

EMIL PANEK
**TEORIA
MAGISTRAL**

Równowaga i stabilność
optymalnych
procesów wzrostu
w modelach
dynamiki ekonomicznej

UNIwersytet Zielonogórski

Teoria magistral

RÓWNOWAGA I STABILNOŚĆ
OPTYMALNYCH PROCESÓW WZROSTU
W MODELACH DYNAMIKI
EKONOMICZNEJ

Emil Panek

Teoria magistral

**RÓWNOWAGA I STABILNOŚĆ
OPTYMALNYCH PROCESÓW WZROSTU
W MODELACH DYNAMIKI
EKONOMICZNEJ**

Zielona Góra 2024

RADA WYDAWNICZA

Andrzej Pieczyński (przewodniczący), Andrzej Bisztyga,
Bogumiła Burda, Eugene Feldshtein, Beata Gabryś,
Magdalena Gibas-Dorna, Jacek Korentz, Tatiana Rongińska,
Franciszek Runiec (sekretarz)



UNIWERSYTET
ZIELONOGÓRSKI

RECENZJA

Jan Gajda

REDAKCJA

Aldona Reich

PROJEKT OKŁADKI

Jacek Papla

© Copyright by Uniwersytet Zielonogórski
Zielona Góra 2024

ISBN 978-83-7842-555-7
<https://doi.org/10.59444/2024MONaPan>

OFICyna WYDAWNICZA UNIWERSYTETU ZIELONOGÓRSKIEGO

65-246 Zielona Góra, ul. Podgórna 50, tel. (68) 328 78 64
www.ow.uz.zgora.pl, e-mail: sekretariat@ow.uz.zgora.pl

SPIS TREŚCI

WSTĘP	7
WYKAZ WAŻNIEJSZYCH SYMBOLI MATEMATYCZNYCH	13
ROZDZIAŁ 1. Stacjonarna gospodarka Gale’a z pojedynczą magistralą	17
1.1. Przestrzeń produkcyjna Gale’a	18
1.2. Technologiczna i ekonomiczna efektywność produkcji	25
1.3. Równowaga von Neumanna	30
1.4. Alternatywny warunek istnienia optymalnego stanu równowagi	38
1.5. Magistrala produkcyjna (promień von Neumanna)	40
1.6. Dynamika. Dopuszczalne, stacjonarne i optymalne procesy wzrostu	46
1.7. Wzrost optymalny w stacjonarnej gospodarce Gale’a z kryterium maksymalizacji wartości produkcji wytworzonej w końcowym okresie horyzontu T ...	55
1.8. Zadanie maksymalizacji łącznej wartości produkcji wytworzonej w całym horyzoncie T	70
1.9. Optymalne procesy wzrostu z funkcją użyteczności ogólnej postaci	79
1.10. Minimalnoczasowy problem wzrostu	90
ROZDZIAŁ 2. Stacjonarna gospodarka Gale’a z wieloma magistralami	107
2.1. Wielopasmowa magistrala produkcyjna	107
2.2. Dopuszczalne i stacjonarne procesy wzrostu	111
2.3. Problem wzrostu docelowego. ‘Słaby’ efekt magistrali	118
2.4. ‘Silny’ oraz ‘bardzo silny’ efekt magistrali	122
2.5. Wzrost optymalny w gospodarce z kryterium maksymalizacji użyteczności produkcji wytworzonej w całym horyzoncie T	131
ROZDZIAŁ 3. Niestacjonarna gospodarka Gale’a z graniczną technologią	135
3.1. Przestrzenie produkcyjne w niestacjonarnej gospodarce Gale’a. Graniczna przestrzeń produkcyjna	135
3.2. Technologiczna i ekonomiczna efektywność produkcji. Równowaga von Neumanna w gospodarce z graniczną technologią	138
3.3. Optymalne procesy wzrostu w gospodarce z graniczną technologią i pojedynczą magistralą	142
3.4. Optymalne procesy wzrostu w gospodarce z graniczną technologią i wieloma magistralami	153
3.5. Minimalnoczasowy problem wzrostu	159
ROZDZIAŁ 4. Niestacjonarna gospodarka Gale’a z graniczną technologią i inwestycjami	169
4.1. Założenia wstępne	169
4.2. Dynamika. Dopuszczalne procesy wzrostu. Graniczna przestrzeń produkcyjna	170
4.3. Optymalne procesy wzrostu. ‘Słaby’ oraz ‘bardzo silny’ efekt magistrali	181
4.4. Gospodarka Gale’a z graniczną technologią, inwestycjami i zmiennym tempem wzrostu na wielopasmowej magistrali	194

ROZDZIAŁ 5. Niestacjonarna gospodarka Gale’a bez technologii granicznej	205
5.1. Gospodarka z rosnącą efektywnością produkcji, pojedynczą magistralą i chwilową równowagą von Neumanna. Podstawowe założenia	205
5.2. Dwa twierdzenia o magistrali	210
5.3. Optymalne procesy wzrostu w gospodarce z pojedynczą magistralą i kryterium maksymalizacji wartości produkcji wytworzonej w całym horyzoncie T ...	219
5.4. Gospodarka z wieloma magistralami. Problem wzrostu docelowego z funkcją użyteczności ogólnej postaci	222
ROZDZIAŁ 6. Magistrala produkcyjna, kapitałowa i konsumpcyjna w gospodarce Leontiefa-Gale’a.	239
6.1. Gospodarka Leontiefa-Gale’a. Podstawowe założenia. Dopuszczalne procesy wzrostu	239
6.2. Stacjonarne procesy wzrostu. Magistrala kapitałowa, produkcyjna i konsumpcyjna	251
6.3. Optymalne procesy wzrostu. ‘Słaby’ efekt magistrali	261
6.4. ‘Bardzo silny’ efekt magistrali	265
ROZDZIAŁ 7. Magistrale w gospodarce Solowa	269
7.1. Dwa zadania sterowania optymalnego. Warunki optymalności	269
7.2. Optymalny podział dochodu w gospodarce Solowa. Sformułowanie problemu	274
7.3. Pomocnicze fakty	280
7.4. Rozwiązanie zadania sterowania optymalnego wzrostem	286
7.5. Charakterystyka rozwiązania	298
7.6. Efekt magistrali	303
7.7. Inna wersja modelu	309
7.8. Minimalnoczasowy problem wzrostu w gospodarce z endogenicznym postępowaniem techniczno-organizacyjnym	313
7.9. Charakterystyka rozwiązania	316
7.10. Magistrala kapitałochłonności produkcji	323
PODSUMOWANIE. Próba syntezy. Idea σ – równowagi dynamicznej	327
BIBLIOGRAFIA	335
SPIS RYSUNKÓW	341

WSTĘP

W drugiej połowie lat 50. XX w. Paul A. Samuelson [89] sformułował hipotezę o zbieżności w długich okresach czasu optymalnych ścieżek wzrostu do pewnej ścieżki „wzorcowej”, na której gospodarka osiąga maksymalne, równomierne tempo wzrostu. Samuelson ową ścieżkę wzorcową, charakteryzującą gospodarkę w swoistej równowadze dynamicznej (równowadze wzrostu), porównuje do magistrali w transporcie drogowym. W uzasadnieniu zauważa, że jeżeli z pewnej miejscowości mamy dojechać do miejscowości położonej niedaleko, wówczas skierujemy się bezpośrednio ku celowi, korzystając z dróg lokalnych; gdy jednak miejscowość, do której mamy dojechać, będzie znacznie oddalona, wtedy najpierw postaramy się dojechać do autostrady (magistrali), następnie poruszać się po niej tak długo jak to będzie możliwe, by końcowy odcinek podróży odbyć znowu po prowadzących do celu drogach lokalnych.

Utożsamiając położenie miejscowości ze stanami gospodarki, regułę magistrali można sformułować następująco: Wychodząc z historycznie ukształtowanych warunków początkowych, prawidłowo (optymalnie) funkcjonująca gospodarka powinna możliwie szybko dojść do wzorcowej ścieżki wzrostu (lub jej bliskiego otoczenia), następnie rozwijać pozostając na tej ścieżce (lub w jej pobliżu), by ostatecznie – w końcowej fazie rozpatrywanego horyzontu czasu – oddalić się ewentualnie od niej w celu osiągnięcia założonego/pożądanego stanu końcowego.

Przedstawiona hipoteza wzrostu gospodarczego wzbudziła na świecie duże zainteresowanie ekonomistów matematycznych, którzy udowodnili dotąd wiele tzw. twierdzeń o magistrali (produkcyjnej, kapitałowej, konsumpcyjnej) w różnych typach modeli wzrostu, szczególnie modeli typu input-output Neumanna-Leontiefa-Gale’a, a prowadzone w ciągu minionych kilku dekad badania doprowadziły do powstania teorii magistral będącej dzisiaj jednym z filarów ekonomii matematycznej (zob. m.in. [2], [3], [7-13], [15], [17-19], [21-27], [28, cz. III], [30], [33-38], [39, cz. V, VI], [42], [43, rozdz. 4], [89], [91, rozdz. 6, 7], [94-96]).

W ostatnich dwóch dekadach prace nad efektem magistrali wykroczyły poza tradycyjne granice ekonomii matematycznej. Na szczególną uwagę zasługują zwłaszcza wyniki uzyskane na gruncie teorii sterowania optymalnego, m.in. [20], [31], [32], [88], [93], [97-99].

Przedmiotem naszego zainteresowania są procesy wzrostu gospodarczego przebiegające w pewnym (dłuższym lub krótszym) okresie czasu. Czas jest zmienną niezależną, od której zależą *implicite* lub *explicite* wszystkie pozostałe interesujące nas zmienne ekonomiczne. Zmienną czasu oznaczamy przez t . Zakładamy, że zmienna czasu może przyjmować wartości naturalne, $t = 0, 1, \dots, t_1$, ułożone np. z latami, lub wartości rzeczywiste $t \in [0, t_1] \subset R_+^1$. W pierwszym przypadku mówimy, że czas zmienia się w sposób skokowy (lub dyskretny), w drugim – w sposób ciągły. W ekonomii matematycznej modele gospodarki, w których przynajmniej niektóre zmienne ekonomiczne są funkcjami czasu (oraz występują powiązania między zmiennym z różnych okresów), przyjęto nazywać modelami wzrostu.

W modelach wzrostu oba ujęcia czasu są dopuszczalne i poprawne. Wygoda, prostota, a nierzadko także elegancja matematyczna decydują o sposobie ujęcia czasu w każdym konkretnym przypadku. Należy jednak uświadamiać sobie wynikające stąd różnice w interpretacji zmiennych ekonomicznych.

W ujęciu skokowym czas jest podzielony na kolejne okresy o stałej długości przyjętej jako jednostka czasu. Jeżeli taką jednostką jest np. rok (R), wówczas mówiąc o produkcji towaru w okresie t , mamy na myśli wyrażoną w określonych jednostkach naturalnych (JN) lub pieniężnych (zł) ilość towaru wytworzonego w tym okresie, rozumianym jako przedział czasu (np. w ciągu roku). Wielkość tę nazywamy strumieniem. Strumienie mają wymiar rzeczowy (JN/R) lub pieniężny (zł/R). Strumieniem jest produkcja, dochód, inwestycje, konsumpcja etc.

Założmy teraz, że czas zmienia się w sposób ciągły i oznaczmy przez $T = [0, t_1]$ interesujący horyzont funkcjonowania gospodarki ($0 < t_1$). Niech $X(t)$

będzie wielkością produkcji pewnego towaru (w określonych jednostkach fizycznych) wytworzonej w okresie $[0, t] \subset T$ ($0 < t < t_1$). Pochodną $x(t) = \frac{d}{dt}X(t)$ (jeżeli istnieje) nazywamy gęstością strumienia produkcji towaru w momencie t (wymiar: $JN \cdot R^{-1}$). Podobnie definiujemy gęstość strumienia dochodu, inwestycji, konsumpcji etc. Różnica między strumieniem i gęstością strumienia określonej wielkości ekonomicznej polega na tym, że strumień zawsze odpowiada odcinkowi (przedziałowi) czasu o skończonej dodatniej długości, natomiast gęstość strumienia odnosi się do „nieskończenie krótkiego” odcinka czasu. W modelach z czasem ciągłym zwrot „wielkość produkcji w momencie t ” jest – ściśle rzecz biorąc – pozbawiony sensu, gdyż w poszczególnych momentach wielkość ta, podobnie jak wielkość dochodu, inwestycji, konsumpcji etc., jest nieokreślona. W ekonomii matematycznej przyjęto jednak mówić o wielkości produkcji w momencie t (podobnie o wielkości dochodu, inwestycji, konsumpcji etc.), rozumiejąc przez to właśnie gęstość strumienia produkcji (dochodu, inwestycji, konsumpcji). Terminologię tę stosujemy również w książce, należy jednak pamiętać o jej umowności.

Drugą obok zmiennych – strumieni podstawową grupę zmiennych ekonomicznych tworzą takie wielkości jak liczba ludności, zatrudnienie (np. w milionach osób) czy wielkość (wartość) kapitału (np. w zł), które są określone w każdym momencie. Nazywamy je zasobami. Jeżeli zakładamy czas skokowy, to kwestią umowy jest, czy zasób w okresie (np. roku) t utożsamiamy z jego stanem w środku tego okresu (przedziału) czy ze stanem w jednym z jego krańców.

Wymiary pozostałych zmiennych ekonomicznych i parametrów, z którymi zetkniemy się w książce, są pochodnymi tych dwóch podstawowych wymiarów: strumienia i zasobu. Jeżeli np. pewna wielkość ekonomiczna jest zasobem mierzonym w jednostkach pieniężnych (zł), a inna strumieniem mierzonym w jednostkach pieniężnych na jednostkę czasu (zł/R), wówczas relacja zasobu do strumienia ma wymiar czasu – R . Relacja strumienia do zasobu ma wymiar odwrotności czasu – R^{-1} . Relacja dwóch strumieni wyrażonych w tych samych jednostkach, podobnie jak relacja dwóch zasobów mierzonych w tych samych jednostkach, jest

oczywiście wielkością bezwymiarową. Relacja pochodnej pewnej wielkości do niej samej (bez względu na to, czy to strumień, czy zasób), tj. stopa jej wzrostu, znowu ma wymiar odwrotności czasu. W książce dominuje czas dyskretny (rozdziały 1-6). Czas ciągły pojawia się w rozdziale 7.

Praca zawiera wybrane wyniki badań nad fenomenem magistrali w ekonomii matematycznej prowadzonych przez autora z przerwami od drugiej połowy lat 80. ub. wieku. Rozdziały 1-5 poświęcone są efektowi magistrali w gospodarce Gale'a. Rozdział 1 rozpoczyna się od omówienia podstawowych własności przestrzeni produkcyjnej (zbioru technologicznego) oraz przedstawienia wywodzącej się z teorii gier idei równowagi von Neumanna (równowagi wzrostu). Zdefiniowane zostaje kluczowe z perspektywy całej książki pojęcie magistrali (produkcyjnej) oraz przeprowadzony dowód magistralnych własności optymalnych – w świetle obszernej klasy kryteriów – procesów wzrostu w takiej gospodarce.

W rozdziale 2 interesuje nas stacjonarna gospodarka Gale'a z wieloma magistralami (tzw. magistralą wielopasmową), konstrukcja optymalnych procesów wzrostu w takiej gospodarce oraz analiza ich własności.

Realne gospodarki nie są (generalnie) stacjonarne, dlatego przedmiotem naszego szczególnego zainteresowania w rozdziale 3 jest niestacjonarna gospodarka Gale'a ze zmienną technologią zbieżną z czasem do pewnej technologii granicznej. Mimo zmiany reguł dynamiki ekonomicznej wszystkie optymalne procesy wzrostu w takiej gospodarce nadal charakteryzują się magistralnymi własnościami.

W rozdziale 4 klasyczna wersja gospodarki Gale'a zostaje rozbudowana o blok warunków uzależniających *explicite* dynamikę jej zdolności produkcyjnych od kapitału (produkcyjnego) oraz inwestycji. Uwzględnienie tego fundamentalnego bloku warunków także nie pozbawia gospodarki jej magistralnych własności.

Różnym wersjom niestacjonarnej gospodarki Gale'a ze zmienną technologią, ale bez założenia o istnieniu jakiegokolwiek technologii granicznej, poświęcony jest rozdział 5.

W rozdziale 6 prześledzone są magistralne własności optymalnych procesów w gospodarce łączącej ideę przestrzeni produkcyjnych Gale’a z przepływami międzygałęziowymi Leontiefa oraz neoklasycznym równaniem dynamiki kapitału. Obok magistrali produkcyjnej pojawia się tam m.in. magistrala kapitałowa i konsumpcyjna.

W zamykającym książkę rozdziale 7 przechodzimy od zdezagregowanych n -produktowych (n -sektorowych) gospodarek będących przedmiotem naszego szczególnego zainteresowania w rozdziałach 1-6 do zagregowanej, dwuczynnikowej gospodarki Solowa z funkcją produkcji Cobba-Douglasa. Zastosowanie aparatu teorii sterowania optymalnego pozwala na dowód magistralnych własności optymalnych procesów wzrostu (trajektorii) takich podstawowych zmiennych ekonomicznych w gospodarce Solowa jak kapitał, produkcja, inwestycje, konsumpcja i in.

Poza ramy książki wykraczają wyniki badań autora nad efektem magistrali w macierzowych, wieloproduktowych (wielosektorowych) modelach wzrostu Neumanna-Leontiefa [47], [57], [59], [60], [63].

Kluczowa z perspektywy całej książki równowaga von Neumanna jest zasadniczo odmienna od dominującej w ekonomii matematycznej równowagi walrasowskiej, co skłania do głębszej refleksji, którą dzielimy się w Podsumowaniu.

WYKAZ WAŻNIEJSZYCH SYMBOLI MATEMATYCZNYCH

$x \in A$	– element x należy do zbioru A
$x \notin A$	– element x nie należy do zbioru A
$A \subseteq B$	– zbiór A jest podzbiorem zbioru B
$A \subset B$	– zbiór A jest podzbiorem właściwym zbioru B
$A \cup B$	– suma (teoriomnogościowa) zbiorów A, B
$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$	– suma (teoriomnogościowa) rodziny zbiorów A_α ; I jest zbiorem indeksującym rodziny
$A \cap B$	– iloczyn (część wspólna) zbiorów A, B
$A \setminus B$	– różnica (teoriomnogościowa) zbiorów A, B
$A \times B \times C \dots$	– produkt kartezjański zbiorów $A, B, C \dots$
$\{x \mid P\}$	– zbiór elementów x mających własność (spełniających warunek) P
$A+B = \{c \mid c = a + b; a \in A, b \in B\}$	– suma algebraiczna zbiorów $A, B \subseteq R^n$
$\text{int } A$	– wnętrze zbioru A (w przestrzeni, do której należy zbiór)
$U_\varepsilon(x)$	– ε -otoczenie elementu x (w przestrzeni, do której należy element)
$\text{dom } A$	– domknięcie zbioru A (w przestrzeni, do której należy zbiór)
$\text{conv } A$	– powłoka wypukła zbioru $A \subset R^n$ (najmniejszy wypukły podzbiór w R^n zawierający A)
$P(A)$	– rodzina wszystkich podzbiorów zbioru A
$\alpha A = \{b \mid b = \alpha a; a \in A\}$	– iloczyn algebraiczny elementów zbioru $A \subseteq R^n$ i liczby $\alpha \in R^1$
$\{a^1, a^2, \dots, a^k\}$	– skończony zbiór k -elementowy
$\emptyset$	– zbiór pusty
$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$	– wektor n -wymiarowy (wierszowy)
R^n	– przestrzeń wektorowa n -wymiarowa

$R_+^n = \{x \in R^n \mid x \geq 0\}$	– nieujemny orthant przestrzeni R^n
R^1	– oś liczbowa rzeczywista
$[a, b]$	– przedział domknięty w R^1
(a, b)	– przedział prawostronnie otwarty w R^1
$[a, b)$	– przedział obustronnie otwarty w R^1
$S_+^n(1) = \{x \in R_+^n \mid \ x\ = 1\}$	– simpleks jednostkowy w R^n
$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$	– iloczyn skalarny wektorów $x, y \in R^n$
$\ x\ _E = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac{1}{2}}$	– norma Euklidesa wektora $x \in R^n$
$ x $	– wartość bezwzględna liczby $x \in R^1$
$ x = \max_i x_i $	– norma supremalna (przyporządkowująca wektorowi $x \in R^n$ maksymalną spośród wartości bezwzględnych jego współrzędnych)
$\ x\ = \sum_{i=1}^n x_i $	– norma ‘taksówkowa’ (przyporządkowująca wektorowi $x \in R^n$ sumę wartości bezwzględnych jego współrzędnych)
$x \geq y$	– wektor $x \in R^n$ nie mniejszy (po współrzędnych) od wektora $y \in R^n$
$x \geq y$	– wektor $x \in R^n$ nie mniejszy (po współrzędnych) od wektora $y \in R^n$ oraz $x \neq y$
$x > y$	– wektor $x \in R^n$ większy po wszystkich współrzędnych od wektora $y \in R^n$
$\forall x Q(x)$	– dla każdego x zachodzi warunek $Q(x)$
$\exists x Q(x)$	– istnieje takie x , które spełnia warunek $Q(x)$
$\exists! x Q(x)$	– istnieje dokładnie jeden element x , który spełnia warunek $Q(x)$
$\nexists x Q(x)$	– nie istnieje takie x , które spełnia warunek $Q(x)$
$\neg Q$	– negacja zdania Q (nieprawda, że zachodzi Q)
$P \& Q$	– koniunkcja zdań P i Q (zachodzi P i Q)
$P \Rightarrow Q$	– implikacja zdań P i Q (jeżeli zachodzi P , to zachodzi Q)
$P \vee Q$	– alternatywa zdań P i Q (zachodzi P lub Q)
$f: X \rightarrow Y$	– odwzorowanie (funkcja) f z X do Y

$f(X)$	– f – obraz zbioru X
$f(\cdot)$	– funkcja f zmiennej zaznaczonej kropką
$f(x)$	– wartość funkcji f w punkcie x
$f(\cdot, y)$	– funkcja f zmiennej zaznaczonej kropką (przy ustalonej wartości drugiej zmiennej)
$f(g(\cdot))$	– superpozycja (złożenie) funkcji f i g
$C^0(R^n \rightarrow R^m)$	– klasa funkcji ciągłych z R^n do R^m
$C^k(R^n \rightarrow R^m)$	– klasa funkcji ciągłych do k -tej pochodnej włącznie z R^n do R^m
$\tilde{C}^0([a, b] \rightarrow R^m)$	– klasa przedziałami ciągłych funkcji z $[a, b] \subset R^1$ do R^m , o skończonej liczbie punktów nieciągłości pierwszego rodzaju na (a, b) , w punktach nieciągłości ciągłych prawostronnie
$\frac{d}{dx} f(x)$	– pochodna funkcji $f: R^1 \rightarrow R^1$
$\frac{d}{dx} f(x) = \left(\frac{d}{dx} f_1(x), \dots, \frac{d}{dx} f_n(x) \right)$	– pochodna funkcji wektorowej $f = (f_1, \dots, f_n)$ jednej zmiennej
$\frac{d}{dx} f(x) _{x=x_0}$	– wartość pochodnej funkcji f jednej zmiennej w punkcie x_0
$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$	– i -ta pochodna cząstkowa funkcji skalarnej zmiennych $x = (x_1, \dots, x_n)$ względem x_i
$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right)$	– gradient funkcji $f: R^n \rightarrow R^1$
$\int_a^b f(x) dx$	– całka oznaczona (Riemanna) funkcji $f: R^1 \rightarrow R^1$
$\{x^i\}_{i=1}^\infty$	– ciąg elementów x^i , $i = 1, 2, \dots$
$\lim_i x^i$	– granica ciągu $\{x^i\}_{i=1}^\infty$
$x^i \rightarrow \bar{x}$	– ciąg $\{x^i\}_{i=1}^\infty$ zbieżny do $\bar{x}$
$\lim_{x \rightarrow x^0} f(x)$	– granica funkcji f w punkcie x^0
$\max_{x \in A} f(x)$	– maksymalna wartość funkcji $f: A \rightarrow R^1$ na zbiorze A
$\operatorname{argmax}_{x \in A} f(x)$	– argument, przy którym funkcja $f: A \rightarrow R^1$ osiąga wartość maksymalną na zbiorze A

$$\sup_{x \in A} f(x) = \sup f(A)$$

– kres górny obrazu $f(A)$ odwzorowania
 $f: A \rightarrow R^1$

$$\max_{i \in \{1, \dots, k\}} x_i$$

– maksymalna liczba w zbiorze $\{x_1, \dots, x_k\}$

$$\min_{x \in A} f(x)$$

– minimalna wartość funkcji $f: A \rightarrow R^1$ na
 zbiorze A

$$\operatorname{argmin}_{x \in A} f(x)$$

– argument, przy którym funkcja $f: A \rightarrow R^1$
 osiąga wartość minimalną na zbiorze A

$$\inf_{x \in A} f(x) = \inf f(A)$$

– kres dolny obrazu $f(A)$ odwzorowania
 $f: A \rightarrow R^1$

$$x^T$$

– transpozycja wektora x

$$A^T$$

– transpozycja macierzy A

$$Ax$$

– iloczyn macierzy A i wektora (kolumnowego) x

$$yA$$

– iloczyn wektora y (wierszowego) i macierzy A

$$A^{-1}$$

– macierz odwrotna do kwadratowej macierzy A

$$\det A$$

– wyznacznik kwadratowej macierzy A

$$E$$

– macierz jednostkowa

$$e = (1, \dots, 1)$$

– wektor, którego współrzędne są jedynkami

$$e^i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$$

– wektor, którego i – ta współrzędna jest równa 1,
 a pozostałe są równe 0

$$H_p$$

– hiperpłaszczyzna z wektorem tworzącym (kierunko-
 wym) p

ROZDZIAŁ 1

Stacjonarna gospodarka Gale’a z pojedynczą magistralą

Tworzenie i podział produktu jest nieodłącznym elementem każdego modelu wzrostu. W modelach typu input-output proces produkcji oznacza przekształcanie jednej wiązki towarów zwanych nakładami w inną wiązkę towarów zwaną wynikami. Traktując taki proces jak swoistą „czarną skrzynkę” ze znanymi wejściami i wyjściami oraz utożsamiając wejścia z ponoszonymi nakładami, a wyjścia z wynikami (produkcją), działalność tę interpretujemy jako pewną transformację „nakłady $\rightarrow$ wyniki”. W skali gospodarki każdy proces produkcji można wówczas utożsamiać z parą wektorów, z których pierwszy charakteryzuje zużycie poszczególnych towarów (wektor nakładów), a drugi ich produkcję (wektor wyników) w określonej jednostce czasu, np. w ciągu jednego roku. W ekonomii matematycznej o własnościach takich procesów przesądzają przyjmowane założenia o technologii produkcji w gospodarce.

W rozdziale 1 przyjrzymy się procesom wzrostu w stacjonarnym, historycznie najstarszym modelu gospodarki typu Gale’a ze stałą (niezmienną w czasie) technologią produkcji, jednym – określonym z dokładnością do struktury – optymalnym procesem produkcji, towarzyszącym mu stanem równowagi von Neumanna i pojedynczą magistralą produkcyjną. Prześledzimy magistralne własności procesów wzrostu optymalnych m.in. w świetle kryterium maksymalizacji wartości produkcji (mierzonej w cenach von Neumanna), maksymalizacji zdyskontowanej użyteczności produkcji oraz minimalizacji czasu potrzebnego gospodarce na osiągnięcie pożądanego docelowego stanu. Część wyników tego rozdziału zawierają m.in. artykuły [58], [62], [68], [81], [82]; zob. także [56, rozdz. 5].

1.1. Przestrzeń produkcyjna Gale'a

W gospodarce mamy n różnych towarów (zużywanych i/lub wytwarzanych). Przez $x = (x_1, \dots, x_n) \geq 0$ oznaczamy wektor (wierszowy) towarów zużywanych w gospodarce (wektor nakładów lub zużycia), przez $y = (y_1, \dots, y_n) \geq 0$ oznaczamy wektor towarów wytwarzanych w gospodarce (wektor wyników lub produkcji) w pewnej ustalonej jednostce czasu, np. w ciągu roku (R). Współrzędne x_i, y_i wektorów x, y wyrażone są w jednostkach naturalnych (JN) charakterystycznych dla danego towaru, czyli np. w sztukach, kilogramach, litrach etc. (strumienie, wymiar: JN/R). Jeżeli w świetle technologii, którą dysponuje gospodarka z wektora nakładów x , można wytworzyć wektor produkcji y , wówczas o parze (x, y) mówimy, że opisuje technologicznie dopuszczalny proces produkcji. Niepusty zbiór $Z \subset R_+^{2n}$ wszystkich technologicznie dopuszczalnych procesów produkcji $z = (x, y)$ z dowolną metryką $\rho: Z \times Z \rightarrow R_+$ (odległością między procesami $z^1, z^2 \in Z$) spełniającą warunki:

- $\forall z^1, z^2 \in Z (\rho(z^1, z^2) \geq 0 \text{ \& } (\rho(z^1, z^2) = 0 \Leftrightarrow z^1 = z^2)),$
- $\forall z^1, z^2 \in Z (\rho(z^1, z^2) = \rho(z^2, z^1)),$
- $\forall z^1, z^2, z^3 \in Z (\rho(z^1, z^3) \leq \rho(z^1, z^2) + \rho(z^2, z^3))$

nazywamy **przestrzenią produkcyjną (zbiorem technologicznym)**. Metryką może być każda dwuargumentowa funkcja spełniająca powyższe warunki. W zależności od potrzeb (np. ze względu na interpretację wyników czy prostotę/elegancję wywodu) w książce stosujemy jedną z trzech następujących metryk:

$$\rho(z^1, z^2) = \|z^1 - z^2\|_E = \sqrt{\sum_i (z_i^1 - z_i^2)^2}$$

(metryka Euklidesa),

$$\rho(z^1, z^2) = |z^1 - z^2| = \max_i |z_i^1 - z_i^2|$$

(tzw. metryka supremalna),

$$\rho(z^1, z^2) = \|z^1 - z^2\| = \sum_i |z_i^1 - z_i^2|$$

(tzw. metryka taksówkowa).

