_1$-niezależności.

# Rozdział 3

# Q-niezależność w pewnych algebrach niełącznych.

## 3.1 Grupoidy *-łączne.

Idea badania algebr *-łącznych wywodzi się z pojęcia $\tau$-pierścieni wprowadzonego przez B. Gleichgewichta w [14]. K. Głazek w [16] i [17] rozważał niełączne pierścienie oraz algebry, w których działania binarne są *-łączne.

Standardową terminologię dla półgrup, quasigrup i półkrat można znaleźć odpowiednio w [28], [36], [41] oraz [5].

*Grupoidem z inwolucją* nazywamy algebrę $\mathfrak{A} = (A; +,^*)$ typu $(2,1)$ spełniającą następujące warunki:

$$(x^*)^* = x, \tag{3.1}$$

$$(x+y)^* = y^* + x^*. \tag{3.2}$$

Działanie $^*$ jest zatem anty-automorfizmem grupoidu $\mathfrak{A}$ rzędu 2.

Grupoid z inwolucją $(A; +,^*)$ nazywamy $^*$-*łącznym*, gdy

$$(x+y)^* + z = x + (y+z)^*. \tag{3.3}$$

**Przykłady.**

**1)** Rozważmy zbiór $A = \{a, b, c, d\}$ z działaniem $\oplus$ zdefiniowanym w Tabeli 3.1 oraz inwolucją $^*$ taką, że $a^* = b$, $c^* = c$ oraz $d^* = d$.

| $\oplus$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $c$ | $c$ | $c$ |
| $b$ | $d$ | $a$ | $c$ | $d$ |
| $c$ | $c$ | $c$ | $c$ | $c$ |
| $d$ | $d$ | $c$ | $c$ | $c$ |

Tabela 3.1:

Wówczas algebra $(A; \oplus,^*)$ jest grupoidem $^*$-łącznym. Co więcej, jest to najmniejszy grupoid $^*$-łączny, nie będący półgrupą.

**2)** Rozważmy zbiór jednostek kwaternionowych $H_0 = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$. Zdefiniujmy działanie $^*$ następująco: $(1)^* = 1$, $(-1)^* = -1$, $(i)^* = -i$, $(-i)^* = i$, $(j)^* = -j$, $(-j)^* = j$, $(k)^* = -k$, $(-k)^* = k$ oraz działanie binarne $\oplus$ za pomocą Tabeli 3.2. Łatwo udowodnić, że algebra $(H_0, \oplus,^*)$ jest grupoidem $^*$-łącznym.

| $\oplus$ | 1 | -1 | i | -i | j | -j | k | -k |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | -1 | -i | i | -j | j | -k | k |
| -1 | -1 | 1 | i | -i | j | -j | k | -k |
| i | -i | i | -1 | 1 | k | -k | -j | j |
| -i | i | -i | 1 | -1 | -k | k | j | -j |
| j | -j | j | -k | k | -1 | 1 | i | -i |
| -j | j | -j | k | -k | 1 | -1 | -i | i |
| k | -k | k | j | -j | -i | i | -1 | 1 |
| -k | k | -k | -j | j | i | -i | 1 | -1 |

Tabela 3.2:

**3) i 4)** Zdefiniujmy w zbiorze zbiorze $Z_5$ następujące działania:

$$x^* \equiv 4x \pmod 5,$$
$$x \oplus y \equiv 4x + 4y + 2x^2y^2(x+y) \pmod 5;$$

oraz w zbiorze $Z_7$:

$$x^* \equiv 6x \pmod 7,$$
$$x \oplus y \equiv 6x + 6y + 2x^2y^2(x^3+y^3) + 4x^3y^3(x+y) \pmod 7.$$

Wówczas $(Z_5; \oplus, ^*)$ oraz $(Z_7; \oplus, ^*)$ są grupoidami $^*$-łącznymi.

**5)** Zbiór $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o\}$ z działaniem $\oplus$ zdefiniowanym w Tabeli 3.3 oraz inwolucją $^*$ daną wzorami $a^* = b$, $c^* = c$, $d^* = e$, $f^* = f$, $g^* = h$, $i^* = j$, $k^* = l$, $m^* = n$, $o^* = o$ jest przemiennym grupoidem $^*$-łącznym.

| $\oplus$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $f$ | $g$ | $h$ | $i$ | $j$ | $k$ | $l$ | $m$ | $n$ | $o$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $c$ | $c$ | $k$ | $g$ | $i$ | $n$ | $g$ | $o$ | $i$ | $m$ | $k$ | $n$ | $m$ | $o$ |
| $b$ | $c$ | $a$ | $c$ | $h$ | $l$ | $j$ | $h$ | $m$ | $j$ | $o$ | $l$ | $n$ | $n$ | $m$ | $o$ |
| $c$ | $c$ | $c$ | $c$ | $n$ | $m$ | $o$ | $n$ | $m$ | $o$ | $o$ | $m$ | $n$ | $n$ | $m$ | $o$ |
| $d$ | $k$ | $h$ | $n$ | $e$ | $f$ | $f$ | $h$ | $i$ | $j$ | $i$ | $j$ | $k$ | $n$ | $o$ | $o$ |
| $e$ | $g$ | $l$ | $m$ | $f$ | $d$ | $f$ | $j$ | $g$ | $j$ | $i$ | $l$ | $i$ | $o$ | $m$ | $o$ |
| $f$ | $i$ | $j$ | $o$ | $f$ | $f$ | $f$ | $j$ | $i$ | $j$ | $i$ | $j$ | $i$ | $o$ | $o$ | $o$ |
| $g$ | $n$ | $h$ | $n$ | $h$ | $j$ | $j$ | $h$ | $o$ | $j$ | $o$ | $j$ | $n$ | $n$ | $o$ | $o$ |
| $h$ | $g$ | $m$ | $m$ | $i$ | $g$ | $i$ | $o$ | $g$ | $o$ | $i$ | $m$ | $i$ | $o$ | $m$ | $o$ |
| $i$ | $o$ | $j$ | $o$ | $j$ | $j$ | $j$ | $j$ | $o$ | $j$ | $o$ | $j$ | $o$ | $o$ | $o$ | $o$ |
| $j$ | $i$ | $o$ | $o$ | $i$ | $i$ | $i$ | $o$ | $i$ | $o$ | $i$ | $o$ | $i$ | $o$ | $o$ | $o$ |
| $k$ | $m$ | $l$ | $m$ | $j$ | $l$ | $j$ | $j$ | $m$ | $j$ | $o$ | $l$ | $o$ | $o$ | $m$ | $o$ |
| $l$ | $k$ | $n$ | $n$ | $k$ | $i$ | $i$ | $n$ | $i$ | $o$ | $i$ | $o$ | $k$ | $n$ | $o$ | $o$ |
| $m$ | $n$ | $n$ | $n$ | $n$ | $o$ | $o$ | $n$ | $o$ | $o$ | $o$ | $o$ | $n$ | $n$ | $o$ | $o$ |
| $n$ | $m$ | $m$ | $m$ | $o$ | $m$ | $o$ | $o$ | $m$ | $o$ | $o$ | $m$ | $o$ | $o$ | $m$ | $o$ |
| $o$ | $o$ | $o$ | $o$ | $o$ | $o$ | $o$ | $o$ | $o$ | $o$ | $o$ | $o$ | $o$ | $o$ | $o$ | $o$ |

Tabela 3.3:

Przedstawimy teraz pewne własności zdefiniowanej przez nas algebry, które staną się narzędziami do dalszego jej badania.

Element $a \in A$ nazywamy elementem *lewostronnie* (*prawostronnie*) *anihilującym*, *lewym* (*prawym*) *zerem*, jeśli $a + x = a$ ( odpowiednio, $x + a = a$, $a + x = x$, $x + a = x$), dla każdego $x \in A$.

**Twierdzenie 17** *Niech $(A; +, ^*)$ będzie grupoidem z inwolucją. Jeśli $a \in A$ jest elementem lewostronnie anihilującym (prawostronnie anihilującym, lewym zerem, prawym zerem), to $a^*$ jest elementem prawostronnie anihilującym (lewostronnie anihilującym, prawym zerem, lewym zerem).*

Rzeczywiście, niech $a + x = a$ dla każdego $x \in A$. Wówczas $(a + x)^* = a^*$ oraz $x^* + a^* = a^*$. Działanie $^*$ jest bijekcją, zatem $a^*$ jest elementem prawostronnie anihilującym. ∎

**Twierdzenie 18** *Niech* $(A;+,^*)$ *będzie grupoidem* $^*$*-łącznym. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

$(a)$ $(\exists \mathbf{0} \in A)\ (\forall x \in A)\ [\mathbf{0} + x = x]$;

$(b)$ $(A;+,\mathbf{0})$ *jest półgrupą przemienną z zerem.*

**Dowód.** Przypuśćmy, że element $\mathbf{0} \in A$ jest zerem grupoidu $^*$-łącznego oraz $x \in A$. Jak łatwo wykazać $\mathbf{0}^* = \mathbf{0}$. Wówczas $x = (\mathbf{0}+x)+\mathbf{0} = (x^*+\mathbf{0}^*)^*+\mathbf{0} = x^*+(\mathbf{0}+\mathbf{0})^* = x^*$. Skoro $^*$ jest inwolucją, zatem działanie binarne będzie przemienne, a z $^*$-łączności otrzymamy natomiast jego łączność. ■

Oczywiście, jeśli inwolucja jest działaniem tożsamościowym wówczas grupoid $^*$-łączny jest półgrupą przemienną. Implikacja odwrotna nie zachodzi, wystarczy rozważyć algebrę $(\{a,b,c\};\oplus,^*)$, w której $a^* = b$, $c^* = c$ oraz działanie binarne definiuje wzór $x \oplus y = c$.

Niech $\mathfrak{A} = (A;+,^*)$ będzie grupoidem $^*$-łącznym. Przez $P_A$ będziemy oznaczać zbiór wszystkich idempotentów algebry $\mathfrak{A}$ (to znaczy elementów spełniających warunki $x + x = x$ oraz $x^* = x$).

**Twierdzenie 19** *Niech* $(A;+,^*)$ *będzie grupoidem* $^*$*-łącznym. Relacja* $\leq$ *zdefiniowana następująco:*

$$a \leq b \Leftrightarrow a = a + b = b + a$$

*jest relacją częściowego porządku na* $P_A$*.*

**Dowód.** Zwrotność i antysymetryczność tej relacji jest oczywista. W celu udowodnienia tranzytywności, przypuśćmy, że $a,b,c \in P_A$, $a \leq b$ oraz $b \leq c$, wtedy

$a + c = a^* + c = (a + b)^* + c = a + (b + c)^* = a + b^* = a + b = a$ oraz
$c + a = c + a^* = c + (b + a)^* = (c + b)^* + a = b + a = a.$ ■

**Twierdzenie 20** *Niech $\mathfrak{A} = (A; +,^*)$ będzie grupoidem $^*$-łącznym. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

($\alpha$) $(\forall x, y \in P_A)\ (y + x) + y = y + (x + y)$*;*

($\beta$) $(P_A; +,^*)$ *jest podalgebrą algebry* $\mathfrak{A}$*;*

($\gamma$) $(P_A; +)$ *jest półkratą.*

**Dowód.** Załóżmy, że w zbiorze $P_A$ zachodzi warunek ($\alpha$). Udowodnimy najpierw, że działanie $+$ jest przemienne na $P_A$. Dla dowolnych $x, y \in P_A$ mamy

$$x + y = x + y^* = x + (y + y)^* = (x + y)^* + y = (y^* + x^*) + y = (y + x) + y =$$
$$= y + (x + y) = y + (x^* + y^*) = y + (y + x)^* = (y + y)^* + x = y + x.$$

Zatem $(x + y)^* = y^* + x^* = y + x = x + y$, a stąd

$$(x + y) + (x + y) = (x + y)^* + (x + y) = x + (y + (x + y))^* =$$
$$x + ((x + y)^* + y^*) = x + (x + (y + y^*)^*) = x + (x + (y + y)^*) =$$
$$x + (x + y^*) = x + (x + y) = x + (x + y)^* = (x + x)^* + y = x + y.$$

Reasumując $P_A$ jest podalgebrą grupoidu $^*$-łącznego $\mathfrak{A}$.

Oczywiście, jeśli $P_A$ jest podalgebrą grupoidu $^*$-łącznego $\mathfrak{A}$, wówczas działanie binarne jest łączne i przemienne na zbiorze idempotentów $P_A$. Zatem $(P_A; +)$ jest półkratą. Fakt ten natychmiast implikuje warunek ($\alpha$). ■

Opiszemy teraz związek pomiędzy pewną klasą grupoidów $^*$-łącznych, a półkratami górnymi (lub inaczej $\vee$-półkratami).

**Twierdzenie 21** *Niech $(A; +,^*)$ będzie $^*$-łącznym grupoidem przemiennym spełniającym warunek $x + x = x^*$ dla każdego $x \in A$. Zdefiniujmy relację $\varrho$ następująco:*

$$x \varrho y \Leftrightarrow x + y = y^*.$$

*Wówczas $(A;\varrho)$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym takim, że dla każdej pary elementów ze zbioru $A$ istnieje supremum ze względu na relację $\varrho$. Ponadto, odwzorowanie $x \mapsto x^*$ jest izotoniczne.*

**Dowód.** Zwrotność i antysymetryczność relacji $\varrho$ jest oczywista. Przypuśćmy zatem, że $x, y \in A$, $x\varrho y$ oraz $y\varrho z$. Wtedy

$$x + z = x + (z^*)^* = x + (y + z)^* = (x + y)^* + z = (y^*)^* + z = y + z = z^*.$$

Czyli $\varrho$ jest również tranzytywna.

