WYDZIAŁ MATEMATYKI, INFORMATYKI I EKONOMETRII
UNIWERSYTET ZIELONOGÓRSKI

Marek T. Malinowski

Geometryczne sumy losowe

Rozprawa doktorska

Promotor: dr hab. Jolanta K. Misiewicz, prof. UZ

ZIELONA GÓRA 2006

Spis treści

Wstęp

W teorii prawdopodobieństwa i teorii procesów stochastycznych często spotykamy się z konstrukcjami nowych rozkładów prawdopodobieństwa poprzez pewne transformacje innych rozkładów. Jedną z takich konstrukcji jest mieszanina splotowa dwóch miar. Niech μ będzie miarą na $\mathbb{R}^d$, a ν miarą na zbiorze $S \subset [0, \infty)$. Jeśli dla każdego $s \in S$ istnieje miara μ^{*s} taka, że $\widehat{\mu^{*s}} = \widehat{\mu}^s$, gdzie $\widehat{\mu}$ oznacza transformatę Fouriera miary μ, to mieszaniną splotową miary μ z miarą ν nazywamy miarę definiowaną wzorem

$$\mu \circledast \nu(A) \stackrel{def}{=} \int_0^\infty \mu^{*s}(A)\nu(ds) = \int_S \mu^{*s}(A)\nu(ds).$$

Przyjmujemy, że $\mu^{*0} = \delta_0$. Miarę $\mu \circledast \nu$ nazywa się również średnią splotową albo miarą ν-złożoną. Zebrane własności tak określonej transformacji dla miar probabilistycznych można znaleźć np. w [32].

Transformata Fouriera mieszaniny splotowej ma postać

$$\widehat{\mu \circledast \nu}(t) = \int_S \widehat{\mu}(t)^s \nu(ds).$$

W przypadku, gdy ν jest miarą skoncentrowaną na $S \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$, to wcześniejsza formuła przyjmuje postać

$$\mu \circledast \nu(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{*k}(A)\nu(\{k\}) = \sum_{k \in S} \mu^{*k} \nu(\{k\}).$$

Bardzo istotna dla nas jest interpretacja tej ostatniej mieszaniny splotowej w języku zmiennych losowych. Można łatwo sprawdzić, że jeśli μ oznacza rozkład wektora losowego $\mathbf{X}$ na $\mathbb{R}^d$, $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots$ są niezależnymi kopiami wektora $\mathbf{X}$, a ν jest rozkładem niezależnej od $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots\}$ zmiennej losowej Θ o wartościach naturalnych, to $\mu \circledast \nu$ jest rozkładem wektora losowego

$$\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 + \cdots + \mathbf{X}_\Theta = \sum_{i=1}^{\Theta} \mathbf{X}_i.$$

Najbardziej popularnym rozkładem tego typu jest złożony rozkład Poissona, tzn. mieszanina splotowa względem rozkładu Poissona. Znajdujemy go chociażby w teorii rozkładów nieskończenie podzielnych, w teorii ubezpieczeń przy modelowaniu procesu ryzyka jako podwójnie stochastycznego procesu Poissona, czyli procesu Coxa.

W pracy zajmujemy się głównie zastosowaniem geometrycznych sum losowych, tzn. takich, gdzie losowy indeks Θ_p ma rozkład geometryczny z parametrem $p \in (0,1)$, tzn. $P(\Theta_p = k) = p(1-p)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots$

Praca ta zawiera wyniki badań poświęconych dwóm różnym zagadnieniom, związanym jednakże ze sobą przez ideę geometrycznych sum losowych. W rozdziale 1 zebrane zostały tezy dotyczące pewnego problemu z dziedziny arytmetyki miar probabilistycznych. Rozważane jest tam pytanie: dla jakich par rozkładów jest tak, że ich splot i kombinacja wypukła dają ten sam rozkład? Natomiast drugi problem, opisany w rozdziale 3, dotyczy tez o idempotentach i słabych granicach geometrycznych mieszanin splotowych. Rozdział 2 dotyczy rozkładów nieskończenie podzielnych, ma charakter przeglądowy i stanowi podbudowę rozdziału 3.

W rozdziale 1 prezentowane są wyniki dotyczące problemu charakteryzacji takich par rozkładów μ i ν, że dla ustalonego $p \in (0,1]$ zachodzi

$$p\mu + (1-p)\,\nu = \mu * \nu.$$

Ten problem, w nieco innej postaci, został postawiony przez Daniela Dugué w 1939 roku i był od tego czasu intensywnie badany (zob. [4], [5], [23], [15],

[31], [39], [44], [46], [47]). W pracy prezentujemy pewne rozwiązania problemu Dugué i konstruujemy pierwszy przykład trzech miar μ, ν i η takich, że

$$p\mu + q\nu + r\eta = \mu * \nu * \eta,$$

gdzie p, q, r są dodatnimi stałymi i $p+q+r = 1$. W podrozdziale 1.5 przedstawiamy rozwiązania problemu Dugué w zbiorze znakowanych miar σ-skończonych. W podrozdziale 1.6 podajemy charakteryzacje takich miar μ, dla których

$$\frac{1}{2}\left(\mu + \mu^{-}\right) = \mu * \mu^{-}.$$

Rozdział 3 dotyczy geometrycznie nieskończenie podzielnych zmiennych losowych. Pierwszą pracą na ten temat jest praca [11] opublikowana w 1984 roku. Zmienne te stały się popularne, gdy pewne rozkłady, które pojawiły się w zastosowaniach teorii niezawodności, teorii odnowy, modelach fizyki i matematyki finansowej, okazały się być reprezentantami pewnych podklas zbioru rozkładów geometrycznie nieskończenie podzielnych. W podrozdziale 3.1 przedstawiamy systematyzację poszczególnych podklas klasy rozkładów geometrycznie nieskończenie podzielnych. W tym celu zmienione zostało nawet nazewnictwo rozważanej dotychczas podklasy pojawiajacej się w literaturze pod dwiema nazwami: geometrycznie semistabilne i geometrycznie prawostronne semistabilne na geometrycznie ściśle semistabilne, gdyż rozkłady te jednoznacznie wiążą się z rozkładami ściśle semistabilnymi, rozważanymi przez P. Lévy'ego w [24], R.N. Pillai [36], R. Shimizu [43]. Nazwę geometrycznie semistabilnych przeznaczyliśmy dla definiowanej przez nas szerszej klasy, obejmującej zarówno rozkłady geometrycznie stabilne, jak i geometrycznie ściśle semistabilne.
W podrozdziale 3.2 prezentujemy twierdzenia graniczne dla geometrycznie nieskończenie podzielnych i geometrycznie ściśle stabilnych zmiennych losowych. Podajemy najsłabsze (z istniejących do tej pory) warunki konieczne i dostateczne na to, aby zmienna losowa była geometrycznie nieskończenie podzielna. Pod-

rozdział 3.3 poświęcony jest rozkładom geometrycznie ściśle semistabilnym. Pokazujemy, że rozkłady te mogą być definiowane jako rozkłady graniczne dla ważonych sum losowych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie. W terminach metryk ideałowych badamy szybkość zbieżności ciągu geometrycznych sum losowych do granicy, która ma rozkład geometrycznie ściśle semistabilny. Odnotowywujemy, że rozkłady geometrycznie ściśle semistabilne są c-rozkładalne w sensie Loève'a. W podrozdziale 3.3 definiujemy rozkłady geometrycznie semistabilne. Zbiór takich rozkładów zawiera rozkłady geometrycznie stabilne i geometrycznie ściśle semistabilne. Pokazujemy, że są one jednoznacznie związane z rozkładami semistabilnymi rozważanymi przez M. Maejima w [28] i D. Mejzlera w [33]. Podajemy pewną graniczną reprezentację dla funkcji charakterystycznej takiego rozkładu. Badamy również obszar pełnego i częściowego geometrycznego przyciągania zmiennej geometrycznie semistabilnej.

Wyniki z rozdziału 1 zostały opublikowane jako praca [31] w *Probability and Mathematical Statistics* **22** (2002) 319-331. Natomiast większość wyników z rozdziału 3 stanowi treść pracy [30] wysłanej do druku. Dodatkowo, wyniki niniejszej rozprawy były prezentowane na konferencjach: The Ninth International Workshop in Mathematics (Gronów – Polska, 2001), II Konferencja dla Młodych Matematyków (Lądek Zdrój – Polska, 2001), XXII International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models (Varna – Bułgaria, 2002), Warsaw Probability Meeting (Warszawa – Polska, 2005).

1. Zagadnienie Daniela Dugué

1.1. Oznaczenia i podstawowe definicje

Niech $\mathcal{P}$ oznacza zbiór miar probabilistycznych na $\mathbb{R}$. Przez $\widehat{\mu}$ oznaczamy funkcję charakterystyczną miary $\mu \in \mathcal{P}$. Ponadto, niech

$$\Phi = \{\widehat{\mu} : \mu \in \mathcal{P}\}.$$

Jednym z podstawowych pojęć w tej pracy jest geometryczna suma losowa. Niech $p \in (0, 1)$, $q = 1 - p$ oraz niech Θ_p^0 będzie zmienną losową o rozkładzie

$$P(\Theta_p^0 = k) = pq^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

natomiast Θ_p^1 zmienną losową o rozkładzie

$$P(\Theta_p^1 = k) = pq^{k-1}, \quad k = 1, 2, 3 \ldots$$

Definicja 1.1. *Geometrycznymi sumami losowymi typu* 0 *i typu* 1 *nazywamy odpowiednio*

$$T_0^p(X) \stackrel{def}{=} \sum_{k=1}^{\Theta_p^0} X_k, \quad T_1^p(X) \stackrel{def}{=} \sum_{k=1}^{\Theta_p^1} X_k,$$

gdzie $X, X_1, X_2, \ldots$ *są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie* μ *niezależnymi od* Θ_p^1, Θ_p^2, $\sum_{k=1}^{0} X_k \equiv 0$.

Łatwo sprawdzić, że zmienne $T_0^p(X)$, $T_1^p(X)$ mają odpowiednio rozkłady (zwane złożonymi rozkładami geometrycznymi)

$$T_0^p(\mu) \stackrel{def}{=} \sum_{k=0}^{\infty} pq^k \mu^{*k}, \quad T_1^p(\mu) \stackrel{def}{=} \sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1} \mu^{*k}$$

oraz funkcje charakterystyczne

$$T_0^p(\widehat{\mu})(t) = \frac{p}{1 - q\widehat{\mu}(t)}, \quad T_1^p(\widehat{\mu})(t) = \frac{p\widehat{\mu}(t)}{1 - q\widehat{\mu}(t)}.$$

Z powyższej konstrukcji wynika (co będziemy wielokrotnie wykorzystywać), że dla dowolnej funkcji charakterystycznej φ funkcje $T_0^p(\varphi)$ i $T_1^p(\varphi)$ są funkcjami charakterystycznymi. W zależności od kontekstu oznaczenia T_0^p, T_1^p używane są w odniesieniu do zmiennych losowych, rozkładów lub funkcji charakterystycznych.

1.2. Problem D. Dugué

W 1939 roku D. Dugué (zob. [4], [5]) postawił następujący problem: znaleźć wszystkie pary miar probabilistycznych μ i ν spełniających warunek

$$\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu = \mu * \nu. \tag{1.1}$$

Znalazł on również pierwszy przykład takiej pary, a mianowicie

$$\mu(dx) = e^{-x}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)dx, \quad \nu(dx) = e^{x}\mathbf{1}_{(-\infty,0)}(x)dx.$$

Choć prosty w sformułowaniu, problem ten okazał się stosunkowo trudny i mimo licznych prób nie doczekał się jeszcze pełnego rozwiązania.

1.3. Uogólnione zagadnienie D. Dugué

Pewnym uogólnieniem problemu Dugué jest pytanie o charakteryzację par rozkładów probabilistycznych (μ, ν) takich, że dla danego $p \in (0, 1]$ spełnione jest równanie

$$p\mu + (1-p)\nu = \mu * \nu. \tag{1.2}$$

Od tej pory przyjmujemy $q = 1-p$. Jeśli oznaczymy $\varphi = \widehat{\mu}$ i $\psi = \widehat{\nu}$, to równanie (1.2) można przepisać równoważnie w języku funkcji charakterystycznych jako

$$p\varphi + q\psi = \varphi\psi. \tag{1.3}$$

Po raz pierwszy problem ten był rozważany przez L. Kubika (zob. [23]). Podał on dwa przykłady par rozkładów, dla których spełniony jest warunek (1.2) parę rozkładów dwupunktowych

$$\mu = q\delta_0 + p\delta_{-a}, \;\; \nu = p\delta_0 + q\delta_a, \;\; a \in \mathbb{R};$$

i parę rozkładów wykładniczych

$$\mu(dx) = a\exp(ax)\mathbf{1}_{(-\infty,0)}dx, \;\; \nu(dx) = \frac{ap}{q}\exp\left(-\frac{ap}{q}x\right)\mathbf{1}_{(0,\infty)}dx.$$

H.J. Rossberg w [39] udowodnił, że jeśli $\mathrm{supp}(\mu) = (-\infty, 0)$, $\mathrm{supp}(\nu) = (0,\infty)$, μ nie jest rozkładem arytmetycznym i $p \in (0,1)$, to warunek $p\mu + q\nu = \mu * \nu$ jest równoważny temu, że μ i ν mają rozkłady wykładnicze.

A. Wolińska-Wełcz i W. Krakowiak (zob. [47], [15]) zauważyli, że jeśli para (μ,ν) miar probabilistycznych spełnia (1.2), to miary μ i ν muszą być jednocześnie albo dyskretne, albo absolutnie ciągłe, albo singularne. W [44], [46], [47] można znaleźć wiele przykładów funkcji charakterystycznych, dla których zachodzi (1.3). Ponadto A. Wolińska w [46] i [47] podała interesujące procedury rekurencyjne pozwalające na konstruowanie ciągu par funkcji charakterystycznych spełniających (1.3) na bazie jednej znanej pary. Problem znalezienia wszystkich par (μ,ν) spełniających (1.2) możemy nieco zmodyfikować. Jeśli $\varphi = \widehat{\mu}$ i istnieje $\nu \in \mathcal{P}$ spełniająca (1.2), to

$$\widehat{\nu}(t) = \frac{p\varphi}{\varphi - q} \overset{def}{=} G^p(\varphi),$$

możemy więc mówić o określaniu takich funkcji charakterystycznych φ, dla których $G^p(\varphi)$ jest funkcją charakterystyczną. Dla każdego $p \in (0,1]$ definiujemy więc zbiór $\mathcal{G}^p \subset \Phi$ następująco:

$$\mathcal{G}^p = \{\varphi \in \Phi : \; G^p(\varphi) \in \Phi\}$$

oraz

$$\mathcal{G} = \bigcap_{p \in (0,1]} \mathcal{G}^p.$$

W. Krakowiak (zob. [15]) udowodnił, że dla dowolnej $\varphi \in \Phi$ prawdziwe jest jedno ze stwierdzeń:

1) $\varphi \notin \mathcal{G}^p$ dla każdego $p \in (0,1)$,

2) $\varphi \in \mathcal{G}$,

3) istnieje $p_0 \in (0,1)$ takie, że $\varphi \in \mathcal{G}^p$ dla każdego $p \in (0,p_0]$ i $\varphi \notin \mathcal{G}^p$ dla każdego $p \in (p_0,1)$.

W tym podrozdziale podamy kilka własności funkcji charakterystycznych φ, które są elementami zdefiniowanych przez nas zbiorów $\mathcal{G}^p$ i $\mathcal{G}$.

Stwierdzenie 1.2. *Jeśli $\varphi \in \mathcal{G}^p$ dla pewnego $p \in (0,1)$, to:*

1) $|\varphi - (1+p)^{-1}| \geqslant p/(1+p)$,

2) $\varphi \in \mathcal{G}^u$ *dla każdego* $u \in (0,p]$,

3) $\psi = G^p(\varphi) \in \mathcal{G}^u$ *dla każdego* $u \in (0,1-p]$.

Dowód. 1) Chcemy pokazać, że jeśli $\varphi \in \mathcal{G}^p$, to funkcja φ ma wartości w zbiorze

$$D_p = \left\{ x+iy \in \mathbb{C} : \quad \left(x - \frac{1}{1+p}\right)^2 + y^2 \geqslant \frac{p^2}{(1+p)^2}\,, \quad x^2+y^2 \leqslant 1 \right\}.$$

Niech $\varphi(t) = x(t) + iy(t)$. Oczywiście $|x + iy| \leqslant 1$. Ponieważ $G^p(\varphi) \in \Phi$, więc $|G^p(\varphi)| \leqslant 1$. Stąd $\left|\frac{p(x+iy)}{x+iy-q}\right| \leqslant 1$. Łatwo zauważyć, że zbiór liczb zespolonych $x + iy$ posiadających obie te własności jest równy zbiorowi D_p.

2) Ponieważ $\varphi \in \mathcal{G}^p$, tzn. $\psi = G^p(\varphi) \in \Phi$, więc funkcja $T_1^r(\psi) \in \Phi$ dla każdego $r \in (0, 1)$. Z drugiej strony mamy

$$T_1^r(\psi) = \frac{r\frac{p\varphi}{\varphi-q}}{1-(1-r)\frac{p\varphi}{\varphi-q}} = \frac{\frac{rp}{1-p+rp}\varphi}{\varphi-\frac{1-p}{1-p+rp}} = G^{\frac{rp}{1-p+rp}}(\varphi).$$

To dowodzi tego, że $G^u(\varphi) \in \Phi$ dla każdego $u = \frac{rp}{1-p+rp}$, $r \in (0, 1]$. Łatwo sprawdzić, że $\{u = \frac{rp}{1-p+rp} : r \in (0, 1]\} = (0, p]$.

3) Niech $v = 1 - u$. Łatwo zauważyć, że

$$G^u(\psi) = \frac{u\frac{p\varphi}{\varphi-q}}{\frac{p\varphi}{\varphi-q} - v} = \frac{\frac{up}{vq}\varphi}{1-\left(\frac{v-p}{vq}\right)\varphi} = T_1^{\frac{up}{vq}}(\varphi).$$

Jeśli $v - p \geqslant 0$ oraz $0 < \frac{up}{vq} \leqslant 1$, to $G^u(\psi) \in \Phi$. Stąd $0 < u \leqslant 1 - p$.

□

Wniosek 1.3. *Jeśli* $\varphi = \overline{\varphi}$ *i* $\varphi \in \mathcal{G}^p$ *dla pewnego* $p \in (0, 1)$, *to* $\varphi(t) \equiv 1$.

Dowód. Na mocy własności 1) stwierdzenia 1.2 część rzeczywista zbioru D_p jest równa $\left[-1, \frac{1-p}{1+p}\right] \cup \{1\}$. Stąd i z ciągłości funkcji φ dostajemy tezę wniosku.

□

Wniosek 1.4. *Jeśli dla* $\varphi \in \Phi$ *istnieje* $\psi \in \Phi$ *oraz* $p \in (0, 1)$ *takie, że para* (φ, ψ) *spełnia* (1.3), *to* $\varphi(t) \neq q$ *dla dowolnego* $t \in \mathbb{R}$.

Dowód. Wystarczy zauważyć, że $q \notin D_p$.

□

Podamy teraz przykłady rozkładów, których funkcje charakterystyczne należą do zbioru $\mathcal{G}$.

Przykład 1.5. *Rozkład jednopunktowy* $\mu = \delta_a$*, gdzie* $a \in \mathbb{R}$*.*

Rzeczywiście, omijając przypadek trywialny dla $p = 1$*, mamy* $G^p\left(e^{ita}\right) = \frac{pe^{ita}}{e^{ita}-q} = \frac{p}{1-qe^{-ita}} = T_0^p\left(e^{-ita}\right)$*. Zatem* $G^p\left(e^{ita}\right) \in \Phi$*, ponieważ* $T_0^p\left(e^{-ita}\right)$ *jest funkcją charakterystyczną złożonego rozkładu geometrycznego*

$$\nu = T_0^p\left(\delta_{-a}\right) = p\sum_{k=0}^{\infty} q^k \delta_{-ka}.$$

Przykład 1.6. *Rozkład wykładniczy* $\mu(dx) = ae^{-ax}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)dx$*,* $a > 0$*.*

Istotnie, ponieważ $\widehat{\mu}(t) = \frac{a}{a-it}$*, więc* $G^p\left(\widehat{\mu}\right) = \frac{\frac{pa}{a-it}}{\frac{a}{a-it}-q} = \frac{pa}{pa+itq} = \frac{\frac{pa}{q}}{\frac{pa}{q}+it}$*. Jest to funkcja charakterystyczna rozkładu wykładniczego z funkcją gęstości*

$$\nu(dx) = \frac{pa}{q}\exp\left(\frac{pa}{q}x\right)\mathbf{1}_{(-\infty,0)}(x)dx.$$

Przykład 1.7. *Rozkład geometryczny* $\mu = s\sum_{k=1}^{\infty} u^{k-1}\delta_k$*, gdzie* $s, u > 0$*;* $s + u = 1$*.*

Skoro $\widehat{\mu}(t) = \frac{se^{it}}{1-ue^{it}}$*, to* $G^p\left(\widehat{\mu}\right) = \frac{pse^{it}}{(s+qu)e^{it}-q} = \frac{\frac{ps}{s+qu}}{1-\frac{q}{s+qu}e^{-it}}$*. Zatem jest to funkcja charakterystyczna złożonego rozkładu geometrycznego*

$$\nu = T_0^{\frac{ps}{s+qu}}\left(\delta_{-1}\right) = \frac{ps}{s+qu}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{q}{s+qu}\right)^k \delta_{-k}.$$

1.4. Zagadnienie D. Dugué i ułamki proste

J. K. Misiewicz i R. Cook w pracy [34] rozważali pewne specjalne klasy miar probabilistycznych. Głównym powodem badania tych klas było to, że splot miar z ustalonej klasy był równoważny z liniową kombinacją tych miar. Jednakże współczynniki kombinacji liniowej nie musiały być dodatnie. Ta koncepcja wydaje się mieć dużo wspólnego z zagadnieniem Dugué.