Z matematycznego punktu widzenia nie ma znaczenia, którą z powyższych metryk się posługujemy. Wszystkie wywody i wnioski formułowane w książce pozostają aktualne/prawdziwe bez względu na to, czy stosujemy metrykę Euklidesa, supremalną czy taksówkową. Są to tzw. metryki równoważne. Piszac dalej „przestrzeń produkcyjna”, mamy zawsze na myśli niepusty zbiór dopuszczalnych procesów $Z \subset R_+^{2n}$ wraz z jedną z ww. metryk. To, że wymiary obu wektorów $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ w dopuszczalnym procesie $(x, y) \in Z$ są takie same, nie oznacza, że w każdym procesie wszystkie towary są jednocześnie zużywane i wytwarzane. Jeżeli pewien towar nie jest w procesie (x, y) zużywany (wytwarzany), wtedy odpowiednia współrzędna wektora nakładów (wyników) jest po prostu równa 0.

Δ Definicja 1.1. Przestrzeń produkcyjną $Z \subset R_+^{2n}$ nazywamy *przestrzenią produkcyjną Gale’a*, jeżeli spełnia następujące warunki:

$$(G1) \quad \forall \lambda \geq 0 \quad \forall (x, y) \in Z (\lambda(x, y) \in Z)$$

(warunek proporcjonalności nakładów i wyników).

$$(G2) \quad \forall (x^1, y^1) \in Z \quad \forall (x^2, y^2) \in Z ((x^1, y^1) + (x^2, y^2) \in Z)$$

(warunek addytywności procesów produkcji).

$$(G3) \quad (x, y) \in Z \ \& \ x = 0 \Rightarrow y = 0$$

(warunek „braku rogu obfitości”).

$$(G4) \quad \forall (x, y) \in Z \quad \forall x' \geq x \quad ((x', y) \in Z)$$

(możliwość marnotrawstwa nakładów).

$$(G5) \quad \forall (x, y) \in Z \quad \forall 0 \leq y' \leq y \quad ((x, y') \in Z)$$

(możliwość marnotrawstwa wyników/mocy produkcyjnych).

$$(G6) \quad \forall (x^i, y^i) \in Z, i = 1, 2, \dots \quad \left((x^i, y^i) \xrightarrow{i} (\bar{x}, \bar{y}) \Rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) \in Z \right)$$

(domkniętość przestrzeni produkcyjnej; [14]).

Δ

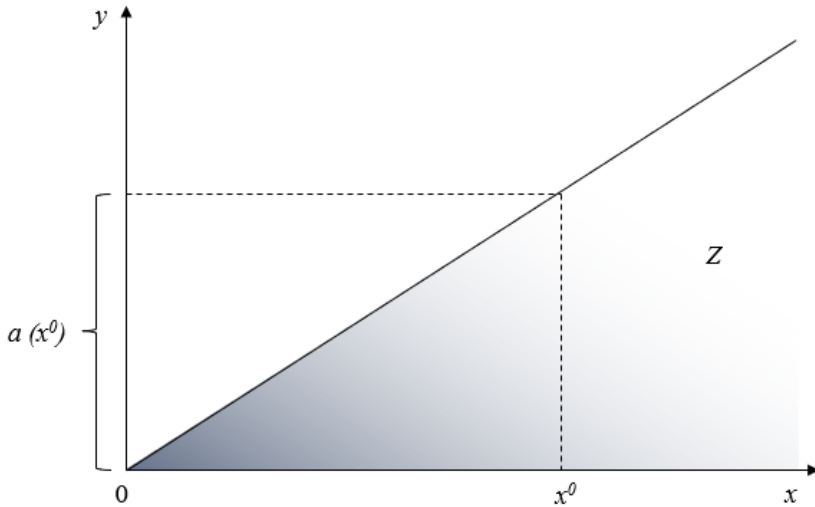
Przestrzeń produkcyjna Gale'a jest stożkiem wypukłym i domkniętym w R^{2n} z wierzchołkiem w 0 mającym tę własność, że:

$$\forall x \in R_+^n \exists y \in R_+^n ((x, y) \in Z).$$

Odwzorowanie (multifunkcję) $a: R_+^n \rightarrow P(R_+^n)$,

$$a(x) = \{y | (x, y) \in Z\},$$

nazywamy **przekształceniem technologicznym** w gospodarce z przestrzenią produkcyjną Gale'a. Przekształcenie technologiczne każdemu wektorowi nakładów $x \geq 0$ przyporządkowuje zbiór $a(x)$ wszystkich możliwych do wytworzenia (z tych nakładów) wektorów produkcji (rys. 1.1).



Rysunek 1.1. Przestrzeń produkcyjna $Z \subset R_+^2$ i obraz $a(x^0)$ przekształcenia technologicznego (multifunkcji) $a: R_+^1 \rightarrow P(R_+^1)$ w punkcie x^0
Źródło: wszystkie ryciny w opracowaniu autora

■ **Twierdzenie 1.1.** Jeżeli Z jest przestrzenią produkcyjną Gale'a, wówczas przekształcenie technologiczne $a(\cdot)$ ma następujące własności:

(i) $\forall \lambda \geq 0 \forall x \geq 0 (a(\lambda x) = \lambda a(x)).$

$$(2i) \quad \forall x^1 \geq 0 \quad \forall x^2 \geq 0 \quad (a(x^1) + a(x^2) \subseteq a(x^1 + x^2)).$$

$$(3i) \quad a(0) = \{0\}.$$

$$(4i) \quad \forall x \geq 0 \quad \forall y \in a(x) \quad \forall x' \geq x \quad (y \in a(x')).$$

$$(5i) \quad \forall x \geq 0 \quad \forall y \in a(x) \quad \forall 0 \leq y' \leq y \quad (y' \in a(x)).$$

(6i) $\forall x \geq 0$ zbiór $a(x)$ jest niepusty, zwarty (ograniczony i domknięty w R^n) oraz wypukły.

(7i) Przekształcenie $a(\cdot)$ jest półciągłe, tzn. spełnia następujące warunki:

- $\forall \bar{x} \geq 0 \quad \forall \{(x^i, y^i)\}_{i=1}^{\infty} \left(y^i \in a(x^i) \text{ \& } (x^i, y^i) \xrightarrow{i} (\bar{x}, \bar{y}) \Rightarrow \bar{y} \in a(\bar{x}) \right)$
(półciągłość z góry),
- $\forall \bar{x} \geq 0 \quad \forall \bar{y} \in a(\bar{x}) \quad \forall \{x^i\}_{i=1}^{\infty} \left(x^i \xrightarrow{i} \bar{x} \Rightarrow \exists y^i \in a(x^i) \left(y^i \xrightarrow{i} \bar{y} \right) \right)$
(półciągłość z dołu).

Dowód. (i) Jeżeli $\lambda = 0$, to zgodnie z warunkami **(G1)**, **(G3)**:

$$\forall x \geq 0 (a(\lambda x) = a(0) = \lambda a(x) = 0).$$

Jeżeli $\lambda > 0$, to zgodnie z **(G1)** $\forall x \geq 0$ zachodzi następujący ciąg tautologii:

$$\begin{aligned} y \in a(\lambda x) &\Leftrightarrow (\lambda x, y) \in Z \Leftrightarrow \lambda \left(x, \frac{1}{\lambda} y \right) \in Z \Leftrightarrow \left(x, \frac{1}{\lambda} y \right) \in Z \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} y \in a(x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y \in \lambda a(x). \end{aligned}$$

(2i) Niech $y \in a(x^1) + a(x^2)$. Zatem:

$$\exists y^1 \in a(x^1) \quad \exists y^2 \in a(x^2) \quad (y = y^1 + y^2).$$

Ponieważ $y^1 \in a(x^1)$, $y^2 \in a(x^2)$, więc $(x^1, y^1) \in Z$, $(x^2, y^2) \in Z$. Wówczas, zgodnie z **(G2)** $(x^1 + x^2, y^1 + y^2) \in Z$, czyli $y = y^1 + y^2 \in a(x^1 + x^2)$. Docho-
dzimy do wniosku, że:

$$\forall y \in (a(x^1) + a(x^2)) (y \in a(x^1 + x^2)),$$

lub inaczej:

$$a(x^1) + a(x^2) \subseteq a(x^1 + x^2).$$

(3i) Własność wynika wprost z warunku **(G3)**.

(4i) Niech $y \in a(x)$, czyli $(x, y) \in Z$. Weźmy dowolny wektor nakładów $x' \geq x$. Wówczas zgodnie z **(G4)** $(x', y) \in Z$, czyli $y \in a(x')$.

(5i) Podobnie, jeżeli $y \in a(x)$ (równoważnie $(x, y) \in Z$) oraz $0 \leq y' \leq y$, to zgodnie z **(G5)** $(x, y') \in Z$, tj. $y' \in a(x)$.

(6i) Zbiory $a(x)$ są niepuste, gdyż $\forall x \geq 0$ ($0 \in a(x)$).

(Ograniczoność) Zbiór $a(0)$ jest ograniczony zgodnie z **(3i)**. Załóżmy, że dla pewnego wektora $x \geq 0$ zbiór $a(x)$ jest nieograniczony, czyli:

$$\exists \{y^i\}_{i=1}^{\infty} \left(y^i \in a(x) \& \|y^i\| \rightarrow +\infty \right).$$

Wówczas $\forall i \left((x, y^i) \in Z \right)$, a począwszy od tego wyrazu $i = i_0$ ciągu $\{y^i\}_{i=1}^{\infty}$ od którego $\|y^i\| > 0$:

$$(\xi^i, \eta^i) = \left(\frac{x}{\|y^i\|}, \frac{y^i}{\|y^i\|} \right) \in Z, \xi^i \rightarrow 0 \text{ oraz } \forall i (\|\eta^i\| = 1).$$

Ciąg $\{\eta^i\}_{i=i_0}^{\infty}$ jest ograniczony, więc istnieje podciąg $\{\eta^{i_j}\}_{j=1}^{\infty}$ zbieżny do pewnego wektora $\bar{\eta} \geq 0$, $\|\bar{\eta}\| = 1$. Wówczas $(\xi^{i_j}, \eta^{i_j}) \rightarrow (0, \bar{\eta})$ oraz $\bar{\eta} \neq 0$. Ponieważ przestrzeń produkcyjna Z jest zbiorem domkniętym w R^{2n} , więc $(0, \bar{\eta}) \in Z$, co jest sprzeczne z warunkiem **(G3)** definicji 1.1. Tym samym zbiór $a(x)$ jest ograniczony.

(Domkniętość) Weźmy dowolny wektor nakładów $x \geq 0$ i ciąg wektorów produkcji $y^i \in a(x)$, $i = 1, 2, \dots$, zbieżny do $\bar{y}$. Wówczas $\forall i \left((x, y^i) \in Z \right)$ oraz

$(x, y^i) \rightarrow_i (x, \bar{y})$. Zbiór Z jest domknięty w R^{2n} , więc $(x, \bar{y}) \in Z$, czyli $\bar{y} \in a(x)$.

Stwierdzamy, że $\forall x \geq 0$ zbiór $a(x)$ jest domknięty w R^n .

Ponieważ $\forall x \geq 0$ zbiór $a(x)$ jest ograniczony i domknięty w R^n , więc jest zwarty.

(Wypukłość) Niech $y^1, y^2 \in a(x)$, gdzie x jest dowolnym nieujemnym wektorem nakładów. Wówczas:

$$\forall \alpha, \beta \geq 0 (\alpha + \beta = 1 \Rightarrow \alpha y^1 + \beta y^2 \in \{\alpha a(x) + \beta a(x)\} = a(\alpha x) + a(\beta x) \subseteq a(x)),$$

co dowodzi wypukłości obrazu $a(x)$ w każdym punkcie $x \geq 0$.

(7i) (Półciągłość z góry) Weźmy dowolny ciąg takich procesów $\{(x^i, y^i)\}_{i=1}^{\infty}$, że $y^i \in a(x^i)$ oraz $(x^i, y^i) \rightarrow_i (\bar{x}, \bar{y})$. Wtedy $\forall i ((x^i, y^i) \in Z)$, a ponieważ przestrzeń produkcyjna Z jest zbiorem domkniętym, więc $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z$, czyli $\bar{y} \in a(\bar{x})$.

(Półciągłość z dołu) Niech $\bar{y} \in a(\bar{x})$. Weźmy ciąg nieujemnych wektorów $\{x^i\}_{i=1}^{\infty}$ zbieżny do $\bar{x}$. Rozpatrzmy kolejno dwa przypadki: $\bar{x} = 0$ oraz $\bar{x} \geq 0$.

Jeżeli $\bar{x} = 0$, to $\bar{y} = 0$. Ponieważ:

$$\forall \{x^i\}_{i=1}^{\infty} (0 \in a(x^i)),$$

więc warunek półciągłości z dołu jest spełniony, gdy w charakterze ciągu $\{y^i\}_{i=1}^{\infty}$ weźmiemy ciąg złożony wyłącznie z wektorów $y^i = 0$.

Niech teraz $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \geq 0$ oraz $\bar{x}_{k_1} > 0, \dots, \bar{x}_{k_j} > 0, j \leq n$. Ponieważ $x^i \rightarrow_i \bar{x}$, więc:

$$\exists \varepsilon \in (0,1) \exists i_{\varepsilon} \forall i \geq i_{\varepsilon} (x_{k_1}^i > 0, \dots, x_{k_j}^i > 0 \text{ \& } x^i \geq (1 - \varepsilon)\bar{x}).$$

Z założenia $\bar{y} \in a(\bar{x})$ (równoważnie $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z$), więc w myśl **(G1)**:

$$((1 - \varepsilon)\bar{x}, (1 - \varepsilon)\bar{y}) \in Z.$$

Niech dla $i > i_\varepsilon$:

$$\varepsilon_i = \max_k |x_k^i - \bar{x}_k|.$$

Wtedy:

$$\varepsilon_i \rightarrow 0 \text{ \& } \forall i \geq i_\varepsilon \left((x^i, (1 - \varepsilon_i)\bar{y}) \right) \in Z,$$

czyli:

$$\forall i > i_\varepsilon \left(y^i \in a(x^i) \text{ \& } (x^i, y^i) \rightarrow_i (\bar{x}, \bar{y}) \right),$$

gdzie $y^i = (1 - \varepsilon_i)\bar{y}$.

W charakterze pierwszych i_ε wyrazów ciągu $\{y^i\}_{i=1}^\infty$ można wziąć dowolny ciąg wektorów produkcji $y^i \in a(x^i)$, $i = 1, \dots, i_\varepsilon$. Wektory takie istnieją, gdyż $\forall x \geq 0$ zbiory $a(x)$ są niepuste. Mogą to być np. wektory:

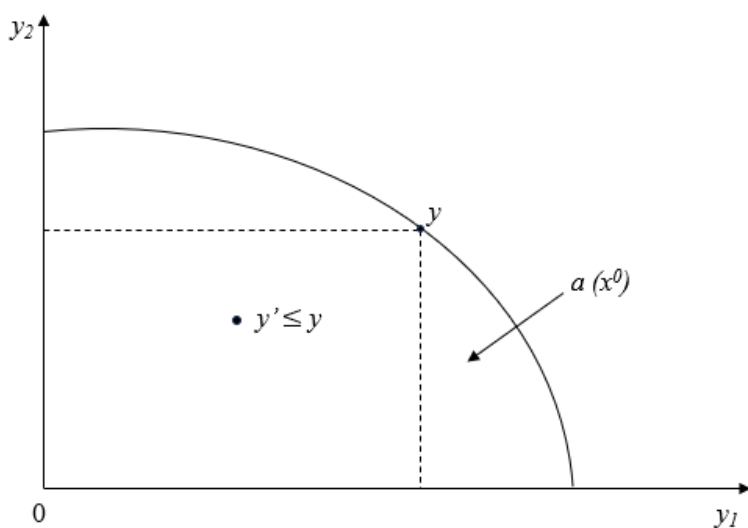
$$\tilde{y}^i = \arg \min_{y \in a(x^i)} \|y - \bar{y}\|, \quad i = 1, \dots, i_\varepsilon$$

(dla każdego i zadanie to ma rozwiązanie na mocy twierdzenia Weierstrassa o istnieniu maksimum funkcji ciągłej na zbiorze zwartym). Warunki definicji spełnia wówczas ciąg $\{y^i\}_{i=1}^\infty$:

$$y^i = \begin{cases} \tilde{y}^i, & i = 1, \dots, i_\varepsilon, \\ (1 - \varepsilon_i)\bar{y}, & i = i_\varepsilon + 1, i_\varepsilon + 2, \dots \end{cases}$$

■

Pierwsze trzy własności odwzorowania $a(\cdot)$, o których mowa w twierdzeniu, nawiązują do klasycznego pojęcia odwzorowania liniowego, dlatego procesy produkcji charakteryzujące się tymi własnościami nazywa się liniowymi. Własność **(4i)** uogólnia klasyczne pojęcie funkcji monotonicznie rosnącej. Obraz multifunkcji $a(\cdot)$ w punkcie x zgodny z **(5i)** przedstawia rysunek 1.2.



Rysunek 1.2. Obraz $a(x^0) \subset R_+^2$ multifunkcji $a: R_+^2 \rightarrow P(R_+^2)$ w punkcie x^0

1.2. Technologiczna i ekonomiczna efektywność produkcji

Niech $Z \subset R_+^{2n}$ będzie przestrzenią produkcyjną Gale'a. Jeżeli $(x, y) \in Z$ oraz $(x, y) \neq 0$, to wobec **(G3)** $x \neq 0$. Interesują nas tylko takie niezerowe procesy $(x, y) \in Z$.

Liczbę:

$$\alpha(x, y) = \max \{ \alpha | \alpha x \leq y \}$$

nazywamy wskaźnikiem technologicznej efektywności procesu $(x, y) \neq 0$. Funkcja $\alpha(\cdot)$ jest określona i dodatnio jednorodna stopnia 0 na $Z \setminus \{0\}$ oraz:

$$\forall (x, y) \in Z \setminus \{0\} \left(\alpha(x, y) = \min_i \frac{y_i}{x_i} \geq 0 \right).$$

■ **Twierdzenie 1.2. (i)** Jeżeli zbiór $Z \subset R_+^{2n}$ jest przestrzenią produkcyjną Gale’a (spełnia warunki **(G1)**–**(G6)**), to:

$$\exists(\bar{x}, \bar{y}) \in Z \left(\alpha(\bar{x}, \bar{y}) = \max_{(x,y) \in Z \setminus \{0\}} \alpha(x, y) = \alpha_M \geq 0 \right).$$

(2i) Jeżeli ponadto zachodzi warunek:

$$\textbf{(G7)} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \exists (x^i, y^i) \in Z \quad (y_i^i > 0),$$

wówczas $\alpha_M > 0$.

Dowód. (i) Ponieważ funkcja $\alpha(\cdot)$ jest dodatnio jednorodna stopnia 0, więc rozwiązanie zadania:

$$\max_{(x,y) \in Z \setminus \{0\}} \alpha(x, y)$$

istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje rozwiązanie zadania:

$$\max_{(x,y) \in \Omega(1)} \alpha(x, y), \tag{1.1}$$

gdzie:

$$\Omega(1) = \{(x, y) \in Z \mid \|x\| = 1\}.$$

Zbiór $\Omega(1)$ jest zwartym (ograniczonym i domkniętym) podzbiorem R^{2n} . Istotnie, weźmy dowolny ciąg procesów $(x^i, y^i) \in \Omega(1) \subset Z$, $i = 1, 2, \dots$. Załóżmy, że $\|x^i, y^i\| \rightarrow +\infty$, wówczas $\|y^i\| \rightarrow +\infty$, gdyż $\forall i (\|x^i\| = 1)$. Ponieważ $(x^i, y^i) \in Z$, więc zgodnie z warunkiem **(G1)** – począwszy od tego wyrazu $i = i_0$ ciągu, od którego wektor η^i jest określony (tzn. $\|y^i\| > 0$) – także $(\xi^i, \eta^i) \in Z$, gdzie $\xi^i = \frac{x^i}{\|y^i\|}$, $\eta^i = \frac{y^i}{\|y^i\|}$, $i = i_0, i_0 + 1, \dots$. Wtedy $\xi^i \rightarrow 0$, $\|\eta^i\| = 1$, czyli:

$$\exists \{\xi^{ij}, \eta^{ij}\}_{j=1}^{\infty} \left(\xi^{ij} \rightarrow 0, \eta^{ij} \rightarrow \bar{\eta} \neq 0 \right)$$

oraz $(0, \bar{\eta}) \in Z$ (gdyż przestrzeń produkcyjna Gale’a jest zbiorem domkniętym), co jest sprzeczne z warunkiem **(G3)**. Tym samym zbiór $\Omega(1)$ jest ograniczony.

Niech teraz $(x^i, y^i) \in \Omega(1) \subset Z, i = 1, 2, \dots, (x^i, y^i) \xrightarrow{i} (\bar{x}, \bar{y})$. Wówczas $\|\bar{x}\| = 1$ oraz $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z$, więc $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega(1)$.

Zbiór $\Omega(1)$ jest zatem także domknięty, więc jest zwarty. Zadanie (1.1) jest równoważne z zadaniem:

$$\max_{\alpha \in \alpha(\Omega(1))} \alpha, \quad (1.2)$$

gdzie $\alpha(\Omega(1)) = \{\alpha | \exists (x, y) \in \Omega(1) (\alpha = \alpha(x, y))\} \subset R_+^1$. Równoważność rozumiemy w tym sensie, że proces $(\bar{x}, \bar{y})$ jest rozwiązaniem zadania (1.1) wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $\bar{\alpha} = \alpha(\bar{x}, \bar{y})$ jest rozwiązaniem zadania (1.2). Pokażemy, że zbiór $\alpha(\Omega(1))$ jest także zwarty (ograniczony i domknięty w R^1).

(Ograniczoność) Załóżmy, że zbiór $\alpha(\Omega(1))$ jest nieograniczony, czyli:

$$\exists \{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty} (\alpha_i \in \alpha(\Omega(1)) \text{ \& } \alpha_i \xrightarrow{i} +\infty).$$

Wówczas:

$$\exists \{x^i, y^i\}_{i=1}^{\infty} (y^i = \alpha_i x^i, (x^i, y^i) \in \Omega(1) \subset Z, \|x^i\| = 1, i = 1, 2, \dots, \|y^i\| \xrightarrow{i} +\infty)$$

i postępując analogicznie jak przy dowodzie zwartości zbioru $\Omega(1)$, dochodzimy do konkluzji, że do przestrzeni produkcyjnej Z należy proces $(0, \bar{\eta})$ z wektorem $\bar{\eta} \neq 0$, co jest sprzeczne z warunkiem **(G3)**. Tym samym zbiór $\alpha(\Omega(1))$ jest ograniczony.

(Domkniętość) Niech $\alpha_i \in \alpha(\Omega(1)), i = 1, 2, \dots$, oraz $\alpha_i \xrightarrow{i} \bar{\alpha}$. Wtedy:

$$\exists \{x^i\}_{i=1}^{\infty} (\|x^i\| = 1 \text{ \& } (x^i, \alpha_i x^i) \in \Omega(1)).$$

Ponieważ $\forall i (\|x^i\| = 1)$, więc:

$$\exists \{x^{ij}\}_{j=1}^{\infty} (\|x^{ij}\| = 1, x^{ij} \xrightarrow{j} \bar{x}, \|\bar{x}\| = 1),$$

tn. $(x^{ij}, \alpha_{ij} x^{ij}) \rightarrow_j (\bar{x}, \bar{\alpha} \bar{x}) \in \Omega(1)$, gdyż zbiór $\Omega(1)$ jest zwarty. Tak więc $\bar{\alpha} \in \alpha(\Omega(1))$.

Zbiór $\alpha(\Omega(1))$ jest ograniczonym i domkniętym, a więc zwartym podzbiorem R_+^1 , czyli zawiera swój kres górny:

$$\exists \alpha_M \in \alpha(\Omega(1)) \forall \alpha \in \alpha(\Omega(1)) (\alpha_M \geq \alpha \geq 0),$$

zatem:

$$\exists (\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega(1) \left(\alpha_M = \alpha(\bar{x}, \bar{y}) = \max_{(x,y) \in \Omega(1)} \alpha(x, y) \geq 0 \right).$$

(2i) Jeżeli $(x, y) = \sum_{i=1}^n (x^i, y^i)$ i procesy (x^i, y^i) spełniają warunek **(G7)**, wtedy $(x, y) \in Z$ (zgodnie z **(G2)**) oraz $y = \sum_{i=1}^n y^i > 0$, czyli $\alpha(x, y) > 0$. Stąd $\alpha_M \geq \alpha(x, y) > 0$. ■

Gospodarkę z przestrzenią produkcyjną Z spełniającą warunki **(G1)-(G7)** nazywamy *gospodarką Gale’a*. Proces $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z$, dla którego $\alpha(\bar{x}, \bar{y}) = \alpha_M > 0$, nazywamy *optymalnym procesem produkcji*. Liczbę α_M nazywamy *optymalnym wskaźnikiem technologicznej efektywności produkcji*.

Uwaga 1. Warunki **(G1)-(G6)** nie wykluczają nierealistycznej sytuacji, gdy $\alpha_M = 0$. W gospodarce nie ma wówczas w ogóle procesu z dodatnią technologiczną efektywnością. Sytuacja taka mogłaby zaistnieć, gdyby np. lista towarów wytwarzanych była krótsza od listy towarów zużywanych. Warunek **(G7)** wyklucza taką ewentualność.

Uwaga 2. Funkcja $\alpha(\cdot)$ jest dodatnio jednorodna stopnia 0, więc w szczególności, jeżeli $\alpha(\bar{x}, \bar{y}) = \alpha_M > 0$, to:

$$\forall \lambda > 0 \quad (\alpha(\bar{x}, \bar{y}) = \alpha(\lambda \bar{x}, \lambda \bar{y}) = \alpha_M > 0).$$

Reasumując, w gospodarce Gale’a spełniającej warunki **(G1)-(G7)**:

- istnieją optymalne procesy produkcji,
- każdy optymalny proces produkcji jest określony z dokładnością do struktury (mnożenia przez dowolną stałą dodatnią).

Uwaga 3. Gdyby funkcja $\alpha(\cdot)$ była ciągła na (zwartym) zbiorze $\Omega(1)$ (równoważnie na $Z \setminus \{0\}$), wtedy przy dowodzie twierdzenia 1.2 wystarczyłoby skorzystać z twierdzenia Weierstrassa o istnieniu maksimum funkcji ciągłej na zbiorze zwartym oraz tego, że:

$$\max_{(x,y) \in Z \setminus \{0\}} \alpha(x,y) = \max_{(x,y) \in \Omega(1)} \alpha(x,y).$$

Funkcja $\alpha(\cdot)$ jest ciągła na zbiorze $\text{int } \Omega(1)$, natomiast może być nieciągła na jego brzegu.

Przykład. Niech:

$$Z = \{(x,y) | x = vA, y = vB; v \geq 0\},$$

gdzie:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2), v = (v_1, v_2, v_3, v_4).$$

Tak zdefiniowany zbiór jest przestrzenią produkcyjną $Z \subset R_+^4$ spełniającą warunki **(G1)-(G7)** (jest to stożek wielościenny z wierzchołkiem w 0). Optymalnym procesem produkcji jest wektor:

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2) = (0, 1, 0, 2) \in \Omega(1) = \{(x,y) \in Z | \|x\| = 1\}.$$

Jego technologiczna efektywność:

$$\alpha(\bar{x}, \bar{y}) = 2.$$

Jednocześnie $\exists \{x^i, y^i\}_{i=1}^\infty$:

$$(x^i, y^i) = \left(\frac{1}{i+1}, \frac{i}{i+1}, \frac{1}{i+1}, \frac{2}{i+1} \right) \in \Omega(1),$$

$$(x^i, y^i) \xrightarrow{i} (0,1,0,2) = (\bar{x}, \bar{y})$$

oraz $\forall i (\alpha(x^i, y^i) = 1)$, czyli $\lim_i \alpha(x^i, y^i) = 1$. W punkcie $(\bar{x}, \bar{y}) = (0,1,0,2)$ funkcja $\alpha(\cdot)$ jest więc nieciągła. Twierdzenie 1.2 dowodzi, że w gospodarce Gale'a (z przestrzenią produkcyjną spełniającą warunki **(G1)-(G7)**) istnieją optymalne procesy produkcji nawet gdy funkcja $\alpha(\cdot)$ niekonieczna jest ciągła wszędzie na $Z \setminus \{0\}$.

1.3. Równowaga von Neumanna

Weźmy proces $(x, y) \in Z$ oraz n -wymiarowy wektor (wierszowy) cen towarów $p = (p_1, \dots, p_n) \geq 0$. Liczbę:

$$\beta(x, y, p) = \frac{\langle p, y \rangle}{\langle p, x \rangle}$$

(tam, gdzie jest określona) nazywamy wskaźnikiem ekonomicznej efektywności procesu (x, y) przy cenach p . Funkcja $\beta(\cdot, p)$ jest ciągła tam, gdzie jest określona. Wszędzie, gdzie funkcje $\alpha(\cdot)$, $\beta(\cdot, p)$ są kreślone, zachodzi nierówność:

$$\alpha(x, y) \leq \beta(x, y, p),$$

tj. bez względu na ceny $p \geq 0$ technologiczna efektywność dowolnego procesu $(x, y) \in Z$ jest nie wyższa od jego efektywności ekonomicznej. Istotnie, ponieważ $\alpha(x, y) = \max \{\alpha | \alpha x \leq y\}$, więc oczywiście także $\alpha(x, y)x \leq y$, czyli $\alpha(x, y) \leq \beta(x, y, p)$ wszędzie tam, gdzie $(x, y) \neq 0$ oraz $\langle p, x \rangle \neq 0$.

O szczególnym stanie gospodarki, w którym dochodzi do zrównania efektywności technologicznej produkcji z efektywnością ekonomiczną, mówi następująca definicja.

Δ Definicja 1.2. O procesie $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z$, wektorze cen $\bar{p} \geq 0$ i liczbie $\alpha > 0$ mówimy, że charakteryzuje gospodarkę Gale'a w *równowadze von Neumanna*, jeżeli zachodzą następujące warunki:

$$\alpha \bar{x} \leq \bar{y}, \quad (1.3)$$

$$\forall (x, y) \in Z (\langle \bar{p}, y \rangle - \alpha \langle \bar{p}, x \rangle \leq 0), \quad (1.4)$$

$$\langle \bar{p}, \bar{y} \rangle > 0. \quad (1.5)$$

Δ

Wektor $\bar{p}$ nazywamy **wektorem cen równowagi** (lub **wektorem cen von Neumanna**). Aby przybliżyć istotę tej definicji, udowodnimy następujące twierdzenie.