Udowodnimy teraz, że $sup_\varrho\{x, y\} = (x + y)^*$ dla wszystkich $x, y \in A$. Ponieważ $x + (x + y)^* = (x + x)^* + y = x + y = ((x + y)^*)^*$ otrzymujemy $x\varrho(x + y)^*$ i podobnie $y\varrho(x + y)^*$. Niech $x\varrho p$ i $y\varrho p$ dla pewnego $p \in A$. Zatem $(x + y)^* + p = x + (y + p)^* = x + (p^*)^* = x + p = p^*$. Stąd $(x + y)^*\varrho p$.

W celu wykazania izotoniczności relacji $\varrho$, przypuśćmy, że $x\varrho y$, czyli $x + y = y^*$. Zatem $x^* + y^* = (x + y)^* = (y^*)^*$, a w konsekwencji $x^*\varrho y^*$. ■

**Twierdzenie 22** *Niech $(A;\varrho)$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym takim, że dla każdych $a, b \in A$ istnieje $sup_\varrho\{a, b\}$. Niech $^*$ będzie izotonicznym odwzorowaniem spełniającym warunek $(x^*)^* = x$. Zdefiniujmy działanie $\oplus$ następująco:*

$$x \oplus y = sup_\varrho\{x^*, y^*\}.$$

*Wówczas $(A; \oplus, ^*)$ jest $^*$-łącznym grupoidem przemiennym spełniającym warunek*

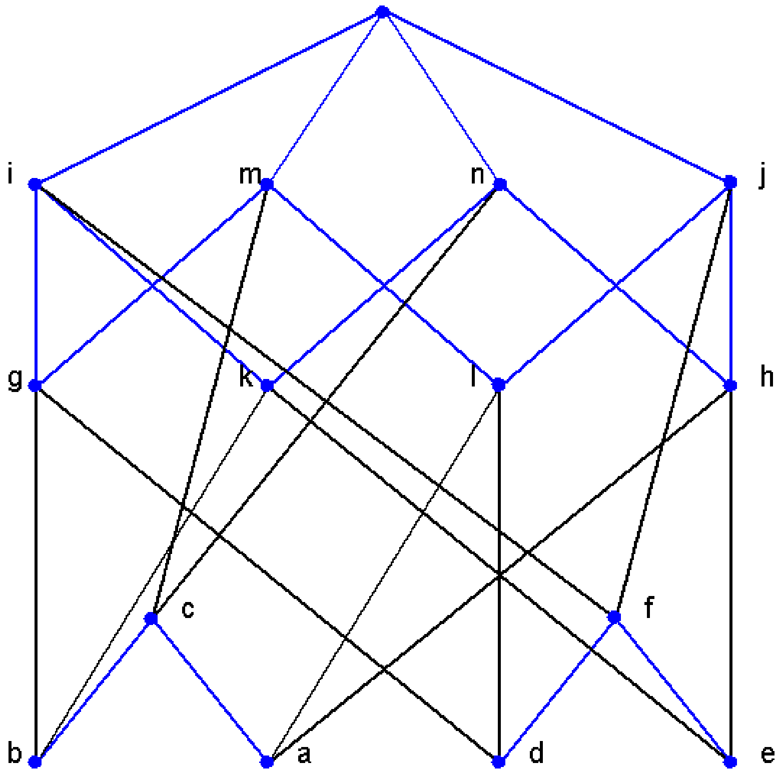
$$x \oplus x = x^* \text{ dla wszystkich } x \in A.$$

**Dowód.** Z definicji działania $\oplus$ wynika, że $x \oplus x = x^*$ oraz $x \oplus y = y \oplus x$.
Aby udowodnić, że działanie $^*$ jest inwolucją na $(A; \oplus)$ weźmy dowolne $x, y \in A$. Wówczas $y^* \oplus x^* = sup_\varrho\{x, y\} = a$ dla pewnego $a \in A$ oraz $(x \oplus y)^* = (sup_\varrho\{x^*, y^*\})^*$. Wykażemy, że $sup_\varrho\{x^*, y^*\} = a^*$. Rzeczywiście, mamy $x\varrho a$ i $y\varrho a$. Korzystając z izotoniczności $^*$, uzyskujemy $x^*\varrho a^*$ oraz $y^*\varrho a^*$. Przypuśćmy teraz, że $x^*\varrho p$ i $y^*\varrho p$

dla pewnego $p \in A$. Wtedy $x \varrho p^*$ oraz $y \varrho p^*$. Zatem $a \varrho p^*$, a stąd $a^* \varrho p$. Reasumując $sup_\varrho\{x^*, y^*\} = a^*$, czyli $(x \oplus y)^* = x^* \oplus y^*$.

Pozostaje udowodnić, że działanie $\oplus$ jest $^*$-łączne. Załóżmy zatem, że $x, y, z \in A$ oraz $(x \oplus y)^* \oplus z = w$ dla pewnego $w \in A$. Oznacza to, że $sup_\varrho\{x \oplus y, z^*\} = w$. Co implikuje $sup_\varrho\{x^*, y^*\} \varrho w$ i $z^* \varrho w$. A stąd $x^* \varrho w$ oraz $y^* \varrho w$. Jak łatwo wykazać $w = sup_\varrho\{x^*, y \oplus z\}$. ■

Niech $(A; \oplus, ^*)$ będzie $^*$-łącznym grupoidem rozważanym w Przykładzie 5. Wówczas $(A; \varrho)$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym o następującym diagramie:




Rysunek 3.1:

Grupoid $^*$-łącznym $\mathfrak{A} = (A; +,^*)$ nazywamy *indukującym półkratę*, jeśli działanie binarne jest przemienne oraz dla każdego $x \in A$ zachodzi warunek $x + x = x^*$.

Grupoidy $^*$-łączne zdefiniowane w przykładach 3,4 oraz 5 implikują półkraty.

Odnotujmy, że jedynymi unarnymi działaniami termowymi w grupoidzie indukującym półkratę są: $e_1^1(x) = x$, $f(x) = x^*$ oraz $g(x) = x + x^*$. Poniżej przedstawiamy tabelę dla dodawania w wolnym grupoidzie indukującym półkratę generowanym przez zbiór $\{x\}$. Oczywiście grupoid ten jest izomorficzny z algebrą działań termowych jednoargumentowych omawianego grupoidu.

| $+$ | $x$ | $x^*$ | $x+x^*$ |
|---|---|---|---|
| $x$ | $x^*$ | $x+x^*$ | $x+x^*$ |
| $x^*$ | $x^*+x$ | $x$ | $x+x^*$ |
| $x+x^*$ | $x+x^*$ | $x+x^*$ | $x+x^*$ |

Tabela 3.4:

Łatwo sprawdzić, że $f, g \in End(\mathfrak{A})$. Zatem otrzymujemy

$$Ind(\mathfrak{A}, A_1) = 2^A.$$

Ponadto $g(g(x)) = g(x)$, a więc $g$ jest retrakcją, $g(A) = P_A$ oraz $\mathfrak{P}_A = (P_A; +)$ jest półkratą. W rozważanej algebrze $F_a = \{x \in A \mid x + x^* = a + a^* = a\}$ dla dowolnego $a \in P_A$. Jak łatwo wykazać $\mathfrak{F}_a = (F_a; +,^*)$ jest podalgebrą grupoidu $\mathfrak{A}$ indukującego półkratę. W algebrze $\mathfrak{F}_a$ element $a$ jest anihilatorem. Istotnie, $a + x = = (x + x^*) + x = x^* + (x^* + x^*) = x^* + x = a$.

## 3.2 Działania termowe w $^*$-łącznym grupoidzie przemiennym.

Opiszemy teraz ogólną postać działań termowych w $^*$-łącznych grupoidach przemiennych, która jest niezbędna do badania $Q$-niezależności w omawianych algebrach.

Przyjmujemy, że $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, natomiast $2\mathbb{N}$ oznacza zbiór liczb naturalnych parzystych. Dla uproszczenia zapisu wprowadzimy następujące oznaczenia:

$$x^0 = x^*, \quad x^1 = x \text{ oraz } i' = i + 1(\mathrm{mod} 2).$$

Zdefiniujmy funkcję $\chi : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$: $\chi(n) = \begin{cases} 1 & \text{dla } n \in 2\mathbb{N}; \\ 0 & \text{dla } n \notin 2\mathbb{N}. \end{cases}$

Jest to oczywiście funkcja charakterystyczna zbioru liczb parzystych.

Przedstawimy teraz kilka prostych własności działań w grupoidzie $^*$-łącznym, przemiennym.

**Lemat 5** *Niech $(A; +, ^*)$ będzie grupoidem $^*$-łącznym, przemiennym. Wówczas:*

$$(x + y) + z = x^* + (y + z^*), \tag{3.4}$$

$$(x + y) + z = (x + z^*) + y^*, \tag{3.5}$$

$$(w + x) + (y + z) = (w + y) + (x + z), \tag{3.6}$$

$$\begin{gathered} (...(x_1 + x_2) + ...) + x_i) + x^*)... + x^*) + x_j) + ...) + x_n = \\ (...(x_1 + x_2) + ...) + x_i) + x)... + x) + x_j) + ...) + x_n, \end{gathered} \tag{3.7}$$

*jeśli $i \geq 1$ oraz $x^*$ występuje w liczbie parzystej,*

$$(...(x_1^{i_1} + x_2^{i_2}) + x_3^{i_3}...) + x_n^{i_n} = (...(x_2^{i_2} + x_3^{i'_3}) + x_4^{i'_4}) + ...) + x_n^{i'_n}) + (x_1^{i_1})^{\chi(n)}, \tag{3.8}$$

$$\begin{gathered} (...(x_1^{i_1} + x_2^{i_2}) + ...) + x_k^{i_k}) + ...) + x_n^{i_n} = \\ (...(x_1^{i_1} + x_2^{i_2}) + ...) + x_{k-1}^{i_{k-1}}) + x_{k+1}^{i'_{k+1}}) + ...) + x_n^{i'_n}) + (x_k^{i_k})^{\chi(n-k)} \text{ dla } k > 1. \end{gathered} \tag{3.9}$$

Oznaczmy

$$g_{(k,l)}(x) = (...(x^{i_1} + x^{i_2}) + ...) + x^{i_l}) + ...) + x^{i_k}, \tag{3.10}$$

gdzie $l \leq k$ oraz

**1)** dla $l = 0$ mamy $i_s = 1$ dla każdego $s \in \{1, ..., k\}$;

**2)** dla $l = 1$ mamy $i_s = \begin{cases} 0, & \text{gdy } s = 1 \text{ lub } s \text{ parzyste;} \\ 1, & \text{w pozostałych przypadkach;} \end{cases}$

**3)** dla $l > 1,$ mamy $i_s = \begin{cases} 0, & \text{gdy } s = l + 2r \text{ dla pewnego } r \in N; \\ 1, & \text{w pozostałych przypadkach .} \end{cases}$

**Przykłady.**

$g_{(1,0)}(x) = x \quad$ (czyli $g_{(1,0)} = e_1^1$),

$g_{(5,1)}(x) = (((x^* + x^*) + x) + x^*) + x,$

$g_{(6,3)}(x) = ((((x + x) + x^*) + x) + x^*) + x.$

Dla uproszczenia piszemy $g^*_{(k,l)}(x)$ zamiast $(g_{(k,l)}(x))^*$.

**Twierdzenie 23** *Każde unarne działanie termowe w przemiennym grupoidzie* $^*$*-łącznym* $(A; +, ^*)$ *można przekształcić do postaci* $g_{(k,l)}(x)$ *dla pewnych* $l \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{N}$ *oraz* $l \leq k$.

Dowód Twierdzenia 23 otrzymamy jako konsekwencję następujących lematów.

**Lemat 6** *Dla* $l = 0$ *mamy*

$$g^*_{(k,0)} = \begin{cases} g_{(k,1)}(x), & \text{dla } k = 1, 2; \\ g_{(k,k-1-\chi(k))}(x), & \text{dla } k > 2. \end{cases}$$

**Dowód.** Dowód przeprowadzimy dla $k > 2$ oraz $k$ parzystego ($\chi(k) = 1$). Podkreślone zostały miejsca, w których korzystamy z własności (3.7). Mamy zatem

$g^*_{(k,0)}(x) = (...(x + x) + ...) + x)^* = (...(x^* + \underline{x^*) + ...) + x^*}) + x^* =$
$(...(x^* + x) + ...) + x) + x^* = (...(x + x^*) + \underline{x) + ...) + x}) + x) + x^* =$
$(...(x + \underline{x^*) + ...) + x^*}) + x^*) + x) + x^* = (...(x + x) + x) + ..) + x^*) + x) + x^* =$
$g_{(k,k-2)}(x) = g_{(k,k-1-\chi(k))}(x).$

Dowody pozostałych przypadków przebiegają w analogiczny sposób. ■

**Lemat 7** *Niech* $l \geq 1$. *Wówczas*

$$g^*_{(k,l)}(x) = \begin{cases} g_{(k,0)}(x), & \text{dla } k = 1,2 \text{ i } l = 1; \\ & \text{oraz dla } l \in 2\mathbb{N} \text{ i } l = k-2, k-1; \\ g_{(k,3)}(x), & \text{dla } k > 2 \text{ i } l = 1; \\ g_{(k,1)}(x), & \text{dla } k > 2 \text{ i } l = 3; \\ g_{(k,l-3)}(x), & \text{dla } l \notin 2\mathbb{N} \text{ i } l > 3; \\ g_{(k,l+3)}(x), & \text{dla } l \in 2\mathbb{N} \text{ i } l + 3 \leq k; \\ g_{(k,k)}(x), & \text{dla } l \in 2\mathbb{N} \text{ i } l = k. \end{cases}$$

**Dowód.** Dwa pierwsze przypadki są oczywiste. Również dwa kolejne możemy łatwo udowodnić wykorzystując własność (3.7).

Przypuśćmy zatem, że $k > 2$ i $l = 1$. Wtedy
$g^*_{(k,1)}(x) = [(...(x^* + x^*) + x) + ...]^* = (...(x + x) + x^*) + ... = g_{(k,3)}(x).$
Podobnie przebiega dowód dla przypadku $k > 2$ i $l = 3$.