Naśladując konstrukcję podaną w [34], dla każdej miary probabilistycznej μ z funkcją charakterystyczną φ definiujemy

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varphi(t)} - 1, & \text{gdy } \varphi(t) \neq 0, \\ \infty, & \text{gdy } \varphi(t) = 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Niech $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Przez $\Phi(\varphi)$ oznaczamy następującą klasę funkcji charakterystycznych:

$$\Phi(\varphi) = \left\{ \varphi_a(t) \stackrel{def}{=} \frac{a}{a + h(t)} : a \in \mathbb{R}_0,\ \varphi_a \in \Phi \right\}.$$

Okazuje się, że zasadniczą rolę w zagadnieniu Dugué odgrywa zbiór

$$S(\varphi) = \{a \in \mathbb{R}_0 : \varphi_a \in \Phi(\varphi)\}.$$

Łatwo zauważyć, że dla rozkładu wykładniczego z funkcją gęstości $\mu(dx) = e^{-x}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)dx$ otrzymujemy $\varphi(t) = \frac{1}{1-it}$ i $h(t) = -it$. Tutaj $\Phi(\varphi)$ jest klasą funkcji charakterystycznych wszystkich rozkładów wykładniczych (również tych, których nośnikiem jest półprosta ujemna) i $S(\varphi) = \mathbb{R}_0$. Więcej interesujących przykładów takich klas można znaleźć w [34].

W pracy [34] pokazano, że dla każdego $p \in (0, 1]$ zachodzi

$$pS(\varphi) \subset S(\varphi). \tag{1.5}$$

Ponieważ dla dowolnej $\varphi \in \Phi$ mamy zawsze $1 \in S(\varphi)$, więc w szczególności

$$(0, 1] \subset S(\varphi) \quad \forall\, \varphi \in \Phi. \tag{1.6}$$

Następujące twierdzenie pokazuje związek między zbiorem $S(\varphi)$ i zagadnieniem Dugué.

Twierdzenie 1.8. *Niech $\mu \in \mathcal{P}$, $\varphi = \widehat{\mu}$ oraz $p \in (0, 1)$. Wówczas $G^p(\mu) \in \mathcal{P}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $[-\frac{p}{1-p}, 0) \subset S(\varphi)$. Ponadto, jeśli $G^p(\mu) \in \mathcal{P}$, to $G^p(\varphi) \in \Phi(\varphi)$.*

Dowód. Uzasadnienie wynika z następujących obliczeń:

$$G^p(\varphi)(t) = \frac{p\varphi(t)}{\varphi(t) - 1 + p} = \frac{-\frac{p}{1-p}}{\frac{1}{\varphi(t)} - 1 - \frac{p}{1-p}} = \varphi_{-\frac{p}{1-p}}(t). \tag{1.7}$$

Teraz wystarczy zauważyć, że jeśli $G^p(\varphi) \in \Phi$, to z punktu 2) stwierdzenia1.2 dla każdego $u \in (0,p]$ funkcja $G^u(\varphi) \in \Phi$. Stąd i z (1.7) mamy $-\frac{u}{1-u} \in S(\varphi)$ dla każdego $u \in (0,p]$, czyli $[-\frac{p}{1-p}, 0) \subset S(\varphi)$. Implikacja przeciwna również zachodzi.

□

Z tego twierdzenia łatwo wywnioskować, że $\varphi \in \mathcal{G}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(-\infty, 0) \subset S(\varphi)$.

Twierdzenie 1.9. *Niech $\varphi \in \Phi$, $\varphi \not\equiv 1$, $p \in (0,1)$ oraz $a_k, b_k \in S(\varphi)$ dla $k = 1, 2, \ldots, n$; $n \in \mathbb{N}$. Równość*

$$p \prod_{k=1}^{n} \varphi_{a_k} + q \prod_{k=1}^{n} \varphi_{b_k} = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{a_k} \prod_{k=1}^{n} \varphi_{b_k}$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$pa_1 + qb_1 = 0 \quad \text{dla} \quad n = 1,$$

$$\begin{cases} p \prod\limits_{i=1}^{n} a_i + q \prod\limits_{i=1}^{n} b_i = 0, \\ \sum\limits_{C(k,n)} a_{c(1,k)} \ldots a_{c(k,k)} = \sum\limits_{C(k,n)} b_{c(1,k)} \ldots b_{c(k,k)}, \ k = 1, \ldots, n-1 \end{cases} \quad \text{dla} \quad n \geqslant 2,$$

gdzie $C(k,n)$ jest zbiorem wszystkich kombinacji $c = \{c(1,k), \ldots, c(k,k)\}$ utworzonych z k różnych elementów ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Dowód. Z uwagi na to, że dowód oparty jest na prostych, ale żmudnych obliczeniach prezentujemy tylko jego szkic. Ponieważ funkcja $h(t) = 1/\varphi(t) - 1$ nie jest funkcją stałą, ale ograniczoną i ciągłą przynajmniej na pewnym odcinku otwartym, więc jej wartości wypełniają pewien łuk γ płaszczyzny zespolonej. W związku z tym, porównując funkcje wymierne funkcji h, możemy postępować tak, jak z funkcjami wymiernymi zmiennej rzeczywistej. Teraz widać, że równość

$$p\varphi_{a_1}\varphi_{a_2} \ldots \varphi_{a_n} + q\varphi_{b_1}\varphi_{b_2} \ldots \varphi_{b_n} = \varphi_{a_1}\varphi_{a_2} \ldots \varphi_{a_n}\varphi_{b_1}\varphi_{b_2} \ldots \varphi_{b_n}$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$pa_1a_2\dots a_n(b_1+h)(b_2+h)\dots(b_n+h)+qb_1b_2\dots b_n(a_1+h)(a_2+h)\dots(a_n+h)$$
$$=a_1a_2\dots a_nb_1b_2\dots b_n,$$

co musi być spełnione dla każdej wartości $h=h(t)$.

Porównując współczynniki przy odpowiednich potęgach h otrzymujemy opisane związki. W szczególności, z porównania współczynników przy h^n otrzymujemy $pa_1a_2\dots a_n+qb_1b_2\dots b_n=0$. Natomiast z porównania współczynników przy h^{n-1} mamy $pa_1a_2\dots a_n(b_1+b_2+\dots+b_n)+qb_1b_2\dots b_n(a_1+a_2+\dots+a_n)=0$. Z dwóch utworzonych w ten sposób równań dostajemy zależność $a_1+a_2+\dots+a_n=b_1+b_2+\dots+b_n$. Porównując współczynniki przy kolejnych, niższych potęgach h dostajemy kolejne równania. Kończąc porównywanie współczynników przy h^1 otrzymujemy ostatni związek opisany w twierdzeniu, czyli $\sum_{C(k,n)}a_{c(1,k)}\dots a_{c(k,k)}=\sum_{C(k,n)}b_{c(1,k)}\dots b_{c(k,k)}$ dla $k=n-1$.

$\square$

Przyjrzyjmy się bliżej równości $p\prod_{k=1}^{n}\varphi_{a_k}+q\prod_{k=1}^{n}\varphi_{b_k}=\prod_{k=1}^{n}\varphi_{a_k}\prod_{k=1}^{n}\varphi_{b_k}$ dla $n=2$.

Uwaga 1.10. *Rozważmy $\varphi\in\Phi$, dla której $S(\varphi)=\mathbb{R}_0$ i niech $p\in(0,1)$. Z tw.* 1.9 *wynika, że*

$$p\varphi_{a_1}\varphi_{a_2}+q\varphi_{b_1}\varphi_{b_2}=\varphi_{a_1}\varphi_{a_2}\varphi_{b_1}\varphi_{b_2}, \tag{1.8}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{cases} pa_1a_2+qb_1b_2 &= 0,\\ a_1+a_2 &= b_1+b_2.\end{cases}$$

Szukając związku pomiędzy parametrami $a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbb{R}_0$, otrzymujemy

$$qb_1^2-q(a_1+a_2)b_1-pa_1a_2=0.$$

Rozwiązanie tego równania względem b_1 istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy wyróżnik trójmianu kwadratowego jest nieujemny, a więc gdy

$$\frac{qa_1}{a_2} \notin \left(-(1+\sqrt{p})^2, -(1-\sqrt{p})^2\right).$$

Otrzymany przedział jest całkowicie zawarty w półprostej ujemnej, więc dla dowolnych a_1, a_2 takich, że $a_1 a_2 > 0$ istnieją b_1, b_2 spełniające równanie (1.8).
W przypadku, gdy $a_1 a_2 < 0$ istnieją już pewne ograniczenia, ale łatwo sprawdzić, że np.

$$\frac{1}{2}\varphi_6(t)\varphi_{-1}(t) + \frac{1}{2}\varphi_3(t)\varphi_2(t) = \varphi_6(t)\varphi_{-1}(t)\varphi_3(t)\varphi_2(t).$$

Pewną charakteryzację rozwiązań oryginalnego problemu Dugué przedstawia poniższa własność.

Własność 1.11. *Niech $\varphi, \psi \in \Phi$.*

1) *Jeśli zachodzi $\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2}\psi(t) = \varphi(t)\psi(t)$, to $\psi(t) = \varphi_{-1}(t)$.*

2) *Jeśli istnieje $b > 0$ takie, że $[-b, b] \setminus \{0\} \subset S(\varphi)$, to dla dowolnego $a \in [-b, b] \setminus \{0\}$ mamy $\frac{1}{2}\varphi_a + \frac{1}{2}\varphi_{-a} = \varphi_a\varphi_{-a}$.*

Dowód. 1) Ponieważ zachodzi $(1/2)\varphi(t) + (1/2)\psi(t) = \varphi(t)\psi(t)$, więc ψ jest postaci

$$\psi(t) = G^{1/2}(\varphi(t)) = \frac{\frac{1}{2}\varphi(t)}{\varphi(t) - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{1+h(t)}}{\frac{1}{1+h(t)} - \frac{1}{2}} = \frac{-1}{-1+h(t)} = \varphi_{-1}(t).$$

2) Niech a będzie dowolną liczbą ze zbioru $[-b, b] \setminus \{0\} \subset S(\varphi)$. Wówczas

$$\frac{1}{2}\varphi_a + \frac{1}{2}\varphi_{-a} = \frac{1}{2}\frac{a}{a+h} + \frac{1}{2}\frac{a}{a-h} = \frac{a^2}{a^2-h^2} = \varphi_a\varphi_{-a}.$$

$\square$

Zgodnie z tw. 1.8 odnotowujemy, że znajomość struktury zbioru $S(\varphi)$ dla ustalonej $\varphi \in \Phi$ jest pomocna w odpowiedzi na pytanie, czy istnieje $p \in (0, 1)$

i $\psi \in \Phi$ takie, by zachodziło $p\varphi + (1-p)\psi = \varphi\psi$. Jednakże sposób wyznaczenia tego zbioru dla dowolnie wybranej funkcji charakterystycznej, podobnie jak rozwiązanie ogólnego problemu Dugué, nie jest jeszcze znany. Podajemy kilka własności zbioru $S(\varphi)$.

Własność 1.12. *Niech $\mu \in \mathcal{P}$, $\varphi = \widehat{\mu}$ i niech $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Następujące warunki są równoważne:*

(a) $a \in S(\varphi)$,

(b) istnieje $\nu \in \mathcal{P}$ taka, że $-\frac{a}{1-a}\mu + \frac{1}{1-a}\nu = \mu * \nu$,

(c) istnieje $\nu \in \mathcal{P}$ taka, że $\mu * \left(\frac{a}{1+a}\delta_0 + \frac{1}{1+a}\nu\right) = \nu * \left(\frac{1}{1+a}\delta_0 + \frac{a}{1+a}\mu\right)$.

Dowód. $(a) \Rightarrow (b)$. Jeśli $a \in S(\varphi)$, to $\varphi_a(t) = a/(a+h(t)) = a\varphi(t)/(1-(1-a)\varphi(t))$ jest funkcją charakterystyczną pewnej miary probabilistycznej ν spełniającej równanie z (b).
$(b) \Rightarrow (a)$. Jeśli dla pewnej miary probabilistycznej ν zachodzi równość $-\frac{a}{1-a}\mu + \frac{1}{1-a}\nu = \mu * \nu$, to ν ma funkcję charakterystyczną $\widehat{\nu}$ postaci

$$\widehat{\nu}(t) = \frac{(-a/(1-a))\widehat{\mu}(t)}{\widehat{\mu}(t) - 1/(1-a)} = \frac{a}{a + 1/\widehat{\mu}(t) - 1},$$

co oznacza, że $a \in S(\widehat{\mu})$.
$(b) \Leftrightarrow (c)$. Wystarczy zauważyć, że

$$\begin{aligned} -\frac{a}{1-a}\mu + \frac{1}{1-a}\nu = \mu * \nu \quad &\Longleftrightarrow \quad a\mu + \mu * \nu = \nu + a\mu * \nu \\ &\Longleftrightarrow \quad \mu * (a\delta_0 + \nu) = \nu * (\delta_0 + a\mu)\,. \end{aligned}$$

□

W przypadku, gdy $a \in S(\varphi)$ funkcja $\varphi_a \in \Phi$ i odpowiada jej pewna miara $\mu_a \in \mathcal{P}$. W niektórych przypadkach μ_a daje się zdefiniować poprzez operacje na mierze $\mu \in \mathcal{P}$, dla której $\widehat{\mu} = \varphi$.

Własność 1.13. *Niech $\mu \in \mathcal{P}$, $\varphi = \widehat{\mu}$ i niech $a \in S(\varphi)$. Wówczas*

1) jeśli $a \in (0,1]$, to $\mu_a = T_1^a(\mu)$ (stwierdzenie 1, Misiewicz, Cooke [34]),

2) jeśli $(-1) \in S(\varphi)$ i $a \in [-1,0)$, to $\mu_a = T_1^{-a}(G^{1/2}(\mu))$. Ponadto $\mu_a = G^{1/2}(\mu_{-a}) = G^{1/2}(T_1^{-a}(\mu))$.

Dowód. 2) Z założeń mamy, że $[-1,0) \subset S(\varphi)$. Zauważmy, że $G^{1/2}(\widehat{\mu}) = \varphi_{-1}$. Teraz wystarczy zauważyć, że $T_1^{-a}(G^{1/2}(\widehat{\mu})) = T_1^{-a}(\varphi_{-1}) = \varphi_a$. Łatwo sprawdzić, że transformaty Fouriera miar $G^{1/2}(\mu_{-a})$, $G^{1/2}(T_1^{-a}(\mu))$ są również równe φ_a. Jednoznaczność transformaty Fouriera kończy dowód reprezentacji miary μ_a.

□

Dla $a \in S(\varphi)$ i $|a| > 1$ nie znamy dokładnej formuły na μ_a. Zauważmy jednak, że jeśli $\mu \in \mathcal{P}$, $\widehat{\mu}(t) = \varphi(t)$ i $b \in S(\varphi)$, to

1. $a, b \in (0,1)$ implikuje $T_1^a(\mu_b) = T_1^{ab}(\mu)$;
2. $0 < a < c \leqslant b$ implikuje $\mu_a = T_1^{a/c}(\mu_c)$;
3. $b \leqslant c < a < 0$ implikuje $\mu_a = T_1^{a/c}(\mu_c)$.

Przykład 1.14. *Niech $\mu \in \mathcal{P}$. Dla $a \in (0,1]$ zgodnie z własnością* 1.13 *mamy $\mu_a = T_1^a(\mu)$ oraz $\mu_{-a} = G^{1/2}(T_1^a(\mu))$.*
1. *Niech $\mu = \delta_b$, gdzie $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wówczas*

$$\mu_a = T_1^a(\delta_b) = a \sum_{k=1}^{\infty} (1-a)^{k-1} \delta_b^{*k} = a \sum_{k=1}^{\infty} (1-a)^{k-1} \delta_{bk}.$$

Stąd μ_a jest rozkładem geometrycznym skupionym na zbiorze $\{bk : k \in \mathbb{N}\}$. Korzystając z obliczeń w przykładzie 1.7 *otrzymujemy*

$$\mu_{-a} = G^{1/2}(T_1^a(\mu)) = T_0^{a/(1+a)}(\delta_{-b}) = \frac{a}{1+a} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+a}\right)^k \delta_{-bk},$$

czyli μ_{-a} *jest rozkładem geometrycznym na zbiorze* $\{-bk : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$.

2. *Niech* μ *będzie rozkładem wykładniczym z parametrem* $\alpha > 0$, *tzn.* $\mu = \Gamma(1, \alpha)$. *Wtedy* μ^{*k} *ma rozkład gamma* $\Gamma(k, \alpha)$ *dla każdego* $k \in \mathbb{N}$ *i mamy*

$$\begin{aligned} \mu_a(dx) &= T_1^a(\mu)(dx) = a \sum_{k=1}^{\infty} (1-a)^{k-1} \frac{\alpha^k}{(k-1)!} x^{k-1} e^{-\alpha x} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x) dx \\ &= \alpha a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha(1-a)x)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\alpha a} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x) dx \\ &= \alpha a e^{-\alpha a x} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x) dx. \end{aligned}$$

Zatem μ_a *ma rozkład wykładniczy* $\Gamma(1, \alpha a)$.

Dla μ_{-a} *mamy* $\mu_{-a} = G^{1/2}(T_1^a(\mu)) = G^{1/2}(\Gamma(1, \alpha a))$ *i korzystając z obliczeń w przykładzie* 1.6 *otrzymujemy* $\mu_{-a} = \Gamma^-(1, \alpha a)$, *gdzie* $\Gamma^-(1, \alpha a)$ *oznacza odbicie rozkładu* $\Gamma(1, \alpha a)$ *na półprostą ujemną, czyli*

$$\mu_{-a}(dx) = \alpha a e^{\alpha a x} \mathbf{1}_{(-\infty,0)}(x) dx.$$

Problem Dugué i jego modyfikacje dotyczyły zagadnienia związanego z istnieniem dwóch miar spełniających pewne równania. D. Szynal postawił pytanie czy istnieją trzy miary μ, ν i η, dla których przy pewnych $p, q, r \in (0, 1)$, $p + q + r = 1$ spełniony byłby warunek

$$p\mu + q\nu + r\eta = \mu * \nu * \eta.$$

Następne stwierdzenie daje pozytywną odpowiedź na to pytanie.

Stwierdzenie 1.15. *Niech* $\mu \in \mathcal{P}$, $\varphi = \widehat{\mu} \not\equiv 1$, $a, b, c, d \in S(\varphi)$ *i niech* $p, q, r > 0$, $p + q + r = 1$. *Wówczas równość*

$$p\varphi_a\varphi_b + q\varphi_c + r\varphi_d = \varphi_a\varphi_b\varphi_c\varphi_d$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{cases} qc + rd & = & 0, \\ pab + rd(c-d) & = & 0, \\ a+b & = & c+d, \\ (r-q)^2 & \geqslant & (r+q)^3. \end{cases}$$

Dowód. Rozważamy równanie

$$p\frac{a}{a+h}\frac{b}{b+h} + q\frac{c}{c+h} + r\frac{d}{d+h} = \frac{a}{a+h}\frac{b}{b+h}\frac{c}{c+h}\frac{d}{d+h},$$

w którym niewiadomymi są a, b, c i d. Standardowe rachunki prowadzą do następującego układu równań

$$\begin{cases} qc + rd & = & 0, \\ pab + qc(a+b+d) + rd(a+b+c) & = & 0, \\ pab(c+d) + qc(ab+ad+bd) + rd(ad+ac+bc) & = & 0. \end{cases}$$

Ze względu na równość $qc = -rd$ mamy dalej

$$\begin{cases} qc + rd & = & 0, \\ pab + rd(c-d) & = & 0, \\ rd(c-d)(a+b-c-d) & = & 0. \end{cases}$$

Gdyby $c = d$, to otrzymalibyśmy sprzeczność, więc ostatnie równanie jest równoważne z $a + b = c + d$. Zatem

$$-pqb^2 + pd(q-r)b - rd^2(q+r) = 0.$$

To równanie ma rozwiązanie ze względu na b, gdy $p(r-q)^2 \geqslant 4qr(q+r)$. Uwzględniając warunek $p + q + r = 1$ otrzymujemy, że poprzednia nierówność jest równoważna z $(r-q)^2 \geqslant (r+q)^3$.

□

Przykład 1.16. *Dla $\varphi \in \Phi$, $\varphi \not\equiv 1$ takiej, że $[-15,0) \cup (0,46] \subset S(\varphi)$ wybieramy $\widehat{\mu}(t) = \varphi_{30/r}(t)\varphi_{1/r}(t)$, $\widehat{\nu}(t) = \varphi_{46/r}(t)$, $\widehat{\eta}(t) = \varphi_{-15/r}(t)$, gdzie r oznacza dowolną liczbę rzeczywistą nie mniejszą niż 1. Wtedy $\widehat{\mu}, \widehat{\nu}, \widehat{\eta} \in \Phi$ oraz*

$$\frac{1403}{1464}\widehat{\mu}(t) + \frac{15}{1464}\widehat{\nu}(t) + \frac{46}{1464}\widehat{\eta}(t) = \widehat{\mu}(t)\widehat{\nu}(t)\widehat{\eta}(t).$$

1.5. Przykłady rozwiązań zagadnienia D. Dugué w zbiorze miar znakowanych

Rozważmy teraz następujący problem: dla ustalonej $\mu \in \mathcal{P}$ chcemy znaleźć znakowaną, skończoną albo σ-skończoną miarę ν taką, aby dla pewnego (każdego) $p \in (0,1)$ zachodziło (1.2), tzn.

$$p\mu + (1-p)\nu = \mu * \nu.$$

Okazuje się, że w pewnych przypadkach problem ten ma interesujące rozwiązania. Miarę znakowaną ν spełniającą powyższą równość oznaczamy przez $G^p(\mu)$.