■ **Twierdzenie 1.3.** Jeżeli gospodarka Gale’a jest w równowadze von Neumanna, to:

(i) Liczba α w definicji 1.2 jest wskaźnikiem technologicznej efektywności procesu $(\bar{x}, \bar{y})$:

$$\alpha = \alpha(\bar{x}, \bar{y}) > 0.$$

(2i) Ekonomiczna efektywność procesu $(\bar{x}, \bar{y})$ (przy cenach równowagi $\bar{p}$) jest równa jego efektywności technologicznej:

$$\beta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}) = \alpha(\bar{x}, \bar{y}) > 0$$

oraz:

$$\beta(x, y, \bar{p}) \leq \alpha(\bar{x}, \bar{y})$$

wszędzie, gdzie funkcja $\beta(\cdot, \bar{p})$ jest określona.

(3i) Jeżeli $(\bar{x}^1, \bar{y}^1), (\bar{x}^2, \bar{y}^2)$ są procesami produkcji w równowadze von Neumanna z cenami $\bar{p}$ i technologiczną efektywnością α , to proces:

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \lambda_1(\bar{x}^1, \bar{y}^1) + \lambda_2(\bar{x}^2, \bar{y}^2),$$

gdzie $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ oraz $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$, też jest procesem produkcji w równowadze von Neumanna z tymi samymi cenami i tą samą technologiczną efektywnością.

(4i) Jeżeli $\bar{p}$ jest wektorem cen równowagi, to $\forall \lambda > 0$ również $\lambda \bar{p}$ jest wektorem cen równowagi.

(5i) Prawdziwe są implikacje:

$$\alpha \bar{x}_i < \bar{y}_i \Rightarrow \bar{p}_i = 0,$$

$$\bar{p}_i > 0 \Rightarrow \alpha \bar{x}_i = \bar{y}_i.$$

Dowód. (i) Jeżeli $\alpha \neq \alpha(\bar{x}, \bar{y})$, to w świetle (1.3) $0 < \alpha < \alpha(\bar{x}, \bar{y})$, więc:

$$\forall i (\bar{y}_i > 0 \Rightarrow \alpha \bar{x}_i < \bar{y}_i).$$

Równocześnie z (5i) (dowód przeprowadzimy za chwilę) wynika, że jeżeli zachodzi ten warunek, to $\bar{p}_i = 0$. Zatem:

$$\forall i (\bar{y}_i = 0 \vee \bar{p}_i = 0),$$

tj. $\langle \bar{p}, \bar{y} \rangle = 0$ wbrew (1.5). Otrzymana sprzeczność dowodzi, że $\alpha = \alpha(\bar{x}, \bar{y})$.

(2i) Mnożąc obie strony nierówności (1.3) przez wektor cen $\bar{p}$ dostajemy:

$$\alpha \langle \bar{p}, \bar{x} \rangle \leq \langle \bar{p}, \bar{y} \rangle,$$

natomiast zgodnie z (1.4):

$$\alpha \langle \bar{p}, \bar{x} \rangle \geq \langle \bar{p}, \bar{y} \rangle,$$

zatem:

$$\alpha \langle \bar{p}, \bar{x} \rangle = \langle \bar{p}, \bar{y} \rangle.$$

Ponieważ $\langle \bar{p}, \bar{y} \rangle > 0$ (w myśl (1.5)), więc także $\langle \bar{p}, \bar{x} \rangle > 0$, czyli:

$$\alpha = \alpha(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\langle \bar{p}, \bar{y} \rangle}{\langle \bar{p}, \bar{x} \rangle} = \beta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}) > 0.$$

Równocześnie z warunku (1.4) wynika, że:

$$\forall (x, y) \in Z \left(\langle \bar{p}, x \rangle \neq 0 \Rightarrow \beta(x, y, \bar{p}) = \frac{\langle \bar{p}, y \rangle}{\langle \bar{p}, x \rangle} \leq \alpha = \alpha(\bar{x}, \bar{y}) \right).$$

(3i), (4i) Dowód pomijamy, wymaga prostego sprawdzenia warunków (1.3)-(1.5).

(5i) Załóżmy, że $\alpha \bar{x}_i < \bar{y}_i$ oraz $\bar{p}_i > 0$. Mnożąc obie strony nierówności (1.3) przez wektor cen równowagi $\bar{p}$, otrzymujemy wówczas nierówność:

$$\alpha \langle \bar{p}, \bar{x} \rangle < \langle \bar{p}, \bar{y} \rangle,$$

która jest sprzeczna z (1.4). Jeżeli zatem $\alpha \bar{x}_i < \bar{y}_i$ to $\bar{p}_i = 0$, czyli (równoważnie) jeżeli $\bar{p}_i > 0$, to $\alpha \bar{x}_i = \bar{y}_i$. ■

Równowaga von Neumanna oznacza takie proporcje produkcji oraz takie ceny, przy których ekonomiczna efektywność produkcji jest równa efektywności technologicznej. Ekonomiczna efektywność każdego innego procesu przy cenach równowagi jest nie wyższa od ekonomicznej efektywności procesu w równowadze. Ceny i procesy produkcji w równowadze są określone z dokładnością do struktury (mnożenia przez dowolną stałą dodatnią). Jeżeli technologiczna efektywność produkcji i -tego towaru w równowadze jest wyższa od technologicznej (oraz ekonomicznej), efektywności całego procesu $(\bar{x}, \bar{y})$:

$$\alpha_i(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\bar{y}_i}{\bar{x}_i} > \alpha(\bar{x}, \bar{y})$$

(w szczególności, gdy $\alpha_i(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\bar{y}_i}{\bar{x}_i} = +\infty$, co może mieć miejsce, jeżeli $\bar{x}_i = 0$ oraz $\bar{y}_i > 0$), oznacza to, że towar taki jest wytwarzany „w nadmiarze” i wtedy jego cena $\bar{p}_i = 0$.

O liczbie stanów równowagi von Neumanna z różnymi wskaźnikami technologicznej efektywności α mówi następujące twierdzenie.

■ **Twierdzenie 1.4.** W gospodarce Gale’a liczba stanów równowagi von Neumanna z różnymi wskaźnikami technologicznej efektywności α nie przekracza liczby towarów.

Dowód. Niech $\{\alpha', (x', y'), p'\}$, $\{\alpha'', (x'', y''), p''\}$ będą dwoma stanami równowagi ze wskaźnikami $\alpha' > \alpha''$. Z (1.5) wynika, że:

$$\exists i(y'_i > 0, p'_i > 0) \& \exists j(y''_j > 0, p''_j > 0),$$

a stąd, w myśl twierdzenia 1.3(5i):

$$\alpha' x'_i = y'_i > 0, \alpha'' x''_j = y''_j > 0. \quad (1.6)$$

Zgodnie z (1.3):

$$\alpha' x' \leq y', \quad \alpha'' x'' \leq y''$$

i ponieważ $\alpha' > \alpha''$, więc:

$$\alpha'' x' \leq y'. \quad (1.7)$$

W szczególności, zważywszy na (1.6):

$$\alpha'' x'_i < y'_i. \quad (1.8)$$

Weźmy stan równowagi $\{\alpha'', (x'', y''), p''\}$ i załóżmy, że:

$$p''_i > 0. \quad (1.9)$$

Zgodnie z warunkiem (1.4) definicji 1.2:

$$\langle p'', y' \rangle \leq \alpha'' \langle p'', x' \rangle,$$

natomiast mnożąc obie strony nierówności (1.7) przez wektor cen p'' , zważywszy na (1.8), (1.9), dostajemy:

$$\langle p'', y' \rangle > \alpha'' \langle p'', x' \rangle.$$

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że $p''_i = 0$, a to oznacza, że $i \neq j$. Płynie stąd wniosek, że istnieje nie więcej niż n stanów równowagi von Neumanna z różnymi wskaźnikami technologicznej efektywności. ■

Zgodnie z twierdzeniem 1.2 w gospodarce Gale'a (z przestrzenią produkcyjną spełniającą warunki **(G1)-(G7)**) istnieje (optymalny) proces produkcji $(\bar{x}, \bar{y})$ ze wskaźnikiem technologicznej efektywności:

$$\alpha_M = \alpha(\bar{x}, \bar{y}) = \max_{(x,y) \in Z \setminus \{0\}} \alpha(x, y) > 0.$$

Rodzi się pytanie, czy gospodarka taka może w równowadze osiągnąć tę optymalną efektywność produkcji? Dokładniej: czy i kiedy w gospodarce Gale'a istnieje stan równowagi von Neumanna z optymalnym wskaźnikiem technologicznej efektywności α_M (optymalny stan równowagi von Neumanna)?

■ **Twierdzenie 1.5. (i)** Jeżeli zachodzą warunki **(G1)-(G7)**, to w gospodarce Gale'a istnieje optymalny proces produkcji $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z$ oraz ceny $\bar{p} \geq 0$ spełniające warunki (1.3), (1.4) definicji 1.2 ze wskaźnikiem technologicznej efektywności $\alpha = \alpha(\bar{x}, \bar{y}) = \alpha_M > 0$.

(2i) Jeżeli ponadto istnieje taki skończony ciąg procesów $(z^{i-1}, z^i) \in Z$, $i = 1, \dots, k$, że:

$$z^0 = \bar{y} \text{ \& } z^k > 0,$$

to zachodzi również warunek (1.5) definicji 1.2. Wówczas trójka $\{\alpha_M, (\bar{x}, \bar{y}), \bar{p}\}$ charakteryzuje gospodarkę w równowadze von Neumanna.

Dowód. (i) Weźmy dowolny optymalny proces produkcji $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z$ (przy przyjętych założeniach proces taki istnieje). Wówczas:

$$\alpha_M \bar{x} \leq \bar{y}, \tag{1.10}$$

tym samym zachodzi warunek (1.3). Utwórzmy zbiór:

$$C = \{c \in R^n \mid c = \alpha_M x - y, (x, y) \in Z\}.$$

Zbiór ten jest stożkiem wypukłym w R^n z wierzchołkiem w 0 (jako liniowy obraz stożka Z) niezawierającym wektorów ujemnych. Istotnie, załóżmy, że:

$$\exists (x', y') \in Z (c' = \alpha_M x' - y' < 0).$$

Wówczas:

$$\exists \varepsilon' > 0 \left(\alpha_M = \max_{(x,y) \in Z \setminus \{0\}} \alpha(x, y) \geq \alpha(x', y') \geq \alpha_M + \varepsilon' \right),$$

co jest oczywiście niemożliwe (przeczy definicji optymalnego wskaźnika technologicznej efektywności α_M). Ponieważ przestrzeń produkcyjna Z zawiera procesy $(e^i, 0)$, $i = 1, \dots, n$, więc:

$$c^i = \alpha_M e^i - 0 = (0, \dots, \alpha_M, \dots, 0) \in C, i = 1, \dots, n$$

(w wektorze c^i liczba α_M znajduje się na i -tym miejscu). Z twierdzenia o hiperpłaszczyźnie oddzielającej wnioskujemy, że:

$$\exists \bar{p} \neq 0 \forall c \in C (\langle \bar{p}, c \rangle \geq 0),$$

w szczególności:

$$\langle \bar{p}, c^i \rangle = \alpha_M \bar{p}_i \geq 0, i = 1, \dots, n,$$

czyli $\bar{p} \geq 0$. Z drugiej strony:

$$\forall c \in C (\langle \bar{p}, c \rangle = \langle \bar{p}, \alpha_M x - y \rangle \geq 0),$$

zatem:

$$\forall (x, y) \in Z (\langle \bar{p}, y \rangle - \alpha_M \langle \bar{p}, x \rangle \leq 0), \quad (1.11)$$

tzn. zachodzi warunek (1.4).

(2i) Z założenia:

$$\exists \{z^i\}_{i=0}^{k < \infty} \left((z^{i-1}, z^i) \in Z, i = 1, \dots, k, z^0 = \bar{y} \text{ \& } z^k > 0 \right).$$

Wtedy, zgodnie z (1.4):

$$\langle \bar{p}, z^i \rangle \leq \alpha_M \langle \bar{p}, z^{i-1} \rangle, i = 1, \dots, k.$$

Ponieważ $\bar{p} \geq 0$ (nieujemny wektor $\bar{p}$ zawiera elementy dodatnie) oraz $z^k > 0$, więc:

$$0 < \langle \bar{p}, z^k \rangle \leq \alpha_M \langle \bar{p}, z^{k-1} \rangle \leq \dots \leq \alpha_M^k \langle \bar{p}, z^0 \rangle = \alpha_M^k \langle \bar{p}, \bar{y} \rangle$$

i spełniony jest warunek (1.5). ■

O trojce $\{\alpha_M, (\bar{x}, \bar{y}), \bar{p}\}$ spełniającej warunki twierdzenia 1.5 mówimy, że tworzy *optymalny stan równowagi von Neumanna* w gospodarce Gale'a. W stanie takim dochodzi do zrównania efektywności ekonomicznej produkcji z jej efektywnością technologiczną na najwyższym możliwym do osiągnięcia poziomie. W teorii gier jest to rozwiązanie gry dwuosobowej, której stronami są technologia (odpowiedzialna za wybór procesu produkcji) oraz ekonomia (decydująca o cenach).

Jeżeli istnieje optymalny proces $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z$, w którym wektor produkcji $\bar{y}$ jest dodatni, wtedy przestrzeń produkcyjną Z nazywamy *regularną*. Gdy wektor $\bar{y}$ w optymalnym procesie $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z$ nie jest dodatni, ale (jak w twierdzeniu 1.5(2i)) istnieje taki skończony ciąg procesów $(z^{i-1}, z^i) \in Z$, $i = 1, \dots, k$, że:

$$z^0 = \bar{y} \text{ \& } z^k > 0,$$

wówczas przestrzeń produkcyjną Gale'a nazywamy *slabo regularną*. W przypadku regularnej przestrzeni produkcyjnej warunki twierdzenia są spełnione w sposób trywialny (dla $k = 1$), tzn. w gospodarce Gale'a z regularną przestrzenią produkcyjną optymalny stan równowagi von Neumanna istnieje zawsze. Zbędny jest wówczas warunek (G7). Spełnia go bowiem sam optymalny proces $(\bar{x}, \bar{y})$. Równocześnie nie istnieje inny stan równowagi $\{\alpha', (\bar{x}', \bar{y}'), \bar{p}'\}$ ze wskaźnikiem $\alpha' \neq \alpha_M$. Istotnie, założmy, że stan taki istnieje. Wówczas $\alpha' < \alpha_M$, czyli $\alpha' \bar{x} < \bar{y}$, a stąd $\langle \bar{p}', \bar{y} \rangle > \alpha' \langle \bar{p}', \bar{x} \rangle$, co jest sprzeczne z warunkiem (1.4) definicji 1.2.

Bez dodatkowych warunków nie jest natomiast wykluczone istnienie optymalnych stanów równowagi von Neumanna $\{\alpha_M, (\bar{x}^1, \bar{y}^1), \bar{p}\}$, $\{\alpha_M, (\bar{x}^2, \bar{y}^2), \bar{p}\}$ z takim samym optymalnym wskaźnikiem technologicznej efektywności $\alpha_M > 0$ i cenami $\bar{p} \geq 0$ oraz różnymi (co do struktury) procesami produkcji $(\bar{x}^1, \bar{y}^1)$, $(\bar{x}^2, \bar{y}^2)$. Szczególny przypadek, gdy w gospodarce Gale'a istnieje jeden (optymalny) stan równowagi von Neumanna z jednoznacznie – z dokładnością do struktury – określonym procesem produkcji $(\bar{x}, \bar{y})$ w równowadze, przedstawiono

w punkcie 1.5. Przedtem sformułowane jednak zostaną warunki istnienia optymalnego stanu równowagi w gospodarce Gale’a bez założenia o słabej regularności przestrzeni produkcyjnej Z , które grało kluczową rolę w twierdzeniu 1.5 **(2i)**.

1.4. Alternatywny warunek istnienia optymalnego stanu równowagi

Optymalne stany równowagi von Neumanna są dlatego interesujące, że w takich stanach gospodarka osiąga najwyższą efektywność technologiczną produkcji α_M , której równocześnie towarzyszy najwyższa efektywność ekonomiczna (równa efektywności technologicznej). Nie znaczy to, że maksymalną efektywność ekonomiczną gospodarka Gale’a bez dodatkowych warunków może osiągać tylko w równowadze. Aby wykluczyć sytuację, w której pewien proces produkcji wyróżnia się najwyższą efektywnością ekonomiczną, mimo iż nie towarzyszy mu (równie) wysoka efektywność technologiczna, wystarczy założyć, że poza dotychczasowymi warunkami **(G1)-(G7)** spełniony jest jeszcze następujący warunek:

(G8) Jeżeli $\bar{p} \geq 0$ jest wektorem cen, przy których zachodzi warunek (1.4), to:

$$\forall (x, y) \in Z (\alpha(x, y) < \alpha_M \Rightarrow 0 \leq \langle \bar{p}, y \rangle < \alpha_M \langle \bar{p}, x \rangle),$$

czyli:

$$\forall (x, y) \in Z (\alpha(x, y) < \alpha_M \Rightarrow \beta(x, y, \bar{p}) < \alpha_M).$$

Równoważnie, jeżeli $\bar{p} \geq 0$ jest wektorem cen, przy których zachodzi warunek (1.4), to:

$$\forall (x, y) \in Z (\beta(x, y, \bar{p}) = \alpha_M \Rightarrow \alpha(x, y) = \alpha_M).$$

Warunek głosi, że w gospodarce Gale’a nie osiąga maksymalnej efektywności ekonomicznej proces, któremu nie towarzyszy najwyższa efektywność technologiczna.

■ **Twierdzenie 1.6.** Gdy zachodzą warunki **(G1)-(G8)**, wtedy każda trójka $\{\alpha_M, (\bar{x}, \bar{y}), \bar{p}\}$ z optymalnym procesem produkcji $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z$ i cenami $\bar{p} \geq 0$ tworzy optymalny stan równowagi von Neumanna (spełnia warunki (1.3)-(1.5) definicji 1.2 ze wskaźnikiem technologicznej efektywności $\alpha = \alpha_M$).

Dowód warunków (1.3), (1.4) przebiega analogicznie jak dowód twierdzenia 1.5(i). Aby wykazać, że zachodzi także warunek (1.5), weźmy dowolny optymalny proces produkcji $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z$. Wówczas z (1.10), (1.11) otrzymujemy $\langle \bar{p}, \bar{y} \rangle = \alpha_M \langle \bar{p}, \bar{x} \rangle \geq 0$ oraz zgodnie z definicją procesu optymalnego:

$$\exists k \left(\alpha(\bar{x}, \bar{y}) = \min_i \frac{\bar{y}_i}{\bar{x}_i} = \frac{\bar{y}_k}{\bar{x}_k} = \alpha_M > 0 \right).$$

Niech $\tilde{x} = \bar{x} + e^k$, gdzie $e^k = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ jest n -wymiarowym wektorem z k -tą współrzędną równą 1. Para $(\tilde{x}, \bar{y})$ jest procesem dopuszczalnym (zgodnie z **(G4)**), ale nie optymalnym, gdyż $\alpha(\tilde{x}, \bar{y}) < \alpha_M$. Wtedy, zgodnie z **(G8)**:

$$\langle \bar{p}, \bar{y} \rangle < \alpha_M \langle \bar{p}, \tilde{x} \rangle. \quad (1.12)$$

Założmy, że $\langle \bar{p}, \bar{y} \rangle = 0$. Zatem $\bar{p}_k = 0$, czyli $\langle \bar{p}, \tilde{x} \rangle = \langle \bar{p}, \bar{x} \rangle$ oraz (w świetle (1.10)) $\langle \bar{p}, \bar{x} \rangle = 0$. Zważywszy na (1.12), dochodzimy wówczas do sprzeczności:

$$0 = \langle \bar{p}, \bar{y} \rangle < \alpha_M \langle \bar{p}, \tilde{x} \rangle = 0.$$

Otrzymana sprzeczność prowadzi do wniosku, że $\langle \bar{p}, \bar{y} \rangle > 0$, a więc zachodzi warunek (1.5). ■

Uwaga 1. Przy dowodzie twierdzenia 1.6, w odróżnieniu od dowodu twierdzenia 1.5, nie jest wymagana regularność (słaba regularność) przestrzeni produkcyjnej. Zastępuje ją warunek **(G8)**, który (podobnie jak postulat słabej regularności gospodarki) gra istotną rolę przy dowodzie warunku (1.5).

Uwaga 2. Jeżeli zachodzi warunek **(G8)**, to w optymalnym stanie równowagi von Neumanna $\{\alpha_M, (\bar{x}, \bar{y}), \bar{p}\}$ ceny $\bar{p}$ są dodatnie. Faktycznie, ponieważ $(0,0) \in Z$, więc zgodnie z **(G4)**:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} (e^i, 0) \in Z,$$

gdzie $e^i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ jest n -wymiarowym wektorem z jedynką na i -tym miejscu, $\alpha(e^i, 0) = 0$, $i = 1, \dots, n$. Wówczas, w myśl (G8):

$$\forall i (0 = \langle \bar{p}, 0 \rangle < \alpha_M \langle \bar{p}, e^i \rangle = \alpha_M \bar{p}_i),$$

czyli $\bar{p} > 0$.

Uwaga 3. Ponieważ w gospodarce Gale'a spełniającej warunek (G8) ceny $\bar{p}$ są dodatnie, a wektor produkcji $\bar{y}$ w każdym optymalnym procesie $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z$ jest co najmniej półdodatni, zatem $\langle \bar{p}, \bar{y} \rangle > 0$. W ten sposób, w świetle uwagi 2, dostajemy prostą alternatywną wersję dowodu twierdzenia 1.6.

1.5. Magistrala produkcyjna (promień von Neumanna)

Weźmy optymalny proces produkcji $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z$ w gospodarce Gale'a z przestrzenią produkcyjną Z spełniającą warunki (G1)-(G7). Ponieważ $\alpha_M \bar{x} \leq \bar{y}$, zatem zgodnie z (G4) $(\bar{x}, \alpha_M \bar{x}) \in Z$, więc istnieje w szczególności także optymalny proces produkcji $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z$, w którym:

$$\bar{y} = \alpha_M \bar{x} \geq 0. \quad (1.13)$$

Wówczas:

$$\frac{\bar{y}}{\|\bar{y}\|} = \frac{\alpha_M \bar{x}}{\|\alpha_M \bar{x}\|} = \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|} = \bar{s} \geq 0 \quad (1.14)$$

($\|\bar{s}\| = 1$). Półprostą:

$$N = \{\lambda \bar{s} \mid \lambda > 0\} \quad (1.15)$$

nazywamy **magistralą produkcyjną** (promieniem von Neumanna). Wektor $\bar{s}$ charakteryzuje strukturę nakładów i produkcji w optymalnym procesie spełniającym warunek (1.13) oraz (równocześnie) strukturę produkcji na magistrali N . W gospodarce Gale'a magistrala produkcyjna istnieje przy tych samych warunkach, przy

których istnieje optymalny proces produkcji. Jej fundamentalne znaczenie, obecne w całej książce, stanie się jasne po przejściu do dynamiki ekonomicznej (punkt 1.6 i nast.). Natomiast poniższy warunek zapewnia jednoznaczność (istnienie dokładnie jednej) magistrali produkcyjnej:

$$(G9) \quad \forall (x, y) \in Z \setminus \{0\} (x \notin N \vee y \notin N \Rightarrow \alpha(x, y) < \alpha_M).$$

Równoważnie:

$$\forall (x, y) \in Z (\alpha(x, y) = \alpha_M \Rightarrow x \in N \ \& \ y \in N).$$

Mówi o tym następujące twierdzenie.

■ **Twierdzenie 1.7.** W gospodarce Gale'a z przestrzenią produkcyjną spełniającą warunki (G1)-(G7) oraz (G9) istnieje dokładnie jedna magistrala produkcyjna.

Dowód. Istnienie magistrali N zapewniają warunki (G1)-(G7), magistrala istnieje bowiem wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje optymalny proces produkcji $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z$ z technologiczną efektywnością $\alpha(\bar{x}, \bar{y}) = \alpha_M > 0$; zob. punkt 1.2 (twierdzenie 1.2).

Założmy, że istnieją dwie magistrale:

$$N = \{\lambda \bar{s} \mid \lambda > 0\},$$

$$N' = \{\lambda \bar{s}' \mid \lambda > 0\}.$$

Wówczas $N \cap N' = \emptyset$ (jeżeli bowiem $N \cap N' \neq \emptyset$, to $N = N'$) oraz:

$$\exists (\bar{x}, \bar{y}) \in Z \left(\alpha_M \bar{x} = \bar{y} \geq 0 \ \& \ \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|} = \bar{s} \right),$$

$$\exists (\bar{x}', \bar{y}') \in Z \left(\alpha_M \bar{x}' = \bar{y}' \geq 0 \ \& \ \frac{\bar{x}'}{\|\bar{x}'\|} = \bar{s}' \right), \quad (1.16)$$

$$\bar{x}, \bar{y} \in N, \ \bar{x}', \bar{y}' \in N', \ \bar{s} \neq \bar{s}', \text{ czyli } \bar{x}' \notin N \text{ oraz } \bar{y}' \notin N.$$

Jednocześnie $\alpha(\bar{x}, \bar{y}) = \alpha(\bar{x}', \bar{y}') = \alpha_M > 0$. Jeżeli więc poza magistralą N istnieje magistrala N' , to:

$$\exists (\bar{x}', \bar{y}') \in Z(\bar{x}', \bar{y}') \notin N \ \& \ \alpha(\bar{x}', \bar{y}') = \alpha_M),$$

co pozostaje w sprzeczności z **(G9)** i zamyka dowód. ■

Uwaga 1. Warunek **(G9)** głosi, że technologiczna efektywność jakiegokolwiek dopuszczalnego (niezerowego) procesu (x, y) poza magistralą (tj. procesu, w którym struktura nakładów i/lub produkcji różni się od magistralnej) jest niższa od optymalnej. Jeżeli warunek ten nie jest spełniony, wtedy w gospodarce Gale’a może istnieć wiązka promieni von Neumanna, którą nazywamy *wielopasmową magistralą produkcyjną*.

Uwaga 2. Warunki **(G1)-(G7)**, **(G9)** zapewniają istnienie i jednoznaczność magistrali produkcyjnej w gospodarce Gale’a bez gwarancji istnienia w niej jakiegokolwiek, w szczególności optymalnego, stanu równowagi von Neumanna. Istnienie optymalnego stanu równowagi i jednoznaczność magistrali produkcyjnej gwarantują warunki **(G1)-(G9)**. Natomiast jeżeli zachodzą warunki **(G1)-(G8)**, czyli zgodnie z twierdzeniem 1.6, w gospodarce istnieje optymalny stan równowagi von Neumanna (z cenami równowagi $\bar{p}$), to dla zapewnienia jednoznaczności magistrali N warunek **(G9)** można zastąpić warunkiem następującym:

$$\textbf{(G10)} \quad \forall (x, y) \in Z \setminus \{0\} (x \notin N \vee y \notin N \Rightarrow \beta(x, y, \bar{p}) < \alpha_M)$$

głoszącym, że mierzona w cenach równowagi efektywność ekonomiczna jakiegokolwiek procesu ze strukturą nakładów i/lub wyników różną od magistralnej jest niższa od optymalnej efektywności $\beta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}) = \alpha_M > 0$, którą gospodarka osiąga tylko w równowadze. Istotnie, zakładając, że obok magistrali $N = \{\lambda \bar{s} \mid \lambda > 0\}$ istnieje magistrala $N' = \{\lambda \bar{s}' \mid \lambda > 0\}$, $N \cap N' \neq \emptyset$, oraz powtarzając dowód twierdzenia 1.7 (po zastąpieniu warunku **(G9)** przez **(G10)**), dochodzimy do wniosku, że do optymalnego stanu równowagi (z technologiczną efektywnością $\alpha_M > 0$ i cenami $\bar{p}$) należą procesy $(\bar{x}, \bar{y})$, $(\bar{x}', \bar{y}')$ charakteryzujące się własnościami (1.16). W równowadze $\langle \bar{p}, \bar{y} \rangle > 0$, $\langle \bar{p}, \bar{y}' \rangle > 0$ (zgodnie z warunkiem (1.5) definicji 1.2), zatem także $\langle \bar{p}, \bar{x} \rangle > 0$ oraz $\langle \bar{p}, \bar{x}' \rangle > 0$, a wtedy:

$$\beta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}) = \frac{\langle \bar{p}, \bar{y} \rangle}{\langle \bar{p}, \bar{x} \rangle} = \frac{\langle \bar{p}, \bar{y}' \rangle}{\langle \bar{p}, \bar{x}' \rangle} = \beta(\bar{x}', \bar{y}', \bar{p}) = \alpha_M > 0.$$

Tymczasem, w myśl **(G10)**, $\beta(\bar{x}', \bar{y}', \bar{p}) < \alpha_M$. Otrzymana sprzeczność zamyka dowód.

Uwaga 3. Jeżeli zachodzą warunki **(G1)-(G9)** lub **(G1)-(G8)**, **(G10)**, wówczas w gospodarce Gale'a:

- istnieje optymalny stan równowagi $\{\alpha_M, (\bar{x}, \bar{y}), \bar{p}\}$,
- ceny $\bar{p}$ w stanie równowagi są dodatnie i określone z dokładnością do struktury,
- proces produkcji $(\bar{x}, \bar{y})$ jest określony jednoznacznie z dokładnością do struktury i spełnia warunek $\bar{y} = \alpha_M \bar{x}$,
- istnieje dokładnie jedna magistrala $N = \{\lambda \bar{s} \mid \lambda > 0\}$ z wektorem $\bar{s} = \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|} = \frac{\bar{y}}{\|\bar{y}\|}$.

Zamykający ten punkt, lemat 1.1 (poniżej) jest konsekwencją warunków **(G8)**, **(G9)** i gra kluczową rolę przy dowodach większości twierdzeń o magistrali formułowanych dalej. Głosi, że jeżeli w jakimkolwiek procesie $(x, y) \in Z$ struktura nakładów $\frac{x}{\|x\|}$ i/lub produkcji $\frac{y}{\|y\|}$ różni się o co najmniej $\varepsilon > 0$ od struktury magistralnej $\bar{s}$ (od struktury produkcji na magistrali N), to istnieje taka liczba $\delta_\varepsilon \in (0, \alpha_M)$, że ekonomiczna efektywność każdego takiego procesu (mierzona w cenach równowagi) jest niższa od optymalnej co najmniej o δ_ε .

■ **Lemat 1.1.** Jeżeli gospodarka Gale'a spełnia warunki **(G1)-(G9)**, to:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon \in (0, \alpha_M) \forall (x, y) \in Z (d(x, N) \geq \varepsilon \vee d(y, N) \geq \varepsilon \Rightarrow \\ \Rightarrow \beta(x, y, \bar{p}) \leq \alpha_M - \delta_\varepsilon),$$

gdzie $d(x, N) = \left\| \frac{x}{\|x\|} - \bar{s} \right\|$, $d(y, N) = \left\| \frac{y}{\|y\|} - \bar{s} \right\|$, $\bar{s}$ jest strukturą produkcji na magistrali N (zob. (1.15)).