Przypuśćmy teraz, że $l$ jest nieparzyste oraz $l > 3$. Wówczas mamy
$g^*_{(k,l)}(x) = [(...(g_{(l-1,0)}(x) + x^*) + ...]^* = (...(g_{(l-1,l-3)}(x) + x) + ... =$
$= (...(g_{(l-4,0)}(x) + x^*) + ... = g_{(k,l-3)}(x).$

Niech $l$ będzie parzyste oraz $l+3 \leq k$. Rozważymy teraz dwa przypadki:
a) dla $l=2$ otrzymujemy $g^*_{(k,2)}(x) = (...(x+x^*)+x)+x^*)+x)+...)^* =$
$(...(x^*+x)+x^*)+x)+x^*)+... = (...(x+\underline{x^*)+x^*})+x)+x^*)+... =$
$(...(x+x)+x)+x)+x^*)+... = g_{(k,5)}(x)$.
b) dla $l \geq 4$ mamy $g^*_{(k,l)}(x) = (...(g_{(l-1,0)}(x)+x^*)+x)+x^*)+x)+...)^* =$
$(...(g_{(l-1,l-2)}(x)+x)+x^*)+x)+x^*)+... =$
$(...(g_{(l-3,0)}(x)+x^*)+\underline{x)+x})+x^*)+x)+x^*)+... =$
$(...(g_{(l-3,0)}(x)+\underline{x^*)+x^*)+x^*)+x^*})+x)+x^*)+... =$
$(...(g_{(l-3,0)}(x)+x)+x)+x)+x)+x)+x^*)+... = g_{(k,l+3)}(x)$.

Przypuśćmy, że $l$ jest parzyste oraz $l=k$. Równość $g^*_{(2,2)}(x) = g_{(2,2)}(x)$ jest oczywista. Weźmy zatem $k>2$. W tym przypadku zachodzi
$g^*_{(k,k)}(x) = (g_{(k-1,0)}(x)+x^*)^* = g_{(k-1,k-2)}(x)+x = ((g_{(k-3,0)}(x)+x^*)+\underline{x)+x} =$
$= ((g_{(k-3,0)}(x)+\underline{x^*)+x^*})+x^* = ((g_{(k-3,0)}(x)+x)+x)+x^* = g_{(k,k)}(x)$. ■

Prawdziwość kolejnego lematu można udowodnić przez indukcję względem $n$.

**Lemat 8** *Niech $t$ będzie termem $^*$-łącznego grupoidu przemiennego $\mathfrak{A}$. Wówczas*

$$t+[...(x_1+x_2)+x_3)+...)+x_n] = (...(t^{\chi(n+1)}+x_1)+x_2^*)+...)+x_n^*.$$

□

Wprowadźmy teraz następujące oznaczenia:

$$h_{(p,r)}(y,x) = (...(y+x^{i_1})+x^{i_2})+...)+x^{i_r})+...)+x^{i_p},$$

gdzie $p,r \in N_0$, $r \leq p$; $i_s = 0$ dla $s<r$; $i_{r+2l} = 0$ oraz $i_{r+2l+1} = 1$ dla $l \in N_0$.

Dla uproszczenia będziemy pisać $g_{(k,l)}(x) \oplus h_{(p,r)}(y)$ w miejsce $h_{(p,r)}(g_{(k,l)}(x), y)$. Przyjmujemy, że

$$h_{(0,0)}(y,x) = y \text{ oraz } g_{(0,0)}(x) \oplus h_{(p,r)}(y) = g_{(p,r)}(y).$$

**Lemat 9** $g_{(k,l)}(x) + g_{(p,r)}(x) =$

$$= \begin{cases} g^i_{(k,l)}(x) \oplus h_{(p,1)}(x), & dla\ r = 1; \\ g^i_{(k,l)}(x) \oplus h_{(p,r-1)}(x), & dla\ r \notin 2\mathbb{N},\ r > 1; \\ g^i_{(k,l)}(x) \oplus h_{(p,r+1)}(x), & dla\ r \in 2\mathbb{N},\ r < p; \\ g^i_{(k,l)}(x) \oplus h_{(p,0)}(x), & dla\ r \in 2\mathbb{N},\ r = p. \end{cases}$$

*gdzie* $i = \chi(p+1)$.

**Dowód.** Rozważamy kolejno przypadki naszego lematu, wykorzystując Lemat 8:

Ad 1. $g_{(k,l)}(x) + g_{(p,1)}(x) = g_{(k,l)}(x) + [...(x^* + x^*) + x) + ...] =$

$(..(g^i_{(k,l)}(x) + x^*) + x) + x^*) + ... = g^i_{(k,l)}(x) \oplus h_{(p,1)}(x)$.

Ad 2. $g_{(k,l)}(x) + g_{(p,r)}(x) = g_{(k,l)}(x) + [...(x + x) + ...) + x) + x^*) + ...] =$

$(...(g^i_{(k,l)}(x) + x) + \underline{x^*) + ...x^*}) + x^*) + x) + ... =$

$(...(g^i_{(k,l)}(x) + x) + ...) + x) + x^*) + x) + ... = g^i_{(k,l)}(x) \oplus h_{(p,r-1)}(x)$.

Ad 3. $g_{(k,l)}(x) + g_{(p,r)}(x) = g_{(k,l)}(x) + [...(x + x) + ...) + x) + x^*) + x) + ...] =$

$(...(g^i_{(k,l)}(x) + x) + \underline{x^*) + ...) + x^*}) + x) + x^*) + ... =$

$(...(g^i_{(k,l)}(x) + x) + x) + ...) + x) + x) + x^*) + ... = g^i_{(k,l)}(x) \oplus h_{(p,r+1)}(x)$.

Ad 4. $g_{(k,l)}(x) + g_{(p,r)}(x) = g_{(k,l)}(x) + [...(x + x) + ...) + x) + x^*] =$

$(...(g^i_{(k,l)}(x) + x) + \underline{x^*) + ...) + x^*}) + x) =$

$(...(g^i_{(k,l)}(x) + x) + x) + ...) + x) + x) = g^i_{(k,l)}(x) \oplus h_{(p,0)}(x)$. ■

**Lemat 10** $g_{(k,l)}(x) \oplus h_{(p,0)}(x) =$

$$= \begin{cases} g_{(k+p,0)}(x), & dla\ l = 0; \\ g_{(k+p,l)}(x), & dla\ p = 1\ oraz\ [l = 1, k \in 2\mathbb{N}]\ lub\ [l > 1,\ k - l \in 2\mathbb{N}]; \\ g_{(k+p,p)}(x), & dla\ l = 1,\ p \in 2\mathbb{N}; \\ g_{(k+p,p-1)}(x), & dla\ l = 1,\ p > 1,\ p, k \in 2\mathbb{N}; \\ g_{(k+p,p+1)}(x), & dla\ l = 1,\ p, k \notin 2\mathbb{N}; \\ g_{(k+p,l+p)}(x), & dla\ l > 1,\ p \in 2\mathbb{N}; \\ g_{(k+p,l+p-1)}(x), & dla\ l > 1,\ p > 1,\ p \in 2\mathbb{N}\ oraz\ k - l \in 2\mathbb{N}; \\ g_{(k+p,l+p+1)}(x), & dla\ l > 1,\ p \notin 2\mathbb{N}\ oraz\ k - l \notin 2\mathbb{N}. \end{cases}$$

**Dowód.** Rozpatrujemy kolejno przypadki lematu.

Ad 1. Oczywisty.

Ad 2. Rozważymy tylko przypadek gdy $l = 1$ oraz $k$ jest parzyste. Wówczas mamy $g_{(k,1)}(x) \oplus h_{(1,0)}(x) = [...(x^* + x^*) + x) + ...) + x^*] + x = g_{(k+1,l)}$.

Dowód dla $l > 1$ oraz $k - l$ parzystego przebiega analogicznie.

Ad 3. $g_{(k,1)}(x) \oplus h_{(p,0)}(x) = (...[...(x^* + x^*) + x) + ...] \oplus h_{(p,0)}(x) =$
$(...(x^* \oplus h_{(p,0)}(x)) + x^*) + x) + ... = (...(x + x^*) \oplus h_{(p-2,0)}(x)) + x) + x^*) + x) + ... =$
$(...(x \oplus h_{(p-2,0)}(x^*)) + x^*) + x) + x^*) + x) + ... =$
$(...(g_{(p-1,0)}(x) + x^*) + x) + x^*) + x) + ... = g_{(k+p,p)}(x)$.

Ad 4. $g_{(k,1)}(x) \oplus h_{(p,0)}(x) = (...[...(x^* + x^*) + ...) + x^*] \oplus h_{(p-1,0)}(x)) + x =$
$(...(x^* \oplus h_{(p-1,0)}(x)) + x^*) + x) + ... = (...(x + x^*) \oplus h_{(p-3,0)}(x)) + x) + x^*) + x) + ... =$
$(...(x \oplus h_{(p-3,0)}(x^*)) + x^*) + x) + ... = (...(g_{(p-2,0)}(x) + x^*) + x) + ... = g_{(k+p,p-1)}(x)$.

Ad 5. $g_{(k,1)}(x) \oplus h_{(p,0)}(x) = (...[...(x^* + x^*) + ...) + \underbrace{x] + x) + x) + ....) + x}_{p+1} =$
$(...(x^* \oplus h_{(p+1,0)}(x)) + x^*) + x) + ... = (...(x + x^*) \oplus h_{(p-1,0)}(x)) + x) + x^*) + x) + ... =$
$(...(x \oplus h_{(p-1,0)}(x^*)) + x^*) + x) + ... = (...(g_{(p,0)}(x) + x^*) + x) + ... = g_{(k+p,p+1)}(x)$.

W podobny sposób można zweryfikować pozostałe przypadki. ■

**Lemat 11** *Niech* $r \neq 0$; $s = [\frac{k+2}{2}] - [\frac{p-r+2}{2}]$ *dla* $l = 1$ *oraz* $t = [\frac{k-l+2}{2}] - [\frac{p-r+2}{2}]$ *dla* $l > 1$. *Wówczas:*

$g_{(k,l)}(x) \oplus h_{(p,r)}(x) =$

$$\begin{cases}
g_{(k+p,1)}(x), & \textit{dla } l = 1 \textit{ oraz } [r = 1 \textit{ i } k \notin 2\mathbb{N}] \textit{ lub } [r = 2 \textit{ i } k \in 2\mathbb{N}]; \\
g_{(k+p,r-2)}(x), & \textit{dla } l = 1, r > 2 \textit{ oraz } k, r \in 2\mathbb{N}; \\
g_{(k+p,r-1)}(x), & \textit{dla } l = 1, r > 1 \textit{ oraz } k, r \notin 2\mathbb{N}; \\
g_{(k+p,l+r-2)}(x), & \textit{dla } l > 1 \textit{ oraz } k + l, r \in 2\mathbb{N}; \\
g_{(k+p,l+r-1)}(x), & \textit{dla } l > 1 \textit{ oraz } k + l, r \notin 2\mathbb{N}; \\
g_{(k+p,0)}(x), & \textit{dla } l = 1, k > 1 \textit{ oraz } k + r \notin 2\mathbb{N}, s = 0; \\
 & \textit{lub } l > 1 \textit{ oraz } k + r \notin 2\mathbb{N}, t = 0; \\
g_{(k+p,k+p-2|s|+2)}(x), & \textit{dla } l = 1;\ k, p \in 2\mathbb{N};\ r \notin 2\mathbb{N} \textit{ oraz } s > 0, \\
 & \quad \textit{lub } k \in 2\mathbb{N};\ p, r \notin 2\mathbb{N} \textit{ oraz } s < 0, \\
 & \quad \textit{lub } k, p \notin 2\mathbb{N};\ r \in 2\mathbb{N} \textit{ oraz } s > 0, \\
 & \quad \textit{lub } k \notin 2\mathbb{N};\ p, r \in 2\mathbb{N} \textit{ oraz } s < 0; \\
g_{(k+p,k+p-2|s|+1)}(x), & \textit{dla } l = 1;\ k, p \in 2\mathbb{N};\ r \notin 2\mathbb{N} \textit{ oraz } s < 0, \\
 & \quad \textit{lub } k \in 2\mathbb{N};\ p, r \notin 2\mathbb{N} \textit{ oraz } s > 0, \\
 & \quad \textit{lub } k, p \notin 2\mathbb{N};\ r \in 2\mathbb{N} \textit{ oraz } s < 0, \\
 & \quad \textit{lub } k \notin 2\mathbb{N};\ p, r \in 2\mathbb{N} \textit{ oraz } s > 0; \\
g_{(k+p,k+p-2|t|+1)}(x), & \textit{dla } l > 1;\ k + l \in 2\mathbb{N};\ p, r \notin 2\mathbb{N} \textit{ oraz } t > 0, \\
 & \quad \textit{lub } k + l, p \in 2\mathbb{N};\ r \notin 2\mathbb{N} \textit{ oraz } t < 0, \\
 & \quad \textit{lub } k + l \notin 2\mathbb{N};\ p, r \in 2\mathbb{N} \textit{ oraz } t > 0, \\
 & \quad \textit{lub } k + l, p \notin 2\mathbb{N};\ r \in 2\mathbb{N} \textit{ oraz } t < 0; \\
g_{(k+p,k+p-2|t|+2)}(x), & \textit{dla } l > 1;\ k + l \in 2\mathbb{N};\ p, r \notin 2\mathbb{N} \textit{ oraz } t < 0, \\
 & \quad \textit{lub } k + l, p \in 2\mathbb{N};\ r \notin 2\mathbb{N} \textit{ oraz } t > 0, \\
 & \quad \textit{lub } k + l \notin 2\mathbb{N};\ p, r \in 2\mathbb{N} \textit{ oraz } t < 0, \\
 & \quad \textit{lub } k + l, p \notin 2\mathbb{N};\ r \in 2\mathbb{N} \textit{ oraz } t > 0.
\end{cases}$$

**Dowód.** Liczby $s, t$ są rezultatem dzielenia liczby występowań symbolu $^*$ w działaniu $g_{(k,l)}(x)$ przez liczbę występowań symbolu $^*$ w działaniu $h_{(p,r)}(x)$ dla $l = 1$ oraz $l > 1$, odpowiednio.