Przykład 1.17. *Niech π będzie rozkładem Poissona, tzn.*

$$\pi = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\delta_k, \quad \lambda > 0.$$

Funkcja charakterystyczna tego rozkładu ma postać $\widehat{\pi}(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$. Mamy

$$G^p(\widehat{\pi}(t)) \;=\; \frac{p\widehat{\pi}(t)}{\widehat{\pi}(t)-(1-p)} = \frac{pe^{\lambda(e^{it}-1)}}{e^{\lambda(e^{it}-1)}-(1-p)} = \frac{p}{1-(1-p)e^{-\lambda(e^{it}-1)}}.$$

Dla $1-p < e^{-2\lambda}$, mamy $|(1-p)e^{-\lambda(e^{it}-1)}| = (1-p)e^{-\lambda(\cos t-1)} < 1$ i możemy napisać dalej

$$G^p(\widehat{\pi}(t)) \;=\; p\sum_{k=0}^{\infty}\left((1-p)e^{-\lambda(e^{it}-1)}\right)^k = p\sum_{k=0}^{\infty}((1-p)e^{\lambda})^k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda k)^n}{n!}e^{itn}$$

$$= \quad p\sum_{k=0}^{\infty}((1-p)e^{\lambda})^k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda k)^n}{n!}\int_{\mathbb{R}}e^{itx}\delta_n(dx)$$
$$= \quad \int_{\mathbb{R}}e^{itx}\left(p\sum_{k=0}^{\infty}((1-p)e^{\lambda})^k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda k)^n}{n!}\delta_n\right)(dx).$$

Wnioskujemy, że dla p spełniającego $1-p<e^{-2\lambda}$ funkcja $G^p(\widehat{\pi}(t))$ jest transformatą Fouriera miary znakowanej

$$G^p(\pi)=p\sum_{k=0}^{\infty}((1-p)e^{\lambda})^k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda k)^n}{n!}\delta_n=p\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^n}{n!}\left(\sum_{k=0}^{\infty}k^n((1-p)e^{\lambda})^k\right)\delta_n.$$

Przy założeniu $0<1-p<e^{-2\lambda}$, mamy $0<(1-p)e^{\lambda}<e^{-\lambda}<1$. Zatem na mocy wzoru 5.2.2.2 [37] *szereg $\sum_{k=0}^{\infty}k^n((1-p)e^{\lambda})^k$ jest zbieżny dla każdego $n=0,1,2,\ldots$ i jego suma wynosi*

$$\left(x\frac{d}{dx}\right)^{\circ n}\frac{1}{1-x}\bigg|_{x=(1-p)e^{\lambda}},$$

gdzie $\left(x\frac{d}{dx}\right)^{\circ n}$ oznacza n-krotne złożenie operatora $x\frac{d}{dx}$ działającego na przestrzeni funkcji różniczkowalnych. Przyjmowane jest dodatkowo, że $\left(x\frac{d}{dx}\right)^{\circ 0}(f(x))=f(x)$. Stąd ostatecznie możemy napisać, że przy warunku $1-p<e^{-2\lambda}$ mamy

$$G^p(\pi)=p\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^n}{n!}\left(x\frac{d}{dx}\right)^{\circ n}\frac{1}{1-x}\bigg|_{x=(1-p)e^{\lambda}}\delta_n.$$

Przykład 1.18. *Niech π będzie, jak w poprzednim przykładzie, rozkładem Poissona z parametrem $\lambda>0$ i niech $p\in(0,1)$. Złożona geometryczna miara probabilistyczna $\mu=T_0^{1-p}(\pi)$ ma funkcję charakterystyczną postaci*

$$\widehat{\mu}(t)=T_0^{1-p}(\widehat{\pi}(t))=\frac{1-p}{1-pe^{\lambda(e^{it}-1)}}.$$

Transformata Fouriera dla $G^p(\mu)$ jest równa

$$G^p(\widehat{\mu}(t))=\frac{pT_0^{1-p}(\widehat{\pi}(t))}{T_0^{1-p}(\widehat{\pi}(t))-(1-p)}=e^{-\lambda(e^{it}-1)}=e^{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\lambda e^{it})^k}{k!}.$$

Zatem $G^p(\mu)$ jest znakowaną miarą skończoną oraz

$$G^p(\mu) = e^{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^k}{k!} \delta_k.$$

Miarę $G^p(\mu)$ z tego przykładu można by nazwać znakowaną miarą Poissona albo miarą Poissona z ujemną intensywnością (z ujemnym parametrem) w odróżnieniu do rozkładu Poissona, w którym intensywność jest liczbą dodatnią.

Powyższe i inne przykłady skłaniają do rozważań nad wynikami transformacji $G^p(\mu)$, gdy miara μ ma atom w zerze i nie jest trywialna. Wydaje się, że na ogół $G^p(\mu)$ nie będzie wtedy miarą probabilistyczną.

Twierdzenie 1.19. *Niech $\eta \in \mathcal{P}$, $s \in (0,1)$ i niech $\mu = (1-s)\delta_0 + s\eta$.*
1) Jeśli $p > 2s$, to $G^p(\mu)$ jest miarą znakowaną zdefiniowaną przez

$$G^p(\mu) = \frac{p(1-s)}{p-s}\delta_0 + \frac{p(1-p)}{p-s} \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{s}{p-s}\right)^k \eta^{*k}.$$

2) Jeśli $p = 2s$ i zachodzi $|\widehat{\eta}(t)| < 1$ dla każdego $t \neq 0$, to $G^p(\mu)$ jest miarą znakowaną postaci

$$G^p(\mu) = (2-p)\delta_0 + 2(1-p) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \eta^{*k}.$$

Dowód. 1) Zauważmy najpierw, że funkcja $G^p(\widehat{\mu})$ może być zapisana w następujący sposób:

$$G^p(\widehat{\mu}) = p + (1-p) \frac{\frac{p}{p-s}}{1 + \frac{s}{p-s}\widehat{\eta}}.$$

Przy założeniu $p > 2s$ mamy więc $0 < s/(p-s) < 1$ i możemy napisać

$$G^p(\widehat{\mu}) = p + \frac{p(1-p)}{p-s} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{s}{p-s}\right)^k \widehat{\eta}^k \tag{1.9}$$

$$= \frac{p(1-s)}{p-s} + \frac{p(1-p)}{p-s} \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{s}{p-s}\right)^k \widehat{\eta}^k.$$

Łatwo zauważyć, że $G^p(\widehat{\mu})$ jest transformatą Fouriera miary $G^p(\mu)$ zdefiniowanej w twierdzeniu.

2) Niech $p = 2s$. Zauważmy, że

$$G^p(\widehat{\mu}(t)) = \frac{p(1 - \frac{p}{2} + \frac{p}{2}\widehat{\eta}(t))}{\frac{p}{2} + \frac{p}{2}\widehat{\eta}(t)} = (2 - p + p\widehat{\eta}(t))\frac{1}{1 + \widehat{\eta}(t)}.$$

Ponieważ $|\widehat{\eta}(t)| < 1$ dla $t \neq 0$, więc

$$G^p(\widehat{\mu}(t)) = (2 - p + p\widehat{\eta}(t))\sum_{k=0}^{\infty}(-\widehat{\eta}(t))^k = (2 - p) + 2(1 - p)\sum_{k=1}^{\infty}(-\widehat{\eta}(t))^k.$$

Z uwagi na ciągłość i jednoznaczność transformaty Fouriera otrzymujemy ostatecznie, że miara $G^p(\mu)$ ma postać

$$G^p(\mu) = G^p\left(1 - \frac{p}{2} + \frac{p}{2}\eta\right) = (2 - p)\delta_0 + 2(1 - p)\sum_{k=1}^{\infty}(-\eta)^{*k}.$$

□

Przykład 1.20. *Niech η będzie rozkładem wykładniczym $\Gamma(1, \alpha)$. Wtedy η^{*k} ma rozkład gamma $\Gamma(k, \alpha)$. Niech $\mu = (1 - s)\delta_0 + s\eta$, $s \in (0, 1)$ i niech $2s < p < 1$. Z tw.* 1.19 *mamy*

$$G^p(\mu) = \frac{p(1 - s)}{p - s}\delta_0 + \frac{p(1 - p)}{p - s}\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{s}{p - s}\right)^k\Gamma(k, \alpha).$$

Łatwo zauważyć, że $G^p(\mu)$ ma atom w zerze o masie $\frac{p(1-s)}{p-s}$, a na zewnątrz zera jest absolutnie ciągła względem miary Lebesgue'a ℓ. Absolutnie ciągła część miary $G^p(\mu)$ równa $\widetilde{\Gamma} = \frac{p(1-p)}{p-s}\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{s}{p-s}\right)^k\Gamma(k, \alpha)$ ma pochodną Radona-Nikodyma

$$\begin{aligned}
\frac{d\widetilde{\Gamma}}{d\ell} &= \frac{p(1 - p)}{p - s}\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{s}{p - s}\right)^k\frac{\alpha^k}{(k - 1)!}x^{k-1}e^{-\alpha x}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x) \\
&= \frac{-p(1 - p)s\alpha}{(p - s)^2}e^{-\frac{\alpha p x}{p - s}}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x).
\end{aligned}$$

Zatem absolutnie ciągła część miary $G^p(\mu)$ jest w tym przypadku ujemna i skończona z nośnikiem $[0,\infty)$.

Jeśli $p = 2s$, to z tw. 1.19 otrzymujemy

$$G^p(\mu) = (2-p)\delta_0 + 2(1-p)\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\Gamma(k,\alpha).$$

Ta miara znakowana ma atom w zerze o masie $2-p$, a jej absolutnie ciągła część $\widetilde{\Gamma} = 2(1-p)\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\Gamma(k,\alpha)$ ma pochodną Radona-Nikodyma

$$\begin{aligned}\frac{d\widetilde{\Gamma}}{d\ell} &= 2(1-p)\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\alpha^k}{(k-1)!}x^{k-1}e^{-\alpha x}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)\\ &= -2\alpha(1-p)e^{-2\alpha x}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x).\end{aligned}$$

Przykład 1.21. *Niech η będzie rozkładem Poissona π z parametrem $\lambda > 0$ i niech $\mu = (1-s)\delta_0 + s\eta$. Stosując (1.9) z dowodu tw. 1.19 dostajemy, że dla $p > 2s$*

$$\begin{aligned}G^p(\mu) &= p\delta_0 + \frac{p(1-p)}{p-s}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{s}{p-s}\right)^k\pi^{*k}\\ &= p\delta_0 + \frac{p(1-p)}{p-s}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{s}{p-s}\right)^k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda k)^n}{n!}e^{-\lambda k}\delta_n\\ &= p\delta_0 + \frac{p(1-p)}{p-s}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{s}{p-s}e^{-\lambda}\right)^k k^n\right)\delta_n.\end{aligned}$$

Ponieważ $|se^{-\lambda}/(p-s)| < 1$, więc stosując wzór 5.2.2.2 z [37] otrzymujemy

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{s}{p-s}e^{-\lambda}\right)^k k^n = \left(x\frac{d}{dx}\right)^{\circ n}\left.\frac{1}{1-x}\right|_{x=-\frac{s}{p-s}e^{-\lambda}}.$$

Stąd

$$\begin{aligned}G^p(\mu) &= p\delta_0 + \frac{p(1-p)}{p-s}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\left(x\frac{d}{dx}\right)^{\circ n}\left.\frac{1}{1-x}\right|_{x=-\frac{s}{p-s}e^{-\lambda}}\delta_n\\ &= \left(p + \frac{p(1-p)}{p-s+se^{-\lambda}}\right)\delta_0 +\\ &+ \frac{p(1-p)}{p-s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\left(x\frac{d}{dx}\right)^{\circ n}\left.\frac{1}{1-x}\right|_{x=-\frac{s}{p-s}e^{-\lambda}}\delta_n.\end{aligned}$$

Zatem

$$G^p(\mu) = \frac{p(1-s+se^{-\lambda})}{p-s+se^{-\lambda}}\delta_0 + \frac{p(1-p)}{p-s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\left(x\frac{d}{dx}\right)^{\circ n}\frac{1}{1-x}\bigg|_{x=-\frac{s}{p-s}e^{-\lambda}}\delta_n.$$

Przykład 1.22. *Niech* $\mu = (1-s)\delta_0 + s\eta$, *gdzie* η *jest rozkładem geometrycznym z parametrem* $a \in (0,1)$, *tzn.* $\eta = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a(1-a)^{n-1}\delta_n$. *Wówczas* $\eta^{*k} = \sum\limits_{n=k}^{\infty}\binom{n-1}{n-k}a^k(1-a)^{n-k}\delta_n$, $k \in \mathbb{N}$. *Dla* $p > 2s$ *z tw.* 1.19 *mamy*

$$G^p(\mu) = \frac{p(1-s)}{p-s}\delta_0 + \frac{p(1-p)}{p-s}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{-s}{p-s}\right)^k\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n-1}{n-k}a^k(1-a)^{n-k}\delta_n.$$

Zamiana kolejności sumowania prowadzi do formuły

$$G^p(\mu) = \frac{p(1-s)}{p-s}\delta_0 + \frac{p(1-p)}{p-s}\sum_{n=1}^{\infty}(1-a)^n\delta_n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{n-k}\left(\frac{-sa}{(p-s)(1-a)}\right)^k.$$

Ponieważ dla $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{n-k}x^k = x\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k = x(1+x)^{n-1},$$

więc dostajemy, że

$$\begin{aligned} G^p(\mu) &= \frac{p(1-s)}{p-s}\delta_0 - \frac{sap(1-p)}{(p-s)^2}\sum_{n=1}^{\infty}(1-a)^{n-1}\left(1-\frac{sa}{(p-s)(1-a)}\right)^{n-1} \\ &= \frac{p(1-s)}{p-s}\delta_0 - \frac{sap(1-p)}{(p-s)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{p-s-ap}{p-s}\right)^{n-1}\delta_n, \end{aligned}$$

W powyższych przykładach trudno jest określić, czym jest $G^p((1-s)\delta_0+s\eta)$, gdy $p < 2s$. Prawie pełną charakteryzację $G^p((1-s)\delta_0+s\eta)$ otrzymujemy w szczególnym przypadku dla $\eta = \delta_a$, $a \neq 0$.

Twierdzenie 1.23. *Niech* $\mu = (1-s)\delta_0 + s\delta_a$, $s \in (0,1)$, $a \neq 0$. *Wówczas*

$$G^p(\mu) = \begin{cases} p\delta_0 + (1-p)T_1^{p/s}(\delta_{-a}), & p \in (0,s], \\ p\delta_0 - \dfrac{p(1-p)}{p-s}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{p-s}{s}\right)^k\delta_{-ak}, & p \in (s,2s), \\ \dfrac{p(1-s)}{p-s}\delta_0 + \dfrac{p(1-p)}{p-s}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{s}{p-s}\right)^k\delta_{ak}, & p \in (2s,1). \end{cases}$$

Dowód. Ponieważ $\widehat{\mu}(t) = 1 - s + se^{ita}$, więc łatwo sprawdzić, że

$$G^p\left(\widehat{\mu}(t)\right) \;=\; (1-s)\frac{\frac{p}{s}e^{-ita}}{1-\left(1-\frac{p}{s}\right)e^{-ita}} + s\frac{\frac{p}{s}}{1-\left(1-\frac{p}{s}\right)e^{-ita}}.$$

Teraz widzimy, że jeśli $p \leqslant s$, to

$$G^p(1-s+se^{ita}) = (1-s)T_1^{\frac{p}{s}}\left(e^{-ita}\right) + sT_0^{\frac{p}{s}}\left(e^{-ita}\right) = p + (1-p)T_1^{\frac{p}{s}}(e^{-ita}).$$

Dla $p \in (s, 2s)$ mamy

$$\begin{aligned} G^p\left(\widehat{\mu}(t)\right) &= G^p(1-s+se^{ita}) = \frac{p((1-s)e^{-ita}+s)}{(p-s)e^{-ita}+s} \\ &= \frac{p((1-s)e^{-ita}+s)}{s\left(1-\left(\frac{s-p}{s}\right)e^{-ita}\right)} = \frac{p}{s}\left((1-s)e^{-ita}+s\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{s-p}{s}\right)^k e^{-itak}, \end{aligned}$$

ponieważ $|(s-p)/s| \in (0,1)$. Stąd dla $p \in (s, 2s)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} G^p(\widehat{\mu}(t)) &= \frac{p(1-s)}{s}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{s-p}{s}\right)^k e^{-ita(k+1)} + p\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{s-p}{s}\right)^k e^{-itak} \\ &= p + \frac{p(1-p)}{s-p}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{s-p}{s}\right)^k e^{-itak}. \end{aligned}$$

Łatwo już zauważyć, że jest to transformata Fouriera miary znakowanej określonej w twierdzeniu.

Przypadek $p > 2s$ wynika z tw. 1.19.

□

1.6. Kiedy dwie metody probabilistycznej symetryzacji pokrywają się

W teorii prawdopodobieństwa istnieją dwie metody symetryzowania danej miary μ. Jedna bazuje na uśrednieniu oryginalnej miary i jej symetrycznego odbicia μ^-, druga prowadzi do rozkładu zmiennej losowej $X - X'$, gdzie X i

X' są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie μ. W tym podrozdziale zajmiemy się problemem koincydencji tych dwóch typów symetryzowania miary probabilistycznej μ. Problem ten sprowadza się do szukania rozwiązań równania

$$\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\mu^{-} = \mu * \mu^{-}, \tag{1.10}$$

które w terminach funkcji charakterystycznej można przepisać jako

$$\mathfrak{Re}\widehat{\mu} = |\widehat{\mu}|^2. \tag{1.11}$$

Jest to szczególny przypadek problemem Dugué. Pierwszy przykład funkcji charakterystycznej spełniającej (1.11) można odnaleźć w pracy [5]. D. Dugué odnotowuje tam, że funkcja charakterystyczna $\varphi(t) = \frac{1}{1-it}$ rozkładu wykładniczego $\Gamma(1,1)$ spełnia równanie $\frac{\varphi+\overline{\varphi}}{2} = \varphi\overline{\varphi}$. To znaczy, że dla rozkładu $\Gamma(1,1)$ obie metody probabilistycznej symetryzacji pokrywają się.

Twierdzenie 1.24. *Miara probabilistyczna μ spełnia równanie* (1.10) *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taka, że funkcję charakterystyczną $\widehat{\mu}(t)$ miary μ można przedstawić w postaci*

$$(a)\ \widehat{\mu}(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\exp\{iu(t)\}, \qquad (b)\ \widehat{\mu}(t) = \frac{1}{1 - i\,\mathrm{tg}(u(t)/2)}.$$

Funkcja u jest jedyna, ciągła na $\mathbb{R}$ i $u(-t) = -u(t)$.

Dowód. ($\Rightarrow$). Możemy zapisać $\widehat{\mu}(t) = x(t) + iy(t)$, gdzie $x, y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Korzystając z równania $\mathfrak{Re}\widehat{\mu}(t) = |\widehat{\mu}(t)|^2$, mamy $(2x(t) - 1)^2 + (2y(t))^2 = 1$. Teraz wystarczy zdefiniować $2x(t) - 1 = \cos u(t)$, $2y(t) = \sin u(t)$ i otrzymujemy

$$\widehat{\mu}(t) = \frac{1}{2}(1 + \cos u(t)) + i\frac{1}{2}\sin u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{iu(t)}.$$

Określmy teraz funkcję $h(t)$, zdefiniowaną w podrozdziale 1.4, dla $\widehat{\mu}$ spełniającej równanie (1.11). Korzystając z reprezentacji (a) zauważamy, że

$$h(t) = \frac{1}{\widehat{\mu}(t)} - 1 = \frac{2}{1 + \exp\{iu(t)\}} - 1 = -i\frac{\sin u(t)}{1 + \cos u(t)} = -i\,\mathrm{tg}(u(t)/2).$$

Ponieważ $\widehat{\mu}(t) = 1/(1+h(t))$, to prawdziwa jest również reprezentacja (b). Łatwo sprawdzić, że implikacja przeciwna jest również prawdziwa. Własności funkcji $u(t)$ są implikacjami ogólnych własności funkcji charakterystycznych. $\square$

Przykład 1.25. *Dobrze wiadomo, że następujące miary probabilistyczne spełniają równanie* (1.10):

1. $\mu_1 = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_a,\ a \in \mathbb{R},$

2. $\mu_2(dx) = ae^{-ax}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)dx,\ a > 0.$

Chcemy teraz wyznaczyć funkcje u_1, u_2 dla miar μ_1, μ_2 odpowiednio. Oczywiście $\widehat{\mu}_1(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{ita}$, więc istnieje reprezentacja (a), w której $u_1(t) = at$. Dla funkcji $\widehat{\mu}_2$ mamy

$$\widehat{\mu}_2(t) = \frac{1}{1 - it/a} = \frac{1}{1 - i\,\mathrm{tg}(\mathrm{arc\,tg}(t/a))},$$

więc istnieje reprezentacja (b), w której

$$u_2(t) = 2\,\mathrm{arc\,tg}(t/a).$$

Z tw. 1.24 wiemy, że funkcja charakterystyczna $\widehat{\mu}$ miary probabilistycznej μ spełniającej równanie (1.10) ma postać $\widehat{\mu}(t) = 1/2 + (1/2)e^{iu(t)}$ dla pewnej rzeczywistej funkcji u. Oczywiście $e^{iu(t)}$ nie musi być funkcją charakterystyczną, ale jeśli jest, to $u(t) = at$ dla pewnego $a \in \mathbb{R}$. Wynika to z następującego stwierdzenia:

Stwierdzenie 1.26. *Niech $\mu = (1/2)\delta_0 + (1/2)\eta$, gdzie $\eta \in \mathcal{P}$. Jeśli dla pewnego $p \in (0,1)$ zachodzi $p\mu + (1-p)\mu^- = \mu * \mu^-$, to $\eta = \delta_0$ lub $p = 1/2$ i $\eta = \delta_a$ dla pewnego $a \in \mathbb{R}$.*

Dowód. Z założenia mamy $p\mu + (1-p)\mu^- = \mu * \mu^-$, więc

$$|\widehat{\eta}(t)|^2 + (1-2p)\widehat{\eta}(t) + (2p-1)\overline{\widehat{\eta}(t)} - 1 = 0.$$

Podstawiając $\widehat{\eta}(t) = x(t) + iy(t)$ dochodzimy do układu warunków

$$\begin{cases} x(t)^2 + y(t)^2 & = & 1 \\ (2p-1)y(t) & = & 0. \end{cases}$$

Z pierwszego równania wnioskujemy natychmiast, że $\eta = \delta_a$ dla pewnego $a \in \mathbb{R}$. Z drugiego równania mamy, że $p = 1/2$ lub $y(t) \equiv 0$. Jeśli $y(t) \equiv 0$, to $x(t)^2 \equiv 1$. Stąd $x(t) \equiv 1$ i $\eta = \delta_0$.