Dowód. Gdy zachodzą warunki **(G1)-(G9)**, to zgodnie z twierdzeniami 1.6, 1.7 w gospodarce Gale’a istnieje optymalny stan równowagi $\{\alpha_M, (\bar{x}, \bar{y}), \bar{p}\}$ z jednoznacznie (z dokładnością do struktury) określonym optymalnym procesem produkcji $(\bar{x}, \bar{y})$ oraz pojedynczą magistralą produkcyjną N . Jeżeli proces (x, y) spełnia założenia lematu, to spełnia je także proces $\lambda(x, y)$ z dowolną liczbą $\lambda > 0$. Przy dowodzie wystarczy więc ograniczyć się do dopuszczalnych procesów produkcji (x, y) ze zbioru:

$$\begin{aligned} V(\varepsilon) = \left\{ (x, y) \in Z \mid \|x, y\| = 1 \ \& \ \left(d(x, N) = \left\| \frac{x}{\|x\|} - \bar{s} \right\| \geq \varepsilon \vee d(y, N) = \right. \right. \\ \left. \left. = \left\| \frac{y}{\|y\|} - \bar{s} \right\| \geq \varepsilon \right) \right\}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Weźmy liczbę $\varepsilon > 0$. Zbiór $V(\varepsilon)$ jest ograniczony na mocy założenia, gdyż $\forall (x, y) \in V(\varepsilon) (\|x, y\| = 1)$. Dowód domkniętości jest dłuższy.

Niech $\{x^i, y^i\}_{i=1}^{\infty}$ będzie ciągiem procesów ze zbioru $V(\varepsilon)$ zbieżnym do granicy $(\bar{x}, \bar{y})$, zatem:

$$\forall i \left((x^i, y^i) \in Z \ \& \ \|(x^i, y^i)\| = 1 \ \& \ \left(\left\| \frac{x^i}{\|x^i\|} - \bar{s} \right\| \geq \varepsilon \vee \left\| \frac{y^i}{\|y^i\|} - \bar{s} \right\| \geq \varepsilon \right) \right)$$

oraz:

$$(x^i, y^i) \xrightarrow{i} (\bar{x}, \bar{y}).$$

Przestrzeń produkcyjna Z jest zbiorem domkniętym, norma $\|\cdot\|$ funkcją ciągłą, więc:

$$(\bar{x}, \bar{y}) \in Z, \ \|\bar{x}, \bar{y}\| = 1 \quad (1.18)$$

przy czym $\bar{x} \neq 0$ (zakładając $\bar{x} = 0$ zgodnie z **(G3)** dostajemy $\bar{y} = 0$, czyli $\|(\bar{x}, \bar{y})\| = 0$, co jest niemożliwe). Nie można tego powiedzieć o wektorze $\bar{y}$, bowiem ciąg $\{x^i, y^i\}_{i=1}^{\infty}$ może być w szczególnym przypadku zbieżny do granicy $(\bar{x}, \bar{y})$ z wektorem $\bar{y} = 0$ (wówczas $\|\bar{x}\| = 1$). Możliwe są zatem dwa przypadki:

1⁰ $(x^i, y^i) \in V(\varepsilon)$, $i = 1, \dots, \infty$ oraz $\lim_i (x^i, y^i) = (\bar{x}, \bar{y})$, $\bar{x} \neq 0$, $\bar{y} \neq 0$.

Niech $\xi^i = \frac{x^i}{\|x^i\|}$ oraz $\eta^i = \frac{y^i}{\|y^i\|}$. Wtedy:

$$\forall i \left((\|\xi^i - \bar{s}\| \geq \varepsilon \vee \|\eta^i - \bar{s}\| \geq \varepsilon) \right) \text{ oraz } \xi^i \xrightarrow{i} \bar{\xi} = \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|} \neq 0, \\ \eta^i \xrightarrow{i} \bar{\eta} = \frac{\bar{y}}{\|\bar{y}\|} \neq 0,$$

czyli:

$$\|\bar{\xi} - \bar{s}\| \geq \varepsilon \text{ lub } \|\bar{\eta} - \bar{s}\| \geq \varepsilon. \quad (1.19)$$

2⁰ $(x^i, y^i) \in V(\varepsilon)$, $i = 1, \dots, \infty$ oraz $\lim_i (x^i, y^i) = (\bar{x}, \bar{y})$, $\bar{x} \neq 0$, $\bar{y} = 0$.

Wówczas $\forall i \left((\|\xi^i - \bar{s}\| \geq \varepsilon \vee \|\eta^i - \bar{s}\| \geq \varepsilon) \right)$ oraz $\xi^i \xrightarrow{i} \bar{\xi} = \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|} \neq 0$, czyli:

$$\|\bar{\xi} - \bar{s}\| \geq \varepsilon. \quad (1.20)$$

Natomiast:

$$\nexists \bar{\eta} = \frac{\bar{y}}{\|\bar{y}\|} (\|\bar{\eta} - \bar{s}\| \geq \varepsilon). \quad (1.21)$$

W obu przypadkach, tj. (1.19) oraz (1.20)-(1.21) prawdziwa jest jednak alternatywa:

$$\|\bar{\xi} - \bar{s}\| = \left\| \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|} - \bar{s} \right\| \geq \varepsilon \text{ lub } \|\bar{\eta} - \bar{s}\| = \left\| \frac{\bar{y}}{\|\bar{y}\|} - \bar{s} \right\| \geq \varepsilon. \quad (1.22)$$

Z (1.18), (1.22) płynie wniosek, że zbiór $V(\varepsilon)$ jest domknięty w R^{2n} . Jest także ograniczony, więc jest zwarty.

W myśl **(G8)**, **(G9)**:

$$\forall (x, y) \in V(\varepsilon) \ (0 \leq \langle \bar{p}, y \rangle < \alpha_M \langle \bar{p}, x \rangle),$$

czyli:

$$\forall (x, y) \in V(\varepsilon) \ \left(0 \leq \beta(x, y, \bar{p}) = \frac{\langle \bar{p}, y \rangle}{\langle \bar{p}, x \rangle} < \alpha_M \right).$$

Funkcja $\beta(\cdot, \bar{p})$ jest ciągła na $V(\varepsilon)$ jako iloraz dwóch funkcji liniowych z niezerową funkcją w mianowniku (wszędzie na $V(\varepsilon)$ mamy bowiem $\langle \bar{p}, x \rangle > 0$), więc w myśl twierdzenia Weierstrassa istnieje rozwiązanie zadania:

$$\max_{(x,y) \in V(\varepsilon)} \beta(x, y, \bar{p}) = b(\varepsilon) < \alpha_M.$$

Zatem:

$$\exists \delta_\varepsilon \in (0, \alpha_M) \forall (x, y) \in V(\varepsilon) (\beta(x, y, \bar{p}) \leq \alpha_M - \delta_\varepsilon)$$

lub równoważnie:

$$\forall (x, y) \in V(\varepsilon) (\langle \bar{p}, y \rangle \leq (\alpha_M - \delta_\varepsilon) \langle \bar{p}, x \rangle)$$

(wystarczy przyjąć $\delta_\varepsilon = \frac{1}{2}(\alpha_M - b(\varepsilon)) > 0$), c.n.d. ■

Do analogicznego wniosku dochodzimy, zastępując w lemacie warunek **(G9)** warunkiem **(G10)**.

1.6. Dynamika. Dopuszczalne, stacjonarne i optymalne procesy wzrostu

W całym rozdziale czas t zmienia się skokowo, $t = 0, 1, \dots$. Przez $T = \{0, 1, \dots, t_1\}$, $t_1 < +\infty$, oznaczamy horyzont funkcjonowania gospodarki¹, $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ jest wektorem nakładów (zużycia) towarów w okresie t , $y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$ jest wektorem produkcji wytworzonej z nakładów $x(t)$ w okresie t :

$$(x(t), y(t)) \in Z$$

¹ Wszystkie dowodzone w książce twierdzenia pozostają prawdziwe, gdy założymy horyzont $T = \{t_0, t_0 + 1, \dots, t_1\}$ (rozdz. 1-6) lub $T = [t_0, t_1]$ (rozdz. 7); $t_0 \geq 0$. Dalej dla uproszczenia wszędzie przyjmujemy $t_0 = 0$.

(równoważnie $y(t) \in a(x(t))$). O parze $(x(t), y(t)) \in Z$ mówimy, że opisuje technologicznie dopuszczalny proces produkcji w okresie t . Gospodarka jest zamknięta w tym sensie, że nakłady w okresie następnym $(t + 1)$ pochodzą w niej wyłącznie z produkcji wytworzonej w okresie poprzednim (t) :

$$x(t + 1) \leq y(t), \quad t = 0, 1, \dots, t_1 - 1,$$

co w myśl **(G4)** prowadzi do inkluzji:

$$(y(t), y(t + 1)) \in Z, \quad t = 0, 1, \dots, t_1 - 1 \quad (1.23)$$

(równoważnie $y(t + 1) \in a(y(t))$). Przez y^0 oznaczamy dany początkowy wektor produkcji wytworzonej w gospodarce w okresie $t = 0$:

$$y(0) = y^0 \geq 0. \quad (1.24)$$

Dla podkreślenia, że w omawianej gospodarce Gale'a technologia produkcji (której ucieleśnieniem jest przestrzeń produkcyjna Z) nie zmienia się w czasie, nazywamy ją *stacjonarną gospodarką Gale'a*.

Δ Definicja 1.3. (i) O ciągu wektorów $\{y(t)\}_{t=0}^{t_1}$ spełniających warunki (1.23), (1.24) mówimy, że opisuje (y^0, t_1) – *dopuszczalny proces wzrostu (trajektorię produkcji)* w (stacjonarnej) gospodarce Gale'a.

(2i) (y^0, t_1) – dopuszczalny proces wzrostu szczególnej postaci:

$$y(t) = y^0 \gamma^t, \quad \gamma > 0, \quad (1.25)$$

nazywamy *stacjonarnym procesem wzrostu* z tempem γ . Δ

W gospodarce Gale'a spełniającej warunki **(G1)-(G7)**, (1.23), (1.24) procesy (y^0, t_1) – dopuszczalne istnieją niezależnie długości horyzontu $T = \{0, 1, \dots, t_1\}$ oraz początkowego wektora produkcji $y^0 \geq 0$. Procesy stacjonarne postaci (1.25) istnieją natomiast wtedy (i tylko wtedy), gdy ma miejsce inkluzja:

$$0 \neq (y^0, \gamma y^0) \in Z.$$

Istotnie, jeżeli zachodzi ta inkluzja, to zgodnie z **(G1)** także:

$$0 \neq \gamma^t(y^0, \gamma y^0) = (\gamma^t y^0, \gamma^{t+1} y^0) \in Z, \quad t = 0, 1, \dots, t_1 - 1.$$

Wówczas, przyjmując oznaczenie $y(t) = \gamma^t y^0$, dostajemy:

$$(y(t), y(t+1)) \in Z, \quad t = 0, 1, \dots, t_1 - 1,$$

$$y(0) = y^0 \geq 0.$$

Z drugiej strony, jeżeli trajektoria $y(t) = \gamma^t y^0$, $t = 0, 1, \dots, t_1$ z tempem $\gamma > 0$ spełnia powyższe warunki, to:

$$0 \neq (\gamma^t y^0, \gamma^{t+1} y^0) = \gamma^t(y^0, \gamma y^0) \in Z, \quad t = 0, 1, \dots, t_1 - 1,$$

czyli (w myśl **(G1)**):

$$0 \neq (y^0, \gamma y^0) \in Z.$$

Powstaje pytanie, czy istnieje stacjonarny proces, w którym osiągnane tempo wzrostu jest wyższe (a co najmniej nie niższe) od tempa wzrostu osiąganego w jakimkolwiek innym stacjonarnym procesie? Odpowiedź daje następujące twierdzenie.

■ **Twierdzenie 1.8.** Jeżeli zachodzą warunki **(G1)-(G7)**, (1.23), (1.24), wówczas:

(i) istnieje wektor produkcji $y^0 \geq 0$, któremu odpowiada stacjonarny proces wzrostu postaci (1.25) z tempem $\gamma = \alpha_M$,

(2i) nie istnieje stacjonarny proces wzrostu z tempem $\gamma > \alpha_M$.

Dowód. (i) Jeżeli przestrzeń produkcyjna Z spełnia warunki **(G1)-(G7)**, to istnieje optymalny proces $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z$ będący rozwiązaniem zadania:

$$\max_{(y, \gamma y) \in Z \setminus \{0\}} \gamma = \max_{(x, y) \in Z \setminus \{0\}} \alpha(x, y) = \alpha(\bar{x}, \bar{y}) = \alpha_M > 0,$$

w którym $\alpha_M \bar{x} \leq \bar{y}$, czyli $(\bar{y}, \alpha_M \bar{y}) \in Z$. Wówczas (w myśl **(G1)**):

$$(\alpha_M^t \bar{y}, \alpha_M^{t+1} \bar{y}) \in Z, \quad t = 0, 1, \dots, t_1 - 1,$$

i otrzymujemy stacjonarny proces $\{\bar{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$ postaci (1.25) z tempem $\gamma = \alpha_M$ oraz początkowym wektorem produkcji $y^0 = \bar{y}$:

$$\bar{y}(t) = \alpha_M^t \bar{y}, \quad t = 0, 1, \dots, t_1. \quad (1.26)$$

(2i) Załóżmy, że istnieje (y^0, t_1) – dopuszczalny proces wzrostu postaci (1.25) z tempem $\gamma > \alpha_M$. Zatem:

$$0 \neq (\gamma^t y^0, \gamma^{t+1} y^0) = \gamma^t (y^0, \gamma y^0) \in Z,$$

czyli $0 \neq (y^0, \gamma y^0) \in Z$. Oznacza to jednak, że istnieje dopuszczalny proces produkcji $(x, y) = (y^0, \gamma y^0) \in Z$, którego technologiczna efektywność $\alpha(x, y) = \alpha(y^0, \gamma y^0) = \gamma > \alpha_M$, co jest oczywiście niemożliwe. Otrzymana sprzeczność zamyka dowód. ■

Uwaga 1. Niech $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z$ będzie optymalnym procesem produkcji w gospodarce Gale’a, $\alpha(\bar{x}, \bar{y}) = \alpha_M > 0$. Wówczas, zgodnie z twierdzeniem, istnieje stacjonarny proces wzrostu $\{\bar{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$ postaci (1.26) z tempem $\gamma = \alpha_M$ oraz początkowym wektorem produkcji $y^0 = \bar{y}$. Jednocześnie nie istnieje stacjonarny proces wzrostu z wyższym tempem. Proces (1.26) nazywamy *optymalnym stacjonarnym procesem wzrostu*.

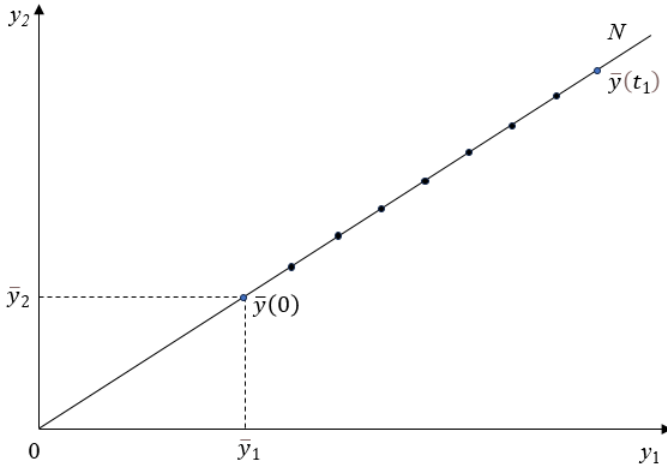
Uwaga 2. W optymalnym stacjonarnym procesie wzrostu struktura produkcji jest analogiczna jak na magistrali $N = \{\lambda \bar{s} \mid \lambda > 0\}$:

$$\forall t \in T \left(\frac{\bar{y}(t)}{\|\bar{y}(t)\|} = \frac{\alpha_M^t \bar{y}}{\|\alpha_M^t \bar{y}\|} = \frac{\bar{y}}{\|\bar{y}\|} = \bar{s} \geq 0; \quad \|\bar{s}\| = 1 \right),$$

więc każdy taki proces biegnie po magistrali (promieniu) N :

$$\forall t \in T (\bar{y}(t) \in N)$$

(zob. rys. 1.3).



Rysunek 1.3. Magistrała N w R_+^2 i optymalny stacjonarny proces wzrostu $\{\bar{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$ postaci (1.26) z wektorem $y^0 = \bar{y} \in N$

Uwaga 3. Jeżeli ciąg wektorów produkcji $\{\bar{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$ jest optymalnym stacjonarnym procesem wzrostu, to także każdy ciąg $\{\lambda \bar{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$ z dowolną dodatnią liczbą λ jest optymalnym stacjonarnym procesem wzrostu. W gospodarce Gale’a spełniającej warunki **(G1)-(G7)**, (1.23), (1.24) optymalne stacjonarne procesy są określone z dokładnością do mnożenia przez dowolną stałą dodatnią.

Uwaga 4. Załóżmy, że w (y^0, t_1) – dopuszczalnym procesie wzrostu (spełniającym warunki (1.23), (1.24)) początkowy wektor produkcji leży poza magistrałą N . Wtedy:

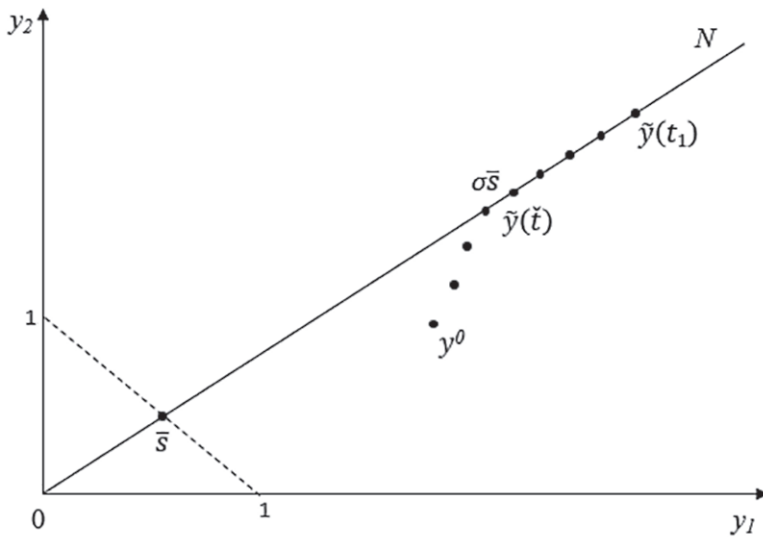
$$\forall t \in T(y(t) \notin N) \text{ albo } \exists \check{t} < t_1 (y(\check{t}) \in N).$$

Jeżeli istnieje $(y^0, \check{t})$ – dopuszczalny proces $\{y(t)\}_{t=0}^{\check{t}}$, który w pewnym okresie $\check{t} < t_1$ prowadzi do magistrali N , wówczas ciąg wektorów produkcji $\{\tilde{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$:

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} y(t), & t = 0, 1, \dots, \check{t}, \\ \alpha_M^{t-\check{t}} y(\check{t}), & t = \check{t} + 1, \dots, t_1, \end{cases}$$

jest (y^0, t_1) – dopuszczalnym procesem wzrostu, który począwszy od okresu $t = \check{t}$ biegnie po magistrali N (rys. 1.4). Z procesami takimi będziemy mieli wielokrotnie do czynienia w dalszej części.

Uwaga 5. Jeżeli zachodzą warunki **(G1)-(G8)**, wówczas w gospodarce Gale’a istnieje optymalny stan równowagi von Neumanna $\{\alpha_M, (\bar{x}, \bar{y}), \bar{p}\}$. Jeżeli ponadto zachodzi warunek **(G9)** (lub gdy zamiast warunków **(G1)-(G9)** spełnione są warunki **(G1)-(G8)**, **(G10)**) oraz gospodarka podporządkowana jest regułom wzrostu (1.23), (1.24), wtedy istnieje w niej dokładnie jedna magistrala produkcyjna $N = \{\lambda \bar{s} \mid \lambda > 0\}$ związana z optymalnym stanem równowagi (z wektorem $\bar{s} = \frac{\bar{y}}{\|\bar{y}\|}$).



Rysunek 1.4. Magistrala $N \subset R_+^2$ i (y^0, t_1) – dopuszczalny proces $\{\tilde{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$ prowadzący w okresie $\check{t} > t_1$ do magistrali

O wybranych własnościach wiązki wszystkich (y^0, t_1) – dopuszczalnych procesów wzrostu mówi lemat 3. Są one istotne w świetle formułowanych dalej problemów wzrostu optymalnego.

Niech $y^0 \geq 0$ będzie dowolnym początkowym wektorem produkcji. Wprowadźmy oznaczenia:

$$R_{y^0,0} = \{y^0\},$$

$$R_{y^0,t} = \{y | \exists x \in R_{y^0,t-1} (y \in a(x))\} = \bigcup_{x \in R_{y^0,t-1}} a(x), \quad t = 1, 2, \dots, t_1.$$

Zbiór $R_{y^0,t}$ ($t = 1, 2, \dots, t_1$) tworzą wszystkie wektory produkcji możliwej do wytworzenia w okresie $t \geq 1$ w gospodarce Gale'a, która w okresie początkowym $t = 0$ dysponuje wektorem produkcji y^0 . Mówiąc obrazowo (utożsamiając wektory produkcji ze stanami gospodarki), $R_{y^0,t}$ jest zbiorem tych wszystkich stanów, do których może dojść w okresie t gospodarka startująca w okresie początkowym ze stanu y^0 .

■ **Lemat 1.2.** Jeżeli zachodzą warunki **(G1)-(G7)**, to $\forall t \geq 0$ zbiory $R_{y^0,t}$ są niepuste, zwarte (ograniczone i domknięte) oraz wypukłe.

Dowód. Jednoelementowy zbiór $R_{y^0,0}$ jest niepusty z definicji. Jest też oczywiście zwarty i wypukły. Zbiory $R_{y^0,t}$, $t = 1, 2, \dots, t_1$, są niepuste, gdyż wszystkie zawierają wektor $y = 0$. Zbiór $R_{y^0,1} = a(y^0)$ jest zwarty i wypukły na mocy twierdzenia 1.1 **(6i)**. Dowód zwartości i wypukłości zbiorów $R_{y^0,t}$, $t \geq 2$, przeprowadzimy metodą indukcji.

Założmy, że lemat jest prawdziwy dla $t = \theta \geq 1$, czyli zbiór $R_{y^0,\theta}$ jest zwarty i wypukły. Wykażemy, że wówczas zwarty i wypukły jest także zbiór $R_{y^0,\theta+1}$.

(Ograniczoność) Niech $y^i \in R_{y^0,\theta+1}$, $i = 1, 2, \dots$, oraz $\|y^i\| \rightarrow_i +\infty$. Zatem:

$$\forall i \exists x^i \in R_{y^0,\theta} \left((x^i, y^i) \in Z \ \& \ \|y^i\| \rightarrow_i +\infty \right).$$

Ponieważ zbiór $R_{y^0,\theta}$ jest zwarty (z założenia), więc $\exists M > 0 \ \forall i \ (\|x^i\| \leq M)$, czyli (począwszy od tego wyrazu $i = i_0$ ciągu $\{y^i\}_{i=1}^\infty$, od którego $\|y^i\| > 0$):

$$\xi^i \rightarrow 0 \text{ oraz } \forall i (\|\eta^i\| = 1), \text{ gdzie } (\xi^i, \eta^i) = \left(\frac{x^i}{\|y^i\|}, \frac{y^i}{\|y^i\|} \right) \in Z.$$

Przestrzeń produkcyjna jest zbiorem domkniętym, a to znaczy, że:

$$\exists \{ \xi^{i_j}, \eta^{i_j} \}_{j=1}^{\infty} \left((\xi^{i_j}, \eta^{i_j}) \rightarrow_j (0, \bar{\eta}) \in Z \right) \& \bar{\eta} \neq 0,$$

co jest sprzeczne z warunkiem **(G3)**. Zbiór $R_{y^0, \theta+1}$ jest zatem ograniczony.

(Domkniętość) Niech $y^i \in R_{y^0, \theta+1}$, $i = 1, 2, \dots$, oraz $y^i \rightarrow \bar{y}$. Wówczas $\forall i \exists x^i \in R_{y^0, \theta} \left((x^i, y^i) \in Z \right)$. Zbiór $R_{y^0, \theta}$ jest zwarty z założenia, więc ciąg $\{x^i\}_{i=1}^{\infty}$ zawiera podciąg $\{x^{i_j}\}_{j=1}^{\infty}$ zbieżny do pewnej granicy $\bar{x} \in R_{y^0, \theta}$. Przestrzeń produkcyjna Z jest zbiorem domkniętym, więc ciąg $\{x^{i_j}, y^{i_j}\}_{j=1}^{\infty}$ jest zbieżny do granicy $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z$, tj. $\bar{y} \in a(\bar{x})$. Ponieważ $\bar{x} \in R_{y^0, \theta}$, więc $\bar{y} \in R_{y^0, \theta+1}$. Zbiór $R_{y^0, \theta+1}$ jest zatem domknięty. Jest także ograniczony, więc zwarty.

(Wypukłość) Niech $y^1, y^2 \in R_{y^0, \theta+1}$ oraz $y = \alpha y^1 + \beta y^2$; $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$. Nietrudno pokazać, że $y \in R_{y^0, \theta+1}$. Skoro $y^1, y^2 \in R_{y^0, \theta+1}$, to:

$$\exists x^1 \in R_{y^0, \theta} \exists x^2 \in R_{y^0, \theta} (y^1 \in a(x^1), y^2 \in a(x^2)),$$

czyli, wobec dodatniej jednorodności i póładdytywności przekształcenia technologicznego (twierdzenie 1.1(i), (2i)):

$$y = \alpha y^1 + \beta y^2 \in \alpha a(x^1) + \beta a(x^2) = a(\alpha x^1 + \beta x^2) = a(x).$$

Zbiór $R_{y^0, \theta}$ jest wypukły (z założenia), więc $x = \alpha x^1 + \beta x^2 \in R_{y^0, \theta}$ oraz $y \in a(x)$, zatem $y \in R_{y^0, \theta+1}$, c.n.d. ■

W stacjonarnej gospodarce Gale'a spełniającej warunki **(G1)-(G7)**, (1.23), (1.24) istnieje, ogólnie rzecz biorąc, nieskończenie wiele możliwych dróg rozwoju. W języku matematycznym oznacza to istnienie nieskończenie wiele (y^0, t_1) – dopuszczalnych procesów wzrostu w postaci trajektorii $\{y(t)\}_{t=0}^{t_1}$ wychodzących

z tego samego stanu początkowego y^0 i spełniających warunki (1.23), (1.24). Jakość takich procesów można oceniać z punktu widzenia różnych kryteriów. W punkcie 1.7 omówione zostaną procesy optymalne w świetle prostego (liniowego) kryterium maksymalizacji mierzonej w cenach równowagi $\bar{p}$ wartości wektora towarów $y(t_1)$ wytwarzanych w końcowym okresie t_1 horyzontu T (tzw. zagadnienie wzrostu docelowego). Problemy wzrostu z innymi kryteriami będą sukcesywnie omawiane w kolejnych punktach rozdziału.

Niech $\bar{p}$ będzie wektorem cen w optymalnym stanie równowagi von Neumanna $\{\alpha_M, (\bar{x}, \bar{y}), \bar{p}\}$.

Δ Definicja 1.4. (y^0, t_1) – dopuszczalny proces wzrostu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ spełniający warunek:

$$\langle \bar{p}, y^*(t_1) \rangle = \max_{y \in R_{y^0, t_1}} \langle \bar{p}, y \rangle = \max_{\substack{(y(t), y(t+1)) \in Z(t+1) \\ t=0, 1, \dots, t_1-1 \\ y(0)=y^0}} \langle \bar{p}, y(t_1) \rangle \quad (1.27)$$

nazywamy $(y^0, t_1, \bar{p})$ – *optymalnym procesem wzrostu*. Δ

Optymalny w sensie powyższej definicji proces wzrostu prowadzi w końcowym okresie t_1 horyzontu T do produkcji wektora towarów o maksymalnej wartości (mierzonej w cenach równowagi $\bar{p}$). Zadanie (1.27) ma rozwiązanie, o czym mówi poniższe twierdzenie.

■ **Twierdzenie 1.9.** Przy założeniach lematu 1.2 $\forall y^0 \geq 0 \quad \forall t_1 > 0$ istnieją $(y^0, t_1, \bar{p})$ – optymalne procesy wzrostu.

Dowód. Przy założeniach lematu 1.2 $\forall y^0 \geq 0 \quad \forall t_1 > 0$ zbiory R_{y^0, t_1} są zwarte. Forma liniowa $\langle \bar{p}, \cdot \rangle$ jest funkcją ciągłą. Istnieje więc taki wektor $y^* \in R_{y^0, t_1}$, że:

$$\langle \bar{p}, y^* \rangle = \max_{y \in R_{y^0, t_1}} \langle \bar{p}, y \rangle.$$

Zgodnie z definicją zbioru R_{y^0, t_1} istnieje trajektoria $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ spełniająca warunki:

$$(y^*(t), y^*(t+1)) \in Z, \quad t = 0, 1, \dots, t_1 - 1,$$

$$y^*(0) = y^0 \geq 0, \quad y^*(t_1) = y^* \in R_{y^0, t_1}.$$

Tak zbudowana trajektoria tworzy $(y^0, t_1, \bar{p})$ – optymalny proces wzrostu. ■

Schemat tego dowodu pozostaje aktualny w przypadku większości rozpatrywanych w książce problemów wzrostu optymalnego (maksymalizacji ciągłych funkcji użyteczności na zwartych zbiorach argumentów), za wyjątkiem tzw. minimalnoczynowego problemu wzrostu, którego specyfika wymaga odrębnego dowodu (pkt 1.10).