Ad 1. Przypuśćmy, że $l = 1$. Łatwo zauważyć, że równość jest prawdziwa dla $r = 1$ oraz $k$ nieparzystego. Weźmy teraz $r = 2$ oraz $k$ parzyste. Wówczas mamy

$$g_{(k,1)}(x) \oplus h_{(p,2)}(x) = [g_{(k-1,1)}(x) + x^*] \oplus [x \oplus h_{(p-1,2)}(x)] = g_{(k+p,1)}(x).$$

Ad 2. $g_{(k,1)}(x) \oplus h_{(p,r)}(x) = [g_{(k,1)}(x) \oplus h_{(r-2,0)}(x)] \oplus h_{(p-r+2,2)}(x) =$
$g_{(k+r-2,r-2)}(x) \oplus h_{(p-r+2,2)}(x) = [g_{(k+r-3,r-2)}(x) + x^*] \oplus [x \oplus h_{(p-r+1,1)}(x)] = g_{(k+p,r-2)}(x)$.

Ad 3. $g_{(k,1)}(x) \oplus h_{(p,r)}(x) = [g_{(k,1)}(x) \oplus h_{(r-1,0)}(x)] \oplus h_{(p-r+1,)}(x) =$
$g_{(k+r-1,r-1)}(x) \oplus h_{(p-r+1,1)}(x) = [g_{(k+r-2,r-1)}(x) + x] \oplus h_{(p-r+1,1)}(x) = g_{(k+p,r-1)}(x)$.

Ad 4. $g_{(k,l)}(x) \oplus h_{(p,r)}(x) = [g_{(k,l)}(x) \oplus h_{(r-2,0)}(x)] \oplus h_{(p-r+2,2)}(x) =$
$g_{(k+r-2,l+r-2)}(x) \oplus h_{(p-r+2,2)}(x) = [g_{(k+r-3,l+r-2)}(x) + x^*] \oplus [x \oplus h_{(p-r+1,1)}(x)] =$
$g_{(k+p,l+r-2)}(x)$.

Ad 5. $g_{(k,l)}(x) \oplus h_{(p,r)}(x) = [g_{(k,l)}(x) \oplus h_{(r-1,0)}(x)] \oplus h_{(p-r+1,1)}(x) =$
$g_{(k+r-1,l+r-1)}(x) \oplus h_{(p-r+1,1)}(x) = [((g_{(k+r-2,l+r-1)}(x) + x) + x^*] \oplus h_{(p-r,2)}(x) = g_{(k+p,l+r-1)}(x)$.

Ad 6. Niech $l = 1, s = 0$, $k > 1$, $k$ będzie parzyste oraz $r$ nieparzyste. Przeprowadzimy dowód przez indukcję względem $i = [\frac{k+2}{2}] = [\frac{p-r+2}{2}]$. Oczywiście, $i \geq 2$, ponieważ $k$ jest parzyste. Zatem $r < p$. Weźmy teraz $i = 2$. Jeśli $p$ jest nieparzyste, to otrzymamy

$$g_{(2,1)}(x) \oplus h_{(p,p-2)}(x) = (([g_{(2,1)}(x) \oplus h_{(p-3,0)}(x)] + x^*) + x) + x^* =$$
$$g_{(p-1,p-3)}(x) \oplus [(x^* + x) + x^*] = [((g_{(p-4,0)}(x) + x^*) + x) + x^*] \oplus [(x^* + x) + x^*] =$$

$$(((((g_{(p-4,0)}(x)+x^*)+x)+x^*)+x^*)+x)+x^* =$$
$$(((((g_{(p-4,0)}(x)+x)+x)+x)+x)+x)+x = g_{(p+2,0)}(x).$$

W przypadku $p$ parzystego mamy

$$g_{(2,1)}(x)\oplus h_{(p,p-3)}(x) = ((([g_{(2,1)}(x)\oplus h_{(p-4,0)}(x)]+x^*)+x)+x^*)+x =$$
$$g_{(p-2,p-4)}(x)\oplus[((x^*+x)+x^*)+x] = [((g_{(p-5,0)}(x)+x^*)+x)+x^*]\oplus[((x^*+x)+x^*)+x] =$$
$$((((((g_{(p-5,0)}(x)+x^*)+x)+x^*)+x^*)+x)+x^*)+x =$$
$$((((((g_{(p-5,0)}(x)+x)+x)+x)+x)+x)+x)+x = g_{(p+2,0)}(x).$$

Przypuśćmy teraz, że lemat jest prawdziwy dla $i$. Wówczas otrzymamy

$$g_{(k,1)}(x)\oplus h_{(p,r)}(x) = g_{(k,1)}(x)\oplus[g_{(r-1,0)}(x)\oplus h_{(p-r+1,1)}(x)] =$$
$$g_{(k+r-1,r-1)}(x)\oplus h_{(p-r+1,1)}(x) = [g_{(k+r-2,r-1)}(x)+x^*]\oplus[x^*\oplus h_{(p-r,2)}(x)] =$$
$$[(g_{(k+r-2,r-1)}(x)+x^*)+x^*]\oplus h_{(p-r,2)}(x) = [(g_{(k+r-2,r-1)}(x)+x)+x]\oplus h_{(p-r,2)}(x) =$$
$$g_{(k+r,r+1)}(x)\oplus h_{(p-r,2)}(x) = [g_{(r,0)}(x)\oplus h_{(k,1)}(x)]\oplus h_{(p-r,2)}(x) =$$
$$[(g_{(r,0)}(x)\oplus h_{(k-1,1)}(x))+x]\oplus[x\oplus h_{(p-r-1,1)}(x)] =$$
$$[g_{(r+2,0)}(x)\oplus h_{(k-1,1)}(x)]\oplus h_{(p-r-1,1)}(x) =$$
$$g_{(r+2,0)}(x)\oplus h_{(k-r-2,0)}(x) = g_{(k+p,0)}(x).$$

Wykazaliśmy zatem prawdziwość hipotezy dla $i+1$ w rozważanym przypadku.

Dowody dla pozostałych przypadków przebiegają podobnie, więc je pomijamy.

Ad 7. W tym przypadku i kolejnych trzech rozważamy tylko pierwszy podpunkt, ponieważ pozostałe można udowodnić tymi samymi metodami.
$g_{(k,1)}(x)\oplus h_{(p,r)}(x) = [g_{(k,1)}(x)\oplus h_{(r-1,0)}(x)]\oplus h_{(p-r+1,1)}(x) =$
$g_{(k+r-1,r-1)}(x)\oplus h_{(p-r+1,1)}(x) = [g_{(r-2,0)}(x)\oplus h_{(k+1,1)}(x)]\oplus h_{(p-r+1,1)}(x) =$
$[[[g_{(r-2,0)}(x)\oplus h_{(k-p+r+1,1)}(x)]\oplus h_{(p-r,1)}(x)]\oplus h_{(p-r,1)}(x)]+x =$
$[[g_{(r-2,0)}(x)\oplus h_{(k-p+r+1,1)}(x)]\oplus h_{(2p-2r,0)}(x)]+x =$

$[g_{(k-p+2r-1,r-1)}(x) \oplus h_{(2p-2r,0)}(x)] + x = g_{(k+p-1,2p-r-1)}(x) + x =$

$[g_{(k+p-2,2p-r-1)}(x) + x] + x = g_{(k+p,2p-r+1)}(x) = g_{(k+p,k+p-2|s|+2)}$

Ostatnia równość wynika z $|s| = \frac{k+2}{2} - \frac{p-r+1}{2}$.

Ad 8. $g_{(k,1)}(x) \oplus h_{(p,r)}(x) = [g_{(k,1)}(x) \oplus h_{(r-1,0)}(x)] \oplus h_{(p-r+1,1)}(x) =$

$g_{(k+r-1,r-1)}(x) \oplus h_{(p-r+1,1)}(x) = [g_{(r-2,0)}(x) \oplus h_{(k+1,1)}(x)] \oplus h_{(p-r+1,1)}(x) =$

$[[g_{(r-2,0)}(x) \oplus h_{(k+1,1)}(x)] \oplus h_{(k+1,1)}(x)] \oplus h_{(p-r-k,2)}(x)] =$

$[g_{(r-2,0)}(x) \oplus h_{(2k+2,0)}(x)] \oplus h_{(p-r-k,2)}(x) = g_{(2k+r,0)}(x) \oplus h_{(p-r-k,1)}(x) =$

$g_{(k+p,2k+r+2)}(x) = g_{(k+p,k+p-2|s|+1)}(x)$. W tym przypadku $|s| = \frac{p-r+1}{2} - \frac{k+2}{2}$.

Ad 9. $g_{(k,l)}(x) \oplus h_{(p,r)}(x) = [g_{(k,l)}(x) \oplus h_{(r-1,0)}(x)] \oplus h_{(p-r+1,1)}(x) =$

$g_{(k+r-1,l+r-1)}(x) \oplus h_{(p-r+1,1)}(x) =$

$[g_{(k-p,l+r-1)}(x) \oplus h_{(p-r+1,1)}(x)] \oplus h_{(p-r+1,1)}(x) =$

$g_{(k-p+2r-2,l+r-1)}(x) \oplus h_{(2p-2r+2,0)}(x) = g_{(k+p,2p-r+l+1)}(x) =$

$g_{(k+p,k+p-2|t|+1)}(x)$, gdzie $|t| = \frac{k-l+2}{2} - \frac{p-r+2}{2}$.

Ad 10. $g_{(k,l)}(x) \oplus h_{(p,r)}(x) = [g_{(k,l)}(x) \oplus h_{(r-1,0)}(x)] \oplus h_{(p-r+1,1)}(x) =$

$g_{(k+r-1,l+r-1)}(x) \oplus h_{(p-r+1,1)}(x) =$

$[[g_{(l+r-2,0)}(x) \oplus h_{(k-l+1,1)}(x)] \oplus h_{(k-l+1,1)}(x)] \oplus h_{(p-n+l-r,2)}(x) =$

$[g_{(l+r-2,0)}(x) \oplus h_{(2k-2l+2,0)}(x)] \oplus h_{(p-k+l-r,2)}(x) =$

$g_{(2k-l+r,0)}(x) \oplus h_{(p-k+l-r,2)}(x) = g_{(k+p,2k-l+r+2)}(x) = g_{(k+p,k+p-2|t|+2)}(x)$.

W tym przypadku $|t| = \frac{p-r+2}{2} - \frac{k-l+2}{2}$. ∎

Uogólniając Twierdzenie 23 otrzymujemy następujące:

**Twierdzenie 24** *Każde n-argumentowe działanie termowe w $^*$-łącznym grupoidzie przemiennym $(A, +, ^*)$ można sprowadzić do następującej postaci:*

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = (...(g_{(k_1,l_1)}(x_1) \oplus h_{(k_2,l_2)}(x_2)) \oplus ...) \oplus h_{(k_n,l_n)}(x_n),$$

*gdzie* $k_i, l_i \in \mathbb{N}_0$, $k_i \geq l_i$ *dla* $i = 1, ..., n$ *oraz* $k_1 + ... + k_n \neq 0$. □

Biorąc pod uwagę tabelę 3.4 przedstawiającą działanie binarne w algebrze działań termowych jednoargumentowych grupoidu $^*$-łącznego indukującego półkratę oraz uwzględniając Lematy 9, 10 oraz 11 otrzymamy:

**Wniosek 9** *Dowolne n-arne działanie termowe w grupoidzie* $^*$*-łącznym indukującym półkratę można przekształcić do postaci:*

$$f(x_1, ..., x_n) = (...(x_{k_1}^{i_1} + x_{k_2}^{i_2}) + ...) + x_{k_p}^{i_p} \tag{3.11}$$

*dla pewnych* $0 \leq k_1 \leq ... \leq k_p \leq n$ *oraz* $i_r \in \{0, 1, 2\}$ $(r = 1, ..., p)$, *gdzie* $x^0 = x^*$, $x^1 = x$, $x^2 = x + x^*$.

*Jeśli w grupoidzie tym spełniony jest dodatkowo warunek* $(\forall x \in A)\ x + x^* = a$, *to w postaci* (3.11) *mamy* $i_r \in \{0, 1\}$ $(r = 1, ..., p)$.

## 3.3 $Q$-niezależność w półkratach.

W rozważanych $^*$-łącznych grupoidach retrakt $g(A) = P_A$ jest półkratą, zatem aby zastosować Twierdzenie 2 konieczne jest zbadanie rodzin zbiorów $Q$-niezależnych w półkratach. Przedstawione w tym rozdziale twierdzenia dla półkrat górnych na zasadzie dualności odnoszą się oczywiście również do półkrat dolnych.