□

Własność 1.27. *Jeśli dla $\varphi \in \Phi$ zachodzi (1.11), to $[-1,1] \setminus \{0\} \subset S(\varphi)$.*

Dowód. Skoro φ spełnia warunek $\mathfrak{Re}\varphi(t) = |\varphi(t)|^2$ równoważny warunkowi $(1/2)\varphi(t) + (1/2)\overline{\varphi(t)} = \varphi(t)\overline{\varphi(t)}$, to $G^{1/2}(\varphi(t)) = \overline{\varphi(t)}$. Z drugiej strony $G^{1/2}(\varphi(t)) = \varphi_{-1}(t)$. Zatem $(-1) \in S(\varphi)$ i stąd $[-1,0) \subset S(\varphi)$. Ponieważ zawsze $(0,1] \subset S(\varphi)$, więc otrzymujemy, że $[-1,1] \setminus \{0\} \subset S(\varphi)$.

□

Uwaga 1.28. *Wiemy, że dla $c \in \mathbb{R}$ funkcja charakterystyczna $\varphi(t) = 1/2 + (1/2)e^{itc}$ spełnia równanie (1.11). Można sprawdzić, stosując tw. 1.24, że funkcja h określona dla φ przez (1.4) jest postaci $h(t) = -i\,\mathrm{tg}(ct/2)$. Zatem na mocy powyższej własności mamy*

$$\frac{a}{a - i\,\mathrm{tg}(ct/2)} \in \Phi \quad \forall a \in [-1,1] \setminus \{0\}.$$

2. Rozkłady nieskończenie podzielne

W latach 30-tych ubiegłego stulecia postawiono następujący problem: *niech każdemu rzeczywistemu $a \geqslant 0$ odpowiada zmienna losowa X_a. Zbadać rozkłady zmiennej X_a, dla których spełnione są poniższe postulaty.*

P1. $X_0 \equiv 0$*;*

P2. Dla $0 \leqslant a_1 < a_2 < \infty$ *rozkład* $X_{a_2} - X_{a_1}$ *zależy tylko od różnicy* $a_2 - a_1$*;*

P3. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ *i dowolnego wyboru punktów* $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_n < \infty$ *zmienne losowe* $X_{a_1} - X_{a_0}, X_{a_2} - X_{a_1}, \ldots, X_{a_n} - X_{a_{n-1}}$ *są niezależne.*

Ponieważ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$X_a = \left(X_{\frac{a}{n}} - X_0\right) + \left(X_{\frac{2a}{n}} - X_{\frac{a}{n}}\right) + \cdots + \left(X_a - X_{\frac{(n-1)a}{n}}\right),$$

więc z wymienionych postulatów wynika, że rozkład zmiennej X_a jest rozkładem sumy n niezależnych składników o tym samym rozkładzie. Ten fakt jest punktem wyjścia do przyjmowanej obecnie definicji zmiennej losowej nieskończenie podzielnej i teorii procesów stochastycznych Lévy'ego. Przypomnijmy, że zmienna losowa X, jej funkcja charakterystyczna φ i rozkład $\mu = \mathcal{L}(X)$ są *nieskończenie podzielne* (ID), jeśli

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \exists X_n \quad X \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{n} X_{n,i}, \tag{2.1}$$

gdzie $X_{n,i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ są niezależnymi kopiami zmiennej losowej X_n, tzn. $X_{n,i}$ są niezależne o tym samym rozkładzie co X_n, a symbol „$\stackrel{d}{=}$" oznacza równość według rozkładu. Dla funkcji charakterystycznych warunek (2.1) można zapisać następująco:

$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; \exists \psi_n \in \Phi \;\; \forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(t) = \psi_n(t)^n, \tag{2.2}$$

gdzie ψ_n jest funkcją charakterystyczną zmiennej X_n.

Na początku znalezione zostały dwa typy rozkładów zmiennej X_a spełniających postulaty P1-P3

- typ gaussowski z funkcją charakterystyczną $\exp\{a(itm - \sigma^2 t^2/2)\}$, gdzie $m \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$,
- typ poissonowski z funkcją charakterystyczną $\exp\{a\lambda(e^{ith} - 1)\}$, gdzie $\lambda > 0$, $h \neq 0$.

Dalsze badania doprowadziły do efektywnych wzorów na nieskończenie podzielną funkcję charakterystyczną rozkładu ze skończonym drugim momentem (reprezentacja kanoniczna A.N. Kołmogorowa, zob. np. tw. 5.5.3 w [27]), aby ostatecznie otrzymać wzory prawdziwe dla każdej nieskończenie podzielnej funkcji charakterystycznej (reprezentacja kanoniczna Lévy'ego - Chinczyna, zob. np. tw. 5.5.1 w [27] i reprezentacja kanoniczna P. Lévy'ego, zob. np. tw. 5.5.2 w [27]). Z uwagi na potrzeby tej pracy podamy tylko pewien warunek wystarczający na to, aby funkcja charakterystyczna była nieskończenie podzielna.

Lemat 2.1. (K. Sato [42] str. 32). *Niech $\varphi \in \Phi$. Jeśli istnieje $m \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \geqslant 0$ oraz skończona miara ν taka, że*

$$\ln \varphi(t) = itm - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{itx} - 1\right) \nu(dx), \tag{2.3}$$

to $\varphi \in \mathrm{ID}$.

Uwaga 2.2. *Jeśli $\varphi \in \mathrm{ID}$, to $\varphi(t) \neq 0$ dla każdego t.*

Wiele informacji o rozkładach ID i ich własnościach znaleźć można np. w [9], [27], [40], [42].

W obecnej chwili bardzo dobrze zbadane są pewne podklasy rozkładów nieskończenie podzielnych. Z punktu widzenia tej rozprawy wspomnimy tu tylko o rozkładach stabilnych (St) i semistabilnych (Se). Przypomnijmy (zob. np. Samorodnitsky, Taqqu [41] def. 1.1.4), że zmienna losowa X jest *stabilna* (St), jeśli

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \exists a_n > 0 \ \exists b_n \in \mathbb{R} \quad a_n X + b_n \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{n} X_i, \tag{2.4}$$

gdzie X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ są niezależnymi kopiami zmiennej X. Dla jej funkcji charakterystycznej φ mamy

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \exists a_n > 0 \ \exists b_n \in \mathbb{R} \ \forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(a_n t) e^{itb_n} = \varphi(t)^n. \tag{2.5}$$

Zmienna losowa X jest *semistabilna* (Se) (zob. np. Maejima [28] lub Sato [42] def. 13.1, str. 69), jeśli jej funkcja charakterystyczna φ spełnia warunek

$$\exists a \in (0,1) \ \exists r \in (0,1) \ \exists b \in \mathbb{R} \ \forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(at) e^{itb} = \varphi(t)^r. \tag{2.6}$$

Pomiędzy omawianymi rozkładami zachodzą relacje

$$\mathrm{St} \subset \mathrm{Se} \subset \mathrm{ID}.$$

Jeśli w (2.4) i (2.5) przyjmiemy $b_n = 0$ dla każdego n, to warunki te będą definiować odpowiednio zmienną losową i funkcję charakterystyczną *ściśle stabilną* (SSt). Podobnie, jeśli w (2.6) przyjmiemy $b = 0$, to funkcję charakterystyczną φ spełniającą $\varphi(at) = \varphi(t)^r$ dla pewnych $a, r \in (0,1)$ nazywamy *ściśle semistabilną* (SSe). Odnotujmy jeszcze, że jeśli dla każdego $a \in (0,1)$ istnieją $r \in (0,1)$ i $b \in \mathbb{R}$ takie, że $\varphi(at)e^{itb} = \varphi(t)^r$, to φ jest stabilna ([42] str. 69).

Dla takich zmiennych losowych i ich rozkładów mamy (zob. np. Sato [42], Shimizu [43])

$$\mathrm{SSt} \subset \mathrm{St}, \quad \mathrm{SSe} \subset \mathrm{Se} \quad \text{oraz} \quad \mathrm{SSt} \subset \mathrm{SSe}.$$

W teorii rozkładów typu ID i St pojawiają się pojęcia obszarów częściowego i pełnego przyciągania. Mówimy, że zmienna losowa Y należy do *obszaru pełnego przyciągania* (DA) zmiennej X, jeśli dla pewnych ciągów $\{a_n\} \subset \mathbb{R}^+$, $\{b_n\} \subset \mathbb{R}$ zachodzi

$$\frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - b_n) \xrightarrow{d} X, \text{ gdy } n \to \infty, \tag{2.7}$$

gdzie Y_i są niezależnymi kopiami zmiennej Y, a „$\xrightarrow{d}$" oznacza zbieżność według rozkładu. Jeśli w powyższym $b_n = 0$ dla $n \in \mathbb{N}$, to mówimy, że Y należy do *obszaru pełnego przyciągania w ścisłym sensie* zmiennej X.
Jeśli dla pewnego rosnącego ciągu $\{k_n\} \subset \mathbb{N}$ zachodzi

$$\frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^{k_n}(Y_i - b_n) \xrightarrow{d} X, \text{ gdy } n \to \infty, \tag{2.8}$$

to mówimy, że Y należy do *obszaru częściowego przyciągania* (DPA) zmiennej X. Jeśli w powyższym $b_n = 0$ dla $n \in \mathbb{N}$, to mówimy, że Y należy do *obszaru częściowego przyciągania w ścisłym sensie* zmiennej X.
Udowodniono, że jeśli zmienna losowa ma niepusty obszar częściowego przyciągania, to jest nieskończenie podzielna; jeśli natomiast ma ona niepusty obszar pełnego przyciągania, to jest stabilna (zob. np. Sato [42], tw. 15.7). Rezygnując z założenia, że Y_n mają ten sam rozkład otrzymuje się poprzez (2.7) rozkłady zwane samorozkładalnymi (zob. np. Lévy [24] str. 192 lub Sato [42] tw. 15.3, str. 91). Nakładając nowe wymagania, np. na ciąg $\{k_n\}$ (lemat poniżej), otrzymujemy warunek określający obszar częściowego przyciągania dla zmiennej losowej semistabilnej.

Lemat 2.3. (D. Mejzler [33], lemat 2.1). *Jeśli istnieją: ciąg $\{Y_n\}$ zmiennych losowych niezależnych i o jednakowym rozkładzie, ciągi liczbowe $\{a_n\} \subset \mathbb{R}^+$, $\{b_n\} \subset \mathbb{R}$, rosnący ciąg $\{k_n\} \subset \mathbb{N}$, $k_n/k_{n+1} \to r \in (0,1)$, dla których*

$$\frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^{k_n} Y_i - b_n \xrightarrow{d} X, \textit{ gdy } n \to \infty, \tag{2.9}$$

gdzie X jest niezdegenerowaną zmienną losową z funkcją charakterystyczną φ, to

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \in (0,1), \qquad \frac{b_n a_n}{a_{n+1}} - \frac{b_{n+1} k_n}{k_{n+1}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} b, \ \ |b| < \infty$$

oraz

$$\varphi(at)e^{itb} = \varphi(t)^r \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

co oznacza, że X jest zmienną losową semistabilną.

Lemat 2.4. (D. Mejzler [33], tw. 2.1). *Dla zmiennej losowej X zachodzi* (2.9) *z takimi samymi jak w lemacie 2.3 założeniami o ciągach liczbowych $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{k_n\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy X jest typu* Se.

Lemat 2.5. (D. Mejzler [33], tw. 2.3). *Jeśli* (2.9) *zachodzi z warunkiem $k_n/k_{n+1} \to 1$, to X jest zmienną losową stabilną.*

W tw. 1.2 [28] M. Maejima odnotowuje, że jeśli niezdegenerowana zmienna X z funkcją charakterystyczną φ jest semistabilna, to istnieje jedyne $\alpha \in (0, 2]$ takie, że $a = r^{1/\alpha}$ dla dowolnych r i a spełniających (2.6) z pewnym $b \in \mathbb{R}$.

Lemat 2.6. (K. Sato [42], stwierdzenie 14.9, str. 83). *Niech φ będzie semistabilna i niech dla pewnych stałych $r \in (0,1)$, $\alpha \in (0,2)$, $b \in \mathbb{R}$ będzie spełnione $\varphi(at)e^{itb} = \varphi(t)^r$, gdzie $a = r^{1/\alpha}$. Wówczas*

$$\ln\varphi(t) = \begin{cases} -|t|^\alpha(H_1(t) + iH_2(t)) + itm_0, & \textit{gdy} \quad \alpha \in (0,1), \\ -|t|(H_1(t) + iH_2(t)) + itm_1, & \textit{gdy} \quad \alpha = 1, \\ -|t|^\alpha(H_1(t) + iH_2(t)) + itm_2, & \textit{gdy} \quad \alpha \in (1,2), \end{cases} \tag{2.10}$$

gdzie

- *m_0, m_1, m_2 są pewnymi stałymi,*
- *H_1 jest nieujemną funkcją ciągłą na $\mathbb{R}_0$ spełniającą $H_1(at) = H_1(t)$,*

- H_2 *jest rzeczywistą funkcją ciągłą na* $\mathbb{R}_0$ *spełniającą dla pewnej stałej* β

$$H_2(at) = \begin{cases} H_2(t), & gdy \quad \alpha \neq 1, \\ H_2(t) + \beta \operatorname{sgn}(t), & gdy \quad \alpha = 1. \end{cases}$$

W kolejnym rozdziale będziemy rozważać sumy losowe zmiennych losowych, tzn. sumy o losowej liczbie składników. Interesować nas będą własności granic (w sensie zbieżności według rozkładu) ciągów geometrycznych sum losowych. Problemem zbieżności ciągów sum o losowym indeksie zajmowano się już w latach 60-tych poprzedniego wieku. Największe znaczenie dla rozwoju tego zagadnienia wniosło tzw. „twierdzenie transferowe" opublikowane w 1969 roku przez B.V. Gnedenko i G. Fahima [6]. Nazwa twierdzenia uzasadniana jest faktem, że istnienie rozkładu granicznego dla sumy nielosowej liczby składników transferowane jest do wyniku istnienia rozkładu granicznego dla sumy o losowej liczbie składników.

Lemat 2.7. (*Twierdzenie transferowe*, B.V. Gnedenko [7]). *Dla każdego* $n \in \mathbb{N}$ *niech* $\{\xi_{n,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ *będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie. Niech* $\{k_n\} \subset \mathbb{N}$, $k_n \to \infty$. *Ponadto, niech* Θ_n *będzie zmienną losową o wartościach naturalnych niezależną od* $\{\xi_{n,k}\}$ *dla każdego* $n \in \mathbb{N}$. *Jeśli*

$$P\left(\sum_{k=1}^{k_n} \xi_{n,k} < x\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} F(x) \quad oraz \quad P\left(\frac{\Theta_n}{k_n} < x\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} G(x),$$

gdzie F, G *są dystrybuantami i* F *ma funkcję charakterystyczną* φ, *to*

$$P\left(\sum_{k=1}^{\Theta_n} \xi_{n,k} < x\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} H(x),$$

gdzie H *jest dystrybuantą rozkładu o funkcji charakterystycznej*

$$\psi(t) = \int_0^\infty \varphi(t)^s dG(s).$$

Rozkład graniczny jest więc mieszaniną splotową rozkładu o dystrybuancie F względem rozkładu o dystrybuancie G. Wiadomo ponadto (zob. np. [32]), że jeśli F i G są nieskończenie podzielne, to H też jest nieskończenie podzielna.

3. Rozkłady geometrycznie nieskończenie podzielne

Geometrycznie nieskończenie podzielne zmienne losowe pojawiły się w odpowiedzi na pytanie W.M. Zołotariewa o charakteryzację takich zmiennych losowych X, dla których byłby spełniony warunek

$$\forall p \in (0,1) \ \exists X_p \quad X \stackrel{d}{=} \epsilon_p X + X_p, \tag{3.1}$$

gdzie ϵ_p, X, X_p są niezależnymi zmiennymi losowymi, ϵ_p ma rozkład dwupunktowy $P(\epsilon_p = 0) = p$, $P(\epsilon_p = 1) = 1 - p$.

Pionierską pracą na ten temat jest praca [11] opublikowana w 1984 roku. Od tego czasu rozkłady geometrycznie nieskończenie podzielne zyskały na popularności, zwłaszcza pewna podklasa zwana rozkładami geometrycznie stabilnymi. Takie rozkłady pojawiły się w modelach teorii niezawodności i teorii odnowy. Z uwagi na własność ciężkich ogonów rozkładów geometrycznie stabilnych pojawiły się one również w modelach matematyki finansowej. Rozkłady geometrycznie stabilne, do których należą rozkłady Linnika, Mittaga-Lefflera, Laplace'a oraz asymetryczny rozkład Laplace'a i rozkład wykładniczy są bardzo użyteczne z praktycznego punktu widzenia. Bogaty przegląd wiedzy o rozkładach geometrycznie stabilnych można znaleźć w pracach T.J. Kozubowskiego [16], [17] oraz T.J. Kozubowskiego i S.T. Racheva [21], [22].

3.1. Rozkłady geometrycznie nieskończenie podzielne i ich podklasy

W tym rozdziale Θ_p oznaczać będzie zmienną losową o rozkładzie geometrycznym z parametrem $p \in (0,1)$, tzn. $P(\Theta_p = k) = p(1-p)^{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots$ Przywołamy teraz pewne fundamentalne własności zmiennych losowych należących do zbioru geometrycznie nieskończenie podzielnych, rozpoczynając od definicji używanych w literaturze.

Zmienna losowa X jest *geometrycznie nieskończenie podzielna* (GID), jeśli

$$\forall p \in (0,1)\ \exists X_p \quad X \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{\Theta_p} X_{p,i}, \tag{3.2}$$

gdzie $X_{p,i}$, $i = 1, 2, \ldots$ są niezależnymi kopiami zmiennej losowej X_p, Θ_p jest niezależna od $\{X_{p,1}, X_{p,2}, \ldots\}$. Można sprawdzić, że warunki (3.1) i (3.2) są równoważne.

Zmienna losowa X jest *geometrycznie ściśle stabilna* (GSSt), jeśli

$$\forall p \in (0,1)\ \exists a_p > 0 \quad X \stackrel{d}{=} a_p \sum_{i=1}^{\Theta_p} X_i, \tag{3.3}$$

gdzie X_i, $i = 1, 2, \ldots$ są niezależnymi kopiami zmiennej losowej X, Θ_p niezależna od $\{X_1, X_2, \ldots\}$.

Zmienna losowa X jest *geometrycznie stabilna* (GSt), jeśli istnieje zmienna losowa Y oraz stałe $a_p > 0$, $b_p \in \mathbb{R}$ takie, że

$$a_p \sum_{i=1}^{\Theta_p} (Y_i + b_p) \xrightarrow{d} X, \quad \text{gdy } p \to 0, \tag{3.4}$$

gdzie Y_i, $i = 1, 2, \ldots$ są niezależnymi kopiami zmiennej losowej Y, Θ_p niezależna od $\{X_1, X_2, \ldots\}$.

Zmienna losowa X jest *geometrycznie ściśle semistabilna* (GSSe), jeśli

$$\exists p \in (0,1)\ \exists a > 0 \quad aX \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{\Theta_p} X_i, \tag{3.5}$$

gdzie X_i, $i = 1, 2, \dots$ są niezależnymi kopiami zmiennej losowej X, Θ_p niezależna od $\{X_1, X_2, \dots\}$. Niektórzy z autorów nazywają je geometrycznie prawostronnie semistabilnymi (geometrically-right-semistable, zob. Mohan, Vasudeva, Hebbar [35]) lub geometrycznie semistabilnymi (zob. Borowiecka [3]). Proponujemy nazwę geometrycznie ściśle semistabilne z uwagi na jednoznaczne powiązanie tych rozkładów z rozkładami ściśle semistabilnymi.

Z definicji zmiennych losowych typów GID, GSSt, GSt, GSSe otrzymujemy następujące relacje

$$\mathrm{GSSt} \ \subset \mathrm{GID}, \quad \mathrm{GSSt} \subset \mathrm{GSt} \quad \text{i} \quad \mathrm{GSSt} \subset \mathrm{GSSe}.$$

W świetle tw. 3.2 z pracy [35] widzimy, że

$$\mathrm{GSSe} \subset \mathrm{GID}.$$

Będziemy mówić, że funkcja charakterystyczna φ zmiennej losowej X (rozkład $\mu = \mathcal{L}(X)$) jest typu GID (GSSt, GSt, GSSe), jeśli X ma tę własność.