1.7. Wzrost optymalny w stacjonarnej gospodarce Gale’a z kryterium maksymalizacji wartości produkcji wytworzonej w końcowym okresie horyzontu T

Interesuje nas stacjonarna gospodarka Gale’a z optymalnym stanem równowagi von Neumanna $\{\alpha_M, (\bar{x}, \bar{y}), \bar{p}\}$ i pojedynczą magistralą N spełniającą warunki (G1)-(G9) (lub (G1)-(G8), (G10)) oraz reguły dynamiki (1.23), (1.24). Jeżeli gospodarka taka w okresie początkowym znajduje się na magistrali $y^0 = \bar{y} \in N$, to w kolejnych okresach czasu może pozostawać na niej, rozwijając się w maksymalnym tempie $\alpha_M > 0$ i osiągając w końcowym okresie poziom produkcji $y(t_1) = \alpha_M^{t_1} \bar{y}$. Przewaga rozwoju po magistrali w stosunku do dopuszczalnych procesów wzrostu rozpoczynających się w innym historycznie ukształtowanym stanie początkowym polega na tym, że:

a) gospodarka na magistrali rozwija się w maksymalnym tempie, którego nie jest w stanie osiągnąć w żadnym innym procesie wzrostu,

b) każdy (y^0, t_1) – dopuszczalny proces wzrostu $\{y(t)\}_{t=0}^{t_1}$, w którym $y(0) = \bar{y} \in N$ oraz $y(t) = \alpha_M^t y^0$ jest jednocześnie $(y^0, t_1, \bar{p})$ – optymalnym procesem wzrostu.

P.A. Samuelson [89] jako pierwszy podjął próbę odpowiedzi na pytanie, czy można cokolwiek bliższego powiedzieć o przebiegu optymalnych procesów wzrostu rozpoczynających się w stanie y^0 leżącym poza magistralą. Postawił hipotezę, że bez względu na stan początkowy, procesy takie w długich okresach czasu powinny być zawsze zbieżne do magistrali. Twierdzenia potwierdzające tę prawidłowość przyjęto nazywać twierdzeniami o magistrali.

Znane są co najmniej trzy terminy odpowiadające różnym typom twierdzeń o magistrali: *slabe*, *silne* oraz *bardzo silne*. ‘Słabe’ twierdzenia o magistrali głoszą, że optymalne procesy wzrostu w prawie wszystkich okresach ustalonego horyzontu przebiegają w bliskim otoczeniu magistrali. Przez „prawie wszystkie” okresy rozumie się przy tym ich skończoną liczbę niezależną od długości horyzontu $T = \{0, 1, \dots, t_1\}$. ‘Silne’ twierdzenia o magistrali konkretyzują czas, w którym może nastąpić ewentualne wytrącenie procesów optymalnych z otoczenia magistrali. Dowodzi się, że wszystkie takie ewentualne zdarzenia mogą mieć miejsce tylko w początkowych i/lub końcowych okresach całego horyzontu. Przebieg optymalnego procesu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ w otoczeniu magistrali N w wersji, o której mówią ‘silne’ twierdzenia o magistrali w dwuwymiarowej przestrzeni stanów, ilustruje rys. 1.5 (s. 67). W ‘bardzo silnych’ twierdzeniach o magistrali mowa jest o procesach optymalnych, które „prawie zawsze” (przez prawie wszystkie okresy czasu, poza ich skończoną liczbą) leżą na magistrali. W szczególności do tej grupy należą twierdzenia głoszące, że wejście optymalnej trajektorii produkcji na magistralę jest bezpowrotne.

Jak pokażemy dalej, we wszystkich typach twierdzeń optymalność procesów wzrostu rozumiana jest bardzo szeroko, w świetle obszernej klasy kryteriów. Odległość stanu gospodarki (wektora produkcji $y \neq 0$) od magistrali $N = \{\lambda \bar{s} \mid \lambda > 0\}$ jest definiowana w tzw. metryce kątowej:

$$d(y, N) = \left\| \frac{y}{\|y\|} - \bar{s} \right\|$$

(jest miarą odległości struktury wektora produkcji y od struktury produkcji $\bar{s}$ na magistrali). Rozpocznijmy od ‘słabej’ wersji twierdzenia o magistrali w stacjonarnej gospodarce Gale’a, w której zgodnie z definicją 1.4 rolę kryterium wzrostu gra mierzona w cenach równowagi $\bar{p}$ wartość produkcji wytworzonej w końcowym okresie t_1 horyzontu T .

■ **Twierdzenie 1.10. (‘Słabe’ twierdzenie o magistrali)** Niech $y^0 \geq 0$ będzie dowolnym początkowym wektorem produkcji (stanem początkowym) w stacjonarnej gospodarce Gale’a spełniającej warunki **(G1)-(G9)**. Jeżeli istnieje taki $(y^0, \check{t})$ – dopuszczalny proces wzrostu $\{\check{y}(t)\}_{t=0}^{\check{t}}$, $\check{t} < t_1$, że $\check{y}(\check{t}) \in N$, to dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba naturalna k_ε , że liczba okresów czasu, w których $(y^0, t_1, \bar{p})$ – optymalny proces $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ spełnia warunek:

$$d(y^*(t), N) = \left\| \frac{y^*(t)}{\|y^*(t)\|} - \bar{s} \right\| \geq \varepsilon \quad (1.28)$$

nie przekracza k_ε . Liczba k_ε nie zależy od t_1 . Metryka $d(\cdot)$ przedstawia odległość struktury $\frac{y^*(t)}{\|y^*(t)\|}$ produkcji $y^*(t)$ od struktury produkcji $\bar{s}$ na magistrali $N = \{\lambda \bar{s} \mid \lambda > 0\}$.

Dowód. Z definicji $(y^0, t_1, \bar{p})$ – optymalnego procesu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$, zgodnie z (1.11) (twierdzenie 1.5 (i)) oraz (1.23), mamy:

$$\langle \bar{p}, y^*(t+1) \rangle \leq \alpha_M \langle \bar{p}, y^*(t) \rangle, \quad t = 0, 1, \dots, t_1 - 1. \quad (1.29)$$

Założmy, że w okresach $\tau_1, \dots, \tau_k < t_1$ zachodzi warunek (1.28). Wówczas, w myśl lematu 1.1, istnieje taka liczba $\delta_\varepsilon \in (0, \alpha_M)$, że:

$$\langle \bar{p}, y^*(t+1) \rangle \leq (\alpha_M - \delta_\varepsilon) \langle \bar{p}, y^*(t) \rangle, \quad t = \tau_1, \dots, \tau_k. \quad (1.30)$$

Łącząc (1.29), (1.30), dochodzimy do warunku:

$$\langle \bar{p}, y^*(t_1) \rangle \leq \alpha_M^{t_1-k} (\alpha_M - \delta_\varepsilon)^k \langle \bar{p}, y^0 \rangle. \quad (1.31)$$

Z założenia istnieje $(y^0, \check{t})$ – dopuszczalny proces $\{\check{y}(t)\}_{t=0}^{\check{t}}$ prowadzący w okresie $\check{t} < t_1$ do magistrali $N = \{\lambda \bar{s} \mid \lambda > 0\}$, zatem ciąg wektorów produkcji $\{\check{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$:

$$\check{y}(t) = \begin{cases} \check{y}(t), & t = 0, 1, \dots, \check{t}, \\ \sigma \alpha_M^{t-\check{t}} \bar{s}, & t = \check{t} + 1, \dots, t_1, \end{cases}$$

($\sigma = \|\check{y}(\check{t})\| > 0$) tworzy (y^0, t_1) – dopuszczalny proces wzrostu, który począwszy od okresu $t = \check{t}$ biegnie po magistrali N (zob. rys. 1.4). Wówczas:

$$\langle \bar{p}, y^*(t_1) \rangle \geq \langle \bar{p}, \check{y}(t_1) \rangle = \sigma \alpha_M^{t_1-\check{t}} \langle \bar{p}, \bar{s} \rangle > 0. \quad (1.32)$$

Z (1.31), (1.32) wynika nierówność:

$$0 < \sigma \alpha_M^{t_1-\check{t}} \langle \bar{p}, \bar{s} \rangle \leq \alpha_M^{t_1-k} (\alpha_M - \delta_\varepsilon)^k \langle \bar{p}, y^0 \rangle.$$

Stąd po przekształceniach otrzymujemy:

$$k \leq \frac{\ln A}{\ln \alpha_M - \ln(\alpha_M - \delta_\varepsilon)} = B, \quad (1.33)$$

gdzie $A = \frac{\alpha_M^{\check{t}} \langle \bar{p}, y^0 \rangle}{\sigma \langle \bar{p}, \bar{s} \rangle} > 0$. W charakterze liczby k_ε wystarczy wziąć najmniejszą liczbę naturalną większą od $\max \{0, B\}$. ■

Uwaga 1². Twierdzenie pozostaje prawdziwe, gdy warunki (G1)-(G9) zastąpimy warunkami (G1)-(G8), (G10).

Uwaga 2.³ Optymalna trajektoria produkcji $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ z założenia k razy, w okresach $\tau_1, \dots, \tau_k < t_1$, leży poza ε – otoczeniem (kątowym) magistrali N . Wówczas, zgodnie z lematem 1.1:

² Uwaga jest aktualna w przypadku wszystkich twierdzeń o magistrali prezentowanych w rozdziale 1.

³ Uwaga odnosi się do wszystkich ‘słabych’ oraz ‘silnych’ twierdzeń o magistrali prezentowanych w książce.

$$\beta(y^*(\tau_i), y^*(\tau_i + 1), \bar{p}) \leq \alpha_M - \delta_\varepsilon \vee \beta(y^*(\tau_i - 1), y^*(\tau_i), \bar{p}) \leq \alpha_M - \delta_\varepsilon, i = 1, \dots, k.$$

Liczba takich zdarzeń, w których ekonomiczna efektywność $\beta(y^*(t), y^*(t + 1), \bar{p})$ procesów $(y^*(t), y^*(t + 1)) \in Z$, $t = 1, 2, \dots, t_1 - 1$ różni się co najmniej o δ_ε od optymalnej, nie przekracza k_ε . Jest ich najwięcej, gdy ε -odchylenia optymalnej trajektorii produkcji od magistrali mają miejsce „wewnątrz” horyzontu T (czyli gdy $\tau_1 > 0$ oraz $\tau_k < t_1$) i żadne dwa okresy nie sąsiadują bezpośrednio obok siebie (tj. gdy $\tau_{i+1} \neq \tau_i + 1$, $i = 1, \dots, k - 1$). Natomiast jest ich dwukrotnie mniej, kiedy następują w czasie bezpośrednio jedno po drugim (rok po roku), tj. gdy $\tau_{i+1} = \tau_i + 1$, $i = 1, \dots, k - 1$. Zawsze wiążąca jest nierówność (1.31).

Uwaga 3. Założenie o istnieniu $(y^0, \check{t})$ – dopuszczalnego procesu $\{\check{y}(t)\}_{t=0}^{\check{t}}$ prowadzącego w pewnym okresie $\check{t} < t_1$ do magistrali $N = \{\lambda \bar{s} \mid \lambda > 0\}$ ma naturalne uzasadnienie. Bez niego magistrala produkcyjna kojarzyłaby się z autostradą w ruchu drogowym niemającą łączności z żadną drogą lokalną, a więc bezużyteczną.

Uwaga 4. Jeżeli w początkowym wektorze produkcji $y^0 \geq 0$ dodatnie są wszystkie współrzędne, które są także dodatnie w wektorze $\bar{s}$ struktury produkcji na magistrali N (w szczególności gdy $y^0 > 0$), wówczas dojście do magistrali (w jednym kroku), a następnie pobyt gospodarki na magistrali i jej rozwój do końca horyzontu T w maksymalnym tempie α_M zapewnia (y^0, t_1) – dopuszczalny proces $\{\tilde{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$:

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} y^0, & t = 0, \\ \sigma \alpha_M^t \bar{s}, & t = 1, \dots, t_1, \end{cases}$$

z parametrem $\sigma = \min_i \frac{y_i^0}{\bar{s}_i} > 0$.

Uwaga 5. Przy założeniach twierdzenia 1.10 wektor cen $\bar{p}$ w optymalnym stanie równowagi von Neumanna jest dodatni (zob. pkt 1.4, uwaga 2 do twierdzenia 1.6). Nietrudno udowodnić, że twierdzenie pozostaje prawdziwe również gdy

$(y^0, t_1, \bar{p})$ – optymalny proces wzrostu zastąpimy (y^0, t_1, p) – optymalnym procesem z dowolnym dodatnim wektorem cen p (oryginalny dowód można znaleźć w pracy [28]).

Twierdzenie 1.10 mówi wprawdzie o zbliżaniu się optymalnych procesów wzrostu do magistrali, nie wyjaśnia jednak sposobu, w jaki to zbliżanie następuje. Precyzują to kolejne dwa twierdzenia. Dowód ‘bardzo silnego’ twierdzenia o magistrali (twierdzenie 1.12) nie wymaga dodatkowych założeń poza obowiązującymi w twierdzeniu 1.10. Dowód ‘silnego’ twierdzenia o magistrali (twierdzenie 1.11) wymaga spełnienia dodatkowego warunku **(G11)**. Weźmy liczbę $\varepsilon > 0$ i oznaczmy przez $Z(\varepsilon)$ zbiór wszystkich dopuszczalnych procesów produkcji, w których nakłady i/lub wyniki są odległe o co najmniej ε od magistrali N (w sensie metryki $d(\cdot)$; zob. lemat 1.1):

$$Z(\varepsilon) = \{(x, y) \in Z \mid d(x, N) \geq \varepsilon \vee d(y, N) \geq \varepsilon\}. \quad (1.34)$$

Jeżeli zachodzą warunki **(G1)-(G9)**, to w myśl lematu 1.1 ekonomiczna efektywność $\beta(x, y, \bar{p})$ każdego procesu $(x, y) \in Z(\varepsilon)$ jest niższa od optymalnej o co najmniej $\delta_\varepsilon > 0$. Poniżej, w lemacie 1.3, zwracamy uwagę na wybrane własności funkcji $\beta(\cdot, \cdot, \bar{p})$, które będą pomocne przy sformułowaniu warunku **(G11)** oraz dowodzie ‘silnego’ twierdzenia o magistrali.

■ **Lemat 1.3.** Jeżeli zachodzą warunki **(G1)-(G9)**, to:

- (i) $\beta(\cdot, \bar{p}) \in C^0(Z(\varepsilon) \rightarrow R_+^1)$,
- (2i) $\forall \varepsilon > 0 \exists \max_{(x, y) \in Z(\varepsilon)} \beta(x, y, \bar{p}) = b(\varepsilon) < \alpha_M$.

Dowód. (i) Funkcja $\beta(\cdot, \bar{p})$ jest ciągła na (zwartym) zbiorze:

$$V(\varepsilon) = \{(x, y) \in Z \mid \|x, y\| = 1 \ \& \ (d(x, N) \geq \varepsilon \vee d(y, N) \geq \varepsilon)\}$$

(zob. dowód lematu 1.1). Stąd oraz z dodatniej jednorodności stopnia 0 wynika jej ciągłość na zbiorze $Z(\varepsilon) = \{\lambda \cdot V(\varepsilon) \mid \lambda > 0\}$.

(2i) Ciągła funkcja $\beta(\cdot, \bar{p})$ jest dodatnio jednorodna stopnia 0, zatem:

$$\max_{(x,y) \in Z(\varepsilon)} \beta(x, y, \bar{p}) = \max_{(x,y) \in V(\varepsilon)} \beta(x, y, \bar{p}),$$

a ponieważ zbiór $V(\varepsilon)$ jest zwarty, więc:

$$\exists \max_{(x,y) \in V(\varepsilon)} \beta(x, y, \bar{p}) = b(\varepsilon).$$

Wówczas, zgodnie z lematem 1.1:

$$\max_{(x,y) \in Z(\varepsilon)} \beta(x, y, \bar{p}) = \max_{(x,y) \in V(\varepsilon)} \beta(x, y, \bar{p}) = b(\varepsilon) \leq \alpha_M - \delta_\varepsilon < \alpha_M,$$

c.n.d. ■

Wprowadzając oznaczenie $\delta(\varepsilon) = \alpha_M - b(\varepsilon)$, możemy warunek/tezę (2i) lematu zapisać tak:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) \in (0, \alpha_M) \forall (x, y) \in Z(\varepsilon) (\beta(x, y, \bar{p}) \leq \alpha_M - \delta(\varepsilon))$$

lub równoważnie:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) \in (0, \alpha_M) \forall (x, y) \in Z(\varepsilon) (\langle \bar{p}, y \rangle \leq (\alpha_M - \delta(\varepsilon)) \langle \bar{p}, x \rangle) \quad (1.35)$$

Funkcja $b(\cdot)$ jest nierosnąca (tam, gdzie jest określona), $b(\varepsilon) \rightarrow \alpha_M$ przy $\varepsilon \rightarrow 0$, zatem $\delta(\varepsilon) \rightarrow 0$, gdy $\varepsilon \rightarrow 0$. Przy dowodzie ‘silnego’ twierdzenia o magistrali korzystamy z następującego warunku monotoniczności:

(G11) Funkcja $b(\cdot)$ maleje (równoważnie, funkcja $\delta(\cdot)$ rośnie) na obszarze określoności.

Zgodnie z tym warunkiem efektywność ekonomiczna procesu $(x, y) \in Z \setminus \{0\}$ maleje w miarę oddalania się (w sensie metryki $d(\cdot)$) wektora nakładów x i/lub produkcji y od magistrali N . Warunek jest spełniony np. gdy przestrzeń produkcyjna Gale’a jest stożkiem silnie wypukłym: dla dowolnych liczb $\alpha, \beta > 0$

i dowolnej pary liniowo niezależnych procesów $(x^1, y^1), (x^2, y^2) \in Z$ ich kombinacja liniowa $(x, y) = \alpha(x^1, y^1) + \beta(x^2, y^2)$ jest punktem wewnętrznym przestrzeni Z .

Zakładamy ponadto, że funkcja $\alpha(\cdot)$ jest ciągła w punkcie $(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{s}, \alpha_M \bar{s})$, w którym $\alpha(\bar{x}, \bar{y}) = \max_{(x,y) \in Z \setminus \{0\}} \alpha(x, y) = \alpha_M > 0$, czego konsekwencją jest następująca własność dopuszczalnych procesów produkcji w otoczeniu magistrali N :

Jeżeli w dopuszczalnym procesie $(x, y) \in Z$ struktura nakładów $s = \frac{x}{\|x\|}$ różni się „niewiele” od struktury magistralnej $\bar{s}$, wówczas z nakładów tych możliwe jest wytworzenie wektora produkcji $y \in N$ z technologiczną efektywnością „dowolnie bliską” optymalnej efektywności α_M . Mówi o tym następujący lemat.

■ **Lemat 1.4.** Jeżeli zachodzą warunki **(G1)-(G9)** oraz technologiczna efektywność produkcji $\alpha(\cdot)$ jest funkcją ciągłą w punkcie $(\bar{s}, \alpha_M \bar{s}) = \arg \max_{(x,y) \in \Omega(1)} \alpha(x, y)$, to:

$$\forall s \in S_+^n(1) \exists \sigma(s, \bar{s}) \in (0, 1] \forall \delta \in (0, \alpha_M) \exists \varepsilon' > 0 \left(\|s - \bar{s}\| < \varepsilon' \Rightarrow \right. \\ \left. \Rightarrow ((s, \sigma(s, \bar{s}) \alpha_M \bar{s}) \in \Omega(1) \ \& \ \alpha(s, \sigma(s, \bar{s}) \alpha_M \bar{s}) \geq \alpha_M - \delta) \right),$$

gdzie: $S_+^n(1) = \{x \in R_+^n \mid \|x\| = 1\}$, $\Omega(1) = \{(x, y) \in Z \mid \|x\| = 1\}$, $\bar{s}$ jest wektorem struktury produkcji na magistrali $N = \{\lambda \bar{s} \mid \lambda > 0\}$, $\|\bar{s}\| = 1$.

Dowód. Weźmy wektor $\bar{s}$ struktury produkcji na magistrali. Niech $I = \{i \mid \bar{s}_i > 0\}$. Pokażemy, że istnieje takie $\tilde{\varepsilon}$ – otoczenie wektora $\bar{s}$ w $S_+^n(1)$:

$$U_{\tilde{\varepsilon}}(\bar{s}) = \{s \in S_+^n(1) \mid \|s - \bar{s}\| < \tilde{\varepsilon}\},$$

że:

$$\forall s \in U_{\tilde{\varepsilon}}(\bar{s}) \forall i \in I (s_i > 0). \quad (1.36)$$

Istotnie, niech $\tilde{\varepsilon} = \min_{i \in I} \bar{s}_i = \bar{s}_k > 0$ oraz $s \in U_{\tilde{\varepsilon}}(\bar{s})$. Wówczas:

$$\forall i \in I (|s_i - \bar{s}_i| \leq \|s - \bar{s}\| < \bar{s}_k),$$

ozn. $-\bar{s}_k < s_i - \bar{s}_i < \bar{s}_k$, $i \in I$, czyli:

$$\forall i \in I (s_i > \bar{s}_i - \bar{s}_k \geq 0).$$

Jeżeli $s \in S_+^n(1)$, to (zważywszy, że $\|s\| = \|\bar{s}\| = 1$) istnieje liczba:

$$\lambda(s, \bar{s}) = \min\{\lambda \mid \lambda s \geq \bar{s}\} = \max_{i \in I} \frac{\bar{s}_i}{s_i} \geq 1.$$

Jednocześnie $(\bar{s}, \alpha_M \bar{s}) \in \Omega(1) \subset Z$, więc zgodnie z **(G4)** $(\lambda(s, \bar{s})s, \alpha_M \bar{s}) \in Z$, czyli:

$$(s, \sigma(s, \bar{s})\alpha_M \bar{s}) \in \Omega(1), \quad (1.37)$$

gdzie $0 < \sigma(s, \bar{s}) = \frac{1}{\lambda(s, \bar{s})} \leq 1$ i funkcja $\sigma(\cdot, \bar{s})$ jest ciągła w punkcie $\bar{s}$ oraz $\sigma(\bar{s}, \bar{s}) = 1$.

Z założenia funkcja $\alpha(\cdot)$ jest ciągła w punkcie $(\bar{s}, \alpha_M \bar{s})$ oraz:

$$\alpha(\bar{s}, \alpha_M \bar{s}) = \max_{(x, y) \in \Omega(1)} \alpha(x, y) = \max_{(x, y) \in Z \setminus \{0\}} \alpha(x, y) = \alpha_M,$$

więc:

$$\forall \delta \in (0, \alpha_M) \exists \varepsilon' \in (0, \varepsilon) (\|s - \bar{s}\| < \varepsilon' \Rightarrow \alpha(s, \sigma(s, \bar{s})\alpha_M \bar{s}) \geq \alpha_M - \delta). \quad (1.38)$$

Z (1.37), (1.38) wynika teza. ■

Gdy wektor (unormowanych) nakładów $s = \frac{x}{\|x\|}$ w pewnym dopuszczalnym procesie produkcji leży „dostatecznie blisko” wektora $\bar{s}$ struktury produkcji na magistrali N , wówczas istnieje proces, który z efektywnością „niewiele” różniącą się od optymalnej prowadzi z nakładów x do magistrali. Mówiąc inaczej, jeżeli tylko wektor nakładów x leży „dostatecznie blisko” magistrali (w sensie metryki kątowej $d(\cdot)$), to istnieje dopuszczalny proces $(x, y) \in Z$ z wektorem produkcji $y \in N$, którego technologiczna efektywność $\alpha(x, y)$ „dowolnie mało” odbiega (in minus) od optymalnej efektywności α_M .

Zgodnie z ‘silnym’ twierdzeniem o magistrali, które formułujemy poniżej, niezależnie od długości horyzontu T wszystkie $(y^0, t_1, \bar{p})$ – optymalne procesy wzrostu przebiegają w dowolnie bliskim otoczeniu magistrali N wszędzie za wyjątkiem co najwyżej ich pewnej (skończonej) liczby na początku i/lub pod koniec horyzontu.

■ **Twierdzenie 1.11. (*‘Silne’ twierdzenie o magistrali*)** Niech $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ będzie $(y^0, t_1, \bar{p})$ – optymalnym procesem wzrostu w stacjonarnej gospodarce Gale’a spełniającej warunki **(G1)-(G9)**, **(G11)**. Jeżeli istnieje taki $(y^0, \check{t})$ – dopuszczalny proces wzrostu $\{\check{y}(t)\}_{t=0}^{\check{t}}$, $\check{t} < t_1$, że $\check{y}(\check{t}) \in N = \{\lambda \bar{s} \mid \lambda > 0\}$ i funkcja $\alpha(\cdot)$ jest ciągła w punkcie $(\bar{s}, \alpha_M \bar{s})$, to $\forall \varepsilon > 0$ istnieje taka niezależna od długości horyzontu T liczba naturalna k_ε , że:

$$\forall t_1 > 2k_\varepsilon \quad \forall t \in \{k_\varepsilon, k_\varepsilon + 1, \dots, t_1 - k_\varepsilon\} (d(y^*(t), N) < \varepsilon)$$

(metryka $d(\cdot)$ ma postać (1.28)).

Dowód. Weźmy dowolną liczbę $\varepsilon > 0$, liczbę $\delta(\varepsilon) \in (0, \alpha_M)$ spełniającą warunek (1.35), liczbę $\delta \in (0, \delta(\varepsilon))$ oraz odpowiadającą jej liczbę $\varepsilon' \in (0, \min\{\varepsilon, \tilde{\varepsilon}\})$ z lematu 1.4. Zgodnie ze ‘słabym’ twierdzeniem o magistrali istnieje taka (niezależna od t_1) liczba naturalna $k_{\varepsilon'}$, że liczba okresów czasu, w których $(y^0, t_1, \bar{p})$ – optymalny proces $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ spełnia warunek:

$$d(y^*(t), N) = \left\| \frac{y^*(t)}{\|y^*(t)\|} - \bar{s} \right\| \geq \varepsilon'$$

nie przekracza $k_{\varepsilon'}$. Ponieważ liczba $k_{\varepsilon'}$ nie zależy od t_1 , więc jeżeli $t_1 > k_{\varepsilon'}$, to:

$$d(y^*(t), N) = \left\| \frac{y^*(t)}{\|y^*(t)\|} - \bar{s} \right\| < \varepsilon' \quad (1.39)$$

co najmniej w jednym okresie $t < t_1$. Niech $t_1 > 2k_{\varepsilon'}$. Przez τ_1 oznaczmy pierwszy, a przez τ_2 ostatni okres, w którym zachodzi warunek (1.39). Wówczas, w świetle lematu 1.4 (wobec (1.36), zważywszy, że $\varepsilon' \leq \tilde{\varepsilon}$) spełniony jest warunek:

$$\left(\frac{y^*(\tau_1)}{\|y^*(\tau_1)\|}, \sigma^* \alpha_M \bar{s} \right) \in \Omega(1), \text{ czyli } (y^*(\tau_1), \rho \sigma^* \alpha_M \bar{s}) \in Z \setminus \{0\},$$

gdzie $\sigma^* = \sigma(s^*(\tau_1), \bar{s})$, $s^*(\tau_1) = \frac{y^*(\tau_1)}{\|y^*(\tau_1)\|}$, $\rho = \|y^*(\tau_1)\| > 0$.

Istnieje zatem (y^0, t_1) – dopuszczalny proces $\{\tilde{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$:

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} y^*(t), & t = 0, 1, \dots, \tau_1, \\ \rho \sigma^* \alpha_M^{t-\tau_1} \bar{s}, & t = \tau_1 + 1, \dots, t_1, \end{cases}$$

co z definicji procesu optymalnego $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ prowadzi do nierówności:

$$\langle \bar{p}, y^*(t_1) \rangle \geq \langle \bar{p}, \tilde{y}(t_1) \rangle = \rho \sigma^* \alpha_M^{t_1-\tau_1} \langle \bar{p}, \bar{s} \rangle > 0 \quad (1.40)$$

(por. (1.32)). Niech k' będzie liczbą okresów czasu (między τ_1, τ_2), w których:

$$d(y^*(t), N) \geq \varepsilon$$

(zachodzi warunek (1.28)). Z (1.11), (1.23), (1.35) (zważywszy na (1.34)) otrzymujemy:

$$\langle \bar{p}, y^*(t_1) \rangle \leq (\alpha_M - \delta(\varepsilon'))^{t_1-\tau_2} \alpha_M^{\tau_2-\tau_1-k'} (\alpha_M - \delta(\varepsilon))^{k'} \langle \bar{p}, y^*(\tau_1) \rangle. \quad (1.41)$$

Łącząc (1.40), (1.41), dochodzimy do warunku:

$$0 < \rho \sigma^* \alpha_M^{t_1-\tau_1} \langle \bar{p}, \bar{s} \rangle \leq (\alpha_M - \delta(\varepsilon'))^{t_1-\tau_2} \alpha_M^{\tau_2-\tau_1-k'} (\alpha_M - \delta(\varepsilon))^{k'} \langle \bar{p}, y^*(\tau_1) \rangle,$$

lub inaczej:

$$\left(\frac{\alpha_M - \delta(\varepsilon)}{\alpha_M} \right)^{k'} \geq \left(\frac{\alpha_M}{\alpha_M - \delta(\varepsilon')} \right)^{t_1-\tau_2} \frac{\rho \sigma^* \langle \bar{p}, \bar{s} \rangle}{\langle \bar{p}, y^*(\tau_1) \rangle}.$$

Nierówność powyższą, po podstawieniu $s^*(\tau_1) = \frac{y^*(\tau_1)}{\|y^*(\tau_1)\|}$, można zapisać w równoważnej postaci:

$$\left(\frac{\alpha_M - \delta(\varepsilon)}{\alpha_M} \right)^{k'} \geq \left(\frac{\alpha_M}{\alpha_M - \delta(\varepsilon')} \right)^{t_1-\tau_2} \frac{\sigma^* \langle \bar{p}, \bar{s} \rangle}{\langle \bar{p}, s^*(\tau_1) \rangle}. \quad (1.42)$$

Zgodnie z lematem 1.4:

$$\alpha = \alpha(s^*(\tau_1), \sigma^* \alpha_M \bar{s}) \geq \alpha_M - \delta,$$

zatem $\alpha s^*(\tau_1) \leq \sigma^* \alpha_M \bar{s}$ oraz $(\alpha_M - \delta)s^*(\tau_1) \leq \sigma^* \alpha_M \bar{s}$. Wówczas:

$$(\alpha_M - \delta)\langle \bar{p}, s^*(\tau_1) \rangle \leq \sigma^* \alpha_M \langle \bar{p}, \bar{s} \rangle,$$

czyli:

$$\frac{\sigma^* \langle \bar{p}, \bar{s} \rangle}{\langle \bar{p}, s^*(\tau_1) \rangle} \geq \frac{\alpha_M - \delta}{\alpha_M}.$$

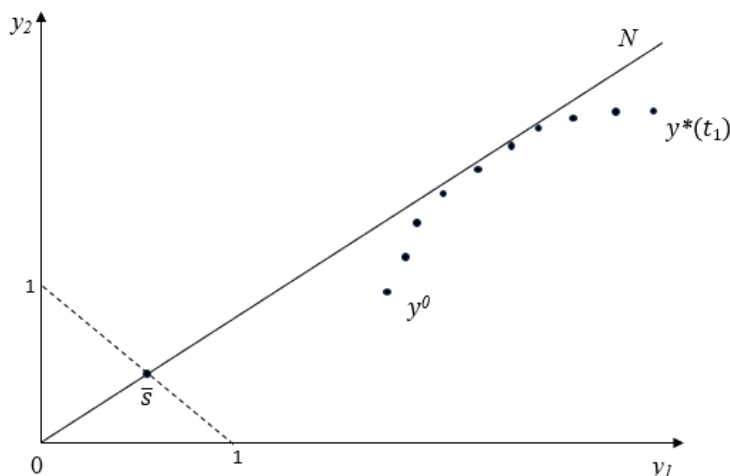
Stąd i z (1.42) dostajemy:

$$\left(\frac{\alpha_M - \delta(\varepsilon)}{\alpha_M} \right)^{k'} \geq \left(\frac{\alpha_M}{\alpha_M - \delta(\varepsilon')} \right)^{t_1 - \tau_2} \frac{\alpha_M - \delta}{\alpha_M}.$$

Pamiętając, że $0 < \delta(\varepsilon') < \delta(\varepsilon) < \alpha_M$ (gdyż $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ i funkcja $\delta(\cdot)$ jest rosnąca, zob. warunek **(G11)**) oraz $\delta \in (0, \delta(\varepsilon))$ i $t_1 - \tau_2 \geq 0$, dochodzimy do nierówności:

$$\left(\frac{\alpha_M - \delta(\varepsilon)}{\alpha_M} \right)^{k'} > \left(\frac{\alpha_M}{\alpha_M - \delta(\varepsilon')} \right)^{t_1 - \tau_2} \frac{\alpha_M - \delta(\varepsilon)}{\alpha_M},$$

czyli $\left(\frac{\alpha_M - \delta(\varepsilon)}{\alpha_M} \right)^{k' - 1} > 1$ lub (równoważnie) $(\alpha_M - \delta(\varepsilon))^{k' - 1} > \alpha_M^{k' - 1}$. Jediną nieujemną liczbą całkowitą spełniającą ten warunek jest $k' = 0$. Tezę twierdzenia otrzymujemy przyjmując $k_\varepsilon = k_{\varepsilon'}$. ■



Rysunek 1.5. Przebieg $(y^0, t_1, \bar{p})$ – optymalnego procesu wzrostu w otoczeniu promienia von Neumanna w R_+^2 – ilustracja ‘silnego’ twierdzenia o magistrali

Aktualne są uwagi 1-4 do twierdzenia 1.10. Należy podkreślić, że aczkolwiek zgodnie ze ‘słabym’ twierdzeniem o magistrali optymalne procesy wzrostu są w długich okresach czasu (w długim horyzoncie T) „prawie zawsze” (w prawie wszystkich okresach) zbieżne do magistrali, to jednak twierdzenie to nie rozstrzyga, kiedy (w których okresach) zbieżność taka ma miejsce.