$M$-niezależność w tych algebrach badał G. Szász w [42].

**Twierdzenie 25** *Niech* $\mathfrak{L} = (L; \vee)$ *będzie półkratą górną. Zbiór* $X \subseteq L$ *jest* $M$*-niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdych parami różnych* $a_1, ..., a_r \in X$ *mamy*

$$a_r \nleq a_1 \vee ... \vee a_{r-1}.$$

□

K. Golema-Hartman wykazała (por. [21], [22]), że $X \in Ind_t(\mathfrak{L})$ wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie elementy zbioru $X$ są parami nieporównywalne.

Oczywiście $Ind(\mathfrak{L}, A_1) = 2^L$.

Opiszemy teraz pozostałe, omawiane przez nas, rodziny zbiorów $Q$-niezależnych w półkratach.

Zauważmy najpierw, że każde działanie termowe w półkracie można jednoznacznie przedstawić w postaci

$$f(x_1, ..., x_n) = x_{i_1} \vee ... \vee x_{i_s}$$

dla pewnych $1 \leq i_1 \leq .... \leq i_s \leq n$.

**Twierdzenie 26** *Niech $\mathfrak{L} = (L; \vee)$ będzie półkratą górną oraz $Q = S_0, S$ lub $G$. Wówczas*

$$Ind(\mathfrak{L}, M) = Ind(\mathfrak{L}, Q).$$

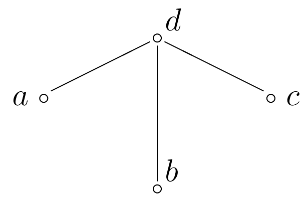
**Dowód.** Dowód można przeprowadzić analogicznie do dowodu Twierdzenia 4. Rozważamy wówczas działania termowe $f(x_1, ..., x_r) = x_1 \vee ... \vee x_{r-1} \vee x_r$, $g(x_1, ..., x_r) = x_1 \vee ... \vee x_{r-1}$ oraz odwzorowanie $p(x) = \begin{cases} a_1 & \text{dla } x \neq a_r; \\ a_r & \text{dla } x = a_r. \end{cases}$

Oczywiście w półkratach wszystkie odwzorowania są zmniejszające, ponieważ jedynym działaniem termowym jednoargumentowym jest działanie tożsamościowe.

■

Zauważmy teraz, że rodziny zbiorów $M$-niezależnych oraz $I$-niezależnych w półkracie górnej nie muszą być jednakowe.

**Przykład.**




W przedstawionej półkracie mamy $a \vee b = a \vee b \vee c$. Z Twierdzenia 25 wynika, że zbiór $\{a, b, c\}$ nie jest $M$-niezależny, gdyż $c \leq a \vee b$. Jest on natomiast $I$-niezależny, ponieważ suma dowolnych różnych elementów będzie zawsze równa elementowi $d$.

Przypadek ten można uogólnić. Półkratę $(L; \vee)$ nazywamy *niską*, jeśli posiada element największy, a pozostałe jej elementy są parami nieporównywalne. Z punktu widzenia teorii grafów zbiór częściowo uporządkowany tego typu można traktować jako graf drzewiasty, w którym tylko jeden wierzchołek ma stopień większy niż jeden (taki graf nazywany jest zwykle gwiazdą).

**Twierdzenie 27** *Niech $\mathfrak{L} = (L; \vee)$ będzie półkratą. Jeśli $\mathfrak{L}$ jest półkratą niską, to $X \subseteq L$ jest $I$-niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy jego elementy są parami nieporównywalne. W przeciwnym razie $Ind(\mathfrak{L}, M) = Ind(\mathfrak{L}, I)$.*

**Dowód.** Niech $\mathfrak{L}$ będzie półkratą oraz $X \in Ind(\mathfrak{L}, I)$. Załóżmy, że $a < b$ dla pewnych $a, b \in X$. Rozważając binarne działania termowe $f(x, y) = x \vee y$, $e_2^2(x, y) = y$ oraz różnowartościowe odwzorowanie $p : X \to L$ dane wzorami $p(a) = b$, $p(b) = a$, $p(x) = x$ dla $x \neq a, b$, otrzymamy sprzeczność. Zatem wszystkie elementy zbioru $I$-niezależnego w półkracie muszą być parami nieporównywalne.

Przypuśćmy teraz, że $\mathfrak{L}$ jest półkratą niską, wszystkie elementy zbioru $X \subseteq L$ są parami nieporównywalne oraz $f_1(a_1, ..., a_n) = g_1(a_1, ..., a_n)$ dla pewnych, różnych $a_1, ..., a_n \in X$ oraz $f_1, g_1 \in \mathbb{T}^{(n)}(\mathfrak{L})$. Z definicji półkraty niskiej wynika zatem $f_1(p(a_1), ..., p(a_n)) = g_1(p(a_1), ..., p(a_n))$ dla dowolnego różnowartościowego odwzorowania $p : X \to L$. Czyli $X \in Ind(\mathfrak{L}, I)$.

Załóżmy teraz, że $\mathfrak{L}$ nie jest półkratą niską, $X \in Ind(\mathfrak{L}, I)$ oraz $X \notin Ind(\mathfrak{L}, M)$. Z Twierdzenia 25 otrzymujemy $b_r \leq b_1 \vee ... \vee b_{r-1}$ dla pewnych, parami różnych $b_1, ..., b_r \in X$. Stąd $b_1 \vee ... \vee b_{r-1} = b_1 \vee ... \vee b_{r-1} \vee b_r$. Rozważmy następujące działania termowe: $f_2(x_1, ..., x_r) = x_1 \vee ... \vee x_{r-1}$ oraz $g_2(x_1, ..., x_r) = x_1 \vee ... \vee x_{r-1} \vee x_r$. Oczywiście $f_2(b_1, ..., b_r) = g_2(b_1, ..., b_r)$. Zdefiniujmy odwzorowanie $p_1$ następująco:

$$p_1(x) = \begin{cases} b_2 \vee b_3 & \text{dla } x = b_1; \\ x & \text{dla } x \neq b_1. \end{cases}$$

Wykazaliśmy wcześniej, że elementy zbioru $I$-niezależnego muszą być parami nieporównywalne, zatem powyższe odwzorowanie jest różnowartościowe. Co implikuje $f_2(p_1(b_1), ..., p_1(b_r)) = g_2(p_1(b_1), ..., p_1(b_r))$. Stąd mamy $b_2 \vee ... \vee b_{r-1} = b_2 \vee ... \vee b_{r-1} \vee b_r$. Po $r - 3$ takich krokach otrzymamy $b_{r-2} \vee b_{r-1} = b_{r-2} \vee b_{r-1} \vee b_r$. Rodzina zbiorów $I$-niezależnych jest dziedziczna zatem $\{b_{r-2}, b_{r-1}, b_r\} \in Ind(\mathfrak{L}, I)$. Ponieważ rozważana półkrata nie jest niska, więc istnieją różne elementy $c_1, c_2 \in L$ takie, że $c_1 \vee c_2 \neq b_{r-2} \vee b_{r-1}$.

Przypuśćmy najpierw, że $c_1 \vee c_2 > b_{r-2} \vee b_{r-1}$. Rozważając odwzorowanie różnowartościowe $p_2(b_i) = \begin{cases} b_i & \text{dla } i \neq r; \\ c_1 \vee c_2 & \text{dla } i = r \end{cases} \quad (i = r-2, r-1, r)$, otrzymamy $b_{r-2} \vee b_{r-1} = b_{r-2} \vee b_{r-1} \vee c_1 \vee c_2$, a stąd $b_{r-2} \vee b_{r-1} = c_1 \vee c_2$, co przeczy założeniu.

Załóżmy teraz, że $c_1 \vee c_2 \not> b_{r-2} \vee b_{r-1}$. W tym przypadku odwzorowanie

$$p_3(b_i) = \begin{cases} c_i & \text{dla } i = r-2, r-1; \\ b_{r-2} \vee b_{r-1} & \text{dla } i = r; \end{cases} \quad (i = r-2, r-1, r)$$

jest różnowartościowe. Korzystając z $I$-niezależności rozważanego zbioru uzyskamy $c_1 \vee c_2 = c_1 \vee c_2 \vee b_{r-2} \vee b_{r-1}$. Wobec tego $c_1 \vee c_2 > b_{r-2} \vee b_{r-1}$, sprzeczność.

Reasumując $X \in Ind(\mathfrak{L}, M)$. ■

## 3.4 $Q$-niezależność w pewnych grupoidach $^*$-łącznych.

Łatwo zauważyć, że w grupoidzie $^*$-łącznym indukującym półkratę $\mathfrak{A} = (A; +,^*)$ mamy $O(a) = \omega$ (czyli element $a$ jest *beztorsyjny*) wtedy i tylko wtedy, gdy $a \notin P_A$. A także $O(a) = \iota$ wtedy i tylko, gdy $a \in P_A$. Ponadto

**Lemat 12** *$p$ jest odwzorowaniem zmniejszającym grupoidu indukującego półkratę $(A; +,^*)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p(a) \in P_A$ dla każdego $a \in P_A$.* □

Z Twierdzenia 2(a) wynika

**Lemat 13** *Niech $\mathfrak{A} = (A; +,^*)$ będzie grupoidem $^*$-łącznym indukującym półkratę. Wówczas dla każdego $a \in A$ mamy*

*(i)* $\{a\} \in Ind(\mathfrak{A}, M) \Leftrightarrow \{a\} \in Ind(\mathfrak{A}, I) \Leftrightarrow \{a\} \in Ind_t(\mathfrak{A}) \Leftrightarrow a \notin P_A$;

*(ii)* $\{a\} \in Ind(\mathfrak{A}, Q)$ *dla* $Q = S, S_0, G$. □

**Twierdzenie 28** *Niech $\mathfrak{A}_c = (A; +,^*)$ będzie grupoidem $^*$-łącznym indukującym półkratę spełniającym warunek $(\exists c \in A)\ (\forall x \in A)\ [x + x^* = c]$. Dla dowolnego $X \subseteq A$ następujące warunki są równoważne:*

$(\alpha)$ $X \in Ind(\mathfrak{A}_c, M)$;

($\beta$) $X \in Ind(\mathfrak{A}_c, S)$;

($\gamma$) $(...(b_1^{i_1} + b_2^{i_2}) + ...) + b_n^{i_n} \neq c$ *dla każdych parami różnych* $b_1, ..., b_n \in X$ *oraz* $i_k \in \{0,1\}$ $(k = 1, ..., n)$.

*Ponadto* $X \in Ind(\mathfrak{A}_c, G) \Leftrightarrow X \setminus \{c\} \in Ind(\mathfrak{A}_c, M)$.

**Dowód.** Wobec (1.1) implikacja ($\alpha \Rightarrow \beta$) jest oczywista.

Przypuśćmy zatem, że $X \in Ind(\mathfrak{A}_c, S)$ oraz $(...(b_1^{i_1} + b_2^{i_2}) + ...) + b_n^{i_n} = c$ dla pewnych parami różnych $b_1, ..., b_n \in X$, $i_k \in \{0,1\}$ $(k = 1, ..., n)$. Rozważmy odwzorowanie $p : X \to \langle X \rangle_{\mathfrak{A}_c}$ zdefiniowane wzorami:

$$p(b_k) = \begin{cases} b_2 & \text{dla } i_k = 1; \\ b_2^* & \text{dla } i_k = 0; \end{cases} \quad \text{dla} \;\; k = 1, 2 \;\; \text{oraz} \;\; p(x) = x \;\; \text{dla} \;\; x \neq b_1, b_2$$

oraz działania termowe $f_1(x_1, ..., x_n) = (...(x_1^{i_1} + x_2^{i_2}) + ...) + x_n^{i_n}$, $f_2(x_1, ..., x_n) = c$. Korzystając z $S$-niezależności zbioru $X$ otrzymamy $(...(b_2 + b_2) + ...) + b_n^{i_n} = c$. Stąd $(...(b_2^* + b_3^{i_3}) + ...) + b_n^{i_n} = c$. Po skończonej liczbie takich kroków otrzymamy $b_n^* = c$, czyli $b_n = c$. Jeśli zastosujemy własność (3.9), to w analogiczny sposób możemy otrzymać $b_k = c$ dla każdego $k = 1, ..., n$. Wbrew założeniu.