Zostało dowiedzione (zob. tw. 2, tw. 3 w [11], tw. 2.1 w [16] oraz tw. 3.1 w [35]), że dla $\varphi \in \Phi$ zachodzi następująca równoważność:

$$\varphi \text{ jest typu } \left\{ \begin{array}{c} \mathrm{GID} \\ \mathrm{GSSt} \\ \mathrm{GSt} \\ \mathrm{GSSe} \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \psi = \exp\{1 - 1/\varphi\} \text{ jest typu } \left\{ \begin{array}{c} \mathrm{ID} \\ \mathrm{SSt} \\ \mathrm{St} \\ \mathrm{SSe} \end{array} \right\}. \tag{3.6}$$

Teraz dla funkcji charakterystycznej φ typu GID możemy napisać

$$\varphi = \frac{1}{1 - \ln \psi} = \int_0^\infty \psi^s e^{-s} ds. \tag{3.7}$$

Stąd φ jest mieszaniną splotową nieskończenie podzielnej funkcji charakterystycznej $\psi = \exp\{1 - 1/\varphi\}$ względem rozkładu wykładniczego. W konsekwencji φ jest nieskończenie podzielna. Stąd

$$\mathrm{GID} \ \subset \ \mathrm{ID}.$$

Wniosek 3.1. *Niech $\psi \in \Phi \cap \mathrm{ID}$. Wówczas dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi*

$$\varphi_n = \frac{1}{1 + \ln(1 + \ln(1 + \cdots + \ln(1 - \ln\psi))} \in \mathrm{GID}.$$

Symbole: 1 *i* ln *występują w mianowniku* n *razy.*

Dowód. Niech $f(x) = \frac{1}{1-\ln x}$. Zauważmy, że $\varphi_n = f^{\circ n}(\psi)$, gdzie $f^{\circ 1}(x) = f(x)$ i $f^{\circ(n+1)}(x) = f(f^{\circ n}(x))$. Ponieważ ψ jest ID, więc z (3.7) $\varphi = f(\psi)$ jest GID. Skoro GID $\subset$ ID, to $f(\psi)$ jest ID, więc to rozumowanie można powtarzać. Ostatecznie $f^{\circ n}(\psi)$ jest GID dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

Jeśli X jest zmienną losową typu GID, to warunek (3.2) można równoważnie zapisać dla jej funkcji charakterystycznej φ w następujący sposób:

$$\forall p \in (0,1)\ \ \exists \varphi_p \in \Phi\ \ \forall t \in \mathbb{R}\ \ \varphi(t) = \frac{p\varphi_p(t)}{1 - (1-p)\varphi_p(t)}. \tag{3.8}$$

Stąd widzimy, że dla $\varphi \in$ GID i dowolnego $p \in (0,1)$ mamy

$$\varphi_p = \frac{\varphi}{p + (1-p)\varphi} \in \Phi.$$

Okazuje się, że można powiedzieć więcej o tej funkcji.

Stwierdzenie 3.2. *Jeśli $\varphi \in \Phi$ jest typu* GID (GSSt, GSt, GSSe)*, to dla każdego $a \geqslant 0$*

$$\varphi_a = \frac{\varphi}{a + (1-a)\varphi} \tag{3.9}$$

jest funkcją chrakterystyczną również typu GID (GSSt, GSt, GSSe) *oraz*

$$\varphi_a = \int_0^\infty \phi_a^s e^{-s} ds, \tag{3.10}$$

gdzie $\phi_a = \exp\{a(1 - 1/\varphi)\}$ jest typu ID (SSt, St, SSe).

Ponadto, jeśli X jest typu GID *z funkcją charakterystyczną φ, to φ_a zdefinio-*

wana przez (3.9) *odpowiada zmiennej losowej* Z_a *takiej, że*

$$Z_a \stackrel{d}{=} \begin{cases} 0 & \textit{dla} \quad a = 0, \\ X & \textit{dla} \quad a = 1, \\ X_a & \textit{dla} \quad a \in (0,1), \\ \sum_{i=1}^{\Theta_{1/a}} X_i & \textit{dla} \quad a > 1, \end{cases}$$

gdzie X_a *jest zmienną losową określoną przez* (3.2).

Dowód. Ponieważ $\varphi \in$ GID (GSSt, GSt, GSSe), to korzystając z (3.7) możemy napisać $\varphi(t) = 1/(1 - \ln\psi(t))$, gdzie $\psi \in$ ID (SSt, St, SSe). Podstawiając φ do (3.9) otrzymujemy

$$\varphi_a(t) = \frac{1}{1 - \ln(\psi(t)^a)}.$$

Ponieważ dla $a \geqslant 0$ mamy $\psi^a \in$ ID (SSt, St, SSe), więc stosując ponownie (3.7) wnioskujemy, że $\varphi_a \in$ GID (GSSt, St, GSSe).

Ponieważ $\varphi \in$ GID (GSSt, GSt, GSSe), to korzystając z (3.6) wnioskujemy, że $\exp\{1 - 1/\varphi\} \in$ ID (SSt, St, SSe). Tym samym $\phi_a = \exp\{a(1 - 1/\varphi)\}$, gdzie $a \geqslant 0$, jest również funkcją charakterystyczną typu ID (SSt, St, SSe). Zatem mieszanina splotowa (3.10) takiej funkcji charakterystycznej ϕ_a względem rozkładu wykładniczego jest dobrze określona. Teraz wystarczy sprawdzić, że istotnie $\varphi/(a + (1-a)\varphi) = \int_0^\infty \phi_a^s e^{-s} ds$.

Dla dowodu dalszej części stwierdzenia zauważmy, że

- jeśli $a = 0$, to $\varphi_a \equiv 1$,
- jeśli $a = 1$, to $\varphi_a = \varphi$,
- jeśli $a \in (0,1)$, to $\varphi_a = \frac{\varphi}{a+(1-a)\varphi}$ jest funkcją charakterystyczną taką, że $\varphi = \frac{a\varphi_a}{1-(1-a)\varphi_a}$, więc z warunków (3.8) i (3.2) φ_a jest funkcją charakterystyczną zmiennej losowej X_p (dla $p = a$) pojawiającej się w definicji zmiennej losowej typu GID,

• jeśli $a > 1$, to

$$\varphi_a = \frac{(1/a)\varphi}{1-(1-1/a)\varphi} = (1/a)\sum_{k=1}^{\infty}(1-1/a)^{k-1}\varphi^k.$$

Stąd φ_a jest funkcją charakterystyczną geometrycznej sumy losowej $\sum_{i=1}^{\Theta_{1/a}} X_i$.

$\square$

Uwaga 3.3. *Niech $a \geqslant 0$ i niech Z_a będzie zmienną losową z funkcją charakterystyczną $\varphi_a = \varphi/(a+(1-a)\varphi)$, gdzie φ jest typu* GID. *Wówczas*

$$\forall p \in (0,1)\ \ Z_a \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{\Theta_p} Z_{ap,i}.$$

Stwierdzenie 3.4. *Niech $\varphi \in \Phi$. Jeśli dla pewnego $a > 0$ funkcja $\varphi_a = \varphi/(a+(1-a)\varphi) \in$* GID (GSSt, GSt, GSSe)*, to $\varphi \in$* GID (GSSt, GSt, GSSe).

Dowód. Ponieważ $\varphi_a = \varphi/(a+(1-a)\varphi)$ jest typu GID (GSSt, GSt, GSSe), więc z (3.7) mamy

$$\frac{\varphi}{a+(1-a)\varphi} = \frac{1}{1-\ln\phi},$$

gdzie $\phi \in$ ID (SSt, St, SSe). Wyznaczając φ z tego równania otrzymujemy

$$\varphi = \frac{1}{1-\ln(\phi^{1/a})}.$$

Ponieważ $\phi^{1/a}$ jest typu ID (SSt, St, SSe), to stosując ponownie (3.7) wnioskujemy, że φ jest typu GID (GSSt, GSt, GSSe).

$\square$

Warunki (3.2), (3.3), (3.4), (3.5) definiujące zmienne losowe typu GID, GSSt, GSt, GSSe mogą być przeformułowane i podane wprost w terminach rozkładów. Jeśli dla zmiennej losowej X, która jest typu GID, oznaczymy $\mu = \mathcal{L}(X)$, $\mu_p = \mathcal{L}(X_p)$, $\nu_p = \mathcal{L}(\Theta_p)$, to warunek

$$\forall p \in (0,1)\ \exists \mu_p \in \mathcal{P}\ \ \mu = T_1^p(\mu_p),$$

gdzie T_1^p jest operatorem zdefiniowanym w rozdziale 1, definiuje rozkład μ typu GID. W dalszej części rozdziału 3 prezentujemy wyniki dotyczące zmiennych losowych typu GID, GSSt, GSSe w aspekcie twierdzeń granicznych. Zgodnie z konwencją przyjętą w przeważającej części literatury dotyczącej twierdzeń granicznych, przedstawiane twierdzenia formułujemy w języku zmiennych losowych, a nie w języku rozkładów.

3.2. Twierdzenia graniczne związane z geometryczną nieskończoną podzielnością

W tej części pracy podamy nowe twierdzenia graniczne dotyczące zmiennych losowych typu GID i GSSt.

Lemat 3.5. *Niech dane będą zmienne losowe X, Y_p, $p \in (0,1)$. Wówczas*

$$\sum_{i=1}^{\Theta_p} Y_{p,i} \xrightarrow{d} X, \text{ gdy } p \to 0 \iff \sum_{i=1}^{\Theta_p - 1} Y_{p,i} \xrightarrow{d} X, \text{ gdy } p \to 0.$$

Dowód. Niech φ_p, ψ oznaczają odpowiednio funkcje charakterystyczne zmiennych Y_p i X. Jeśli $\sum_{i=1}^{\Theta_p} Y_{p,i} \xrightarrow{d} X$, gdy $p \to 0$, to możemy napisać

$$\frac{p\varphi_p(t)}{1-(1-p)\varphi_p(t)} \xrightarrow{p \to 0} \psi(t) \ \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Ponieważ $|\varphi_p(t)| \leqslant 1$, więc $p\varphi_p(t) \xrightarrow{p\to 0} 0$, czyli mianownik powyższego ułamka musi być również zbieżny do zera. Stąd $(1-p)\varphi_p(t) \xrightarrow{p \to 0} 1$ i w konsekwencji $\varphi_p(t) \xrightarrow{p\to 0} 1$. Zatem

$$\psi(t) = \lim_{p\to 0} \frac{p\varphi_p(t)}{1-(1-p)\varphi_p(t)} = \lim_{p \to 0} \frac{p}{1-(1-p)\varphi_p(t)}.$$

Łatwo sprawdzić, że $p/(1-(1-p)\varphi_p(t))$ jest funkcją charakterystyczną sumy losowej $\sum_{i=1}^{\Theta_p - 1} Y_{p,i}$. Dowód drugiej implikacji jest podobny.

$\square$

Kolejne twierdzenie pokazuje, że do charakteryzacji zmiennych losowych X typu GID można użyć słabszych warunków niż warunek (3.2) i warunek sformułowany w tw. 2.2 (v) w pracy [38] S. T. Racheva i G. Samorodnitsky'ego, tzn.

$$\forall p \in (0,1) \ \exists X_p \quad \sum_{i=1}^{\Theta_p} X_{p,i} \xrightarrow{d} X, \text{ gdy } p \to 0.$$

Twierdzenie 3.6. *Dla zmiennej losowej X następujące warunki są równoważne:*

(a) X jest typu GID*,*

(b) dla dowolnego ciągu $\{p_n\} \subset (0,1)$ istnieją zmienne losowe Y_n, $n \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\sum_{i=1}^{\Theta_{p_n}} Y_{n,i} \xrightarrow{d} X, \text{ gdy } n \to \infty, \tag{3.11}$$

(c) istnieje ciąg $p_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, $p_n \in (0,1)$ i zmienne losowe Y_n, $n \in \mathbb{N}$ takie, że zachodzi (3.11)*.*

Dowód. $(a) \Rightarrow (b)$. Ponieważ X jest typu GID, więc z (3.2) dla każdego $p \in (0,1)$ istnieje zmienna losowa X_p, dla której $\sum_{i=1}^{\Theta_p} X_{p,i} \stackrel{d}{=} X$. Teraz wystarczy zdefiniować $Y_n \stackrel{d}{=} X_{p_n}$ dla każdego p_n z dowolnie wybranego ciągu $\{p_n\} \subset (0,1)$ i mamy

$$\sum_{i=1}^{\Theta_{p_n}} Y_{n,i} \stackrel{d}{=} X \xrightarrow{d} X, \text{ gdy } n \to \infty.$$

Implikacja $(b) \Rightarrow (c)$ jest natychmiastowa.

Żeby pokazać implikację $(c) \Rightarrow (a)$ zauważmy, że z lematu 3.5 mamy

$$S_n = \sum_{i=1}^{\Theta_{p_n}-1} Y_{n,i} \xrightarrow{d} X, \text{ gdy } n \to \infty.$$

Niech φ_n oznacza funkcję charakterystyczną zmiennej Y_n. Wówczas

$$\psi_n(t) = \frac{p_n}{1 - (1 - p_n)\varphi_n(t)}$$

jest funkcją charakterystyczną zmiennej S_n. Zauważmy, że dla każdego $s \in (0, 1)$

$$\phi_s = \frac{\psi_n}{s + (1 - s)\psi_n} = \frac{p_n/(p_n + s(1 - p_n))}{1 - (1 - p_n/(p_n + s(1 - p_n)))\varphi_n}$$

jest funkcją charakterystyczną zmiennej losowej $\sum_{i=1}^{\Theta_{\alpha_n}-1} Y_{n,i}$, gdzie $\alpha_n = p_n/(p_n + s(1 - p_n))$. Widać, że

$$\psi_n = s\phi_s/(1 - (1 - s)\phi_s)$$

dla dowolnego $s \in (0, 1)$, a to oznacza, że ψ_n i S_n są typu GID. Ponieważ $S_n \xrightarrow{d} X$, to stosując tw. 2.2. (ii) z [38], które stwierdza, że zbiór zmiennych losowych typu GID jest zamknięty na zbieżność według rozkładu, wnioskujemy, że X jest typu GID.

□

Twierdzenie 3.7. *Niech $\{p_n\} \subset (0, 1)$, $\{k_n\} \subset \mathbb{N}$ będą takie, że $p_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $k_n p_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$, $0 < a < \infty$. Jeśli X jest typu* GID *z funkcją charakterystyczną φ, to istnieją zmienne losowe Y_n, $n \in \mathbb{N}$ takie, że*

$$\sum_{i=1}^{k_n} Y_{n,i} \xrightarrow{d} Z, \ \ gdy\ n \to \infty,$$

gdzie Z jest zmienną losową typu ID *z funkcją charakterystyczną* $\exp\{a(1 - 1/\varphi)\}$*, a zmienne $Y_{n,i}, i = 1, 2, \ldots, k_n$ są niezależnymi kopiami zmiennej Y_n.*

Dowód. Jeśli X jest typu GID, to spełniony jest warunek (3.2), który w języku funkcji charakterystycznych ma postać (3.8), tzn.

$$\forall p \in (0, 1)\ \ \exists \varphi_p \in \Phi\ \ \forall t \in \mathbb{R}\ \ \ \varphi(t) = \frac{p\varphi_p(t)}{1 - (1 - p)\varphi_p(t)}\ ,$$

gdzie φ_p oznacza funkcję charakterystyczną zmiennej X_p z (3.2). Wyznaczając φ_p z tego równania mamy, że $\varphi_p(t) = \varphi(t)/(p + (1 - p)\varphi(t))$.

Definiujemy $Y_n \overset{d}{=} X_{p_n}$. Wówczas suma $\sum_{i=1}^{k_n} Y_{n,i} \overset{d}{=} \sum_{i=1}^{k_n} X_{p_n,i}$ ma funkcję charakterystyczną $\phi_n = \varphi_{p_n}^{k_n}$. Zauważmy, że dla każdego $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \phi_n(t) &= \left(\frac{\varphi(t)}{p + (1-p)\varphi(t)}\right)^{k_n} = \left(\left(1 + \frac{1/\varphi(t) - 1}{1/p_n}\right)^{1/p_n}\right)^{-k_n p_n} \\ &\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp\{a(1 - 1/\varphi(t))\}. \end{aligned}$$

Wyrażenie $1/\varphi$ jest dobrze określone, ponieważ $\varphi \in \mathrm{GID}$ i w konsekwencji $\varphi \in \mathrm{ID}$, więc $\varphi(t) \neq 0$ dla każdego t. Zauważmy, że funkcja graniczna jest ciągła w $t = 0$, więc z twierdzenia Lévy'ego – Craméra o ciągłości (zob. np. tw. 3.6.1. w [27], str. 48) jest ona funkcją charakterystyczną pewnego rozkładu. Ponieważ φ jest typu GID, więc funkcja $\exp\{1 - 1/\varphi\}$ jest, powołując się na (3.6), funkcją charakterystyczną pewnego rozkładu typu ID. Zatem funkcja $\exp\{a(1 - 1/\varphi)\}$, gdzie $a > 0$, jest również funkcją charakterystyczną typu ID.

□

Wniosek 3.8. *Niech ciągi $\{p_n\}$, $\{k_n\}$ będą takie, jak w tw. 3.7. Jeśli X jest typu* GSSt *z funkcją charakterystyczną φ, to istnieją stałe $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$ takie, że*

$$a_n \sum_{i=1}^{k_n} X_i \overset{d}{\longrightarrow} Y, \text{ gdy } n \to \infty,$$

gdzie Y jest typu SSt *z funkcją charakterystyczną* $\exp\{a(1 - 1/\varphi)\}$, *a zmienne X_i, $i = 1, \ldots, k_n$ są niezależnymi kopiami zmiennej X.*

Dowód. Jeśli X jest typu GSSt, to $\forall p \in (0,1)\ \exists a_p > 0\ X \overset{d}{=} a_p \sum_{i=1}^{\Theta_p} X_i$, gdzie X_i są niezależnymi kopiami X. Oznacza to, że dla φ zachodzi

$$\forall p \in (0,1)\ \exists a_p > 0\ \forall t \in \mathbb{R}\ \ \varphi(t) = \frac{p\varphi(a_p t)}{1 - (1-p)\varphi(a_p t)}.$$

Definiując teraz $a_n = a_{p_n}$ widzimy, że dla funkcji charakterystycznych ϕ_n zmiennych $S_n = a_n \sum_{i=1}^{k_n} X_i$ zachodzi

$$\begin{aligned} \phi_n(t) &= \varphi(a_n t)^{k_n} = \left(\frac{\varphi(t)}{p_n + (1-p_n)\varphi(t)}\right)^{k_n} = \left(\left(1 + \frac{1/\varphi(t) - 1}{1/p_n}\right)^{1/p_n}\right)^{-k_n p_n} \\ &\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp\{a(1 - 1/\varphi(t))\}. \end{aligned}$$

Ponieważ $\exp\{1 - 1/\varphi\}$ jest funkcją charakterystyczną typu SSt, więc również funkcja $\exp\{a(1 - 1/\varphi)\}$ jest typu SSt.

$\square$

3.3. Rozkłady geometrycznie ściśle semistabilne jako rozkłady graniczne

Zmienne losowe typu GSSe rozpatrywane były dotychczas jako zmienne, dla których zachodzi pewien warunek stabilności – warunek (3.5) (zob. [3], [35]). W tym podrozdziale chcemy przedstawić charakteryzacje tych rozkładów w języku twierdzeń granicznych.

Jeśli przez φ oznaczymy funkcję charakterystyczną zmiennej X typu GSSe, to możemy zapisać (3.5) w jego równoważnej postaci

$$\exists p \in (0,1)\ \exists a > 0\ \forall t \in \mathbb{R}\ \ \varphi(at) = \frac{p\varphi(t)}{1-(1-p)\varphi(t)}. \tag{3.12}$$

Wiadomo (zob. [25]), że jeśli warunek (3.12) jest spełniony dla pewnego $a \in (0,1]$, to $\varphi(t) \equiv 1$. Jeśli natomiast $a > 1$ i równanie (3.12) zachodzi dla $\varphi \in \Phi$, to

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{1}{1+|t|^{\alpha}H(t)}, & \text{dla } \ t \in \mathbb{R}_0, \\ 1, & \text{dla } \ t = 0, \end{cases} \tag{3.13}$$

gdzie $\alpha = \alpha(a,p) \in (0,2]$, $H(t) \not\equiv 0$ jest pewną zespoloną funkcją ciągłą, a-multiplikatywnie okresową, tzn. $H(t) = H(at)$ dla każdego $t \in \mathbb{R}_0$. Łatwo sprawdzić, że jeśli φ jest postaci (3.13), to spełnia (3.12).

Możemy zatem powiedzieć, że zmienna losowa X jest niezdegenerowaną zmienną typu GSSe wtedy i tylko wtedy, gdy jej funkcja charakterystyczna φ jest postaci (3.13). W takim przypadku będziemy mówić, że X jest typu GSSe(a,p,H).

Podstawiając φ z (3.13) do równania (3.12) łatwo zauważyć, że $a^{\alpha} = 1/p$. Stąd parametr α w (3.13) spełnia

$$\alpha = -\ln p / \ln a. \tag{3.14}$$

W tym podrozdziale będziemy rozważać ciągi ważonych geometrycznych sum losowych zmiennej losowej X postaci

$$\left\{ a_n \sum_{i=1}^{\Theta_{p^n}} X_i \right\}_{n=1}^{\infty},$$

gdzie $a_n > 0$, $p \in (0,1)$, X_i, $i = 1, 2, \ldots$ oznaczają niezależne kopie ustalonej zmiennej X, a zmienna losowa Θ_{p^n} niezależna od $\{X_1, X_2, \ldots\}$ ma rozkład geometryczny z parametrem p^n. Przedstawimy nowe charakteryzacje zmiennych losowych typu GSSe i pokażemy, że ich rozkłady są rozkładami granicznymi dla ciągów rozkładów ważonych geometrycznych sum losowych.