Udowodnione wyżej ‘silne’ twierdzenie o magistrali precyzuje, że dzieje się tak zawsze za wyjątkiem ewentualnie początkowych i/lub końcowych okresów horyzontu T . Im horyzont jest dłuższy, tym dłużej optymalne procesy wzrostu w jego środkowym okresie przebiegają w dowolnie bliskim otoczeniu magistrali N .

Szczególną sytuację mamy, kiedy sam optymalny proces wzrostu w pewnym okresie $\check{t} < t_1$ dociera do magistrali. Mówi o tym następujące twierdzenie.

■ **Twierdzenie 1.12. (*‘Bardzo silne’ twierdzenie o magistrali*)** Jeżeli przy założeniach twierdzenia 1.10 $(y^0, t_1, \bar{p})$ – optymalny proces wzrostu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ w pewnym okresie czasu $\check{t} < t_1$ spełnia warunek:

$$y^*(\check{t}) \in N$$

(prowadzi do magistrali), to:

$$\forall t \in \{\check{t} + 1, \dots, t_1\} (y^*(t) \in N).$$

Dowód. Inkluzja $y^*(\check{t}) \in N$ jest równoważna z warunkiem:

$$\frac{y^*(\check{t})}{\|y^*(\check{t})\|} = \bar{s},$$

czyli $y^*(\check{t}) = \sigma \bar{s}$, gdzie $\sigma = \|y^*(\check{t})\| > 0$. Utwórzmy proces $\{\tilde{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$ postaci:

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} y^*(t), & t = 0, 1, \dots, \check{t}, \\ \sigma \alpha_M^{t-\check{t}} \bar{s}, & t = \check{t} + 1, \dots, t_1, \end{cases} \quad (1.43)$$

otrzymany ze „sklejenia” początkowego fragmentu $(y^0, t_1, \bar{p})$ – optymalnego procesu wzrostu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ oraz końcowej części stacjonarnego procesu $\{\bar{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$ postaci (1.26) z początkowym wektorem $\bar{y} = \sigma \alpha_M^{-\check{t}} \bar{s} \in N$. Proces (1.43) jest (y^0, t_1) – dopuszczalny, zatem z definicji $(y^0, t_1, \bar{p})$ – optymalnego procesu wzrostu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ dostajemy nierówność:

$$\langle \bar{p}, y^*(t_1) \rangle \geq \langle \bar{p}, \tilde{y}(t_1) \rangle = \sigma \alpha_M^{t_1-\check{t}} \langle \bar{p}, \bar{s} \rangle > 0, \quad (1.44)$$

natomiast z definicji $(y^0, t_1, \bar{p})$ – optymalnego procesu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$, zgodnie z (1.11):

$$\langle \bar{p}, y^*(t_1) \rangle \leq \alpha_M \langle \bar{p}, y^*(t_1 - 1) \rangle \leq \dots \leq \alpha_M^{t_1-\check{t}} \langle \bar{p}, y^*(\check{t}) \rangle = \sigma \alpha_M^{t_1-\check{t}} \langle \bar{p}, \bar{s} \rangle. \quad (1.45)$$

Jeżeli:

$$\exists \tau \in \{\check{t} + 1, \dots, t_1 - 1\} \left(\frac{y^*(\tau)}{\|y^*(\tau)\|} \neq \bar{s} \right),$$

to istnieje taka liczba $\varepsilon > 0$, że:

$$d(y^*(\tau), N) = \left\| \frac{y^*(\tau)}{\|y^*(\tau)\|} - \bar{s} \right\| = \varepsilon > 0 \quad (1.46)$$

i zgodnie z lematem 1.1:

$$\exists \delta_\varepsilon \in (0, \alpha_M) (\langle \bar{p}, y^*(\tau + 1) \rangle \leq (\alpha_M - \delta_\varepsilon) \langle \bar{p}, y^*(\tau) \rangle).$$

Gdy warunek (1.46) zachodzi dla $\tau = t_1$, wtedy zgodnie z lematem 1.1:

$$\langle \bar{p}, y^*(t_1) \rangle \leq (\alpha_M - \delta_\varepsilon) \langle \bar{p}, y^*(t_1 - 1) \rangle.$$

W obu przypadkach (niezależnie od tego, czy $\tau < t_1$, czy $\tau = t_1$), po uwzględnieniu (1.45) dostajemy:

$$\langle \bar{p}, y^*(t_1) \rangle \leq \sigma \alpha_M^{t_1 - \bar{t} - 1} (\alpha_M - \delta_\varepsilon) \langle \bar{p}, \bar{s} \rangle,$$

a stąd i z (1.44):

$$0 < \sigma \alpha_M^{t_1 - \bar{t}} \langle \bar{p}, \bar{s} \rangle \leq \sigma \alpha_M^{t_1 - \bar{t} - 1} (\alpha_M - \delta_\varepsilon) \langle \bar{p}, \bar{s} \rangle.$$

Nierówność ta jest prawdziwa tylko gdy $\delta_\varepsilon \leq 0$. Otrzymana sprzeczność kończy dowód. ■

Twierdzenie głosi, że wejście optymalnego procesu wzrostu na magistralę jest bezpowrotne, tj. dotarcie optymalnego procesu w pewnym okresie $t < t_1$ do magistrali skutkuje trwałym pobytem gospodarki na magistrali do końca horyzontu T . W szczególności, gdy $y^0 \in N$, wówczas oczywiście cała trajektoria $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ we wszystkich okresach $t \in T$ pozostaje na magistrali N . Aktualna jest też uwaga 1 do twierdzenia 1.10.

Z definicji (y^0, t_1) – dopuszczalnego procesu wzrostu $\{y(t)\}_{t=0}^{t_1}$ każda para $(y(t-1), y(t)) \in Z$, $t = 1, \dots, t_1$, tworzy dopuszczalny proces produkcji, w którym $y(t-1)$ jest wektorem nakładów (zużycia) w okresie t , a $y(t)$ wektorem wyników (produkcji) otrzymywanej w tym okresie z nakładów $y(t-1)$. Różnica $q(t) = y(t) - y(t-1)$ jest wektorem produkcji czystej otrzymanej w gospodarce w okresie t . Suma:

$$\sum_{t=1}^{t_1} q(t) = \sum_{t=1}^{t_1} (y(t) - y(t-1)) = y(t_1) - y^0$$

przedstawia zatem wektor produkcji czystej wytworzonej w (y^0, t_1) – dopuszczalnym procesie w całym horyzoncie T . Wówczas:

$$\langle \bar{p}, y(t_1) - y^0 \rangle = \langle \bar{p}, y(t_1) \rangle - \langle \bar{p}, y^0 \rangle$$

jest mierzona/wyrażona w cenach równowagi $\bar{p}$ wartością produkcji czystej wytworzonej w (y^0, t_1) – dopuszczalnym procesie w całym horyzoncie T . Dodanie stałej do funkcji celu w zadaniu (1.27) nie ma wpływu na postać rozwiązania, zatem $(y^0, t_1, \bar{p})$ – optymalna trajektoria $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ w każdym z twierdzeń 1.10-1.12 jest równocześnie rozwiązaniem zadania maksymalizacji wartości produkcji czystej w gospodarce Gale’a wytworzonej w całym horyzoncie T :

$$\max_{y \in R_{y^0, t_1}} \{ \langle \bar{p}, y \rangle - \langle \bar{p}, y^0 \rangle \}.$$

Otrzymujemy kolejne potwierdzenie kluczowego znaczenia twierdzeń o magistrali dla racjonalnego/optimalnego funkcjonowania gospodarki.

1.8. Zadanie maksymalizacji łącznej wartości produkcji wytworzonej w całym horyzoncie T

Podobnie jak dotąd zakładamy, że ustalony jest horyzont funkcjonowania gospodarki $T = \{0, 1, \dots, t_1\}$ ($t_1 < +\infty$) oraz początkowy wektor produkcji $y(0) = y^0 \geq 0$, natomiast w odróżnieniu od zadania (1.27) maksymalizacji wartości produkcji $y(t_1)$ (mierzonej w cenach równowagi $\bar{p}$) wytworzonej w końcowym okresie t_1 horyzontu T , w tym punkcie zajmujemy się rozwiązaniem zadania maksymalizacji łącznej wartości produkcji wytworzonej w całym horyzoncie T :

$$\max \sum_{t=0}^{t_1} \langle \bar{p}, y(t) \rangle$$

$$\text{p.w. (1.23), (1.24).}$$

Przyjmując oznaczenia:

$$y_T = (y(0), y(1), \dots, y(t_1)), \quad \bar{P} = \underbrace{(\bar{p}, \bar{p}, \dots, \bar{p})}_{(t_1+1) \text{ razy}}$$

$$\mathbb{R}_{y^0, T} = \{y_T \mid (y(t), y(t+1)) \in Z, \ t = 0, 1, \dots, t_1 - 1; \ y(0) = y^0 \geq 0\},$$

można je zapisać w następującej równoważnej postaci:

$$\max_{y_T \in \mathbb{R}_{y^0, T}} \langle \bar{P}, y_T \rangle. \quad (1.47)$$

W zadaniu tym $\mathbb{R}_{y^0, T}$ jest zbiorem wszystkich (y^0, t_1) – dopuszczalnych procesów wzrostu (trajektorii produkcji) z ustalonym początkowym wektorem produkcji $y(0) = y^0 \geq 0$ w okresie $t = 0$. Jego rozwiązanie $y_T^* = (y^0, y^*(1), \dots, y^*(t_1))$ lub inaczej $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ nazywamy $(y^0, T, \bar{p})$ – *optymalnym procesem wzrostu* (lub $(y^0, T, \bar{p})$ – optymalną trajektorią produkcji). Pokażemy, że przy przyjętych dotąd założeniach zadanie (1.47) ma rozwiązanie.

■ **Twierdzenie 1.13.** Jeżeli spełnione są warunki (G1)-(G7), to $\forall y^0 \geq 0 \quad \forall t_1 > 0$ istnieją $(y^0, T, \bar{p})$ – optymalne procesy wzrostu.

Dowód. Pokażemy, że zbiór $\mathbb{R}_{y^0, T}$ jest zwarty, tj. dowolny ciąg procesów wzrostu $\{y_T^k\}_{k=1}^\infty$, $y_T^k = \{y^k(t)\}_{t=0}^{t_1} \in \mathbb{R}_{y^0, T}$ ($k = 1, 2, \dots$) zawiera podciąg $\{y_T^{k_j}\}_{j=1}^\infty$ zbieżny do granicy $\bar{y}_T = \{\bar{y}(t)\}_{t=0}^{t_1} \in \mathbb{R}_{y^0, T}$:

$$\forall t \in T \left(y^{k_j}(t) \xrightarrow{j} \bar{y}(t) \right) \quad \& \quad \bar{y}_T \in \mathbb{R}_{y^0, T}.$$

Weźmy dowolny ciąg procesów $y_T^k \in \mathbb{R}_{y^0, T}$, $k = 1, 2, \dots$. Wówczas (z definicji):

$$\forall k \left((y^k(t), y^k(t+1)) \in Z, t = 0, 1, \dots, t_1 - 1; \quad y^k(0) = y^0 \geq 0 \right)$$

oraz:

$$\forall k \quad \forall t \in T \quad (y^k(t) \in R_{y^0, t})$$

i zbiory $R_{y^0, t}$ ($t = 0, 1, \dots, t_1$) są zwarte (lemat 1.2). W szczególności $R_{y^0, 0} = \{y^0\}$, więc $\forall k (y^k(0) = y^0)$, zatem $\bar{y}(0) = y^0$.

Dalej dowód przeprowadzimy metodą indukcji. Niech $t = 1$. Ponieważ $\forall k (y_T^k \in \mathbb{R}_{y^0, T})$, więc oczywiście $\forall k (y^k(1) \in R_{y^0, 1})$, gdzie zbiór $R_{y^0, 1}$

jest zwarty. Istnieje zatem taki podciąg procesów $\{y_T^{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$, w którym ciąg wektorów produkcji $\{y^{k_j}(1)\}_{j=1}^{\infty}$ jest zbieżny do pewnego wektora $\bar{y}(1)$:

$$y^{k_j}(1) \xrightarrow{j} \bar{y}(1) \in R_{y^0,1}.$$

czyli $(y^0, \bar{y}(1)) \in Z$.

Weźmy teraz dowolny okres czasu $t \geq 1$ ($t < t_1$) i założmy, że ciąg procesów $\{y_T^k\}_{k=1}^{\infty}$ zawiera podciąg $\{y_T^{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$, w którym:

$$\forall t' \leq t \left(y^{k_j}(t') \xrightarrow{j} \bar{y}(t') \in R_{y^0,t'} \right) \quad (1.48)$$

(każdy ciąg $\{y^{k_j}(t')\}_{j=1}^{\infty}$ wektorów produkcji wytworzonej w okresach $t' = 0, 1, \dots, t < t_1$ jest przy $j \rightarrow \infty$ zbieżny do granicy $\bar{y}(t') \in R_{y^0,t'}$).

Warunek (1.48) zachodzi $\forall t' \leq t + 1$. Istotnie, ciąg procesów $\{y_T^k\}_{k=1}^{\infty}$ zawiera z założenia podciąg $\{y_T^{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$, gdzie:

$$y_T^{k_j} = \{y^{k_j}(t)\}_{t=0}^{t_1} = (y^0, y^{k_1}(1), \dots, y^{k_j}(t), y^{k_j}(t+1), \dots, y^{k_j}(t_1)),$$

w którym wektory produkcji $y^{k_j}(t')$ w okresach $t' \leq t$ spełniają warunek (1.48) (są zbieżne do granicy $\bar{y}(t') \in R_{y^0,t'}$). W procesach tych towarzyszący im ciąg wektorów produkcji $\{y^{k_j}(t+1)\}_{j=1}^{\infty}$ (wytworzonej w kolejnym okresie $t+1$) spełnia oczywiście warunek $y^{k_j}(t+1) \in R_{y^0,t+1}$, $j = 1, 2, \dots$. Ponieważ zbiór wektorów produkcji $R_{y^0,t+1}$ jest zwarty, więc:

$$\exists \{y^{k_{j_l}}(t+1)\}_{l=1}^{\infty} \left(y^{k_{j_l}}(t+1) \xrightarrow{l} \bar{y}(t+1) \in R_{y^0,t+1} \right).$$

Konkluzja. Dowolny ciąg procesów wzrostu $y_T^k \in \mathbb{R}_{y^0,T}$ zawiera podciąg zbieżny do granicy $\bar{y}_T$. Z inkluzji $y_T^k \in \mathbb{R}_{y^0,T}$ wynika, że:

$$\forall k \left((y^k(t), y^k(t+1)) \in Z, \quad t = 0, 1, \dots, t_1 - 1; \quad y^k(0) = y^0 \geq 0 \right)$$

i ponieważ przestrzeń produkcyjna Z jest zbiorem domkniętym w R^{2n} , więc $(\bar{y}(t), \bar{y}(t+1)) \in Z$, $t = 0, 1, \dots, t_1 - 1$ oraz $\bar{y}(0) = y^0$, czyli $\bar{y}_T \in \mathbb{R}_{y^0, T}$. Zbiór $\mathbb{R}_{y^0, T}$ jest zwarty.

Forma liniowa $\langle \bar{P}, \cdot \rangle$ jest funkcją ciągłą, więc zgodnie z twierdzeniem Weierstrassa zadanie (1.47) ma rozwiązanie, c.n.d. ■

Kolejne dwa twierdzenia pokazują, że zmiana kryterium wzrostu (w tym przypadku uwzględnienie przy ocenie procesów wzrostu wartości produkcji wytworzonej w gospodarce w całym horyzoncie czasu T , a nie tylko w jego końcowym okresie t_1) nie pozbawia gospodarki jej fundamentalnych własności magistralnych. Odpowiednikiem twierdzenia 1.10 jest obecnie następujące ‘słabe’ twierdzenie o magistrali.

■ **Twierdzenie 1.14.** Jeżeli w stacjonarnej gospodarce Gale’a spełniającej warunki (G1)-(G9) istnieje taki $(y^0, \check{t})$ – dopuszczalny proces $\{\check{y}(t)\}_{t=0}^{\check{t}}$, $\check{t} < t_1$, że $\check{y}(\check{t}) \in N$ oraz tempo wzrostu na magistrali $\alpha_M > 1$, to $\forall \varepsilon > 0$ istnieje taka liczba naturalna k_ε , że liczba okresów czasu, w których $(y^0, T, \bar{p})$ – optymalny proces $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ spełnia warunek (1.28), nie przekracza k_ε . Liczba k_ε nie zależy od t_1 .

Dowód. Weźmy $(y^0, T, \bar{p})$ – optymalny proces wzrostu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$, rozwiązanie zadania (1.47). Wówczas, zgodnie z (1.11), (1.23):

$$\langle \bar{p}, y^*(t+1) \rangle \leq \alpha_M \langle \bar{p}, y^*(t) \rangle, \quad t = 0, 1, \dots, t_1 - 1 \quad (1.49)$$

(analogicznie jak w twierdzeniu 1.10, zob. (1.29)), czyli po rozpisaniu:

$$\langle \bar{p}, y^*(1) \rangle \leq \alpha_M \langle \bar{p}, y^0 \rangle,$$

$$\langle \bar{p}, y^*(2) \rangle \leq \alpha_M \langle \bar{p}, y^*(1) \rangle \leq \alpha_M^2 \langle \bar{p}, y^0 \rangle,$$

.....

$$\langle \bar{p}, y^*(t_1) \rangle \leq \alpha_M \langle \bar{p}, y^*(t_1 - 1) \rangle \leq \dots \leq \alpha_M^{t_1} \langle \bar{p}, y^0 \rangle.$$

Założmy, że k razy, w okresach $\tau_1, \dots, \tau_k < t_1$, zachodzi warunek (1.28).
Wtedy, zgodnie z lematem 1.1, istnieje taka liczba $\delta_\varepsilon \in (0, \alpha_M)$, że:

$$\langle \bar{p}, y^*(t+1) \rangle \leq (\alpha_M - \delta_\varepsilon) \langle \bar{p}, y^*(t) \rangle, \quad t = \tau_1, \dots, \tau_k. \quad (1.50)$$

Z (1.49), (1.50) otrzymujemy ciąg nierówności:

$$\langle \bar{p}, y^*(1) \rangle \leq \alpha_M \langle \bar{p}, y^0 \rangle,$$

$$\langle \bar{p}, y^*(2) \rangle \leq \alpha_M^2 \langle \bar{p}, y^0 \rangle,$$

.....

$$\langle \bar{p}, y^*(t_1 - k) \rangle \leq \alpha_M^{t_1 - k} \langle \bar{p}, y^0 \rangle,$$

$$\langle \bar{p}, y^*(t_1 - k + 1) \rangle \leq (\alpha_M - \delta_\varepsilon) \alpha_M^{t_1 - k} \langle \bar{p}, y^0 \rangle,$$

.....

$$\langle \bar{p}, y^*(t_1) \rangle \leq (\alpha_M - \delta_\varepsilon)^k \alpha_M^{t_1 - k} \langle \bar{p}, y^0 \rangle,$$

a stąd:

$$\sum_{t=0}^{t_1} \langle \bar{p}, y^*(t) \rangle \leq \langle \bar{p}, y^0 \rangle \left[\sum_{t=0}^{t_1 - k} \alpha_M^t + \alpha_M^{t_1 - k} \sum_{\tau=1}^k (\alpha_M - \delta_\varepsilon)^\tau \right]. \quad (1.51)$$

Z założenia istnieje $(y^0, \check{t})$ – dopuszczalny proces prowadzący w okresie $\check{t} < t_1$ do magistrali N , co podobnie jak przy dowodzie twierdzenia 1.10 prowadzi do wniosku, że istnieje (y^0, t_1) – dopuszczalny proces $\{\tilde{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$:

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} \check{y}(t), & t = 0, 1, \dots, \check{t}, \\ \sigma \alpha_M^{t - \check{t}} \bar{s}, & t = \check{t} + 1, \dots, t_1 \end{cases}$$

($\sigma = \|\check{y}(\check{t})\| > 0$), który, począwszy od okresu $t = \check{t}$, biegnie po magistrali N .

Wówczas:

$$\sum_{t=0}^{t_1} \langle \bar{p}, y^*(t) \rangle \geq \sum_{t=0}^{t_1} \langle \bar{p}, \tilde{y}(t) \rangle = C_1 + \sigma \langle \bar{p}, \bar{s} \rangle \sum_{t=\check{t}+1}^{t_1} \alpha_M^{t - \check{t}}, \quad (1.52)$$

gdzie $C_1 = \langle \bar{p}, y^0 \rangle + \sum_{t=1}^{\bar{t}} \langle \bar{p}, \tilde{y}(t) \rangle > 0$. Stała C_1 nie zależy od t_1 . Z (1.51),(1.52) otrzymujemy nierówność:

$$0 < \sigma \langle \bar{p}, \bar{s} \rangle \sum_{t=\bar{t}+1}^{t_1} \alpha_M^{t-\bar{t}} < \langle \bar{p}, y^0 \rangle \left[\sum_{t=1}^{t_1-k} \alpha_M^t + \alpha_M^{t_1-k} \sum_{\tau=1}^k (\alpha_M - \delta_\varepsilon)^\tau \right],$$

zatem:

$$\sum_{t=1}^{t_1-k} \alpha_M^t + \alpha_M^{t_1-k} \sum_{\tau=1}^k (\alpha_M - \delta_\varepsilon)^\tau > \frac{\sigma \langle \bar{p}, \bar{s} \rangle}{\langle \bar{p}, y^0 \rangle} \sum_{t=\bar{t}+1}^{t_1} \alpha_M^{t-\bar{t}} > 0,$$

a stąd:

$$\alpha_M \frac{\alpha_M^{t_1-k-1}}{\alpha_M-1} + \alpha_M^{t_1-k} (\alpha_M - \delta_\varepsilon) \frac{(\alpha_M - \delta_\varepsilon)^k}{\alpha_M - \delta_\varepsilon - 1} > \frac{\alpha_M (\alpha_M^{t_1-\bar{t}} - 1)}{\alpha_M - 1} \cdot \frac{\sigma \langle \bar{p}, \bar{s} \rangle}{\langle \bar{p}, y^0 \rangle}. \quad (1.53)$$

Biorąc taką dostatecznie małą liczbę $\delta_\varepsilon > 0$, aby spełniony był warunek $\alpha_M - \delta_\varepsilon - 1 > 0$, po prostych przekształceniach, w świetle (1.53) dochodzimy do wniosku, że:

$$\forall k \forall t_1 > k \left(A(t_1, k) + B(t_1, k) > C_2 = \frac{\sigma \langle \bar{p}, \bar{s} \rangle}{\langle \bar{p}, y^0 \rangle} > 0 \right), \quad (1.54)$$

gdzie:

$$A(t_1, k) = \frac{\alpha_M^{t_1-k-1}}{\alpha_M^{t_1-\bar{t}} - 1} \rightarrow 0 \text{ przy } k \rightarrow +\infty \text{ } (t_1 > k),$$

$$B(t_1, k) = \frac{\alpha_M^{t_1-k-1} (\alpha_M - 1) (\alpha_M - \delta_\varepsilon) [(\alpha_M - \delta_\varepsilon)^k - 1]}{(\alpha_M - \delta_\varepsilon - 1) (\alpha_M^{t_1-\bar{t}} - 1)} \rightarrow 0 \text{ przy } k \rightarrow +\infty \text{ } (t_1 > k),$$

co pozostaje w sprzeczności z (1.54). Istnieje zatem taka liczba naturalna k_ε , niezależna od długości horyzontu $T = \{0, 1, \dots, t_1\}$, że liczba okresów czasu, w których zachodzi warunek (1.28) nie przekracza k_ε , c.n.d. ■

Aktualne pozostają uwagi 1-5 do twierdzenia 1.10.

Prostą konsekwencją twierdzenia 1.14 jest następujące ‘bardzo silne’ twierdzenie o magistrali w stacjonarnej gospodarce Gale’a z kryterium maksymalizacji łącznej wartości produkcji (mierzonej w cenach von Neumanna) wytworzonej w całym horyzoncie T .

gdy $\tau < t_1$, oraz:

$$\sum_{t=\tau}^{t_1} \langle \bar{p}, y^*(t) \rangle \leq \sigma \langle \bar{p}, \bar{s} \rangle \left(\sum_{t=\tau}^{t_1} \alpha_M^{t-\tau} - \delta_\varepsilon \alpha_M^{t_1-\tau} \right) \quad (1.58)$$

gdy $\tau = t_1$.

Z (1.55), (1.57) (analogicznie z (1.55), (1.58)) płynie wniosek, że wbrew założeniu $\delta_\varepsilon \leq 0$. Otrzymana sprzeczność zamyka dowód. ■

Dowód tego twierdzenia nie wymaga, aby tempo wzrostu na magistrali α_M było większe od 1. Warunek ten grał istotną rolę przy dowodzie twierdzenia 1.14. Aktualna pozostaje uwaga 1 do twierdzenia 1.10.

Przykład. W komentarzu do ‘słabego’ twierdzenia o magistrali w problemie wzrostu docelowego (uwaga 5 do twierdzenia 1.10) pisaliśmy, że twierdzenie pozostaje prawdziwe po zastąpieniu wektora cen równowagi $\bar{p}$ dowolnym innym wektorem cen $p > 0$. Nie mamy takiej pewności w przypadku zadania (1.47). Spróbujemy zatem przynajmniej prześledzić na prostym przykładzie, jaki wpływ na efekt magistrali w gospodarce Gale’a może mieć „rozluźnienie” cen. W przykładzie mamy 2 towary, a przestrzeń produkcyjną tworzy stożek:

$$Z = \{(x_1, x_2, y_1, y_2) \geq 0 \mid y_1 \leq 1,5x_1^{0,5}x_2^{0,5}, y_2 \leq x_1^{0,25}x_2^{0,75}\}. \quad (1.59)$$

Optymalny wskaźnik technologicznej efektywności $\alpha_M = 1,145$, struktura produkcji na magistrali N :

$$\bar{s} = (0,632, 0,368). \quad (1.60)$$

Wektor cen równowagi:

$$\bar{p} = \lambda(1,0), \lambda > 0. \quad (1.61)$$

Początkowy wektor produkcji:

$$y^0 = (y_1^0, y_2^0) = (50, 250). \quad (1.62)$$

Przyjmując $t_1 = 10$ i rozwiązując zadanie:

$$\max \sum_{t=0}^{t_1} \langle p, y(t) \rangle$$

p.w. (1.23), (1.24),

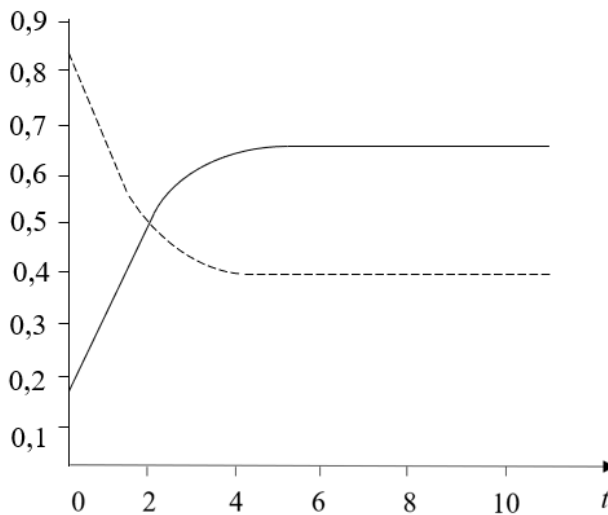
z przestrzenią produkcyjną (1.59), cenami (1.61) i warunkiem początkowym (1.62), otrzymujemy następujący (y^0, T, p) – optymalny proces wzrostu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y_1^*(t)$	167,705	251,167	307,496	357,958	411,484	471,526	539,905	618,077	707,533	809,927
$y_2^*(t)$	167,185	167,315	185,200	210,228	240,147	274,755	314,475	359,972	412,062	471,692

Źródło: obliczenia własne.

$$\text{Zbieżność struktury produkcji } s^*(t) = (s_1^*(t), s_2^*(t)) = \left(\frac{y_1^*(t)}{\|y^*(t)\|}, \frac{y_2^*(t)}{\|y^*(t)\|} \right)$$

w procesie optymalnym do struktury produkcji na magistrali $\bar{s}$ (zob. (1.60)) ilustruje rysunek 1.6.