Przypuśćmy teraz, że zbiór $X \subseteq A$ spełnia warunek ($\gamma$) oraz
$f_1(b_1, ..., b_n) = f_2(b_1, ..., b_n)$ dla pewnych różnych $f_1, f_2 \in \mathbb{T}^{(n)}(\mathfrak{A}_c)$, $b_1, ..., b_n \in X$.
Na mocy Wniosku 9 mamy
$f_1(x_1, ..., x_n) = (...(x_{k_1}^{i_1} + x_{k_2}^{i_2}) + ...) + x_{k_p}^{i_p}$, $f_2(x_1, ..., x_n) = (...(x_{l_1}^{j_1} + x_{l_2}^{j_2}) + ...) + x_{l_r}^{j_r}$
dla pewnych, różnych podciągów $0 \leq k_1 \leq ... \leq k_p \leq n$; $0 \leq l_1 \leq ... \leq l_r \leq n$ oraz $i_1, ..., i_p, j_1, ..., j_r \in \{0,1\}$. Zatem

$$(...(b_{k_1}^{i_1} + b_{k_2}^{i_2}) + ...) + b_{k_p}^{i_p} = (...(b_{l_1}^{j_1} + b_{l_2}^{j_2}) + ...) + b_{l_r}^{j_r}.$$

Ponieważ $f_1 \neq f_2$, więc istnieją liczby $s$ i $t$ takie, że $l_t \notin \{k_1, ..., k_{s-1}, k_{s+1}, ..., k_p\}$ oraz $(b_{k_s}^{i_s})^{\chi(p-s)} \neq (b_{l_t}^{j_t})^{\chi(r-t)}$. Wówczas, stosując własność (3.9), otrzymamy

$(...(b_{k_1}^{i_1} + b_{k_2}^{i_2}) + ...) + b_{k_{s-1}}^{i_{s-1}}) + b_{k_{s+1}}^{i'_{k+1}}) + ...) + b_{k_p}^{i'_p}) + (b_{k_s}^{i_s})^{\chi(p-s)} =$
$= (...(b_{l_1}^{j_1} + b_{l_2}^{j_2}) + ...) + b_{l_{t-1}}^{j_{t-1}}) + b_{l_{t+1}}^{j'_{t+1}}) + ...) + b_{l_r}^{j'_r}) + (b_{l_t}^{j_t})^{\chi(r-t)}$ . Dodając do obu stron równania $(b_{k_s}^{i_s})^{\chi(p-s)}$ i korzystając z własności (3.4) mamy
$[(...(b_{k_1}^{i_1} + b_{k_2}^{i_2}) + ...) + b_{k_{s-1}}^{i_{s-1}}) + b_{k_{s+1}}^{i'_{k+1}}) + ...) + b_{k_p}^{i'_p}]^* + [(b_{k_s}^{i_s})^{\chi(p-s)} + ((b_{k_s}^{i_s})^{\chi(p-s)})^*] =$
$= [(...(b_{l_1}^{j_1} + b_{l_2}^{j_2}) + ...) + b_{l_{t-1}}^{j_{t-1}}) + b_{l_{t+1}}^{j'_{t+1}}) + ...) + b_{l_r}^{j'_r}]^* + [(b_{l_t}^{j_t})^{\chi(r-t)} + ((b_{k_s}^{i_s})^{\chi(p-s)})^*].$
Stąd $c = [(...(b_{l_1}^{j_1} + b_{l_2}^{j_2}) + ...) + b_{l_r}^{j_r}] + (b_{k_s}^{i_s})^{\chi(p-s)}$, jeśli $l_t \neq k_s$.
W przypadku, gdy $l_t = k_s$ mamy $\chi(r-t) = \chi(p-s) + 1 (\mathrm{mod}\ 2)$. Wówczas
$c = [(...(b_{l_1}^{j_1} + b_{l_2}^{j_2}) + ...) + b_{l_{t-1}}^{j_{t-1}}) + b_{l_{t+1}}^{j'_{t+1}}) + ...) + b_{l_r}^{j'_r}]^* + [(b_{l_t}^{j_t})^{\chi(r-t)} + (b_{l_t}^{j_t})^{\chi(r-t)}] =$
$= [(...(b_{l_1}^{j_1} + b_{l_2}^{j_2}) + ...) + b_{l_{t-1}}^{j_{t-1}}) + b_{l_{t+1}}^{j'_{t+1}}) + ...) + b_{l_r}^{j'_r}]^* + [(b_{l_t}^{j_t})^{\chi(r-t)}]^* =$
$= [(...(b_{l_1}^{j'_1} + b_{l_2}^{j'_2}) + ...) + b_{l_{t-1}}^{j'_{t-1}}) + b_{l_{t+1}}^{j_{t+1}}) + ...) + b_{l_r}^{j_r}] + (b_{l_t}^{j'_t})^{\chi(r-t)} =$
$[(...(b_{l_1}^{j'_1} + b_{l_2}^{j'_2}) + ...) + b_{l_{t-1}}^{j'_{t-1}}) + b_{l_t}^{j'_t}) + b_{l_{t+1}}^{j_{t+1}}) + ...) + b_{l_r}^{j_r}]$. W obu tych przypadkach otrzymujemy sprzeczność z założeniem. Czyli $X \in Ind(\mathfrak{A}_c, M)$.

Z własności (1.4) mamy $X \in Ind(\mathfrak{A}_c, G) \Leftrightarrow X \backslash \{c\} \in Ind(\mathfrak{A}_c, G)$. W rozważanej algebrze $P_A = \{c\}$, czyli wszystkie elementy zbioru $X \setminus \{c\}$ są beztorsyjne, zatem na mocy własności (1.4) i (1.7) otrzymujemy $X \setminus \{c\} \in Ind(\mathfrak{A}_c, G) \Leftrightarrow X \setminus \{c\} \in Ind(\mathfrak{A}_c, M)$. ■

Z Twierdzenia 2(d) wynika, że szukając zbiorów $M$ oraz $I$-niezależnych musimy wybierać elementy spośród różnych klas $F_a$. To samo dotyczy $S$ oraz $S_0$-niezależności, jeśli dany zbiór nie zawiera się w pewnej klasie (Twierdzenie 2(e)). W grupoidach implikujących półkraty własność ta dotyczy również $G$-niezależności.

**Wniosek 10** *Niech* $\mathfrak{A} = (A; +, ^*)$ *będzie grupoidem implikującym półkratę oraz* $b_1, b_2 \in F_a$ *dla pewnego* $a \in P_A$. *Wówczas* $\{b_1, b_2\} \notin Ind(\mathfrak{A}, G)$.

Istotnie, w każdej klasie $F_a$ jest dokładnie jeden element z $P_A$. Zatem, możemy przeprowadzić dowód analogiczny do dowodu Twierdzenia 2(d), przyjmując za $a$ ewentualny element z $P_A$. Wówczas zdefiniowane we wspomnianym dowodzie odwzorowanie $p_1$ będzie zmniejszające, na mocy Lematu 12. ■

Natomiast zbiory złożone z elementów pewnej klasy abstrakcji mogą być zbiorami $t$-niezależnymi w rozważnych algebrach.

**Przykład 5'.** W grupoidzie implikującym półkratę rozważanym w Przykładzie 5 zbiór $\{g, k\} \subseteq F_o$ jest $t$-niezależny. Ponadto w rozważanej algebrze zbiór $\{c, e\}$ należy do rodziny zbiorów $G$-niezależnych, chociaż $c \in g(A)$ i $e \notin g(A)$. Wynika stąd, że Twierdzenie 2(f) nie jest prawdziwe dla $G$-niezależności.

Na mocy Twierdzenia 2(b) kolejnym warunkiem koniecznym dla $M$-niezależności zbioru $X$ jest $g(X) \in Ind(g(\mathfrak{A}), M)$. Wykażemy, że w przypadku grupoidów implikujących półkraty implikacja ta jest prawdziwa również dla $S$, $S_0$ oraz $G$-niezależności.

Oznaczmy przez $X_P = \{x + x^* \mid x \in X\} = g(X)$.

**Twierdzenie 29** *Niech $\mathfrak{A} = (A; +, ^*)$ będzie grupoidem implikującym półkratę, $X \subseteq A$ oraz $|X| > 1$. Jeśli $X \in Ind(\mathfrak{A}, Q)$, to $X_P \in Ind(\mathfrak{P}_A, Q)$ dla $Q = S, S_0, G$ oraz $I$.*

**Dowód.** Przypuśćmy, że $X \subseteq A$, $|X| > 1$ oraz $X_P \notin Ind(\mathfrak{P}_A, Q)$ dla $Q = S, S_0, G$. Zgodnie z Twierdzeniami 25 i 26 w półkracie $\mathfrak{P}_A$ zachodzi $g(b_1) + g(b_2) + ... + g(b_{n-1}) = g(b_1) + g(b_2) + ... + g(b_{n-1}) + g(b_n)$ dla pewnych, parami różnych $g(b_1), ..., g(b_n) \in X_P$. Stąd

$$\begin{gathered}(...((b_1 + b_1^*) + (b_2 + b_2^*)) + ...) + (b_{n-1} + b_{n-1}^*) = \\ (...((b_1 + b_1^*) + (b_2 + b_2^*)) + ...) + (b_{n-1} + b_{n-1}^*)) + (b_n + b_n^*).\end{gathered} \tag{3.12}$$

Zdefiniujmy następujące działania termowe

$f_1(x_1, ...x_n) = (...((x_1 + x_1^*) + (x_2 + x_2^*)) + ...) + (x_{n-1} + x_{n-1}^*)$,

$g_1(x_1, ...x_n) = (...((x_1 + x_1^*) + (x_2 + x_2^*)) + ...) + (x_{n-1} + x_{n-1}^*)) + (x_n + x_n^*)$.

Zakładając, że $X \in Ind(\mathfrak{A}, S_0)$ oraz rozważając odwzorowanie

$$p_1(x) = \begin{cases} b_1 & \text{dla } x \neq b_n; \\ b_n & \text{dla } x = b_n. \end{cases}$$

otrzymamy $g(b_1) = g(b_1) + g(b_n)$, a stąd, wykorzystując $S_0$-niezależność zbioru $X$, można łatwo wykazać, że $g(b_1) = g(b_n)$, co przeczy założeniu.

Wobec (1.2) oraz Twierdzenia 26 rozważana implikacja jest prawdziwa również dla $S$-niezależności.

Jeśli $b_i \notin P_A$ $(i = 1, .., n)$, to odwzorowanie $p_1$ jest zmniejszające. W przeciwnym razie wystarczy w definicji odwzorowania $p_1$ w miejsce $b_1$ wziąć dowolny element, który należy do $P_A$. Zatem implikacja ta jest prawdziwa również dla $G$-niezależności.

Przypuśćmy teraz, że $X \in Ind(\mathfrak{A}, I)$ oraz $X_P \notin Ind(\mathfrak{P}_A, I)$. Na mocy Twierdzenia 2(a) odwzorowanie

$$p_2(x) = \begin{cases} b_2 + b_2^* & \text{dla } x = b_1; \\ x & \text{dla } x \neq b_1 \end{cases}$$ jest różnowartościowe, ponieważ $X \cap P_A = \emptyset$.

Jeśli półkrata $\mathfrak{P}_A$ nie jest niska, to z Twierdzenia 27 mamy $X_P \notin Ind(\mathfrak{P}_A, M)$. Możemy zatem przeprowadzić analogiczne do powyższego rozumowanie otrzymując z warunku (3.12) równość

$$(...((b_2 + b_2^*) + ...) + (b_{n-1} + b_{n-1}^*) = (...((b_2 + b_2^*) + ...) + (b_{n-1} + b_{n-1}^*)) + (b_n + b_n^*).$$

Po skończonej liczbie takich kroków uzyskamy $g(b_{n-1}) = g(b_{n-1}) + g(b_n)$, co implikuje $g(b_{n-1}) = g(b_n)$, wbrew założeniu.

W przypadku, gdy półkrata $\mathfrak{P}_A$ jest niska, z założenia wynika, że w zbiorze $X_P$ istnieją conajmniej dwa elementy porównywalne ze sobą. Zatem mamy warunek (3.12) dla $n = 2$. Wówczas, wykorzystując $I$-niezależnośc zbioru $X$, łatwo wykazać sprzeczność. ■

Z Twierdzenia 2(c) i Twierdzenia 29 otrzymujemy natychmiast następujący:

**Wniosek 11** *Niech* $\mathfrak{A} = (A; +, ^*)$ *będzie grupoidem indukującym półkratę. Wówczas*

$$(\forall X \subseteq P_A)\ [X \in Ind(\mathfrak{A}, Q) \Leftrightarrow X \in Ind(\mathfrak{P}_A, Q)]$$

*dla* $Q = S, S_0$ *oraz* $G$.

## 3.5 Quasigrupy $^*$-łączne.

Grupoid $^*$-łączny $(A; +, ^*)$ nazywamy *quasigrupą $^*$-łączną*, jeśli $(A; +)$ jest quasigrupą.

Rozważmy grupoid $^*$-łączny $(A; +, ^*)$ spełniający następujące warunki:

$$(\exists \varepsilon \in A)\ (\forall a \in A) \quad \varepsilon + a = a^*, \tag{3.13}$$

$$(\forall a \in A)\ (\exists b \in A) \quad b + a = \varepsilon, \tag{3.14}$$

gdzie $\varepsilon$ jest elementem spełniającym warunek (3.13).

Wykażemy, że tak zdefiniowany grupoid jest quasigrupą.

**Lemat 14** *Niech* $(A; +, ^*)$ *będzie grupoidem $^*$-łącznym oraz* $\varepsilon \in A$ *spełnia warunek* (3.13). *Wówczas* $\varepsilon \in P_A$, $\varepsilon$ *należy do centrum algebry* $A$ *oraz jest jednoznacznie określony.*

**Dowód.** Wykażemy najpierw, że $\varepsilon = \varepsilon^*$. Z warunku (3.13) oraz aksjomatów (3.1), (3.2) wynika, że $x^* + \varepsilon^* = x$ dla wszystkich $x \in A$. Podstawiając $y$ w miejsce $x^*$ (ponieważ $^*$ jest "na" $A$), otrzymujemy $y + \varepsilon^* = y^*$ dla każdego $y \in A$. Stąd $\varepsilon + \varepsilon^* = \varepsilon^*$, a z warunku (3.13) $\varepsilon + \varepsilon^* = (\varepsilon^*)^* = \varepsilon$. Czyli $\varepsilon = \varepsilon^*$. Zatem

$$(\exists \varepsilon \in A)\ (\forall a \in A) \quad a + \varepsilon = a^* = \varepsilon + a. \tag{3.15}$$

Element $\varepsilon$ komutuje ze wszystkimi elementami zbioru $A$, zatem należy do centrum rozważanej algebry. Co wiecej, $\varepsilon + \varepsilon = \varepsilon = \varepsilon^*$. Zauważmy, że element $\varepsilon$ jest jednoznacznie określony. Rzeczywiście, niech $\varepsilon$, $\varepsilon'$ spełniają (3.13), wówczas, korzystając z warunku (3.15), mamy $\varepsilon = \varepsilon^* = \varepsilon + \varepsilon' = (\varepsilon')^* = \varepsilon'$. ■

**Lemat 15** *Niech* $(A; +, ^*)$ *będzie grupoidem* $^*$*-łącznym spełniającym warunki* (3.13) *i* (3.14). *Jeśli* $a, b \in A$ *i* $b + a = \varepsilon$, *to* $b$ *jest jednoznacznie określony oraz* $a + b = \varepsilon$.