Uwaga 3.9. *Niech dany będzie ciąg $\{a_n\} \subset \mathbb{R}^+$ i niech $\limsup_{n\to\infty} a_n < \infty$. Jeśli dla zmiennej losowej X spełnione jest*

$$a_n \sum_{i=1}^{\Theta_{p^n}} X_i \xrightarrow{d} Y, \text{ gdy } n \to \infty, \tag{3.15}$$

gdzie Y jest zmienną losową taką, że $P(Y = 0) < 1$, to $a_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Dowód. Niech φ będzie funkcją charakterystyczną zmiennej X. Wtedy (3.15) jest równoważne z

$$\frac{p^n \varphi(a_n t)}{1 - (1 - p^n)\varphi(a_n t)} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \psi(t) \ \ \forall t \in \mathbb{R}, \tag{3.16}$$

gdzie $\psi(t) \not\equiv 1$ jest nietrywialną funkcją charakterystyczną zmiennej Y. Ponieważ $p \in (0,1)$ i $|\varphi(a_n t)| \leqslant 1$ $\forall t \in \mathbb{R}$, to wnioskujemy, że $p^n \varphi(a_n t) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Stąd mianownik ułamka w (3.16) musi być również zbieżny do zera, czyli $(1 - p^n)\varphi(a_n t) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ $\forall t \in \mathbb{R}$. To implikuje, że $\varphi(a_n t) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

Załóżmy teraz, że $a_n \not\to 0$. W takim przypadku istnieje podciąg $\{a_{n_k}\}$ taki, że $a_{n_k} \to a$, gdzie $a \in (0, \infty)$ wobec założeń stwierdzenia. Zauważmy, że

$$\varphi(a_{n_k} t) \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(at).$$

Ponieważ $\varphi(a_n t) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, to $\varphi(at) = 1 \ \forall t \in \mathbb{R}$. Stąd $\varphi(t) \equiv 1$ i

$$\frac{p^n \varphi(a_n t)}{1 - (1 - p^n)\varphi(a_n t)} = 1 \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 1,$$

a to przeczy nietrywialności funkcji ψ.

□

Twierdzenie 3.10. *Niech Y będzie zmienną losową, dla której $\mathbf{E}|Y| < \infty$ i $m = \mathbf{E}Y \neq 0$. Niech $a_n \in \mathbb{R}$ oraz $p \in (0,1)$ będą takie, że $a_n / p^n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} g \neq 0$. Wówczas*

$$a_n \sum_{i=1}^{\Theta_{p^n}} Y_i \stackrel{d}{\longrightarrow} X, \ \ \text{gdy } n \to \infty,$$

gdzie X jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym ze średnią $\mathbf{E}X = gm$.

Dowód. Niech φ oznacza funkcję charakterystyczną zmiennej Y. Z warunku $a_n/p^n \to g$ dostajemy, że $a_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Zatem $\varphi(a_n t) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ i stąd

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p^n \varphi(a_n t)}{1 - (1 - p^n)\varphi(a_n t)} = \lim_{n\to\infty} \frac{p^n}{1 - (1 - p^n)\varphi(a_n t)}.$$

Przy założeniach tego twierdzenia możemy zapisać $\varphi(t) = 1 + itm + o(t)$. Zatem

$$\begin{aligned}
\frac{p^n}{1 - (1 - p^n)\varphi(a_n t)} &= \frac{p^n}{1 - (1 - p^n)(1 + ita_n m + o(a_n t))} \\
&= \left(1 - (1 - p^n)\left(itm \frac{a_n}{p^n} + \frac{a_n t}{p^n} \frac{o(a_n t)}{a_n t}\right)\right)^{-1} \\
&\stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1 - itgm}.
\end{aligned}$$

□

Twierdzenie 3.11. *Niech Y będzie zmienną losową, dla której $\mathbf{E}Y = 0$ i $\sigma^2 = \mathbf{E}Y^2 < \infty$. Niech $a_n \in \mathbb{R}$ oraz $p \in (0,1)$ będą takie, że $a_n^2/p^n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} g \neq 0$. Wówczas*

$$a_n \sum_{i=1}^{\Theta_{p^n}} Y_i \stackrel{d}{\longrightarrow} X, \quad \text{gdy } n \to \infty,$$

gdzie X jest zmienną o rozkładzie Laplace'a z funkcją gęstości $\frac{a}{2}\exp\{-a|x|\}$, $a = (2/g\sigma^2)^{1/2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Dowód. Przy założeniach tego twierdzenia funkcja charakterystyczna φ zmiennej Y może być przedstawiona jako $\varphi(t) = 1 - t^2\sigma^2/2 + o(t^2)$. Postępując podobnie jak w dowodzie poprzedniego twierdzenia dostajemy, że $a_n \to 0$ oraz

$$\begin{aligned}
\frac{p^n}{1-(1-p^n)\varphi(a_n t)} &= \frac{p^n}{1-(1-p^n)(1-a_n^2t^2\sigma^2/2+o(a_n^2t^2))} \\
&= \left(1-(1-p^n)\left(-\frac{t^2\sigma^2}{2}\frac{a_n^2}{p^n}+\frac{a_n^2t^2}{p^n}\frac{o(a_n^2t^2)}{a_n^2t^2}\right)\right)^{-1} \\
&\stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1+gt^2\sigma^2/2}.
\end{aligned}$$

Jak widać funkcja graniczna jest funkcją charakterystyczną rozkładu o gęstości podanej w twierdzeniu.

□

Wniosek 3.12. *Z tw.* 3.6 *wnioskujemy, że jeśli dla pewnej liczby $p \in (0,1)$, pewnego ciągu $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ i pewnej zmiennej losowej Y zachodzi*

$$a_n \sum_{i=1}^{\Theta_{p^n}} Y_i \stackrel{d}{\longrightarrow} X, \quad \text{gdy } n \to \infty,$$

to X jest zmienną losową typu GID.

Z tego wniosku i dwóch poprzednich twierdzeń widać, że rozkład wykładniczy i rozkład Laplace'a są rozkładami geometrycznie nieskończenie podzielnymi.

Gdyby we wniosku 3.12 wzmocnić warunek na stałe a_n i przyjąć $a_n > 0$, to zgodnie z tw. 4.2 w [35] (Mohan, Vasudeva, Hebbar) mielibyśmy, że graniczna zmienna losowa X jest typu GSSe. Kolejne twierdzenie podaje nowe warunki konieczne i dostateczne na to, aby zmienna losowa X była typu GSSe.

Twierdzenie 3.13. *Następujące warunki są równoważne:*

(a) zmienna losowa X jest typu GSSe,

(b) istnieje $p \in (0,1)$ i ciąg $\{a_n\} \subset \mathbb{R}^+$ takie, że

$$a_n \sum_{i=1}^{\Theta_{p^n}} X_i \xrightarrow{d} X, \text{ gdy } n \longrightarrow \infty, \tag{3.17}$$

(c) istnieje $p \in (0,1)$, ciąg $\{a_n\} \subset \mathbb{R}^+$ i zmienna losowa Y takie, że

$$a_n \sum_{i=1}^{\Theta_{p^n}} Y_i \xrightarrow{d} X, \text{ gdy } n \longrightarrow \infty. \tag{3.18}$$

Ponadto, jeśli X jest typu $\mathrm{GSSe}(a,p,H)$*, to stałe a_n w* (3.17) *mogą być zastąpione przez $p^{n/\alpha}(1+o_n)$, gdzie α jest określona przez* (3.14)*, symbol o_n oznacza dowolny ciąg zbieżny do zera.*

Dowód. $(a) \Rightarrow (b)$. Z definicji zmiennej losowej X typu GSSe mamy

$$\exists p \in (0,1) \ \exists a > 0 \ \forall t \in \mathbb{R} \ \ \varphi(at) = \frac{p\varphi(t)}{1-(1-p)\varphi(t)},$$

gdzie φ oznacza funkcję charakterystyczną zmiennej X. Korzystając z indukcji matematycznej otrzymujemy, że

$$\varphi(a^n t) = \frac{p^n \varphi(t)}{1-(1-p^n)\varphi(t)} \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

To dowodzi (3.17) z $a_n = a^{-n}$.
Implikacja $(b) \Rightarrow (c)$ jest oczywista, a implikacja $(c) \Rightarrow (a)$ wynika z tw. 4.2. w [35]. Dla dowodu ostatniego stwierdzenia odnotujmy, że jeśli zmienna losowa

X jest typu GSSe(a,p,H), to jej funkcja charakterystyczna φ jest postaci $1/(1+|t|^\alpha H(t))$, gdzie stała $\alpha = -\ln p/\ln a$. Stąd dla każdego $t \in \mathbb{R}_0$ mamy

$$H(p^{n/\alpha}(1+o_n)t) = H(a^{-n}(1+o_n)t) = H((1+o_n)t) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} H(t).$$

W konsekwencji dla funkcji charakterystycznej ϕ_n geometrycznej sumy losowej $p^{n/\alpha}(1+o_n)\sum_{i=1}^{\Theta_{p^n}} X_i$ mamy

$$\begin{aligned}\phi_n(t) &= \frac{p^n/\left(1+|p^{n/\alpha}(1+o_n)t|^\alpha H(p^{n/\alpha}(1+o_n)t)\right)}{1-(1-p^n)/\left(1+|p^{n/\alpha}(1+o_n)t|^\alpha H(p^{n/\alpha}(1+o_n)t)\right)}\\ &= \frac{1}{1+(1+o_n)^\alpha|t|^\alpha H(p^{n/\alpha}(1+o_n)t)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1+|t|^\alpha H(t)}\end{aligned}$$

dla każdego $t \in \mathbb{R}_0$. Zbieżność w punkcie $t=0$ jest oczywista. Stąd

$$p^{n/\alpha}(1+o_n)\sum_{i=1}^{\Theta_{p^n}} X_i \xrightarrow{d} X, \text{ gdy } n \longrightarrow \infty.$$

$\square$

Wniosek 3.14. *Jeśli zmienna losowa X jest typu* GSSe(a,p,H)*, to istnieje ciąg $\{a_n\} \subset \mathbb{R}^+$ i $\psi \in \Phi$ takie, że dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$*

$$|t|^\alpha H(t) = \lim_{n\to\infty}(1-\psi(a_n t))/p^n,$$

gdzie $\alpha = -\ln p/\ln a$.

Dowód. Ponieważ X jest niezdegenerowaną zmienną losową typu GSSe, więc jej funkcja charakterystyczna jest postaci $1/(1+|t|^\alpha H(t))$ i z tw. 3.13 (c) mamy

$$\frac{1}{1+|t|^\alpha H(t)} = \lim_{n\to\infty}\frac{p^n\psi(a_n t)}{1-(1-p^n)\psi(a_n t)} \tag{3.20}$$

dla pewnych liczb dodatnich a_n i pewnej funkcji charakterystycznej ψ. Ponieważ $p^n\psi(a_n t) \to 0$ i funkcja graniczna w (3.20) nie jest funkcją trywialną, to mianownik ciągu z (3.20) zbiega do zera i w konsekwencji $\psi(a_n t) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$. Teraz wystarczy już tylko zauważyć, że

$$\frac{1}{1+|t|^\alpha H(t)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\psi(a_n t)}{\psi(a_n t) + \frac{1-\psi(a_n t)}{p^n}}.$$

□

Chcemy pokazać, że w punkcie (c) tw. 3.13 możliwe jest (w pewnych przypadkach) zastąpienie stałych a_n przez stałe $p^{n/\alpha}(1+o_n)$. Żeby to udowodnić użyjemy techniki wykorzystanej przez S.T. Racheva do udowodnienia podobnych twierdzeń dla zmiennych losowych typu GSSt. Przypomnijmy zatem definicję i pewne własności ideałowych metryk probabilistycznych.

Niech $\mathcal{X}$ oznacza przestrzeń wszystkich zmiennych losowych na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, a $\mathcal{P}_\mathcal{X}$ – zbiór rozkładów P_X zmiennych $X \in \mathcal{X}$.

Funkcja $\rho : \mathcal{P}_\mathcal{X} \times \mathcal{P}_\mathcal{X} \longrightarrow [0,\infty]$ jest *metryką ideałową rzędu* $s \geqslant 0$, jeśli dla każdych $P_X, P_Y, P_Z \in \mathcal{P}_\mathcal{X}$ i każdego $c \neq 0$ zachodzą warunki

1. $P_X = P_Y \Longrightarrow \rho(P_X, P_Y) = 0$ (*własność identyfikacji*),
2. $\rho(P_X, P_Y) = \rho(P_Y, P_X)$ (*symetria*),
3. $\rho(P_X, P_Y) \leqslant \rho(P_X, P_Z) + \rho(P_Z, P_Y)$ (*nierówność trójkąta*),
4. $\rho(P_X * P_Z, P_Y * P_Z) \leqslant \rho(P_X, P_Y)$ (*regularność*),
5. $\rho(P_{cX}, P_{cY}) = |c|^s \rho(P_X, P_Y)$ (*jednorodność rzędu* s).

Czasami dla większej wygody będziemy pisać $\rho(X, Y)$ zamiast $\rho(P_X, P_Y)$.

W.M. Zołotariew w [48], [49] wprowadził następującą metrykę ideałową rzędu $s \geqslant 0$, która nazywana jest dziś *metryką Zołotariewa*:

$$\zeta_s(P_X, P_Y) = \sup\{|\mathbf{E}f(X) - \mathbf{E}f(Y)| : f \in \mathcal{F}_s\},$$

gdzie

$$\mathcal{F}_s = \{f : |f^{(m)}(x) - f^{(m)}(y)| \leqslant |x-y|^{1/p},\ \ x, y \in \mathbb{R}\},$$

$m \in \{-1, 0, 1, 2, \ldots\}$, $p \in [1, \infty)$ są takie, że $s = m + 1/p$ oraz

$$f^{(-1)}(x) = \int_0^x f(y)dy, \;\; f^{(0)}(x) = f(x), \;\; f^{(m)}(x) = \frac{d^m}{dx^m} f(x) \;\text{ dla } m = 1, 2, \ldots$$

Dla metryki ζ_s prawdziwe jest następujące stwierdzenie (zob. Zołotariew [51]): Niech $\{X_n\}$, $\{Y_n\}$ będą ciągami niezależnych zmiennych losowych z $\mathcal{X}$, a Θ, niezależna od nich, niech będzie zmienną losową o wartościach naturalnych. Wówczas

$$\zeta_s\left(\sum_{i=1}^{\Theta} X_i, \sum_{i=1}^{\Theta} Y_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} P(\Theta \geqslant i)\zeta_s(X_i, Y_i). \tag{3.21}$$

M. Maejima i S.T. Rachev w [29] zaproponowali inną metrykę ideałową. Oznaczmy jak zwykle

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx\right)^{1/p}, \quad 1 \leqslant p < \infty, \;\; \text{i} \;\; \|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} |f(x)|.$$

Dla $m \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ i $p \in [1, \infty]$ oznaczmy

$$\mathcal{F}_{m+1,p} = \{f : \|f^{(m+1)}\|_q \leqslant 1\}, \;\; \text{gdzie} \;\; 1/p + 1/q = 1.$$

Funkcja

$$\theta_s(P_X, P_Y) = \sup\{|\mathbf{E}f(X) - \mathbf{E}f(Y)| : f \in \mathcal{F}_{m+1,p}\}$$

jest metryką ideałową rzędu $s > 0$, $s = m + 1/p$ (zob. Maejima, Rachev [29]). Z dowodu nierówności (3.21) w [51] wnioskujemy, że pozostaje ona prawdziwa, gdy zastąpimy ζ_s przez θ_s.

Przypomnijmy jeszcze bardzo dobrze znaną *metrykę Lévy'ego*. Niech F_X, F_Y będą dystrybuantami zmiennych losowych X i Y. Metryka Lévy'ego definiowana jest następująco:

$$L(P_X, P_Y) = \inf\{\varepsilon > 0 : F_X(x - \varepsilon) - \varepsilon \leqslant F_Y(x) \leqslant F_X(x + \varepsilon) + \varepsilon, \;\; x \in \mathbb{R}\}$$

i metryzuje ona topologię zbieżności według rozkładu. Dla metryk ζ_s, θ_s i L zachodzą nierówności (zob. Zołotariew [51], Maejima i Rachev [29])

$$L(P_X, P_Y)^{s+1} \leqslant C_1(s)\zeta_s(P_X, P_Y), \tag{3.22}$$

$$L(P_X, P_Y)^{s+1} \leqslant C_2(s)\theta_s(P_X, P_Y), \tag{3.23}$$

gdzie $C_1(s), C_2(s)$ są pewnymi stałymi.

Twierdzenie 3.15. *Niech η_s będzie jedną z metryk ideałowych ζ_s lub θ_s. Niech X będzie zmienną losową typu* GSSe(a,p,H)*, a Y zmienną losową, dla której zachodzi warunek* (c) *z twierdzenia* 3.13. *Jeśli $\eta_s(X,Y) < \infty$ dla pewnego $s > \alpha$, gdzie $\alpha = -\ln p/\ln a$, to w* (3.18) *można przyjąć $a_n = p^{n/\alpha}(1 + o_n)$.*

Dowód. Oznaczmy

$$b_n = p^{n/\alpha}(1 + o_n), \quad S_n^X = \sum_{i=1}^{\Theta_{p^n}} X_i, \quad S_n^Y = \sum_{i=1}^{\Theta_{p^n}} Y_i.$$

Z nierówności trójkąta dla metryki Lévy'ego L mamy

$$L(b_n S_n^Y, X) \leqslant L(b_n S_n^Y, b_n S_n^X) + L(b_n S_n^X, X).$$

Pokażemy, że prawa strona tej nierówności zbiega do zera, gdy $n \to \infty$.
Z założeń mamy, że zachodzi warunek (c) z twierdzenia 3.13. Zatem spełniony jest również warunek (b) tego twierdzenia, w którym stałe a_n możemy zastąpić przez stałe b_n. Stąd $L\left(b_n S_n^X, X\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Rozważmy odległość $\eta_s\left(b_n S_n^Y, b_n S_n^X\right)$.
Używając własności jednorodności metryki η_s i własności (3.21), mamy

$$\begin{aligned}\eta_s\left(b_n S_n^Y, b_n S_n^X\right) &= b_n^s \eta_s\left(S_n^Y, S_n^X\right) \leqslant b_n^s \eta_s(Y,X) \sum_{i=1}^{\infty} P\left(\Theta_{p^n} \geqslant i\right) \\ &= b_n^s \eta_s(Y,X)\mathbf{E}\Theta_{p^n} = p^{n(s/\alpha-1)}(1+o_n)^s \eta_s(Y,X) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Stosując (3.22) dla $\eta_s = \zeta_s$ albo (3.23) dla $\eta_s = \theta_s$ wnioskujemy, że

$$L\left(b_n S_n^Y, b_n S_n^X\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Z tego, że $0 \leqslant L(b_n S_n^Y, X) \leqslant L(b_n S_n^Y, b_n S_n^X) + L(b_n S_n^X, X)$ i prawa strona ostatniej nierówności dąży do zera mamy

$$L\left(p^{n/\alpha}(1+o_n)\sum_{i=1}^{\Theta_{p^n}} Y_i, X\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

$\square$

Kolejne twierdzenie będące pewnym odpowiednikiem tw. 3.1 w [38] daje możliwość określenia (w terminach metryk ideałowych) szybkości zbieżności ciągu geometrycznych sum losowych do geometrycznie ściśle semistabilnej granicy.

Twierdzenie 3.16. *Niech X będzie zmienną losową typu* $\mathrm{GSSe}(a, p, H)$ *i niech Y będzie zmienną losową taką, że*

$$p^{n/\alpha} \sum_{i=1}^{\Theta_{p^n}} Y_i \xrightarrow{d} X, \ \textit{gdy } n \longrightarrow \infty,$$

gdzie $\alpha = -\ln p / \ln a$.

Jeśli η_s jest jedną z metryk ideałowych ζ_s lub θ_s, to

$$\eta_s\left(p^{n/\alpha} \sum_{i=1}^{\Theta_{p^n}} Y_i, X\right) \leqslant p^{n(s/\alpha - 1)} \eta_s(X, Y).$$

Dowód. Ponieważ X jest $\mathrm{GSSe}(a, p, H)$, to dla X_i niezależnych kopii X mamy $aX \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{\Theta_p} X_i$, gdzie $a > 1$ i $p \in (0, 1)$ są pewnymi stałymi. Stąd $a^n X \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{\Theta_{p^n}} X_i$. Z równości $\alpha = -\ln p / \ln a$ mamy $a^{-n} = p^{n/\alpha}$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Zatem

$$\eta_s\left(p^{n/\alpha} \sum_{i=1}^{\Theta_{p^n}} Y_i, X\right) = \eta_s\left(p^{n/\alpha} \sum_{i=1}^{\Theta_{p^n}} Y_i, p^{n/\alpha} \sum_{i=1}^{\Theta_{p^n}} X_i\right).$$

Postępując podobnie, jak w dowodzie poprzedniego twierdzenia otrzymujemy

$$\begin{aligned} \eta_s\left(p^{n/\alpha} \sum_{i=1}^{\Theta_{p^n}} Y_i, X\right) &= p^{ns/\alpha} \eta_s\left(\sum_{i=1}^{\Theta_{p^n}} Y_i, \sum_{i=1}^{\Theta_{p^n}} X_i\right) \\ &\leqslant p^{ns/\alpha} \eta_s\left(Y, X\right) \sum_{i=1}^{\infty} P(\Theta_{p^n} \geqslant i) \\ &= p^{ns/\alpha} \eta_s\left(Y, X\right) \mathbf{E}\Theta_{p^n} = p^{n(s/\alpha - 1)} \eta_s(Y, X). \end{aligned}$$

□

Zauważmy, że rozważane zmienne losowe typu GSSe należą do interesującej podklasy zmiennych losowych typu ID, mianowicie do klasy zmiennych c-rozkładalnych. Przypomnijmy, że zmienna losowa X (jej rozkład, funkcja charakterystyczna) jest *c-rozkładalna* (zob. Loève [26]), jeśli istnieje $c \in (0,1)$ i zmienna losowa X_c niezależna od X takie, że

$$X \stackrel{d}{=} cX + X_c. \tag{3.24}$$

Po raz pierwszy zmienne losowe tego typu rozważane były w 1945 roku przez M. Loève'a.