Rysunek 1.6. Ilustracja „efektu magistrali” (po współrzędnych) w gospodarce Gale’a z dwoma towarami, przestrzenią produkcyjną (1.59), cenami (1.61) i kryterium maksymalizacji łącznej wartości produkcji wytworzonej w całym horyzoncie $T = \{0, 1, \dots, 10\}$

Zauważmy, że chociaż w przykładzie miarą jakości procesów wzrostu jest łączna wartość produkcji wytworzonej w całym horyzoncie T (a nie w jego ostatnim okresie), to przebieg optymalnej trajektorii $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ jest zgodny z brzmieniem ‘silnego’ twierdzenia o magistrali (twierdzenie 1.11), w którym rolę kryterium wzrostu gra wartość produkcji wytworzonej w końcowym okresie t_1 horyzontu T .

1.9. Optymalne procesy wzrostu z funkcją użyteczności ogólnej postaci

Miarą jakości procesów wzrostu (trajektorii produkcji) w punktach 1.7, 1.8 była wartość towarów (wektorów produkcji) wytworzonych w gospodarce w ostatnim okresie t_1 ustalonego horyzontu czasu $T = \{0, 1, \dots, t_1\}$ (zadanie (1.27)) bądź w całym horyzoncie T (zadanie (1.47)). Są to zaledwie najprostsze (liniowe) przykłady miar oceny jakości stanów gospodarki znanych w ekonomii matematycznej. Ich najdalej idącym uogólnieniem na gruncie teorii preferencji jest ciągła, wklęsła, rosnąca oraz (w szczególności) dodatnio jednorodna stopnia 1 funkcja użyteczności. Celem tego punktu jest wyjaśnienie, czy takie uogólnienie kryteriów wzrostu, tj. zastąpienie w zadaniach (1.27), (1.47) kryterium wartości produkcji przez kryterium użyteczności produkcji (wytworzonej bądź w ostatnim okresie horyzontu T , bądź w całym horyzoncie) wpłynie na magistralne własności ich rozwiązań.

Zakładamy, podobnie jak dotąd, że mamy n towarów. Przez $u: R_+^n \rightarrow R_+^1$ oznaczamy standardową funkcję użyteczności towarów wytwarzanych w gospodarce, spełniającą następujące warunki:

(U1) Funkcja użyteczności $u(\cdot)$ jest ciągła, wklęsła, rosnąca i dodatnio jednorodna stopnia 1.

(U2) $\exists a > 0 \forall y \geq 0 (u(y) \leq a \langle \bar{p}, y \rangle)$.

W myśl (U2) funkcję użyteczności aproksymuje z góry forma liniowa $f(\cdot) = a \langle \bar{p}, \cdot \rangle$ z wektorem współczynników $a\bar{p}$, gdzie a jest pewną liczbą dodatnią ($\bar{p}$ jest wektorem cen w optymalnym stanie równowagi von Neumanna).

Interesuje nas następujący problem maksymalizacji użyteczności produkcji wytworzonej w ostatnim okresie horyzontu T w stacjonarnej gospodarce Gale’a:

$$\max u(y(t_1))$$

$$\text{p.w. (1.23), (1.24)}$$

równoważny z zadaniem:

$$\max_{y \in R_{y^0, t_1}} u(y), \quad (1.63)$$

gdzie R_{y^0, t_1} jest zbiorem stanów (wektorów produkcji) możliwych do osiągnięcia (wytworzenia) w okresie t_1 przez gospodarkę startującą w okresie $t = 0$ z początkowego wektora produkcji y^0 . Jest to uogólnienie zadania (1.27), po zastąpieniu formy liniowej $\langle \bar{p}, \cdot \rangle$ przez funkcję użyteczności $u(\cdot)$.

W gospodarce Gale’a spełniającej warunki **(G1)-(G7)** z funkcją użyteczności **(U1)** zadanie to ma rozwiązanie. Istotnie, zgodnie z lematem 1.2 zbiór R_{y^0, t_1} jest zwarty oraz funkcja użyteczności jest ciągła w myśl **(U1)**, więc istnienie rozwiązania zadania (1.63) jest wnioskiem z twierdzenia Weierstrassa o osiąganiu maksimum przez funkcję ciągłą na zbiorze zwartym. Rozwiązanie $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ zadania (1.63) nazywamy (y^0, t_1, u) – *optymalnym procesem wzrostu* w stacjonarnej gospodarce Gale’a z pojedynczą magistralą.

Poniższe twierdzenie jest odpowiednikiem ‘słabego’ twierdzenia 1.10 o magistrali z punktu 1.7.

■ **Twierdzenie 1.16.** Załóżmy, że zachodzą warunki **(G1)-(G9)**, **(U1)-(U3)** oraz istnieje taki $(y^0, \check{t})$ – dopuszczalny proces wzrostu $\{\check{y}(t)\}_{t=0}^{\check{t}}$, $\check{t} < t_1$, że $\check{y}(\check{t}) \in N$. Wówczas dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka niezależna od długości horyzontu $T = \{0, 1, \dots, t_1\}$ liczba naturalna k_ε , że liczba okresów czasu, w których (y^0, t_1, u) – optymalny proces $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ spełnia warunek (1.28) nie przekracza k_ε .

Dowód. Zakładając, że w okresach $\tau_1, \dots, \tau_k < t_1$ zachodzi warunek (1.28) i postępując analogicznie jak przy dowodzie twierdzenia 1.10, dochodzimy do nierówności:

$$\langle \bar{p}, y^*(t_1) \rangle \leq \alpha_M^{t_1-k} (\alpha_M - \delta_\varepsilon)^k \langle \bar{p}, y^0 \rangle$$

(zob. (1.31)). Stąd, wobec **(U2)** dostajemy ograniczenie górne funkcji użyteczności:

$$u(y^*(t_1)) \leq a \langle \bar{p}, y^*(t_1) \rangle \leq a \alpha_M^{t_1-k} (\alpha_M - \delta_\varepsilon)^k \langle \bar{p}, y^0 \rangle, \quad (1.64)$$

gdzie a jest pewną liczbą dodatnią.

Przy przyjętych założeniach, podobnie jak w twierdzeniu 1.10, ciąg wektorów produkcji $\{\tilde{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$:

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} \check{y}(t), & t = 0, 1, \dots, \check{t}, \\ \sigma \alpha_M^{t-\check{t}} \bar{s}, & t = \check{t} + 1, \dots, t_1, \end{cases}$$

tworzy (y^0, t_1) – dopuszczalny proces wzrostu. Wówczas, w świetle definicji (y^0, t_1, u) – optymalnego procesu wzrostu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$, zważywszy na własności **(U1)**, **(U3)** funkcji użyteczności dochodzimy do następującego ograniczenia dolnego funkcji użyteczności:

$$u(y^*(t)) \geq u(\tilde{y}(t)) = u(\sigma \alpha_M^{t-\check{t}} \bar{s}) = \sigma \alpha_M^{t_1-\check{t}} u(\bar{s}) > 0. \quad (1.65)$$

Z (1.64), (1.65) otrzymujemy nierówność:

$$0 < \sigma \alpha_M^{t_1-\check{t}} u(\bar{s}) \leq a \alpha_M^{t_1-k} (\alpha_M - \delta_\varepsilon)^k \langle \bar{p}, y^0 \rangle,$$

co prowadzi do oszacowania (1.33) liczby k , z tym że obecnie $A = \frac{a \alpha_M^{\check{t}} \langle \bar{p}, y^0 \rangle}{\sigma u(\bar{s})} > 0$.

Podobnie jak w twierdzeniu 1.10, w charakterze liczby k_ε wystarczy wziąć najmniejszą liczbę naturalną większą od $\max \{0, B\}$, gdzie $B = \frac{\ln A}{\ln \alpha_M - \ln(\alpha_M - \delta_\varepsilon)}$. ■

Aktualne pozostają uwagi 1-4 do twierdzenia 1.10. W kolejnych dwóch twierdzeniach o magistrali w gospodarce Gale’a z funkcją użyteczności ogólnej postaci obok (U1), (U2) obowiązuje dodatkowo następujący warunek:

$$(U3) \quad u(\bar{s}) = a\langle \bar{p}, \bar{s} \rangle > 0,$$

lub inaczej (równoważnie):

$$\forall y \in N(u(y) = a\langle \bar{p}, y \rangle > 0).$$

Zgodnie z tym warunkiem hiperpłaszczyzna $y_{n+1} = a\langle \bar{p}, \cdot \rangle$ aproksymująca funkcję użyteczności z góry jest styczna do jej wykresu wzdłuż magistrali N .

Odpowiednikiem ‘silnego’ twierdzenia o magistrali (twierdzenia 1.11) jest następujące twierdzenie.

■ **Twierdzenie 1.17.** Jeżeli w gospodarce Gale’a spełniającej warunki (G1)-(G9), (G11) z funkcją użyteczności (U1)-(U3) istnieje taki $(y^0, \check{t})$ – dopuszczalny proces wzrostu $\{\check{y}(t)\}_{t=0}^{\check{t}}$, $\check{t} < t_1$, że $\check{y}(\check{t}) \in N$, to $\forall \varepsilon > 0$ istnieje taka liczba naturalna k_ε , niezależna od długości horyzontu $T = \{0, 1, \dots, t_1\}$, że jeżeli $t_1 > 2k_\varepsilon$, to każdy (y^0, t_1, u) – optymalny proces wzrostu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ spełnia warunek:

$$\forall t \in \{k_\varepsilon, k_\varepsilon + 1, \dots, t_1 - k_\varepsilon\} (d(y^*(t), N) < \varepsilon),$$

gdzie

$$d(y, N) = \left\| \frac{y}{\|y\|} - \bar{s} \right\|.$$

Dowód. Zastępując $(y^0, t_1, \bar{p})$ – optymalny proces wzrostu (rozwiązanie zadania (1.27)) (y^0, t_1, u) – optymalnym procesem (rozwiązaniem zadania (1.63)) i powtarzając dosłownie dowód twierdzenia 1.11, po podstawieniu w warunkach (1.40), (1.41) $u(y^*(t))$ zamiast $\langle \bar{p}, y^*(t) \rangle$ oraz $u(\bar{s})$ zamiast $\langle \bar{p}, \bar{s} \rangle$, zważywszy na (U1)-(U3), dochodzimy do nierówności:

$$u(y^*(t_1)) \geq \rho \sigma^* \alpha_M^{t_1 - \tau} u(\bar{s}) > 0$$

oraz:

$$u(y^*(t_1)) \leq a(\bar{p}, y^*(t_1)) \leq a(\alpha_M - \delta(\varepsilon'))^{t_1 - \tau_2} \alpha_M^{\tau_2 - \tau_1 - k'} (\alpha_M - \delta(\varepsilon))^{k'} \langle \bar{p}, y^*(\tau_1) \rangle.$$

Stąd, zważywszy na **(U3)**, dochodzimy do warunku (1.42). Dalej dowód przebiega analogicznie jak w twierdzeniu 1.11. ■

Aktualne są uwagi 1-4 do twierdzenia 1.10. Równie prosta jest następująca implementacja ‘bardzo silnego’ twierdzenia o magistrali z punktu 1.7.

■ **Twierdzenie 1.18.** Niech przy założeniach **(G1)-(G9)**, **(U1)-(U3)** sam (y^0, t_1, u) – optymalny proces wzrostu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ w pewnym okresie czasu $\check{t} < t_1$ prowadzi do magistrali:

$$y^*(\check{t}) \in N.$$

Wówczas:

$$\forall t \in \{\check{t} + 1, \dots, t_1\} (y^*(t) \in N).$$

Dowód. Zakładając, że istnieje choćby jeden okres czasu $\tau \in \{\check{t} + 1, \dots, t_1\}$, w którym $y^*(\tau) \notin N$, i powtarzając dowód twierdzenia 1.12, dochodzimy do konkluzji, że (y^0, t_1, u) – optymalny proces $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$, rozwiązanie zadania (1.63) spełnia obecnie (wobec **(U3)**) warunki:

$$u(y^*(t_1)) \geq \sigma \alpha_M^{t_1 - \check{t}} u(\bar{s}) > 0,$$

$$u(y^*(t_1)) \leq a(\bar{p}, y^*(t_1)) \leq \sigma \alpha_M^{t_1 - \check{t} - 1} (\alpha_M - \delta_\varepsilon) u(\bar{s}),$$

z których wynika, że $\delta_\varepsilon \leq 0$, co jest sprzeczne z lematem 1.1 i tym samym zamyka dowód. ■

Aktualna jest uwaga 1 do twierdzenia 1.10. Twierdzenia 1.16-1.18 pokazują, że przejście od liniowego kryterium oceny jakości procesów wzrostu w zadaniu (1.27) do zgodnej z aksjomatyką teorii preferencji funkcji użyteczności w zadaniu

(1.63) nie pozbawia gospodarki magistralnych własności. W świetle udowodnionych twierdzeń, w długich okresach czasu każdy (y^0, t_1, u) – optymalny proces wzrostu, rozwiązanie zadania (1.63) z ciągłą, wklęsłą i rosnącą funkcją użyteczności określoną na wektorach produkcji w ostatnim okresie t_1 horyzontu T „prawie zawsze” przebiega w dowolnie bliskim otoczeniu (lub po) magistrali N . Funkcja użyteczności jest swoistą miarą racjonalności gospodarczej, zatem w myśl tych twierdzeń wszystkie optymalne procesy wzrostu w prawidłowo funkcjonującej gospodarce „prawie zawsze” (poza skończoną liczbą okresów czasu, niezależnie od długości horyzontu T) powinny przebiegać możliwie blisko magistrali. Powinna je cechować swoista magistralna stabilność.

Co więcej, okazuje się, że magistralna stabilność jest właściwością procesów wzrostu optymalnych nie tylko w świetle kryterium maksymalnej użyteczności produkcji wytworzonej w ostatnim okresie t_1 horyzontu T (jak w zadaniu (1.63)), ale także procesów optymalnych w świetle kryterium maksymalizacji zdyskontowanej użyteczności produkcji wytworzonej w gospodarce w całym horyzoncie czasu T . Aby to udowodnić, zajmiemy się rozwiązaniem następującego zadania:

$$\max \sum_{t=0}^{t_1} (1 - \gamma)^t u(y(t)) \quad (1.66)$$

p.w. (1.23), (1.24).

Jest to odpowiednik zadania (1.47), po zastąpieniu w kryterium wzrostu (liniowej) funkcji $\langle \bar{p}, \cdot \rangle$ przez nieliniową funkcję (zdyskontowanej) użyteczności $(1 - \gamma)^t u(\cdot)$ w okresie t , w której parametr $\gamma \in (0,1)$ jest stopą dyskonta (preferencji czasowej) użyteczności produkcji. Zadanie to ma rozwiązanie $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ przy tych samych założeniach, przy których istnieje rozwiązanie zadania (1.47), które podobnie nazywamy (y^0, T, u) – ***optymalnym procesem wzrostu*** (trajektorią produkcji).

Dowód następującego ‘słabego’ twierdzenia o magistrali jest wzorowany na dowodzie twierdzenia 1.14.

■ **Twierdzenie 1.19.** Niech w gospodarce Gale’a spełniającej warunki **(G1)-(G9)**, **(U1)-(U2)**:

- istnieje taki $(y^0, \check{t})$ – dopuszczalny proces $\{\check{y}(t)\}_{t=0}^{\check{t}}$, $\check{t} < t_1$, że $\check{y}(\check{t}) \in N$,
- zdyskontowane tempo wzrostu produkcji $(1 - \gamma)\alpha_M$ na magistrali N jest większe od 1.

Wówczas $\forall \varepsilon > 0$ istnieje taka niezależna od długości horyzontu T liczba naturalna k_ε , że liczba okresów czasu, w których (y^0, T, u) – optymalny proces wzrostu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ (rozwiązanie zadania (1.66)) spełnia warunek (1.28) nie przekracza k_ε .

Dowód. Przy dowodzie korzystamy z faktu, że zadanie (1.66) jest równoważne z zadaniem:

$$\begin{aligned} \max \sum_{t=1}^{t_1} (1 - \gamma)^t u(y(t)) \\ \text{p.w. (1.23)-(1.24).} \end{aligned} \quad (1.67)$$

Zgodnie z (1.11), (1.23):

$$\begin{aligned} \langle \bar{p}, y^*(1) \rangle &\leq \alpha_M \langle \bar{p}, y^0 \rangle, \\ \langle \bar{p}, y^*(2) \rangle &\leq \alpha_M \langle \bar{p}, y^*(1) \rangle \leq \alpha_M^2 \langle \bar{p}, y^0 \rangle, \\ &\dots\dots\dots \\ \langle \bar{p}, y^*(t_1) \rangle &\leq \alpha_M \langle \bar{p}, y^*(t_1 - 1) \rangle \leq \alpha_M^{t_1} \langle \bar{p}, y^0 \rangle. \end{aligned} \quad (1.68)$$

Założmy, że w okresach $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k < t_1$ zachodzi warunek (1.28). Wtedy, zgodnie z lematem 1.1:

$$\langle \bar{p}, y^*(t + 1) \rangle \leq (\alpha_M - \delta_\varepsilon) \langle \bar{p}, y^*(t) \rangle, \quad t = \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k. \quad (1.69)$$

Z **(U2)**, (1.68), (1.69) wynika następujący układ nierówności:

$$\begin{aligned} (1 - \gamma)u(y^*(1)) &\leq a(1 - \gamma)\langle \bar{p}, y^*(1) \rangle \leq a(1 - \gamma)\alpha_M \langle \bar{p}, y^0 \rangle, \\ (1 - \gamma)^2 u(y^*(2)) &\leq a(1 - \gamma)^2 \langle \bar{p}, y^*(2) \rangle \leq a(1 - \gamma)^2 \alpha_M^2 \langle \bar{p}, y^0 \rangle, \end{aligned}$$

.....

$$(1 - \gamma)^{t_1 - k} u(y^*(t_1 - k)) \leq a(1 - \gamma)^{t_1 - k} \langle \bar{p}, y^*(t_1 - k) \rangle \\ \leq a(1 - \gamma)^{t_1 - k} \alpha_M^{t_1 - k} \langle \bar{p}, y^0 \rangle$$

$$(1 - \gamma)^{t_1 - k + 1} u(y^*(t_1 - k + 1)) \leq a(1 - \gamma)^{t_1 - k + 1} \langle \bar{p}, y^*(t_1 - k + 1) \rangle \leq \\ \leq a(1 - \gamma)^{t_1 - k + 1} \alpha_M^{t_1 - k} (\alpha_M - \delta_\varepsilon) \langle \bar{p}, y^0 \rangle,$$

.....

$$(1 - \gamma)^{t_1} u(y^*(t_1)) \leq a(1 - \gamma)^{t_1} \langle \bar{p}, y^*(t_1) \rangle \leq a(1 - \gamma)^{t_1} \alpha_M^{t_1 - k} (\alpha_M - \delta_\varepsilon)^k \langle \bar{p}, y^0 \rangle,$$

skąd otrzymujemy:

$$\sum_{t=1}^{t_1} (1 - \gamma)^t u(y^*(t)) \leq \\ \leq a \langle \bar{p}, y^0 \rangle \left[\sum_{t=1}^{t_1 - k} (1 - \gamma)^t \alpha_M^t + (1 - \gamma)^{t_1 - k} \alpha_M^{t_1 - k} \sum_{\tau=1}^k (1 - \gamma)^\tau (\alpha_M - \delta_\varepsilon)^\tau \right]. \quad (1.70)$$

Z założenia istnieje $(y^0, \check{t})$ – dopuszczalny proces $\{\check{y}(t)\}_{t=0}^{\check{t}}$ prowadzący w okresie $\check{t} < t_1$ do magistrali $N = \{\lambda \bar{s} | \lambda > 0\}$, czyli istnieje (y^0, t_1) – dopuszczalny proces $\{\tilde{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$:

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} \check{y}(t), & t = 0, 1, \dots, \check{t}, \\ \sigma \alpha_M^{t - \check{t}} \bar{s}, & t = \check{t} + 1, \dots, t_1 \end{cases}$$

($\sigma = \|\check{y}(\check{t})\| > 0$), a wtedy:

$$\sum_{t=1}^{t_1} (1 - \gamma)^t u(y^*(t)) \geq \sum_{t=1}^{t_1} (1 - \gamma)^t u(\tilde{y}(t)) \geq \sigma \sum_{t=\check{t}+1}^{t_1} (1 - \gamma)^{t - \check{t}} \alpha_M^{t - \check{t}} u(\check{s}) = \\ = \sigma u(\check{s}) \sum_{\tau=1}^{t_1 - \check{t}} (1 - \gamma)^\tau \alpha_M^\tau > 0. \quad (1.71)$$

Z (1.70), (1.71) otrzymujemy nierówność:

$$a \langle \bar{p}, y^0 \rangle \left[\sum_{\tau=1}^{t_1 - k} (1 - \gamma)^\tau \alpha_M^\tau + (1 - \gamma)^{t_1 - k} \alpha_M^{t_1 - k} \sum_{\tau=1}^k (1 - \gamma)^\tau (\alpha_M - \delta_\varepsilon)^\tau \right] \geq$$

$$\geq \sigma u(\check{s}) \sum_{\tau=1}^{t_1-\check{t}} (1-\gamma)^\tau \alpha_M^\tau > 0,$$

czyli:

$$\begin{aligned} \sum_{\tau=1}^{t_1-k} (1-\gamma)^\tau \alpha_M^\tau + (1-\gamma)^{t_1-k} \alpha_M^{t_1-k} \sum_{\tau=1}^k (1-\gamma)^\tau (\alpha_M - \delta_\varepsilon)^\tau &\geq \\ &\geq \frac{\sigma u(\check{s})}{a(\bar{p}, y^0)} \sum_{\tau=1}^{t_1-\check{t}} (1-\gamma)^\tau \alpha_M^\tau > 0 \end{aligned}$$

lub inaczej:

$$\begin{aligned} (1-\gamma) \alpha_M \frac{(1-\gamma)^{t_1-k} \alpha_M^{t_1-k-1}}{(1-\gamma) \alpha_M - 1} + (1-\gamma)^{t_1-k+1} \alpha_M^{t_1-k} (\alpha_M - \delta_\varepsilon) \frac{(1-\gamma)^k (\alpha_M - \delta_\varepsilon)^{k-1}}{(1-\gamma)(\alpha_M - \delta_\varepsilon) - 1} &\geq \\ &\geq \frac{\sigma u(\check{s})}{a(\bar{p}, y^0)} (1-\gamma) \alpha_M \frac{(1-\gamma)^{t_1-\check{t}} \alpha_M^{t_1-\check{t}-1}}{(1-\gamma) \alpha_M - 1} > 0. \end{aligned}$$

Biorąc taką dostatecznie małą liczbę $\delta_\varepsilon \in (0, \alpha_M)$, aby $(1-\gamma)(\alpha_M - \delta_\varepsilon) > 1$, po przekształceniach dochodzimy do warunku:

$$\forall t_1 < +\infty \forall k < t_1 \left(A(t_1, k) + B(t_1, k) \geq C = \frac{\sigma u(\check{s})}{a(\bar{p}, y^0)} > 0 \right), \quad (1.72)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} A(t_1, k) &= \frac{(1-\gamma)^{t_1-k} \alpha_M^{t_1-k-1}}{(1-\gamma)^{t_1-\check{t}} \alpha_M^{t_1-\check{t}-1}}, \\ B(t_1, k) &= \frac{(1-\gamma)^{t_1-k+1} \alpha_M^{t_1-k} (\alpha_M - \delta_\varepsilon) [(1-\gamma)^k (\alpha_M - \delta_\varepsilon)^{k-1}] [(1-\gamma) \alpha_M - 1]}{[(1-\gamma)^{t_1-\check{t}} \alpha_M^{t_1-\check{t}-1}] [(1-\gamma)(\alpha_M - \delta_\varepsilon) - 1]}. \end{aligned}$$

Przy $k \rightarrow +\infty$ ($t_1 > k$):

$$A(t_1, k) \rightarrow 0 \text{ oraz } B(t_1, k) \rightarrow 0 +,$$

co jest sprzeczne z (1.72). Istnieje więc taka liczba naturalna k_ε (niezależna od t_1), że liczba okresów, w których zachodzi warunek (1.28), nie przekracza k_ε . ■

Aktualne są uwagi 1-4 do twierdzenia 1.10. W świetle udowodnionego twierdzenia również w gospodarce Gale'a z kryterium maksymalizacji zdyskontowanej użyteczności produkcji wytworzonej w całym horyzoncie czasu T obserwujemy ‘słaby’ efekt magistrali, w myśl którego struktura produkcji w każdym (y^0, T, u) –

optymalnym procesie (rozwiązaniu zadania (1.67)) niezależnie od długości horyzontu T „prawie zawsze” (poza skończoną liczbą okresów niezależną od długości horyzontu T) różni się dowolnie mało od struktury produkcji na magistrali, na której gospodarka osiąga najwyższe tempo wzrostu.

O szczególnej sytuacji, gdy (y^0, T, u) – optymalny proces $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ w pewnym okresie $\check{t} < t_1$ prowadzi do magistrali, mówi twierdzenie 1.20 (odpowiednik twierdzenia 1.15).

■ **Twierdzenie 1.20.** Jeżeli zachodzą warunki **(G1)-(G9)**, **(U1)-(U3)** oraz (y^0, T, u) – optymalny proces $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ w okresie $\check{t} < t_1$ spełnia warunek:

$$y^*(\check{t}) \in N$$

(prowadzi do magistrali N), to:

$$\forall t \in \{\check{t} + 1, \dots, t_1\} (y^*(t) \in N).$$

Dowód. Jeżeli trajektoria $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ dociera w okresie $\check{t} < t_1$ do magistrali, to (y^0, t_1) – dopuszczalny jest proces $\{\tilde{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$ następującej postaci:

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} y^*(t), & t = 0, 1, \dots, \check{t}, \\ \sigma \alpha_M^{t-\check{t}} \bar{s}, & t = \check{t} + 1, \dots, t_1, \end{cases}$$

$\sigma = \|y^*(\check{t})\| > 0$. Dla $t = 0, 1, \dots, \check{t}$ mamy $\tilde{y}(t) = y^*(t)$, co prowadzi do następującego dolnego ograniczenia wartości funkcji użyteczności:

$$\sum_{t=\check{t}}^{t_1} (1-\gamma)^t u(y^*(t)) \geq \sum_{t=\check{t}}^{t_1} (1-\gamma)^t u(\tilde{y}(t)) = \sigma u(\bar{s}) \sum_{t=\check{t}}^{t_1} (1-\gamma)^t \alpha_M^{t-\check{t}} > 0. \quad (1.73)$$

Z drugiej strony, zważywszy na (1.11), (1.23), mamy:

$$\begin{aligned} \langle \bar{p}, y^*(\check{t}) \rangle &= \sigma \langle \bar{p}, \bar{s} \rangle, \\ \langle \bar{p}, y^*(\check{t} + 1) \rangle &\leq \sigma \alpha_M \langle \bar{p}, \bar{s} \rangle, \end{aligned} \quad (1.74)$$

.....

$$\langle \bar{p}, y^*(t_1) \rangle \leq \sigma \alpha_M^{t_1 - \check{t}} \langle \bar{p}, \bar{s} \rangle.$$

Założmy, że w pewnym okresie czasu $\tau \in \{\check{t} + 1, \dots, t_1 - 1\}$:

$$y^*(\tau) \notin N, \quad (1.75)$$

czyli $\exists \varepsilon > 0 (d(y^*(\tau), N) \geq \varepsilon)$. Wówczas, zgodnie z lematem 1.1, istnieje taka liczba $\delta_\varepsilon \in (0, \alpha_M)$, że:

$$\langle \bar{p}, y^*(\tau + 1) \rangle \leq (\alpha_M - \delta_\varepsilon) \langle \bar{p}, y^*(\tau) \rangle. \quad (1.76)$$

Z (1.74), (1.76), wobec **(U2)**, **(U3)**, dostajemy układ:

$$(1 - \gamma)^{\check{t}} u(y^*(\check{t})) \leq a (1 - \gamma)^{\check{t}} \langle \bar{p}, y^*(\check{t}) \rangle = \sigma a (1 - \gamma)^{\check{t}} \langle \bar{p}, \bar{s} \rangle = \sigma (1 - \gamma)^{\check{t}} u(\bar{s}),$$

$$\begin{aligned} (1 - \gamma)^{\check{t}+1} u(y^*(\check{t} + 1)) &\leq a (1 - \gamma)^{\check{t}+1} \langle \bar{p}, y^*(\check{t} + 1) \rangle \leq \sigma a (1 - \gamma)^{\check{t}+1} \alpha_M \langle \bar{p}, \bar{s} \rangle = \\ &= \sigma (1 - \gamma)^{\check{t}+1} \alpha_M u(\bar{s}), \end{aligned}$$

.....

$$\begin{aligned} (1 - \gamma)^\tau u(y^*(\tau)) &\leq a (1 - \gamma)^\tau \langle \bar{p}, y^*(\tau) \rangle \leq \sigma a (1 - \gamma)^\tau \alpha_M^{\tau - \check{t}} \langle \bar{p}, \bar{s} \rangle = \\ &= \sigma (1 - \gamma)^\tau \alpha_M^{\tau - \check{t}} u(\bar{s}), \end{aligned}$$

$$(1 - \gamma)^{\tau+1} u(y^*(\tau + 1)) \leq a (1 - \gamma)^{\tau+1} \langle \bar{p}, y^*(\tau + 1) \rangle \leq$$

$$\leq \sigma a (1 - \gamma)^{\tau+1} \alpha_M^{\tau - \check{t}} (\alpha_M - \delta_\varepsilon) \langle \bar{p}, \bar{s} \rangle = \sigma (1 - \gamma)^{\tau+1} \alpha_M^{\tau - \check{t}} (\alpha_M - \delta_\varepsilon) u(\bar{s}),$$

.....

$$(1 - \gamma)^{t_1} u(y^*(t_1)) \leq a (1 - \gamma)^{t_1} \langle \bar{p}, y^*(t_1) \rangle \leq \sigma a (1 - \gamma)^{t_1} \alpha_M^{t_1 - \check{t} - 1} (\alpha_M - \delta_\varepsilon) \langle \bar{p}, \bar{s} \rangle =$$

$$= \sigma (1 - \gamma)^{t_1} \alpha_M^{t_1 - \check{t} - 1} (\alpha_M - \delta_\varepsilon) u(\bar{s}),$$

który prowadzi do górnego ograniczenia wartości funkcji użyteczności:

$$\begin{aligned} \sum_{t=\check{t}}^{t_1} (1 - \gamma)^t u(y^*(t)) &\leq \\ &\leq \sigma u(\bar{s}) [\sum_{t=\check{t}}^{t_1} (1 - \gamma)^t \alpha_M^{t - \check{t}} - \delta_\varepsilon \sum_{t=\tau}^{t_1 - 1} (1 - \gamma)^{t+1} \alpha_M^{t - \check{t}}]. \end{aligned} \quad (1.77)$$

Gdy warunek (1.75) zachodzi dla $\tau = t_1$, to zgodnie z lematem 1.1:

$$\langle \bar{p}, y^*(t_1) \rangle \leq (\alpha_M - \delta_\varepsilon) \langle \bar{p}, y^*(t_1 - 1) \rangle \quad (1.78)$$

i rozumując jak wyżej, dochodzimy do warunku:

$$\sum_{t=\bar{t}}^{t_1} (1-\gamma)^t u(y^*(t)) \leq \sigma u(\bar{s}) \left[\sum_{t=\bar{t}}^{t_1} (1-\gamma)^t \alpha_M^{t-\bar{t}} - \delta_\varepsilon (1-\gamma)^{t_1} \alpha_M^{t_1-\bar{t}-1} \right]. \quad (1.79)$$

Z (1.73), (1.77) dostajemy nierówność:

$$\sigma u(\bar{s}) \left[\sum_{t=\bar{t}}^{t_1} (1-\gamma)^t \alpha_M^{t-\bar{t}} - \delta_\varepsilon \sum_{t=\tau}^{t_1-1} (1-\gamma)^{t+1} \alpha_M^{t-\bar{t}} \right] \geq \sigma u(\bar{s}) \sum_{t=\bar{t}}^{t_1} (1-\gamma)^t \alpha_M^{t-\bar{t}} > 0.$$

Podobnie z (1.73), (1.79) wnika, że:

$$\sigma u(\bar{s}) \left[\sum_{t=\bar{t}}^{t_1} (1-\gamma)^t \alpha_M^{t-\bar{t}} - \delta_\varepsilon (1-\gamma)^{t_1} \alpha_M^{t_1-\bar{t}-1} \right] \geq \sigma u(\bar{s}) \sum_{t=\bar{t}}^{t_1} (1-\gamma)^t \alpha_M^{t-\bar{t}} > 0.$$

Oba warunki zachodzą tylko gdy $\delta_\varepsilon \leq 0$. Otrzymana sprzeczność zamyka dowód. ■

Przy dowodzie nie wymaga się, aby zdyskontowane optymalne tempo wzrostu było większe od 1. Aktualna pozostaje uwaga 1 do twierdzenia 1.10.