**Dowód.** Dla dowolnego $a \in A$ istnieje $b \in A$ spełniające warunek $b+a = \varepsilon$. Również dla elementu $b$ mamy $c + b = \varepsilon$ przy pewnym $c \in A$. Wówczas

$$c^* = c + \varepsilon = c + \varepsilon^* = c + (b + a)^* = (c + b)^* + a = \varepsilon^* + a = \varepsilon + a = a^*.$$

Stąd $a = c$, ponieważ odwzorowanie $x \mapsto x^*$ jest różnowartościowe. Zatem

$$(\forall a \in A)\ (\exists b \in A) \quad b + a = \varepsilon = a + b. \tag{3.16}$$

Wykażemy teraz, że element $b$ z warunku (3.14) jest jednoznacznie wyznaczony przez $a$. Niech $b_1$, $b_2$ spełniają (3.14). Wtedy

$$b_1^* = \varepsilon + b_1 = \varepsilon^* + b_1 = (b_2 + a)^* + b_1 = b_2 + (a + b_1)^* = b_2 + \varepsilon = b_2^*,$$

a więc $b_1 = b_2$. ■

**Twierdzenie 30** *Niech* $\mathfrak{A} = (A; +, ^*)$ *będzie grupoidem* $^*$*-łącznym. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(1) $\mathfrak{A}$ *spełnia* (3.13) *oraz* (3.14);

(2) $(A; +)$ *jest quasigrupą.*

**Dowód.** Przypuśćmy, że algebra $\mathfrak{A}$ spełnia warunki (3.13) i (3.14). Udowodnimy, że dla dowolnych $a, b \in A$ równania $a+x = b$, $y+a = b$ mają jednoznaczne rozwiązania.

Załóżmy, że $a+x=b$. Zatem $(a+x)^* = b^*$. Z Lematu 15 wynika, że istnieje dokładnie jedno $c$ takie, że $c+a=\varepsilon$. Stąd $c+(a+x)^* = c+b^*$, a także $(c+a)^*+x = c+b^*$. Czyli $\varepsilon^* x = cb^*$. Na mocy Lematu 14 mamy $\varepsilon + x = c + b^*$. Stosując (3.13) uzyskujemy $x^* = c + b^*$. Co implikuje $x = b + c^*$. Podobnie można wykazać, że $y = d^* + b$ dla pewnego elementu $d \in A$ jednoznacznie wyznaczonego przez $a$.

Przypuśćmy teraz, że $(A;+)$ jest quasigrupą. Dla ustalonego elementu $a \in A$ istnieje $\varepsilon_a$ takie, że $\varepsilon_a + a = a^*$, ponieważ $(A,+)$ jest quasigrupą. Należy wykazać, że dla każdego $b \in A$ mamy $\varepsilon_a + b = b^*$. Weźmy zatem $b \in A$. Oczywiście $c + a^* = b$ dla pewnego $c \in A$. Stąd $(\varepsilon_a + b)^* = b^* + \varepsilon_a^* = (c + a^*)^* + \varepsilon_a^* = c + (a^* + \varepsilon_a^*)^* = c + (\varepsilon_a + a) = c + a^* = b$. W konsekwencji otrzymujemy $\varepsilon_a + b = b^*$, czyli grupoid $\mathfrak{A}$ spełnia warunek (3.13).

Rozważmy teraz równanie $x + a = \varepsilon$. Ma ono jednoznaczne rozwiązanie, zatem w algebrze $(A;+,^*)$ zachodzi warunek (3.14). ■

**Przykłady.**

**1)** Rozważmy zbiór $A = \{\varepsilon, a, b, c\}$ wraz działaniem binarnym $\oplus$ zdefiniowanym Tabelą 3.5 oraz z inwolucją $^*$ taką, że $\varepsilon = \varepsilon^*$, $a^* = b$, $c^* = c$.

| $\oplus$ | $\varepsilon$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|
| $\varepsilon$ | $\varepsilon$ | $b$ | $a$ | $c$ |
| $a$ | $b$ | $\varepsilon$ | $c$ | $a$ |
| $b$ | $a$ | $c$ | $\varepsilon$ | $b$ |
| $c$ | $c$ | $a$ | $b$ | $\varepsilon$ |

Tabela 3.5:

Wówczas $(A;+,^*,\varepsilon)$ jest quasigrupą $^*$-łączną.

**2)** Algebra $(Z;\oplus,^*)$, gdzie $x \oplus y = -(x+y)+3a$ (dla ustalonego $a \in Z$) oraz $x^* = -x+2a$ jest quasigrupą $^*$-łączną.

Ponadto grupoid $^*$-łączny $(H_0,\oplus,^*)$ zdefiniowany w rozdziale 3.1 (Przykład 2, strona 43) oraz grupoidy opisane w Przykładach 3,4 (strona 44) tegoż rozdziału są również quasigrupami $^*$-łącznymi.

Kolejne przykłady quasigrup $^*$-łącznych otrzymamy, gdy w grupoidzie $^*$-łącznym $(A;+,^*)$ istnieje idempotent $e$. Możemy wówczas zdefiniować zbiór $Q_e$ w następujący sposób:

$$Q_e = \{a \in A \mid e+a = a+e = a^*,\ a+b = b+a = e \text{ dla pewnego } b \in A\}.$$

**Twierdzenie 31** *Niech* $\mathfrak{A} = (A;+,^*)$ *będzie grupoidem* $^*$*-łącznym. Wówczas* $(Q_e;+,^*)$ *jest quasigrupą* $^*$*-łączną oraz*

$$Q_e = \{a \in A \mid\ a^* \in (e+A)\cap(A+e),\ e \in (a+A)\cap(A+a)\}.$$

**Dowód.** Udowodnimy najpierw, że $Q_e$ jest podalgebrą algebry $\mathfrak{A}$. Niech $a \in Q_e$. Wtedy $a+e = e+a = a^*$ oraz $a+b = b+a = e$ dla pewnego $b \in A$. Zatem $e+a^* = (a+e)^* = (a^*)^* = a = a^*+e$, $a^*+b^* = (b+a)^* = e = b^*+a^*$. Co implikuje $a^* \in Q_e$.

Przypuśćmy teraz, że $a, b \in Q_e$. Stąd $a+c = c+a = e$ oraz $b+d = d+b = e$ dla pewnych $c, d \in A$. Wówczas

$$e+(a+b)^* = (e+a)^*+b = a^{**}+b = a+b,\ (a+b)^*+e = a+(b+e)^* = a+b,$$
$$(a+b)^*+(d+c)^* = a+(b+(d+c)^*)^* = a+((b+d)^*+c)^* = a+(e+c)^* =$$
$$(a+e)^*+c = a+c = e = (d+c)^*+(a+b)^*.$$

Tak więc $(a+b)^* \in Q_e$, co implikuje $a+b \in Q_e$.

Aby udowodnić, że $Q_e \supseteq \{a \in A\ :\ a^* \in (e+A)\cap(A+e),\ e \in (a+A)\cap(A+a)\}$, przypuśćmy, że $a^* \in (e+A)\cap(A+e)$ oraz $e \in (a+A)\cap(A+e)$. Zatem

$a^* = e + p$, $a^* = q + e$, $e = a + r$ oraz $e = t + a$ dla pewnych $p, q, r, t \in A$. Stąd $e + a = e + (e + p)^* = (e + e)^* + p = e + p = a^*$. Analogicznie $a + e = a^*$.

Weźmy teraz $b = (t + e)^*$. Wtedy $t + e = t + e^* = t + (a + r)^* = (t + a)^* + r = e + r = (t + a) + r$. Czyli $(t + a) + r = b^* = t + (a + r)$, a stąd $a + b = a + ((t + a) + r)^* = a + (e + r)^* = (a + e)^* + r = a^{**} + r = a + r = e$. W podobny sposób możemy udowodnić, że $b + a = e$. W rezultacie otrzymamy $a \in Q_e$. ■

Niech $\mathfrak{A} = (A; +, ^*, \varepsilon)$ będzie quasigroupą $^*$-łączną. Dla dowolnego $a \in A$ oznaczmy przez $-a$ element spełniający warunek $a + (-a) = \varepsilon$. Piszemy $a - b$ w miejsce $a + (-b)$. W dalszych naszych rozważniach unarne działane $a \mapsto -a$ dodajemy do zbioru działań fundamentalnych algebry $\mathfrak{A}$.

**Twierdzenie 32** *Niech $(A; +, -, ^*, \varepsilon)$ będzie quasigrupą $^*$-łączną. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(1) $(\forall a \in A)\ a = a^*$;

(2) $(A; +, -, \varepsilon)$ *jest grupą przemienną.*

**Dowód.** (1) $\Rightarrow$ (2). W quasigrupie $^*$-łącznej zachodzi warunek (3.15). Z założenia wynika zatem $a + \varepsilon = a = \varepsilon + a$. Warunek (3.16) gwarantuje, że dla każdego elementu istnieje element przeciwny. Oczywiście + jest łączne i przemienne.
(2) $\Rightarrow$ (1). Konsekwencja Twierdzenia 18. ■

Udowodnimy teraz kilka prostych własności działań w quasigrupie $^*$-łącznej oraz $^*$-łącznej quasigrupie przemiennej.

**Lemat 16** *Niech $(A; +, -, ^*, \varepsilon)$ będzie quasigrupą $^*$-łączną. Wówczas dla dowolnych $a, b, c \in A$ mamy:*

*(a)* $(-a)^* = -(a^*)$;

*(b)* $-(a+b) = (-b) + (-a)$;

*(c)* $a = b \Leftrightarrow a - b = \varepsilon$;

*(d)* $a + b = c \;\Leftrightarrow\; a = -b^* + c \;\Leftrightarrow\; b = c - a^*$;

*(e)* $a + c = b + c \Rightarrow a = b$ *oraz* $c + a = c + b \Rightarrow a = b$.

**Dowód.** Ad. (b) $(a+b) + ((-b) + (-a)) = (a+b) + ((-a^*) + (-b^*))^* =$
$= ((a+b) + (-a^*))^* + (-b^*) = ((b^* + a^*)^* + (-a^*))^* + (-b^*) =$
$= (b^* + (a^* + (-a^*))^*)^* + (-b^*) = (b^* + \varepsilon)^* + (-b^*) = b^* + (-b^*) = \varepsilon.$

Proste dowody pozostałych własności pomijamy. ■

**Lemat 17** *Niech $(A; +, -, ^*, \varepsilon)$ będzie przemienną quasigrupą $^*$-łączną , $a \in A$ oraz $i = 0, 1$. Wówczas*

*(e)* $-(a - a^*) = (a - a^*)^*$,

*(f)* $a^i + (a - a^*) = a^i$,

*(g)* $(a + a^*) + (a - a^*)^i = a^i + a^i$. □

Opiszemy teraz ogólną postać działań termowych w $^*$-łącznych quasigrupach przemiennych. W tym celu zdefiniujmy $\mathbb{T}_1$ i $\mathbb{T}_2$ jako zbiory termów postaci $g_{(k,l)}(x)$ (wzór (3.10)) spełniających odpowiednio następujące warunki:

1) $l = 0$ dla $k = 2$; $l = 1$ dla $k$ nieparzystych; $l = 3$ dla $k > 2$ i $k$ parzystych;

2) $l = 0$ dla $k = 1$; $l = 1$ dla $k$ parzystych; $l = 3$ dla $k > 1$ i $k$ nieparzystych.

Oznaczmy

$$f_{(k,l,m,n)}(x) = g_{(k,l)}(x) + g_{(m,n)}(x - x^*), \tag{3.17}$$

gdzie $k, l, m, n \in N_0$, $g_{(0,0)}(x) = \varepsilon$ oraz jeśli $m \neq 0$, to

$$[g_{(k,l)}(x) \in \mathbb{T}_1 \text{ i } g_{(m,n)}(x) \in \mathbb{T}_2] \text{ lub } [g_{(k,l)}(x) \in \mathbb{T}_2 \text{ i } g_{(m,n)}(x) \in \mathbb{T}_1].$$

**Twierdzenie 33** *Każde unarne działanie termowe w $^*$-łącznej quasigrupie przemiennej $(A; +, -,^*, \varepsilon)$ można przekształcić do postaci $\pm f_{(k,l,n,m)}(x)$.*

**Dowód.** Oczywiście każda $^*$-łączna quasigrupa jest również $^*$-łącznym grupoidem. Na mocy Twierdzenia 23 działania termowe postaci $g_{(k,l)}(x)$, a także $-g_{(k,l)}(x)$ należą do zbioru działań termowych $^*$-łącznej quasigrupy przemiennej. Z własności (3.5) oraz Lematu 16(a) i (b) wynika, że $g_{(k,l)}(x) \pm g_{(m,n)}(x - x^*)$ oraz $-g_{(k,l)}(x) \pm g_{(m,n)}(x - x^*)$ również do niego należą. Na mocy Lematu 17(a) są one równoważne z $\pm[g_{(k,l)}(x) + g_{(m,n)}(x - x^*)] = \pm f_{(k,l,n,m)}(x)$.