Twierdzenie 3.17. *Zmienne typu* GSSe(a,p,H) *są* $(1/a)$*-rozkładalne.*

Dowód. Wystarczy zauważyć, że dla funkcji charakterystycznej φ zmiennej losowej typu GSSe zachodzi

$$\varphi(t) = \varphi\left(t/a\right)\frac{p}{1-(1-p)\varphi\left(t/a\right)}.$$

Teraz teza wynika z faktu, że funkcja $p/(1-(1-p)\varphi\left(t/a\right))$ jest funkcją charakterystyczną geometrycznej sumy losowej $(1/a)\sum_{i=1}^{\Theta_p-1} X_i$.

□

Z tw. 4 w pracy [26] mamy, że dla $0 < c < 1$ zmienna losowa X jest c-rozkładalna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje zmienna losowa Y taka, że

$$X \stackrel{d}{=} \sum_{k=0}^{\infty} c^k Y_k, \tag{3.25}$$

gdzie Y_k, $k = 0, 1, \ldots$ są niezależnymi kopiami zmiennej Y. Loève zauważył również, że $Y \stackrel{d}{=} X_c$, gdzie X_c jest zmienną losową pojawiającą się w (3.24). Mając na uwadze tw. 3.17 możemy sformułować następujący wniosek.

Wniosek 3.18. *Jeśli X jest zmienną losową typu* GSSe(a,p,H)*, to* $X \stackrel{d}{=} \sum_{k=0}^{\infty}(1/a)^k Y_k$*, gdzie Y_k są niezależnymi kopiami geometrycznej sumy losowej*

$$\frac{1}{a}\sum_{i=1}^{\Theta_p-1} X_i.$$

Okazało się (zob. [26] tw. 1, tw. 2), że klasa rozkładów c-rozkładalnych pokrywa się z klasą rozkładów granicznych dla ciągów unormowanych sum

$$\left\{ \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} Z_k \right\}_{n \in \mathbb{N}},$$

gdzie Z_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi, ale niekoniecznie o jednakowym rozkładzie, a $\{a_n\}$ jest ciągiem liczb dodatnich takim, że

$$a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty, \quad a_n/a_{n+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} c \in (0,1). \tag{3.26}$$

Ponadto, Loève w [26] otrzymał następującą charakteryzację zmiennej losowej Y zdefiniowanej przez (3.25)

$$\frac{Z_n}{a_n} \overset{d}{\longrightarrow} Y, \text{ gdy } n \to \infty.$$

Wniosek 3.19. *Jeśli X jest zmienną losową typu* $\mathrm{GSSe}(a, p, H)$*, to istnieją*

1. *ciąg $\{a_n\} \subset \mathbb{R}^+$ taki, że* (3.26) *zachodzi z $c = 1/a$,*
2. *niezależne zmienne losowe Z_k, $k \in \mathbb{N}$,*

dla których

$$\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} Z_k \overset{d}{\longrightarrow} X, \text{ gdy } n \to \infty \qquad \text{oraz} \qquad \frac{Z_n}{a_n} \overset{d}{\longrightarrow} \frac{1}{a} \sum_{i=1}^{\Theta_p - 1} X_i, \text{ gdy } n \to \infty.$$

Widzimy zatem, że zmienne losowe typu GSSe mogą być również granicami zwykłych, a nie tylko losowych sum zmiennych losowych.

3.4. Rozkłady geometrycznie semistabilne

Wśród zmiennych losowych typu GID rozważaliśmy najczęściej te, które mają własność GSSe lub GSSt. Przypomnijmy, że zmienna losowa X jest typu

GSSt wtedy, gdy spełniony jest warunek (3.3), tzn.

$$\forall p \in (0,1)\ \exists a_p > 0 \ \ a_p \sum_{i=1}^{\Theta_p} X_i \stackrel{d}{=} X.$$

Wiadomo, że istnieje wzajemna odpowiedniość pomiędzy rozkładami GSSt a rozkładami SSt zadana przez (3.6). Wiadomo również, że rozkłady SSt stanowią podklasę rozkładów St. Rozkłady GSt zostały już bardzo dobrze zbadane i wiadomo, że stanowią one klasę szerszą, zawierającą wszystkie rozkłady GSSt. Wśród bogatej listy badaczy i prac poświęconych tej tematyce widać duży wkład T.J. Kozubowskiego w rozwój teorii rozkładów GSt. Jego prace dostarczają wielu informacji o własnościach, charakteryzacji, reprezentacji i zastosowaniach rozkładów GSt. W tej chwili przywołamy jeszcze raz definicję zmiennej losowej typu GSt.

Jeśli istnieje zmienna losowa Y, stałe $a_p > 0$, $b_p \in \mathbb{R}$ takie, że

$$a_p \sum_{i=1}^{\Theta_p} (Y_i + b_p) \xrightarrow{d} X, \text{ gdy } p \to 0, \tag{3.27}$$

to zmienna losowa X jest *geometrycznie stabilna* (typu GSt).

O zmiennej losowej Y mówi się wtedy, że należy do *obszaru pełnego geometrycznego przyciągania* zmiennej X i oznacza się ten fakt jako $Y \in \mathrm{GDA}(X)$ (zob. Kozubowski [16], Kozubowski i Rachev [21]).

Patrząc na warunki definiujące zmienne typu GSSt i GSt łatwo stwierdzić, że istotnie GSSt $\subset$ GSt. Innym kierunkiem rozszerzenia badań w stosunku do badań nad zmiennymi losowymi GSSt było rozważenie równości rozkładów w warunku (3.3) tylko dla pewnej szczególnej wartości parametru p. Klasa rozwiązań takiego problemu jest również szersza niż klasa rozkładów typu GSSt. Tę klasę nazywaliśmy rozkładami typu GSSe. Jednakże klasa ta nie zawiera wszystkich rozkładów typu GSt, ani też klasa rozkładów GSt nie zawiera wszystkich rozkładów typu GSSe. Proponujemy zatem wprowadzić do rozważań jeszcze jedną właściwą podklasę rozkładów typu GID, która zawierać będzie zarówno rozkłady typu GSt, jak i rozkłady typu GSSe. Tę podklasę nazwiemy rozkładami geometrycznie semistabilnymi chociaż, jak wspominaliśmy wcześniej, nazwa ta używana była przez innych autorów w kontekście rozkładów określanych przez nas jako geometrycznie ściśle semistabilne (GSSe). Z treści tw. 3.21 wynika, że jest ona jednak najbardziej właściwa.

Definicja 3.20. *Zmienna losowa X (jej funkcja charakterystyczna i rozkład) jest geometrycznie semistabilna (typu* GSe*), jeśli istnieje zmienna losowa Y, ciągi $\{a_n\} \subset \mathbb{R}^+$, $\{b_n\} \subset \mathbb{R}$ i stała $p \in (0,1)$, dla których zachodzi*

$$a_n \sum_{i=1}^{\Theta_{p^n}} (Y_i + b_n) \xrightarrow{d} X, \text{ gdy } n \to \infty. \tag{3.28}$$

Tak określone zmienne losowe są oczywiście typu GID (zob. tw. 3.6 warunek (c)). Zestawiając definicje zmiennych losowych GSt i GSe łatwo zauważyć, że

$$\text{GSt} \subset \text{GSe}.$$

Jeśli w (3.16) położymy $b_n = 0$, to zgodnie z warunkiem (c) tw. 3.13 zmienna losowa X jest GSSe. Stąd

$$\text{GSSe} \subset \text{GSe}.$$

Przedstawimy teraz pewne twierdzenia charakteryzujące zdefiniowaną właśnie klasę zmiennych losowych typu GSe. Tak jak dla wszystkich rozważanych dotychczas podklas ma miejsce odpowiedniość pomiędzy rozkładami GSe i Se.

Twierdzenie 3.21. *Funkcja charakterystyczna φ jest typu* GSe *wtedy i tylko wtedy, gdy $\psi = \exp\{1 - 1/\varphi\}$ jest funkcją charakterystyczną typu* Se.

Dowód. ($\Rightarrow$). Skoro φ jest typu GSe to z definicji istnieją: $\phi \in \Phi$, $p \in (0,1)$, ciągi $\{a_n\} \subset \mathbb{R}^+$, $\{b_n\} \subset \mathbb{R}$ takie, że

$$\frac{p^n \phi(a_n t) e^{ita_n b_n}}{1 - (1-p^n)\phi(a_n t) e^{ita_n b_n}} \xrightarrow{n\to\infty} \varphi(t) \;\; \forall t \in \mathbb{R}.$$

Oznaczmy $f_n(t) = \phi(a_n t)e^{ita_n b_n}$. Ponieważ φ jest typu ID, więc φ nie ma miejsc zerowych, czyli

$$1 - \frac{1-(1-p^n)f_n(t)}{p^n f_n(t)} = \frac{f_n(t)-1}{p^n f_n(t)} = \frac{\frac{f_n(t)-1}{f_n(t)}}{p^n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 - \frac{1}{\varphi(t)}.$$

Stąd $\frac{f_n(t)-1}{f_n(t)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ i w konsekwencji $f_n(t) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$. Zatem $p^{-n}(f_n(t)-1) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 - 1/\varphi(t)$, a stąd również

$$[p^{-n}](f_n(t)-1) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 - \frac{1}{\varphi(t)}, \tag{3.29}$$

gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x. Zauważmy, że

$$[p^{-n}]\ln f_n(t) = [p^{-n}](f_n(t)-1) + \frac{o(f_n(t)-1)}{f_n(t)-1}\frac{f_n(t)-1}{p^n}\frac{[p^{-n}]}{p^{-n}}. \tag{3.30}$$

Korzystając z (3.29) i (3.30) mamy

$$[p^{-n}]\ln f_n(t) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 - \frac{1}{\varphi(t)},$$

a stąd

$$\phi(a_n t)^{[p^{-n}]} e^{ita_n b_n [p^{-n}]} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp\left\{1 - \frac{1}{\varphi(t)}\right\}.$$

Funkcja graniczna jest ciągła w $t = 0$. Zatem z twierdzenia Lévy'ego – Craméra jest ona funkcją charakterystyczną pewnego rozkładu. Ponieważ $[p^{-n}]/[p^{-n-1}]$ zbiega do p przy $n \to \infty$, to z lematu 2.3 $\exp\{1 - 1/\varphi(t)\}$ jest funkcją charakterystyczną rozkładu semistabilnego.

($\Leftarrow$). Jeśli ψ jest semistabilna, to musi być spełnione równanie $\psi(t)^r = \psi(at)e^{itb}$ dla pewnych $a, r \in (0,1)$, $b \in \mathbb{R}$. Stąd

$$\begin{aligned}
\psi(t) &= [\psi(at)\exp\{itb\}]^{r^{-1}} = \left[\psi(a^2 t)\exp\{itb(a+r)\}\right]^{r^{-2}} \\
&= \left[\psi(a^n t)\exp\left\{itb(a^{n-1} + a^{n-2}r + \cdots + ar^{n-2} + r^{n-1})\right\}\right]^{r^{-n}}.
\end{aligned}$$

Ostatecznie

$$\psi(t) = \begin{cases} \left[\psi(a^n t)\exp\left\{itb\frac{a^n - r^n}{a-r}\right\}\right]^{r^{-n}}, & \text{gdy} \quad a \neq r, \\ \left[\psi(r^n t)\exp\left\{itbnr^{n-1}\right\}\right]^{r^{-n}}, & \text{gdy} \quad a = r. \end{cases}$$

1) Dla $a \neq r$ możemy napisać

$$\frac{\ln\left(\psi(a^n t)\exp\left\{itb\frac{a^n-r^n}{a-r}\right\}\right)}{r^n} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \ln\psi(t). \tag{3.31}$$

Oznaczmy $f_n(t) = \psi(a^n t)\exp\left\{itb\frac{a^n-r^n}{a-r}\right\}$. Wtedy z (3.31) wnioskujemy, że zachodzi $\ln f_n(t) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ i w związku z tym $f_n(t) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$. Stosując w (3.31) rozwinięcie Taylora funkcji $\ln f_n(t)$ do pierwszego składnika otrzymujemy

$$\frac{1}{r^n}(f_n(t)-1)\left(1+\frac{o(f_n(t)-1)}{f_n(t)-1}\right) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \ln\psi(t).$$

Zatem

$$\frac{1}{r^n}(f_n(t)-1) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \ln\psi(t)$$

i ostatecznie dostajemy, że

$$\frac{r^n\psi(a^n t)e^{itb(a^n-r^n)/(a-r)}}{1-(1-r^n)\psi(a^n t)e^{itb(a^n-r^n)/(a-r)}} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-\ln\psi(t)}. \tag{3.32}$$

Ponieważ funkcje występujące po lewej stronie zbieżności (3.32) są, jak łatwo zauważyć, funkcjami charakterystycznymi pewnych geometrycznych sum losowych i funkcja graniczna w (3.32) jest ciągła w $t=0$, więc $1/(1-\ln\psi(t))$ jest na pewno funkcją charakterystyczną pewnej zmiennej losowej X. Ponieważ (3.32) jest równoważna z

$$a^n\sum_{i=1}^{\Theta_{r^n}}\left(Y_i+\frac{b(a^n-r^n)}{a^n(a-r)}\right) \stackrel{d}{\longrightarrow} X, \text{ gdy } n\to\infty,$$

gdzie Y_i są niezależnymi kopiami zmiennej Y o funkcji charakterystycznej ψ, to zgodnie z definicją 3.20 zmienna losowa X jest typu GSe.

2) W przypadku $a = r$ mamy

$$\psi(r^n t)^{r^{-n}}\exp\{itbn/r\} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \psi(t) \ \ \forall t\in\mathbb{R}$$

i postępując w podobny sposób jak dla $a\neq r$ otrzymujemy

$$\frac{r^n\psi(r^n t)e^{itbnr^{n-1}}}{1-(1-r^n)\psi(r^n t)e^{itbnr^{n-1}}} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-\ln\psi(t)},$$

co oznacza, że

$$r^n \sum_{i=1}^{\Theta_{r^n}} \left(Y_i + \frac{bn}{r} \right) \xrightarrow{d} X, \text{ gdy } n \to \infty.$$

□

Z powyższego twierdzenia mamy, że jeśli $\varphi \in \mathrm{GSe}$, to $\varphi = 1/(1 - \ln \psi) = \int_0^\infty \psi^s e^{-s} ds$, gdzie $\psi \in \mathrm{Se} \subset \mathrm{ID}$. Stąd

$$\mathrm{GSe} \subset \mathrm{GID} \subset \mathrm{ID}.$$

Ponieważ dla funkcji $\psi \in \mathrm{Se}$ prawdziwa jest formuła (2.10) z lematu 2.6, to korzystając z niej można uzyskać pewną reprezentację dla $\varphi = 1/(1 - \ln \psi(t)) \in \mathrm{GSe}$.

Twierdzenie 3.22. *Funkcja charakterystyczna φ jest typu* GSe *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\varphi(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + k_n(1 - \psi(t/a_n)) + itb_n} \tag{3.33}$$

dla pewnej funkcji charakterystycznej ψ, pewnych ciągów $\{k_n\} \subset \mathbb{R}^+$, $\{a_n\} \subset \mathbb{R}^+$, $\{b_n\} \subset \mathbb{R}$ takich, że $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} k_n/k_{n+1} = k \in (0, 1]$.

Dowód. ($\Rightarrow$). Jeśli φ jest typu GSe, to z tw. 3.21 $\exp\{1 - 1/\varphi\}$ jest typu Se. Stąd istnieje $\psi \in \Phi$ i ciągi $\{a_n\} \subset \mathbb{R}^+$, $\{b_n\} \subset \mathbb{R}$, $\{k_n\} \subset \mathbb{N}$ spełniające $a_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, $k_n/k_{n+1} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} k \in (0, 1]$, dla których zachodzi

$$\psi(t/a_n)^{k_n} e^{itb_n} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{1-1/\varphi(t)}.$$

Zatem

$$k_n \ln \psi(t/a_n) + itb_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 - 1/\varphi(t)$$

i stosując rozwinięcie Taylora do funkcji $\ln \psi$ mamy

$$k_n(\psi(t/a_n) - 1) \left(1 + \frac{o(\psi(t/a_n) - 1)}{\psi(t/a_n) - 1} \right) + itb_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 - 1/\varphi(t).$$

Stąd

$$k_n(\psi(t/a_n) - 1) + itb_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 - 1/\varphi(t).$$

Teraz już widać, że dla każdego $t \in \mathbb{R}$ mamy

$$\frac{1}{1 + k_n(1 - \psi(t/a_n)) + itb_n} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(t).$$

($\Leftarrow$). Jeśli zachodzi (3.33), to oznaczając $h(t) = 1/\varphi(t) - 1$ możemy zapisać

$$h(t) = \lim_{n\to\infty} \left(k_n(1 - \psi(t/a_n)) + itb_n\right). \tag{3.34}$$

Jeśli przez F oznaczymy teraz dystrybuantę rozkładu z funkcją charakterystyczną ψ, to (3.34) można zapisać w równoważnej postaci jako

$$k_n \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (e^{itx/a_n} - 1) dF(x) \right) - itb_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} -h(t).$$

Ponieważ F jest dystrybuantą miary probabilistycznej, a więc skończonej, więc całka $\int_{-\infty}^{+\infty} (e^{it/a_n x} - 1) dF(x)$ może być traktowana jako logarytm pewnej funkcji charakterystycznej f typu ID (zgodnie z lematem 2.1). Stąd możemy napisać

$$k_n \ln f(t/a_n) - itb_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} -h(t)$$

i w konsekwencji

$$f(t/a_n)^{k_n} e^{-itb_n} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-h(t)},$$

a to oznacza, że również

$$f(t/a_n)^{[k_n]} e^{-itb_n [k_n]/k_n} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-h(t)}.$$

Funkcja $\exp\{-h(t)\} = \exp\{1 - 1/\varphi(t)\}$ jest ciągła w zerze i jako granica funkcji charakterystycznych sama jest funkcją charakterystyczną. Ponieważ $k_n/k_{n+1} \to k$, więc $[k_n]/[k_{n+1}] \to k$. Stosując lemat 2.3 widzimy, że $\exp\{1 - 1/\varphi\}$ jest typu Se. Zatem na mocy tw. 3.21 φ jest typu GSe.

$\square$

Zauważmy, że w tw. 3.22 nie wymagamy, jak to się zwykle zakłada, żeby $k_n \in \mathbb{N}$.

Wniosek 3.23. *Funkcja charakterystyczna φ określona przez* (3.33) *jest*

(a) typu GSSe*, gdy $b_n = 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$;*

(b) typu GSt*, gdy $k_n/k_{n+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$;*

(c) typu GSSt*, gdy $b_n = 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i $k_n/k_{n+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.*

Kolejne twierdzenie pokazuje, że geometryczną semistabilność można scharakteryzować słabszym warunkiem od tego, który mamy w definicji 3.20.

Twierdzenie 3.24. *Zmienna losowa X jest typu* GSe *wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnej zmiennej losowej Y i ciągów $\{a_n\} \subset \mathbb{R}^+$, $\{b_n\} \subset \mathbb{R}$, $\{p_n\} \subset (0,1)$, $p_n \to 0$, $p_{n+1}/p_n \to p \in (0,1]$ zachodzi*

$$a_n \sum_{i=1}^{\Theta_{p_n}} (Y_i + b_n) \xrightarrow{d} X, \text{ gdy } n \to \infty. \tag{3.35}$$

Dowód. Ponieważ implikacja ($\Rightarrow$) jest natychmiastowa, wystarczy uzasadnić przeciwną. Niech φ, ψ oznaczają odpowiednio funkcje charakterystyczne zmiennych X i Y. Mamy zatem

$$\frac{p_n \psi(a_n t) e^{ita_n b_n}}{1 - (1 - p_n)\psi(a_n t) e^{ita_n b_n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(t).$$

Postępując w analogiczny sposób jak w dowodzie warunku koniecznego w tw. 3.21 otrzymamy

$$\psi(a_n t)^{[1/p_n]} e^{ita_n b_n [1/p_n]} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp\{1 - 1/\varphi(t)\},$$

gdzie $[1/p_n]/[1/p_{n+1}] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} p \in (0,1]$. Z lematu 2.3 i lematu 2.5 graniczna funkcja charakterystyczna odpowiada zatem pewnemu rozkładowi typu Se, więc z twierdzenia 3.21 φ jest typu GSe.

$\square$

Na mocy powyższego dowodu możemy odnotować następującą własność.

Uwaga 3.25. *Jeśli dla pewnej zmiennej losowej Y i ciągów $\{a_n\} \subset \mathbb{R}^+$, $\{b_n\} \subset \mathbb{R}$, $\{p_n\} \subset (0,1)$, $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$, $\limsup_{n\to\infty} p_{n+1}/p_n = 1$ zachodzi*

$$a_n \sum_{i=1}^{\Theta_{p_n}} (Y_i + b_n) \xrightarrow{d} X, \text{ gdy } n \to \infty,$$

to X jest typu GSt.

Tw. 3.24 może być alternatywną definicją zmiennej losowej typu GSe. Korzystając z wyrażenia (3.35) definiuje się pojęcie obszaru częściowego geometrycznego przyciągania. Jeśli dla niezdegenerowanych zmiennych losowych X i Y, ciągów $\{a_n\} \subset \mathbb{R}^+$, $\{b_n\} \subset \mathbb{R}$, $\{p_n\} \subset (0,1)$, $p_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ zachodzi

$$a_n \sum_{i=1}^{\Theta_{p_n}} (Y_i + b_n) \xrightarrow{d} X, \text{ gdy } n \to \infty, \tag{3.36}$$

to o Y będziemy mówić, że należy do *obszaru częściowego geometrycznego przyciągania* zmiennej X i będziemy oznaczać ten fakt zapisem $Y \in \mathrm{GDPA}(X)$. Jeśli w (3.35) $b_n = 0$ dla $n \in \mathbb{N}$, to o zmiennej Y powiemy, że należy do *obszaru częściowego geometrycznego przyciągania w ścisłym sensie*. Zmienna losowa X ma niepusty obszar częściowego (pełnego) geometrycznego przyciągania wtedy i tylko wtedy, gdy X jest typu GID (GSt) (zob. tw. 3.6 i definicja GSt). Łatwo zauważyć, że dla ustalonej zmiennej losowej X jej obszar częściowego geometrycznego przyciągania jest niewęższy od jej obszaru pełnego geometrycznego przyciągania.

Uwaga 3.26. *Obszar geometrycznego częściowego przyciągania (w ścisłym sensie) zmiennej losowej X pokrywa się z jej obszarem pełnego geometrycznego przyciągania (w ścisłym sensie), jeśli ciąg p_n pojawiający się w* (3.36) *spełnia warunek* $\limsup_{n\to\infty} p_{n+1}/p_n = 1$.

Kolejne twierdzenie jest odpowiednikiem tw. 4.4 w [35], które mówi, że dla funkcji charakterystycznych φ typu GID i ψ typu ID związanych ze sobą przez

(3.6), obszar częściowego geometrycznego przyciągania dla φ pokrywa się z obszarem częściowego przyciągania dla ψ.

Twierdzenie 3.27. *Niech X będzie zmienną losową typu* GSe *z funkcją charakterystyczną φ, a Z zmienną losową typu* Se *z funkcją charakterystyczną $\psi = \exp\{1 - 1/\varphi\}$. Wówczas dla zmiennej losowej Y zachodzi*

$$Y \in \mathrm{GDPA}(X) \Longleftrightarrow Y \in \mathrm{DPA}(Z).$$

Dowód. Implikacja $\Rightarrow$ wynika w łatwy sposób z dowodu tw. 3.24. Załóżmy teraz, że $Y \in \mathrm{DPA}(Z)$, czyli istnieją ciągi $\{a_n\} \subset \mathbb{R}^+$, $\{b_n\} \subset \mathbb{R}$, $\{k_n\} \subset \mathbb{N}$, $k_n \to \infty$, $k_n/k_{n+1} \to k \in (0,1)$ takie, że

$$a_n \sum_{i=1}^{k_n} (Y_i + b_n) \xrightarrow{d} Z, \text{ gdy } n \to \infty, \tag{3.37}$$

gdzie Y_i są niezależnymi kopiami zmiennej Y.

Niech Θ_{1/k_n} będzie zmienną losową o rozkładzie geometrycznym z parametrem $1/k_n$, czyli zmienną losową o funkcji charakterystycznej $\frac{1/k_n}{e^{-it}-1+1/k_n}$. Mamy

$$\begin{aligned} \frac{1/k_n}{e^{-it/k_n} - 1 + 1/k_n} &= \frac{1/k_n}{1/k_n - it/k_n + o(|t|/k_n)} \\ &= \frac{1}{1 - it + k_n o(|t|/k_n)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-it} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

co oznacza, że

$$\frac{\Theta_{1/k_n}}{k_n} \xrightarrow{d} \Gamma, \text{ gdy } n \to \infty, \tag{3.38}$$

gdzie Γ jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym $\Gamma(1,1)$. Ponieważ zachodzi (3.37) i (3.38), więc stosując lemat 2.7 otrzymujemy

$$a_n \sum_{i=1}^{\Theta_{1/k_n}} (Y_i + b_n) \xrightarrow{d} X, \text{ gdy } n \to \infty,$$

gdzie X ma funkcję charakterystyczną

$$\int_0^\infty \psi(t)^s e^{-s} ds.$$

Zauważmy, że dla $\psi(t) = \exp\{1-1/\varphi(t)\}$ zachodzi $\int_0^\infty \psi(t)^s e^{-s} ds = \varphi(t)$. Zatem $Y \in \mathrm{GDPA}(X)$.

$\square$

Twierdzenie 3.28. *Niech $Y \in$ GDPA(X).*

1) *Jeśli ciąg $\{p_n\}$ w (3.36) ma własność $\limsup_{n\to\infty} p_{n+1}/p_n = p \in (0,1]$, to X jest typu* GSe.

2) *Jeśli dla ciągu $\{p_n\}$ z (3.36) istnieją podciągi $\{p^{(1)}_{n_k}\}$, $\{p^{(2)}_{n_k}\}$ takie, że*

$$p^{(1)}_{n_{k+1}}/p^{(1)}_{n_k} \to p_1 \in (0,1), \quad p^{(2)}_{n_{k+1}}/p^{(2)}_{n_k} \to p_2 \in (0,1)$$

oraz

$$\ln p_1/\ln p_2 \notin \mathbb{Q},$$

to X jest typu GSt.

Dowód. 1) Jeśli zachodzi $\limsup_{n\to\infty} p_{n+1}/p_n = p \in (0,1]$, to istnieje podciąg $\{p_{n_k}\}$ taki, że $\lim_{k\to\infty} p_{n_{k+1}}/p_{n_k} = p$. Z założenia mamy więc

$$a_{n_k} \sum_{i=1}^{\Theta_{p_{n_k}}} (Y_i + b_{n_k}) \xrightarrow{d} X, \text{ gdy } k \to \infty.$$

Z twierdzenia 3.24 dostajemy, że X jest typu GSe.
2) Niech φ, ψ oznaczają funkcje charakterystyczne zmiennych X i Y odpowiednio. Z założenia dla $m = 1, 2$ mamy

$$\frac{p^{(m)}_{n_k}\psi(a^{(m)}_{n_k}t)e^{ita^{(m)}_{n_k}b^{(m)}_{n_k}}}{1-(1-p^{(m)}_{n_k})\psi(a^{(m)}_{n_k}t)e^{ita^{(m)}_{n_k}b^{(m)}_{n_k}}} \xrightarrow{k\to\infty} \varphi(t).$$

Wykonując analogiczne obliczenia, jak w dowodzie warunku koniecznego w tw. 3.21, otrzymamy

$$\psi(a^{(m)}_{n_k}t)^{[1/p^{(m)}_{n_k}]} e^{ita^{(m)}_{n_k}b^{(m)}_{n_k}[1/p^{(m)}_{n_k}]} \xrightarrow{k\to\infty} \exp\{1-1/\varphi(t)\},$$

gdzie $[1/p_{n_k}^{(m)}]/[1/p_{n_{k+1}}^{(m)}] \xrightarrow{k\to\infty} p_m \in (0,1)$. Dla funkcji charakterystycznej $\phi(t) = \exp\{1 - 1/\varphi(t)\}$ oznacza to, zgodnie z lematem 2.3, że

$$\phi(a(p_m)t)e^{itb(p_m)} = \phi(t)^{p_m}$$

dla pewnych stałych $a(p_m) \in (0,1)$, $b(p_m) \in \mathbb{R}$. Zatem ϕ spełnia, z dwoma różnymi wykładnikami $r_1 = p_1$ i $r_2 = p_2$, równość funkcyjną (2.6) definiującą rozkłady typu Se. Ponieważ $\ln p_1 / \ln p_2 \notin \mathbb{Q}$, to z tw. 2.2 [33] wnioskujemy, że dla dowolnego $p \in (0,1)$ istnieją stałe $a(p) \in (0,1)$, $b(p) \in \mathbb{R}$ takie, że $\phi(a(p)t)e^{itb(p)} = \phi(t)^p$. Ale to oznacza, zgodnie z def. 13.1 w [42], że $\phi = \exp\{1 - 1/\varphi(t)\}$ jest typu St. Zatem funkcja charakterystyczna $\varphi = 1/(1 - \ln \phi)$ odpowiada zmiennej losowej typu GSt.

□

4. Dodatek

W podrozdziale 1.6 w tw. 1.24 podaliśmy reprezentację funkcji charakterystycznej $\widehat{\mu}(t)$ spełniającej równanie $\mathfrak{Re}\widehat{\mu}(t) = |\widehat{\mu}(t)|^2$. Przy dodatkowych założeniach o rozkładzie, któremu odpowiada funkcja charakterystyczna $\widehat{\mu}(t)$ otrzymujemy pewne wzory analityczne.

Własność 4.1. *Niech $\mu \in \mathcal{P}$ będzie rozkładem zmiennej losowej X takiej, że $\forall n \in \mathbb{N}\quad \mathbf{E}|X|^n < \infty$. Niech $\widehat{\mu}(t) = 1/2 + (1/2)e^{iu(t)}$ dla pewnej funkcji $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wówczas*

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left(2t^{2k}\mathbf{E}X^{2k} - u(t)^{2k}\right) &= 0,\\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)!} \left(2t^{2k-1}\mathbf{E}X^{2k-1} - u(t)^{2k-1}\right) &= 0.\end{aligned}$$

Dowód. Z założeń mamy $\widehat{\mu}(t) = 1/2 + (1/2)e^{iu(t)} = 1 + (1/2)\sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k u(t)^k}{k!}$. Z drugiej strony $\widehat{\mu}(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k \mathbf{E}X^k}{k!} t^k$. Odejmując stronami te równości i porównując części rzeczywiste i urojone dostajemy wzory z własności.

□

Zauważmy, że dla zmiennej losowej X o rozkładzie $\mu_1 = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_a$ z przykładu 1.25 powyższe równości spełnione są w sposób trywialny, ponieważ $\mathbf{E}X^n = \frac{1}{2}a^n$ dla $n \in \mathbb{N}$ i $\widehat{\mu}(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{iu(t)}$, gdzie $u(t) = at$.
Rozważając zmienną losową X o rozkładzie wykładniczym $\mu = \Gamma(1, a)$, $a > 0$,

dla której $\mathbf{E}X^n = \frac{n!}{a^n}$, $n \in \mathbb{N}$ i $\widehat{\mu}(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{iu(t)}$, gdzie $u(t) = 2\operatorname{arc\,tg}(t/a)$, otrzymujemy dość ciekawe związki przedstawione w poniższym wniosku.

Wniosek 4.2. *Dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ mamy*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left(2x^{2k}(2k)! - (2\operatorname{arc\,tg} x)^{2k}\right) &= 0, \\
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)!} \left(2x^{2k-1}(2k-1)! - (2\operatorname{arc\,tg} x)^{2k-1}\right) &= 0.
\end{aligned}$$

Wykaz ważniejszych oznaczeń, symboli i skrótów

$\mathbb{Z}$	zbiór liczb całkowitych.
$\mathbb{R}^+$	$= (0, +\infty)$.
$\mathbb{R}_0$	$= \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
$\mathbb{C}$	zbiór liczb zespolonych.
$\mathfrak{Re}\, z$	część rzeczywista liczby $z \in \mathbb{C}$.
$\mathfrak{Im}\, z$	część urojona liczby $z \in \mathbb{C}$.
$\mathcal{L}(X)$	rozkład zmiennej losowej X.
ℓ	miara Lebesgue'a.
μ, ν	miary probabilistyczne.
μ^-	odbicie symetryczne miary μ.
$\mu \circledast \lambda$	mieszanina splotowa miary μ z miarą λ.
$\widehat{\mu}$	transformata Fouriera miary μ.
φ, ψ, ϕ	funkcje charakterystyczne.
Φ	zbiór funkcji charakterystycznych.
$\mathcal{P}$	zbiór miar probabilistycznych na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
$T_0^p(\varphi)$	$= \frac{p}{1-(1-p)\varphi}$.
$T_1^p(\varphi)$	$= \frac{p\varphi}{1-(1-p)\varphi}$.
$T_0^p(\mu)$	$= \sum_{k=0}^{\infty} p(1-p)^k \mu^{*k}$.

$T_1^p(\mu)$	$= \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1}\mu^{*k}$.
$G^p(\varphi)$	$= \frac{p\varphi}{\varphi-(1-p)}$.
$\mathcal{G}^p$	$= \{\varphi \in \Phi : \ G^p(\varphi) \in \Phi\}$.
$\mathcal{G}$	$= \bigcap_{p\in(0,1]} \mathcal{G}^p$.
$h(t)$	$= \begin{cases} \frac{1}{\varphi(t)} - 1, & \text{gdy} \quad \varphi(t) \neq 0 \\ \infty, & \text{gdy} \quad \varphi(t) = 0. \end{cases}$
$\varphi_a(t)$	$= \frac{a}{a+h(t)}$, $a \in \mathbb{R}_0$.
$\Phi(\varphi)$	$= \{\varphi_a(t) : a \in \mathbb{R}_0, \ \varphi_a \in \Phi\}$.
$S(\varphi)$	$= \{a \in \mathbb{R}_0 : \varphi_a \in \Phi(\varphi)\}$.
$\stackrel{d}{=}$	równość według rozkładu.
$\xrightarrow{d}$	zbieżność według rozkładu.
ID	nieskończenie podzielny.
St	stabilny.
SSt	ściśle stabilny.
Se	semistabilny.
SSe	ściśle semistabilny.
DPA	obszar częściowego przyciągania.
DA	obszar pełnego przyciągania.
GID	geometrycznie nieskończenie podzielny.
GSt	geometrycznie stabilny.
GSSt	geometrycznie ściśle stabilny.
GSe	geometrycznie semistabilny.
GSSe	geometrycznie ściśle semistabilny.
GDPA	obszar częściowego geometrycznego przyciągania.
GDA	obszar pełnego geometrycznego przyciągania.

Spis literatury

[1] D. Applebaum, Lévy processes and stochastic calculus, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[2] J. Bertoin, Lévy processes, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[3] M. Borowiecka, *Geometrically semistable distributions and some functional equation*, J. Math. Sci. (N.Y.) **111** (2002) 3524-3527.

[4] D. Dugué, *Sur les fonctions méromorphes transformées de Fourier de fonctions monotones*, C.R. Acad. Sc. **208** (1939) 1547.

[5] D. Dugué, *Arithmétique des lois de probabiltés*, Mémorial des Sc. Math. (Prace Matem.) **137**, Paris, Gauthier-Villars, 1957.

[6] B.V. Gnedenko, G. Fahim, *On one transfer theorem*, Doklady AN SSSR **187** (1969) 15-17.

[7] B.V. Gnedenko, *On some stability theorems*, w: Stability problems for stochastic models (Moscow, 1982), 24-31 Lecture Notes in Math. **982**, Springer, Berlin - New York, 1983.

[8] B.V. Gnedenko, *On limit theorems for a random number of random variables*, w: Probability theory and mathematical statistics (Tbilisi, 1982) 167-176, Lecture Notes in Math. **1021**, Springer, Berlin, 1983.

[9] B.V. Gnedenko, A.N. Kolmogorov, Limit distributions for sums of independent random variables, Addison-Wesley, Cambridge, Mass., 1954.

[10] R.R. Goldberg, Fourier transforms, *Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics* No. 52, Cambridge University Press, New York, 1961.

[11] L.B. Klebanov, G.M. Maniya, J.A. Melamed, *A problem of V.M. Zolotarev and analogues of infinitely divisible and stable distributions in a scheme for summation of a random number of random variables*, Teor. Veroyatnost. i Primenen. **29** (1984) 757-760.

[12] L.B. Klebanov, J.A. Melamed, S. Mittnik, S.T. Rachev, *Integral and asymptotic representations of geo-stable densities*, Appl. Math. Lett **9** (1996) 37-40.

[13] L.B. Klebanov, S. Mittnik, S.T. Rachev, V.E. Volkovich, *A new representation for the characteristic function of strictly geo-stable vectors*, J. Appl. Prob. **37** (2000) 1137-1142.

[14] L.B. Klebanov, S.T. Rachev, *Sums of random number of random variables and their approximations with ν-accompanying infinitely divisible laws*, Serdica Math. J. **22** (1996) 471-496.

[15] W. Krakowiak, *Remarks about the Dugué problem*, Probab. Math. Statist. **23** (2003) 93-104.

[16] T.J. Kozubowski, *The inner characterization of geometric stable laws*, Statist. Decisions **12** (1994), 307-321.

[17] T.J. Kozubowski, *Characterization of multivariate geometric stable distributions*, Statist. Decisions **15** (1997), 397-416.

[18] T.J. Kozubowski, *Geometric stable laws: estimation and applications*, Math. Comput. Modelling **29** (1999) 241-253.

[19] T.J. Kozubowski, *Computer simulation of geometric stable distributions*, J. Comput. Appl. Math. **116** (2000) 221-229.

[20] T.J. Kozubowski, A.K. Panorska, *Multivariate geometric stable distributions in financial applications*, Math. Comput. Modelling **29** (1999) 83-92.

[21] T.J. Kozubowski, S.T. Rachev, *Univariate geometric stable laws*, J. Comput. Anal. Appl. **1** (1999) 177-217.

[22] T.J. Kozubowski, S.T. Rachev, *Multivariate geometric stable laws*, J. Comput. Anal. Appl. **1** (1999) 349-385.

[23] L. Kubik, *Sur un probléme de M. D. Dugué*, Comment. Mat. (Prace Matem.) **13** (1969) 1-2.

[24] P. Lévy, Théorie de l'addition des variables aléatoires, Gauthier-Villars, Paris, 1937.

[25] G.D. Lin, *Characterizations of the Laplace and related distributions via geometric compound*, Sankhya Ser. A **56** (1994) 1-9.

[26] M. Loève, *Nouvelles classes de lois limites*, Bull. Soc. Math. France **73** (1945) 107-126.

[27] E. Lukacs, Characteristic functions, 2nd ed., Griffin, London, 1970.

[28] M. Maejima, *Semistable distributions*, w: Lévy Processes, Birkhäuser Boston, Boston (2001) 169-183.

[29] M. Maejima, S.T. Rachev, *An ideal metric and the rate of convergence to a self-similar process*, Ann. Probab. **15** (1987) 708-727.

[30] M.T. Malinowski, *Some limit theorems in the theory of geometrically infinitely divisible distributions* (wysłana do druku).

[31] M.T. Malinowski, J.K. Misiewicz, *On the Dugué problem with a solution in the set of signed measures*, Probab. Math. Statist. **22** (2002) 319-331.

[32] G. Mazurkiewicz, M. Borowiecka-Olszewska, M.T. Malinowski, *The arithmetic of convolutions, scale mixtures, and convolution mixtures*, J. Math. Sci. (N.Y.) **121** (2004) 2674-2680.

[33] D. Mejzler, *On certain class of infinitely divisible distributions*, Israel J. Math. **16** (1973) 1-19.

[34] J.K. Misiewicz, R. Cooke, *Simple fractions and linear decomposition of some convolutions of measures*, Discuss. Math. Probab. Stat. **21** (2001) 149-157.

[35] N.R. Mohan, R. Vasudeva, H.V. Hebbar, *On geometrically infinitely divisible laws and geometric domains of attraction*, Sankhya Ser. A **55** (1993) 171-179.

[36] R.N. Pillai, *Semi stable laws as limit distributions*, Ann. Math. Statist. **42** (1971) 780-783.

[37] A.J. Prudnikov, Yu.A. Brychkov, O.I. Marychev, Integrals and series, Moscow, Nauka, 1981.

[38] S.T. Rachev, G. Samorodnitsky, *Geometric stable distributions in Banach spaces*, J. Theoret. Probab. **2** (1994), 351-373.

[39] H.J. Rossberg, *Characterization of the exponential and Pareto distributions by means of some properties of the distribution which the differences and quotients of order statistics are subject to*, Math. Operationsforsch. Statist. **3.3** (1972) 207-216.

[40] H.J. Rossberg, B. Jesiak, G. Siegel, Analytic methods of probability theory, Akademie-Verlag, Berlin, 1985.

[41] G. Samorodnitsky, M.S. Taqqu, Stable non-gaussian random processes: stochastic models with infinite variance, Chapman and Hall, New York-London, 1994.

[42] K. SATO, Lévy processes and infinitely divisible distributions, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.

[43] R. SHIMIZU, *On the domain of partial attraction of semi-stable distributions*, Ann. Inst. Statist. Math. **22** (1970) 245-255.

[44] D. SZYNAL, A. WOLIŃSKA, *On classes of couples of characteristic functions satisfying the condition of Dugué*, Comment. Math. (Prace Matem.) **23** (1983), 325-328.

[45] S. VALLANDER, I. IBRAGIMOV, N. LINDTROP, *On limiting distributions for moduli of sequential differences of independent variables*, Teor. Veroyatnost. i Primenen. **14.4** (1969) 693-707.

[46] A. WOLIŃSKA, *On a problem of Dugué*, w: Lect. Notes Math. **982**, Berlin, Springer Verlag (1982) 244-253.

[47] A. WOLIŃSKA-WEŁCZ, *On solution of the Dugué problem*, Probab. Math. Statist. **7** (1986) 169-185.

[48] V.M. ZOLOTAREV, *Metric distances in spaces of random variables and their distributions*, Math. Sb. (N.S.) **101(143)** (1976) 416-454.

[49] V.M. ZOLOTAREV, *Approximation of the distribution of sums of independent variables with values in infinite-dimensional spaces*, Teor. Veroyatnost. i Primenen. **21** (1976) 741-758.

[50] V.M. ZOLOTAREV, *Ideal metrics in the problems of probability theory and mathematical statistics*, Austral. J. Statist. **21** (1979) 193-208.

[51] V.M. ZOLOTAREV, *Probability metrics*, Teor. Veroyatnost. i Primenen. **28** (1983) 264-287.