Rozważamy tylko działania termowe postaci $f_{(k,l,n,m)}(x)$, ponieważ dla działania termowego postaci $-f_{(k,l,n,m)}(x)$ dowód przebiega analogicznie. Dla $i = 0, 1$ zdefiniujmy $j = i + 1(\text{mod } 2)$.

Na początek zauważmy, że w przypadku $m \neq 0$ wystarczy rozpatrywać tylko działania termowe postaci $g_{(k,l)}(x)$ należące do $\mathbb{T}_1$ lub $\mathbb{T}_2$, ponieważ pozostałe można przekształcić do żądanej postaci: $\pm f_{(k',l',m',n')}(x)$.

Przypuśćmy zatem, że $l = 2$. Dla $k = 2$ otrzymamy $f_{(2,2,n,m)}(x) = (x + x^*) + g_{(m,n)}(x - x^*) = (x + x^*) + [g_{(m-1,n)}(x - x^*) + (x - x^*)^i] = [x^j + g_{(m-1,n)}(x - x^*)] + [x^i + (x - x^*)^i] = [x^j + g_{(m-1,n)}(x - x^*)] + x^i = (x^j + x^j) + g^*_{(m-1,n)}(x - x^*)$, gdzie $x^i + x^i = g_{(2,j)}(x) \in \mathbb{T}_1$ lub $\mathbb{T}_2$.

Dla $k > 2$ oraz $k$ parzystego mamy

$f_{(k,2,n,m)}(x) = g_{(k,2)}(x) + g_{(m,n)}(x - x^*) =$

$[(x + x^*) \oplus g_{(k-2,2)}(x)] + [g_{(m-1,n)}(x - x^*) + (x - x^*)^i] =$

$[((x^j \oplus g_{(k-2,2)}(x) + x^i] + [g_{(m-1,n)}(x - x^*) + (x - x^*)^i] =$

$[(x^i + (x - x^*)^i] + [(x^j \oplus g_{(k-2,2)}(x)) + g_{(m-1,n)}(x - x^*)] =$

$x^i + [(x^j \oplus g_{(k-2,2)}(x)) + g_{(m-1,n)}(x - x^*)] =$

$[x^j + (x^j \oplus g_{(k-2,2)}(x)] + g *_{(m-1,n)} (x - x^*) =$

$[(x^j + x^j) \oplus g_{(k-2,2)}(x)] + g *_{(m-1,n)} (x - x^*).$

Po skończonej liczbie podobnych kroków otrzymamy $f_{(k',l',m',n')}(x)$, gdzie $m' = 0$ lub $g_{(k',l')}(x)$ należą do $\mathbb{T}_1$ or $\mathbb{T}_2$. Zatem możemy przyjąć, że $l \neq 2$.

Oczywiście $(x + x) + x = (x + x^*) + x^*$ zatem, stosując powyższe metody uzyskujemy $l \leq 3$ dla $k \geq 3$. W konsekwencji, $g_{(k,l)}(x) \in \mathbb{T}_1$ lub $g_{(k,l)}(x) \in \mathbb{T}_2$.

Ponieważ $g_{(2,2)}(x - x^*) = (x - x^*) + (x - x^*)^* = \varepsilon$ oraz $g_{(3,0)}(x - x^*) = ((x - x^*) + (x - x^*)) + (x - x^*) = (x - x^*)$, więc term $g_{(m,n)}(x - x^*)$ należy do $\mathbb{T}_1$ lub $\mathbb{T}_2$.

Przypuśćmy teraz, że $g_{(k,l)}(x), g_{(m,n)}(x) \in \mathbb{T}_1$. Wówczas dla $k = 1, m = 1$ otrzymamy $f_{(1,1,1,1)}(x) = g_{(1,1)}(x) + g_{(1,1)}(x - x^*) = x^*$, z Lematu 17(b). Czyli możemy działanie termowe przekształcić do formy $f_{(k',l',n',m')}(x)$, gdzie $m' = 0$.

Dla $k = 1, m > 1$ otrzymamy $f_{(1,1,n,m)}(x) = g_{(1,1)}(x) + g_{(m,n)}(x - x^*) =$
$x^* + (g_{(m-1,n)}(x - x^*) + (x - x^*)) = (x + (x - x^*)) + g^*_{(m-1,n)}(x - x^*) =$
$x + g^*_{(m-1,n)}(x - x^*) = g_{(1,0)}(x) + g^*_{(m-1,n)}(x - x^*)$,
gdzie $g_{(1,0)}(x) \in \mathbb{T}_2$ i $g^*_{(m-1,n)}(x - x^*) \in \mathbb{T}_1$.

Dla $k > 1, m = 1$ zauważmy, że $f_{(k,l,1,1)}(x) = g_{(k,l)}(x) + g_{(1,1)}(x - x^*) = (g_{(k-1,l)}(x) + x) + (x - x^*)^* = (x + (x - x^*)) + g^*_{(k-1,l)}(x) = g^*_{(k-1,l)}(x) + x$. Stąd $m' = 0$.

W przypadku $k = 2$ i $m = 2$, z własności (3.5) i Lematu 17(b) mamy $f_{(2,0,2,0)}(x) = g_{(2,0)}(x)$.

Dla $k = 2$ oraz $m > 2$ otrzymamy
$f_{(2,0,n,m)}(x) = (x + x) + (g_{(m-1,n)}(x - x^*) + (x - x^*)) =$
$(x + (x - x^*)) + (x + g_{(m-1,n)}(x - x^*)) = x + (x + g_{(m-1,n)}(x - x^*)) =$
$(x + x^*) + g^*_{(m-1,n)}(x - x^*) = (x + x^*) + (g^*_{(m-2,n)}(x - x^*) + (x - x^*)) =$
$((x + x^*)^* + (x - x^*)) + g_{(m-2,n)}(x - x^*) = ((x + x^*) + (x - x^*))+$
$g_{(m-2,n)}(x - x^*) = ((x + x^*)^* + (x - x^*)) + g_{(m-2,n)}(x - x^*) =$
$(x^* + x^*) + g_{(m-2,n)}(x - x^*)$, gdzie $g_{(2,1)}(x) \in \mathbb{T}_2$ oraz $g_{(m-2,n)}(x - x^*) \in \mathbb{T}_1$.

W przypadku $k > 2, m = 2$ uzyskamy
$f_{(k,l,2,0)}(x) = (g_{(k-1,l)}(x) + x) + ((x - x^*) + (x - x^*)) =$
$((x-x^*)+x)+(g_{(k-1,l)}(x)+(x-x^*)) = x+(g_{(k-1,l)}(x)+(x-x^*)) = x+((g_{(k-2,l)}(x)+$
$x^*) + (x - x^*)) = x + (g^*_{(k-2,l)}(x) + (x^* + (x - x^*)^*) = x + (g^*_{(k-2,l)}(x) + x^*) =$
$(g^*_{(k-2,l)}(x) + x^*) + x$. Zatem $m' = 0$.

Dla $k > 2, m > 2$ mamy $f_{(k,l,n,m)}(x) =$
$((g_{(k-2,l)}(x) + x^*) + x) + ((g_{(m-2,n)}(x - x^*) + (x - x^*)^*) + (x - x^*)) =$
$(g^*_{(k-2,l)}(x) + (x^* + x^*)) + (g^*_{(m-2,n)}(x - x^*) + ((x - x^*)^* + (x - x^*)^*) =$
$(g^*_{(k-2,l)}(x) + g^*_{(m-2,n)}(x - x^*)) + ((x^* + x^*) + ((x - x^*)^* + (x - x^*)^*) =$
$(g^*_{(k-2,l)}(x) + g^*_{(m-2,n)}(x - x^*)) + (x^* + x^*) =$
$((x + x) + g^*_{(k-2,l)}(x)) + g_{(m-2,n)}(x - x^*)$. Po skończonej liczbie podobnych przekształceń uzyskamy działanie termowe o żądanej postaci.

Analogiczny wniosek otrzymamy dla $g_{(k,l)}(x), g_{(m,n)}(x) \in \mathbb{T}_2$. ■

# Bibliografia


[1] R. Balbes, Ph. Dwinger, *Distributive Lattices*, Univ. Missouri Press, Columbia, Miss. 1974.

[2] G. Birkhoff, *Lattice theory*, Amer. Math. Soc. Coll. Pub., New York, 1949.

[3] G. Birkhoff, *On the combination of subalgebras*, Proc. Camb. Phil. Soc. **29** (1933), 441-464.

[4] S. Burris, H.P. Sankappanavar, *A Course in Universal Algebra*, second edition, The Millennium Edition, 2000.

[5] I. Chajda, K. Głazek, *A Basic Course on General Algebra*, Technical Univ. Press, Zielona Góra 2000.

[6] C. C. Chen, G. Grätzer, *Stone lattices. I: Construction theorems*, Can. J. Math. **21** (1969), 884-894 .

[7] A. Chwastyk, K. Głazek, *Remarks on $^*$-associative groupoids*, Contributions to General Algebra **13** (2001), 83-89.

[8] A. Chwastyk, K. Głazek, *Term operations in commutative $^*$-associative groupoids*, Contributions to General Algebra **14** (2004), 35-42.

[9] A. Chwastyk, K. Głazek, *Pseudo-nearrings and quasi-modules over them*, Ukrainian Math. Bull. **1** (2004), 129-139.

[10] A. Chwastyk, K. Głazek, *Remarks on Q-independence of Stone algebra*, Math. Slovaca **56** (2006), No. 2, 181-197.

[11] A. Chwastyk, *Retracts and Q-independence*, Discussiones Math., General Algebra and Appl. **26**, w druku.

[12] O. Frink, *Pseudo-complements in semi-lattices*, Duke Math Journal **29** (1962), 505-514.

[13] M. Gehrke, E. Walker, *Iterating conditionals and symmetric Stone algebras*, Discrete Math. **148** (1996), 49-63.

[14] B. Gleichgewicht, *On some class of rings*, Fund. Math. **48** (1960), 355-359.

[15] V. Glivenko, *Sur quelques points de la logique de M. Brouwer*, Bull. Acad. des Sci. de Belgique **15** (1929), 183-188.

[16] K. Głazek, *O pewnych pierścieniach niełącznych*, Acta Uniw. Wratislav. **17** (1961), 15-19.

[17] K. Głazek, *$^*$-łączne i $\gamma$-algebry*, Acta Uniw.Wratislav. **58** (1967), 5-19.

[18] K. Głazek, *Independence with respect to family of mappings in abstract algebras*, Dissertationes Math. **81** (1971).

[19] K. Głazek, *General notions of independence*, p. 112-128 in "Advances in Algebra", World Scientific, Singapore 2003.

[20] K. Głazek, T. Hecht and T. Katriňák, *On weak homomorphisms of Stone algebra*, Colloq. Math. Soc. János Bolyai **17** (1975), 145-159.

[21] K. Golema-Hartman, *Idempotent reduct of abelian groups and minimal algebras*, Bulletin de L'Academie Polonaise des Sciences **21** (1973), 809-811.

[22] K. Golema-Hartman, *Exchange property and t-independence*, Colloq. Math. **36** (1976), 181-186.

[23] G. Grätzer, *A generalization of Stone's representation theorem for Boolean algebras*, Duke Math. Journal **30** (1963), 469-474.

[24] G. Grätzer, *A new notion of independence in universal algebras*, Colloq. Math. **17** (1967), 225-234.

[25] G. Grätzer, *General Lattice Theory*, Academic Press, New York 1978.

[26] G. Grätzer, E. T. Schmidt, *On a problem of M. H. Stone*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **8** (1957), 455-460.

[27] J. Hion, *$\Omega$-ringoids, $\Omega$-rings and their representations* (w j. rosyjskim), *Trudy Moskov. Mat. Obshch.* **14** (1965), 3-47.

[28] J. M. Howie, *An Introduction to Semigroup Theory*, Academic Press, London 1976.

[29] T. Iwiński, *Algebraic aprouch to rough sets*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. **35** (1987), 673-683.

[30] A. G. Kurosh, *General Algebra. Lectures of the Academic Year 1969-1970* (w j. rosyjskim), Izd. *Nauka*, Moskov 1974.

[31] E. Marczewski, *A general scheme of the notions of independence in mathematics*, Bull. Acad. Polon. Sci. (Ser. Sci. Math. Astr. Phys.) **6** (1958), 731-738.

[32] E. Marczewski, *Independence in algebras of sets and Boolean algebras*, Fund. Math. **48** (1960), 135-145.

[33] E. Marczewski, *Independence and homomorphisms in abstract algebras*, Fund. Math. **50** (1961), 45-61.

[34] E. Marczewski, *Concerning the independence in lattices*, Colloq. Math. **10** (1963), 21-23.

[35] E. Marczewski, *Independence with respect to a family of mappings*, Colloq. Math. **20** (1968), 11-17.

[36] H. O. Pflugfelder, *Quasigroups and Loops: Introduction*, Heldermann, Berlin 1990.

[37] G. Pilz, *Near-Rings*, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam 1983.

[38] J. Płonka and W. Poguntke, *$T$-independence in distributive lattices*, Colloq. Math. **36** (1976), 171-175.

[39] J. Pomykała, J. A. Pomykała, *The Stone algebra of rough sets*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. **36** (1988), 495-508.

[40] J. Schmidt, *Eine algebraische Äquivalente zum Auswahlaxiom*, Fund. Math. **50** (1962), 485-496.

[41] G. Szász, *Introduction to Lattice Theory*, Akadémiai Kiadó, Budapest 1963.

[42] G. Szász, *Marczewski independence in lattices and semilattices*, Colloq. Math. **10** (1963), 15-23.

[43] S. Świerczkowski, *Topologies in free algebras*, Proc. London Math. Soc. (3) **14** (1964), 566-576.