1.10. Minimalnoczasowy problem wzrostu

W tym punkcie odchodzimy od funkcji użyteczności jako miernika jakości procesów wzrostu w gospodarce. Kryterium oceny procesów wzrostu jest czas potrzebny gospodarce startującej z określonego stanu początkowego (wyjściowego poziomu produkcji) na jej dojście do postulowanego/pożądanego stanu końcowego (docelowego poziomu produkcji). Interesuje nas więc minimalnoczasowy problem wzrostu. W formułowanych dalej twierdzeniach dowodzimy, że mimo tak zasadniczej zmiany kryterium wzrostu optymalne procesy nadal cechuje ich charakterystyczna, szczególnie magistralna stabilność.

W celu uproszczenia wywodów dotychczasowy warunek (G7) zastąpimy warunkiem:

$$(G7') \quad \alpha(\bar{x}, \bar{y}) = \alpha_M \Rightarrow \bar{y} > 0 \text{ \& } \alpha_M > 1.$$

Nierówność $\bar{y} > 0$ oznacza, że w optymalnym procesie produkcji $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z$ wytwarzane są wszystkie towary (warunek regularności gospodarki, zob. pkt 1.3). Jeżeli zachodzi ten warunek, wtedy wektor $\bar{s} = \frac{\bar{y}}{\|\bar{y}\|}$ struktury produkcji na magistrali $N = \{\lambda \bar{s} | \lambda > 0\}$ jest dodatni.

Co więcej, gdy zachodzą warunki (G1)-(G6) oraz (G7'), wtedy w gospodarce Gale'a istnieje optymalny stan równowagi von Neumanna niezależnie od warunku (G8) (zob. pkt 1.3, twierdzenie 1.5 i komentarz do niego). Natomiast zgodnie z warunkiem $\alpha_M > 1$ gospodarka może wytwarzać więcej towarów, niż ich zużywa. Mówimy wówczas, że gospodarka jest **produktywna**.

Ponadto zakładamy, że początkowy wektor produkcji y^0 jest dodatni. Pozostałe warunki nie zmieniają się.

We wszystkich procesach wzrostu, z którymi mieliśmy do czynienia w punktach 1.7-1.9:

- horyzont czasu T (w szczególności jego okres końcowy t_1) był ustalony,
- nie postulowaliśmy żadnych dodatkowych warunków ograniczających stany gospodarki, np. w postaci pożądanej docelowej wartości (w wyrażeniu pieniężnym) lub wielkości (w jednostkach fizycznych) produkcji w końcowym okresie horyzontu T .

Obecnie problem zasadniczo zmodyfikujemy, zakładając, że ustalony jest nie tylko początkowy wektor produkcji y^0 (stan początkowy gospodarki), ale określona jest także pożądana docelowa wartość produkcji V^1 (mierzona w cenach równowagi von Neumanna), którą gospodarka powinna osiągnąć w możliwie najkrótszym czasie. Interesuje nas więc rozwiązanie następującego zadania minimalnocyfrowego:

znaleźć:

$$\min t_1 \tag{1.80}$$

przy ograniczeniach:

$$(y(t), y(t+1)) \in Z, \quad t = 0, 1, \dots, t_1 - 1,$$

$$y(0) = y^0 > 0, \quad (1.81)$$

$$y(t_1) \in Y^1,$$

gdzie:

$$Y^1 = \{y \in R_+^n \mid \langle \bar{p}, y \rangle \geq V^1 > \langle \bar{p}, y^0 \rangle\}. \quad (1.82)$$

Początkowy wektor produkcji y^0 oraz zbiór docelowych stanów Y^1 (wektorów produkcji o wartości nie mniejszej niż V^1) są ustalone. Zmiennymi decyzyjnymi w zadaniu (1.80)-(1.81) są wektory produkcji $y(1), y(2), \dots, y(t_1)$ oraz czas t_1 (zmienna staje się zatem także długość horyzontu T).

O każdym ciągu wektorów $\{y(t)\}_{t=0}^{t_1}$, $t_1 < +\infty$ spełniającym układ (1.81) mówimy, że opisuje/tworzy (y^0, Y^1, t_1) – **dopuszczalny proces wzrostu**. Dopuszczalny proces wzrostu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1^*}$ będący rozwiązaniem zadania (1.80)-(1.81) nazywamy (y^0, Y^1, t_1^*) – **optymalnym procesem wzrostu**. W (y^0, Y^1, t_1^*) – optymalnym procesie wzrostu gospodarka w najkrótszym czasie osiąga poziom produkcji $y^*(t_1^*)$ o wartości nie mniejszej niż V^1 .

■ **Lemat 1.5.** Przy założeniach (G1)-(G6), (G7'), (G8), (G9):

(i) istnieją (y^0, Y^1, t_1) – dopuszczalne procesy wzrostu,

(2i) zadanie (1.80)-(1.81) ma rozwiązanie.

Dowód. (i) Przy przyjętych założeniach, wobec tego, że $y^0 > 0$, $V^1 > \langle \bar{p}, y^0 \rangle$, $\alpha_M > 1$ oraz wektor $\bar{s}$ struktury produkcji na magistrali $N = \{\lambda \bar{s} \mid \lambda > 0\}$ jest dodatni, istnieje (y^0, Y^1, t_1) – dopuszczalny proces wzrostu $\{\tilde{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$ postaci:

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} y^0, & t = 0, \\ \sigma \alpha_M^t \bar{s}, & t = 1, \dots, t_1, \end{cases} \quad (1.83)$$

w którym $\sigma = \min_i \frac{y_i^0}{\bar{s}_i} > 0$ oraz t_1 jest najmniejszą liczbą naturalną nie mniejszą od $\frac{\ln A}{\ln \alpha_M} > 0$, gdzie $A = \frac{V^1}{\sigma \langle \bar{p}, \bar{s} \rangle} > 1$. W procesie tym:

$$\tilde{y}(t_1) \in Y^1 \quad (1.84)$$

oraz $\tilde{y}(t_1 - 1) \notin Y^1$.

(2i) Niech, podobnie jak dotąd, $R_{y^0, t}$ będzie zbiorem wektorów produkcji możliwych do wytworzenia w okresie t przez gospodarkę startującą (w okresie początkowym $t = 0$) z poziomu produkcji $y(0) = y^0$:

$$R_{y^0, 0} = \{y^0\}, \dots, R_{y^0, t} = \{y \mid \exists x \in R_{y^0, t-1}\}, \quad t = 1, 2, \dots, t_1.$$

Zbiory $R_{y^0, t}$ są zwarte (oraz wypukłe, zob. pkt 1.6, lemat 1.2). Wektor $\tilde{y}(t_1)$ w (y^0, Y^1, t_1) – dopuszczalnym procesie (1.83) należy jednocześnie do R_{y^0, t_1} (z definicji) oraz do Y^1 (zgodnie z (1.84)), czyli:

$$\exists t_1 > 0 \quad (R_{y^0, t_1} \cap Y^1 \neq \emptyset).$$

Z drugiej strony:

$$\forall y \in Y^1 (\langle \bar{p}, y \rangle \geq V^1 > \langle \bar{p}, y^0 \rangle > 0),$$

więc $R_{y^0, 0} \cap Y^1 = \emptyset$. Istnieje zatem taka liczba naturalna $t_1^* \leq t_1$, że:

$$R_{y^0, t_1^*} \cap Y^1 \neq \emptyset \quad \& \quad R_{y^0, t_1^*-1} \cap Y^1 = \emptyset.$$

Liczba t_1^* jest jednocześnie najwcześniejszy okresem, w którym gospodarka osiąga docelowy zbiór Y^1 . Wobec tego, że $y^0 \notin Y^1$, jest to liczba dodatnia. ■

W lemacie warunki **(G8)**, **(G9)** (jednoznaczności magistrali N) można zastąpić warunkiem **(G10)**. O ‘słabym’ oraz ‘bardzo silnym’ efekcie magistrali w stacjonarnej gospodarce Gale’a z minimalnoczasowym kryterium wzrostu mówią twierdzenia 1.21, 1.22.

■ **Twierdzenie 1.21.** Załóżmy, że zachodzą warunki **(G1)-(G6)**, **(G7')**, **(G8)**, **(G9)**. Wtedy dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba naturalna k_ε , że liczba okresów czasu $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$, w których (y^0, Y^1, t_1^*) – optymalny proces wzrostu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1^*}$ (rozwiązanie zadania (1.80)-(1.81) ze zbiorem stanów docelowych (1.82)) spełnia warunek (1.28) nie przekracza k_ε . Liczba k_ε nie zależy od postulowanej docelowej wartości produkcji V^1 ani od t_1^* .

Dowód. Z (1.11) oraz definicji (y^0, Y^1, t_1^*) – optymalnego procesu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1^*}$ mamy:

$$\langle \bar{p}, y^*(t+1) \rangle \leq \alpha_M \langle \bar{p}, y^*(t) \rangle, \quad t = 0, 1, \dots, t_1^* - 1, \quad (1.85)$$

a stąd $\langle \bar{p}, y^*(t_1^*) \rangle \leq \alpha_M^{t_1^*} \langle \bar{p}, y^0 \rangle$. Jeżeli w okresach $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k < t_1^*$ zachodzi warunek (1.28), to zgodnie z lematem 1.1 istnieje taka liczba $\delta_\varepsilon \in (0, \alpha_M)$, że:

$$\langle \bar{p}, y^*(t+1) \rangle \leq (\alpha_M - \delta_\varepsilon) \langle \bar{p}, y^*(t) \rangle, \quad t = \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k. \quad (1.86)$$

Z (1.85), (1.86) dostajemy górne ograniczenie wartości produkcji wytworzonej w okresie t_1^* :

$$\langle \bar{p}, y^*(t_1^*) \rangle \leq \alpha_M^{t_1^*-k} (\alpha_M - \delta_\varepsilon)^k \langle \bar{p}, y^0 \rangle. \quad (1.87)$$

Zgodnie z lematem 1.5(i) istnieje (y^0, Y^1, t_1) – dopuszczalny proces wzrostu $\{\tilde{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$ postaci (1.83). W procesie tym wektor produkcji $\tilde{y}(t_1)$ w okresie $t_1 \geq t_1^*$ spełnia warunek (1.84), czyli $\langle \bar{p}, \tilde{y}(t_1) \rangle \geq V^1$. Jednocześnie t_1 jest najwcześniejszym okresem, w którym warunek ten zachodzi, a to oznacza, że $\tilde{y}(t_1 - 1) \notin Y^1$, czyli $\langle \bar{p}, \tilde{y}(t_1 - 1) \rangle < V^1$. Wówczas, wobec **(G5)**, istnieje również (y^0, Y^1, t_1) – dopuszczalny proces wzrostu $\{\tilde{\tilde{y}}(t)\}_{t=0}^{t_1}$:

$$\tilde{\tilde{y}}(t) = \begin{cases} y^0, & t = 0, \\ \sigma \alpha_M^t \bar{s}, & t = 1, \dots, t_1 - 1, \\ \sigma \alpha_M^{t_1-1} \bar{s} + y', & t = t_1, \end{cases} \quad (1.88)$$

w którym $\tilde{y}(t_1) = \tilde{y}(t_1 - 1) + y'$, gdzie y' jest wektorem spełniającym warunek $0 \leq y' \leq \sigma(\alpha_M - 1)\alpha_M^{t_1-1}\bar{s}$ (> 0) oraz:

$$\langle \bar{p}, y' \rangle = V^1 - \langle \bar{p}, \tilde{y}(t_1 - 1) \rangle > 0, \quad (1.89)$$

co daje następujące dolne ograniczenie wartości produkcji w okresie t_1^* :

$$\langle \bar{p}, y^*(t_1^*) \rangle \geq V^1 = \langle \bar{p}, \tilde{y}(t_1) \rangle = \langle \bar{p}, \tilde{y}(t_1 - 1) + y' \rangle = \sigma\alpha_M^{t_1-1}\langle \bar{p}, \bar{s} \rangle + \langle \bar{p}, y' \rangle > 0. \quad (1.90)$$

Z (1.87), (1.90) otrzymujemy warunek:

$$\alpha_M^{t_1^*-k}(\alpha_M - \delta_\varepsilon)^k \langle \bar{p}, y^0 \rangle \geq \sigma\alpha_M^{t_1-1}\langle \bar{p}, \bar{s} \rangle + \langle \bar{p}, y' \rangle > 0,$$

z którego (wobec tego, że $t_1 \geq t_1^*$, $\alpha_M > 1$ oraz $\langle \bar{p}, y' \rangle > 0$) wynika nierówność:

$$\left(\frac{\alpha_M}{\alpha_M - \delta_\varepsilon} \right)^k < \frac{\alpha_M \langle \bar{p}, y^0 \rangle}{\sigma \langle \bar{p}, \bar{s} \rangle}.$$

Pozwala to na oszacowanie liczby k :

$$k < B = \frac{\ln A}{\ln \alpha_M - \ln(\alpha_M - \delta_\varepsilon)},$$

gdzie $A = \frac{\alpha_M \langle \bar{p}, y^0 \rangle}{\sigma \langle \bar{p}, \bar{s} \rangle} > 1$, czyli $B > 0$. Jeżeli B jest liczbą naturalną, wtedy w celu zakończenia dowodu wystarczy przyjąć $k_\varepsilon = B$. Gdy B nie jest liczbą naturalną, w charakterze liczby k_ε , o której mowa w tezie twierdzenia, wystarczy wziąć najmniejszą liczbę naturalną większą od B . Liczba B , a zatem także liczba k_ε nie zależą od V^1 ani od t_1^* . ■

Warunek (1.89) zapewnia, że w (y^0, Y^1, t_1) – dopuszczalnym procesie wzrostu postaci (1.88) gospodarka w ostatnim okresie t_1 osiąga wartość produkcji $\langle \bar{p}, \tilde{y}(t_1) \rangle = V^1$.

Jeżeli $\forall t \in T \left(\tilde{y}(t) = \tilde{y}(t) \right)$ (czego nie można wykluczyć), wówczas $\langle \bar{p}, \tilde{y}(t_1) \rangle = V^1$, $y' = \sigma(\alpha_M - 1)\alpha_M^{t_1-1}\bar{s}$ oraz $\langle \bar{p}, y' \rangle = \sigma(\alpha_M - 1)\alpha_M^{t_1-1}\langle \bar{p}, \bar{s} \rangle > 0$. Aktualne pozostają ponadto uwagi 1-3 do twierdzenia 1.10.

■ **Twierdzenie 1.22.** Jeżeli przy założeniach twierdzenia 1.21 w pewnym okresie $\check{t} < t_1^*$ (y^0, Y^1, t_1^*) – optymalny proces $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1^*}$ prowadzi do magistrali:

$$y^*(\check{t}) \in N$$

oraz rozwiązanie zadania (1.80)-(1.81) jest jednoznaczne, to:

$$\forall t \in \{\check{t}, \check{t} + 1, \dots, t_1^*\} (y^*(t) \in N).$$

Dowód. Przy założeniach twierdzenia istnieje (y^0, Y^1, t_1) – dopuszczalny proces:

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} y^*(t), & t = 0, 1, \dots, \check{t}, \\ \alpha_M^{t-\check{t}} y^*(\check{t}), & t = \check{t} + 1, \dots, t_1 - 1, \\ \alpha_M^{t_1-\check{t}-1} y^*(\check{t}) + y', & t = t_1 \end{cases} \quad (1.91)$$

(por. 1.88), w którym:

- t_1 jest najmniejszą liczbą naturalną, nie mniejszą od $\check{t} + A$, gdzie $A = \frac{\ln V^1 - \ln \langle \bar{p}, y^*(\check{t}) \rangle}{\ln \alpha_M} > 0$,
- $0 \leq y' \leq (\alpha_M - 1) \alpha_M^{t_1-\check{t}-1} y^*(\check{t})$ (> 0),
- zachodzi warunek (1.89).

Wówczas:

$$\begin{aligned} \langle \bar{p}, y^*(t_1^*) \rangle &\geq V^1 = \langle \bar{p}, \tilde{y}(t_1) \rangle = \langle \bar{p}, \tilde{y}(t_1 - 1) + y' \rangle = \\ &= \alpha_M^{t_1-\check{t}-1} \langle \bar{p}, y^*(\check{t}) \rangle + \langle \bar{p}, y' \rangle > 0. \end{aligned} \quad (1.92)$$

Zgodnie z (1.11), (1.21) (y^0, Y^1, t_1^*) – optymalny proces $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1^*}$ spełnia w szczególności warunek:

$$\langle \bar{p}, y^*(t_1^*) \rangle \leq \alpha_M^{t_1^*-\check{t}} \langle \bar{p}, y^*(\check{t}) \rangle.$$

Jeżeli $y^*(\tau) \notin N$ w pewnym okresie $\tau \in \{\check{t} + 1, \dots, t_1^* - 1\}$ lub $y^*(t_1^*) \notin N$, wówczas w świetle lematu 1.1 istnieje taka liczba $\delta_\varepsilon \in (0, \alpha_M)$, że:

$$\langle \bar{p}, y^*(\tau + 1) \rangle \leq (\alpha_M - \delta_\varepsilon) \langle \bar{p}, y^*(\tau) \rangle,$$

co prowadzi do nierówności:

$$\langle \bar{p}, y^*(t_1^*) \rangle \leq \alpha_M^{t_1^* - \check{t} - 1} (\alpha_M - \delta_\varepsilon) \langle \bar{p}, y^*(\check{t}) \rangle. \quad (1.93)$$

Z (1.92), (1.93) dostajemy:

$$\alpha_M^{t_1^* - \check{t} - 1} (\alpha_M - \delta_\varepsilon) \langle \bar{p}, y^*(\check{t}) \rangle > \alpha_M^{t_1 - \check{t} - 1} \langle \bar{p}, y^*(\check{t}) \rangle > 0, \quad (1.94)$$

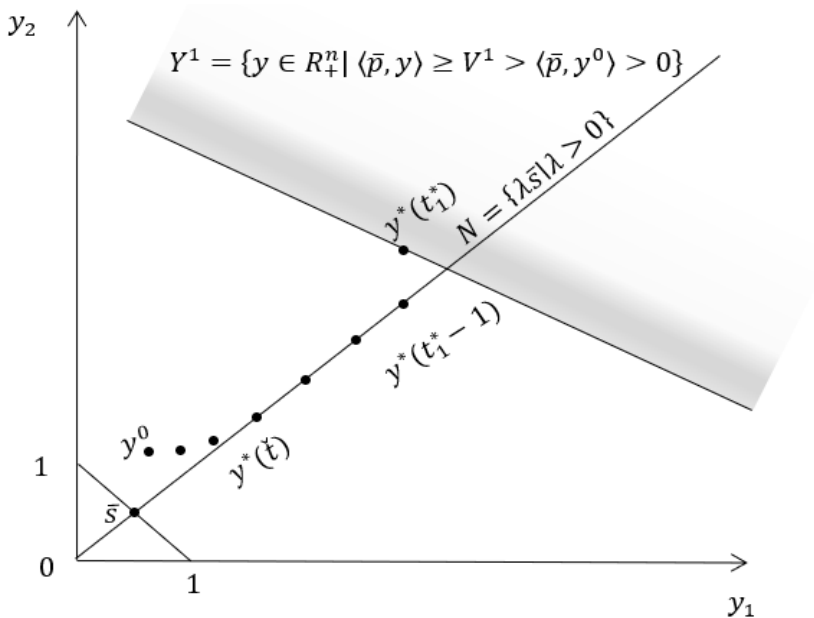
gdzie $t_1 \geq t_1^*$. Jeżeli $t_1 = t_1^*$, to sam proces $\{\tilde{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$ jest (y^0, Y^1, t_1^*) – optymalny. Gdy $t_1 > t_1^*$, to z (1.94) wynika, że:

$$\alpha_M - \delta_\varepsilon > \alpha_M^{t_1 - t_1^*}.$$

Dla $t_1 = t_1^* + 1$ mamy wówczas $\alpha_M - \delta_\varepsilon > \alpha_M$, zatem $\delta_\varepsilon < 0$, wbrew założeniu. Gdy $t_1 - t_1^* = k > 1$, wtedy $\alpha_M - \delta_\varepsilon > \alpha_M^k$, gdzie $k \geq 2$, co jest sprzeczne z warunkiem $\alpha_M > 1$. Otrzymane sprzeczności zamykają dowód. ■

Uwaga. Gdy $t_1 = t_1^*$, wtedy $\delta_\varepsilon < \alpha_M - 1$. Sytuacji takiej nie można wkluczyć, gdyż $\alpha_M > 1$. Zatem, gdy $t_1 = t_1^*$, może istnieć inny (y^0, Y^1, t_1^*) – optymalny proces $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1^*}$ z trajektorią produkcji w ostatnim okresie różną od $\{\tilde{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$ (mianowicie gdy w (1.91) wektor $y' \neq (\alpha_M - 1)\alpha_M^{t_1 - \check{t} - 1} y^*(\check{t})$). Dlatego w tezie twierdzenia zawarty jest warunek jednoznaczności rozwiązania.

Przebieg (y^0, Y^1, t_1^*) – optymalnego procesu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1^*}$, rozwiązania zadania (1.80)-(1.81) ze zbiorem stanów docelowych (1.82) ilustruje następujący rysunek.



Rysunek 1.7. Ilustracja rozwiązania zadania (1.80)-(1.81). Przebieg (y^0, Y^1, t_1^*) – optymalnego procesu wzrostu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1^*}$ w otoczeniu magistrali $N = \{\lambda \bar{s} | \lambda > 0\} \subset R_+^2$

W zadaniu (1.80)-(1.81) do zbioru stanów docelowych Y^1 należą wszystkie wektory produkcji leżące na lub powyżej hiperpłaszczyzny:

$$H_{\bar{p}} = \{y \in R^n | \langle \bar{p}, y \rangle = V^1\},$$

z wektorem kierunkowym $\bar{p} > 0$ i parametrem (wyrazem wolnym) $V^1 > \langle \bar{p}, y^0 \rangle > 0$ (zob. rys. 1.7). Z ekonomicznego punktu widzenia jest to stosunkowo słabe ograniczenie. Tak zdefiniowany zbiór nie uwzględnia społecznych oczekiwań/postulatów/potrzeb formułowanych pod adresem docelowej wielkości produkcji (przynajmniej niektórych) towarów w gospodarce, wynikających choćby z potrzeb konsumpcyjnych społeczeństwa. Warunek ten uwzględnimy obecnie. Zajmiemy się rozwiązaniem zadania (1.80)-(1.81), w którym dotychczasowy zbiór stanów docelowych (1.82) zastąpimy zbiorem:

$$Y^1 = \{y \in R_+^n | y \geq y^1\}, \quad (1.95)$$

gdzie y^1 jest minimalnym, społecznie pożądanym poziomem produkcji ($y^1 > y^0$). Aktualny pozostaje lemat 1.5, z tym że obecnie zbiór Y^1 ma postać (1.95), a okres t_1 , w którym zachodzi (1.84), jest najmniejszą liczbą naturalną spełniającą warunek (1.96); zob. poniżej (lemat 1.6). O wektorze $y^1 > y^0$ ograniczającym z dołu zbiór stanów docelowych Y^1 zakładamy, że:

$$(C1) \quad \exists M \left(\frac{\max_i y_i^1}{\min_i y_i^1} \leq M \right).$$

Zgodnie z tym warunkiem, wektorem y^1 (determinującym postać zbioru stanów docelowych Y^1) może być każdy wektor produkcji większy od początkowego wektora y^0 , w którym rozpiętość (odległość) między wartościami współrzędnych nie rośnie „zbyt gwałtownie” (rośnie nie szybciej niż liniowo). Przy przyjętych założeniach liczba $M \geq 1$.

■ **Lemat 1.6.** Jeżeli spełnione są warunki (G1)-(G6), (G7'), (G8), (G9), (C1), to:

(i) $\forall y^1 > y^0$ istnieje następujący (y^0, Y^1, t_1) – dopuszczalny proces $\{\tilde{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$:

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} y^0, & t = 0, \\ \sigma \alpha_M^t \bar{s}, & t = 1, 2, \dots, t_1 \end{cases}$$

(zob. (1.83)), w którym $\sigma = \min_i \frac{y_i^0}{\bar{s}_i}$, $\tilde{y}(t_1) \geq y^1$ (czyli $\tilde{y}(t_1) \in Y^1$) oraz t_1 jest najmniejszą liczbą naturalną spełniającą warunek:

$$t_1 \geq \frac{\ln A_1}{\ln \alpha_M} > 0, \text{ gdzie } A_1 = \sigma^{-1} \max_i \frac{y_i^1}{\bar{s}_i} > 1. \quad (1.96)$$

(2i) istnieje taka liczba naturalna l niezależna od y^1 (ani od t_1), że jeżeli $t_1 > l$, to $\tilde{y}(t_1 - l) \leq y^1$.

Dowód (i) otrzymujemy powtarzając dosłownie dowód lematu 1.5(i), z tym że obecnie t_1 jest najmniejszą liczbą naturalną spełniającą warunek (1.96).

(ii) Oznaczmy przez l_{y^1} taką najmniejszą liczbę naturalną, że:

$$\tilde{y}(t_1 - l_{y^1}) = \sigma \alpha_M^{t_1 - l_{y^1}} \bar{s} \leq y^1. \quad (1.97)$$

Liczba taka istnieje, gdyż $\tilde{y}(0) = y^0 < y^1 \leq \tilde{y}(t_1)$. Z (1.97) otrzymujemy:

$$l_{y^1} \geq t_1 - \frac{\ln A_2}{\ln \alpha_M}, A_2 = \sigma^{-1} \min_i \frac{y_i^1}{\bar{s}_i} > 1 \quad (1.98)$$

($A_2 \leq A_1$). Ponieważ t_1 jest najmniejszą liczbą naturalną spełniającą warunek (1.96), zatem:

$$t_1 \leq \frac{\ln A_1}{\ln \alpha_M} + 1. \quad (1.99)$$

Podobnie, skoro l_{y^1} jest najmniejszą liczbą naturalną spełniającą warunek (1.98), to:

$$l_{y^1} \leq t_1 - \frac{\ln A_2}{\ln \alpha_M} + 1. \quad (1.100)$$

Z (1.99), (1.100) wynika nierówność:

$$l_{y^1} \leq \frac{\ln \frac{A_1}{A_2}}{\ln \alpha_M} + 2. \quad (1.101)$$

Z konstrukcji liczb A_1 , A_2 oraz **(C1)** dostajemy:

$$1 \leq \frac{A_1}{A_2} = \frac{\max_i \frac{y_i^1}{\bar{s}_i}}{\min_i \frac{y_i^1}{\bar{s}_i}} \leq \frac{\frac{\max_i y_i^1}{\min_j \bar{s}_j}}{\frac{\min_i y_i^1}{\max_j \bar{s}_j}} = \frac{\max_j \bar{s}_j}{\min_j \bar{s}_j} \cdot \frac{\max_i y_i^1}{\min_i y_i^1} = C \frac{\max_i y_i^1}{\min_i y_i^1} \leq C \cdot M,$$

gdzie $C = \frac{\max_j \bar{s}_j}{\min_j \bar{s}_j} \geq 1$ oraz liczba $M \geq 1$ spełnia warunek **(C1)**. Stąd i z (1.101)

płynie wniosek, że:

$$l_{y^1} \leq Q = \frac{\ln(C \cdot M)}{\ln \alpha_M} + 2.$$

W charakterze liczby l , o której mowa w tezie lematu, wystarczy wziąć najmniejszą liczbę naturalną nie mniejszą od Q . ■

Odpowiednikiem ‘słabego’ twierdzenia 1.21 o magistrali jest twierdzenie 1.23.

■ **Twierdzenie 1.23.** Niech stacjonarna gospodarka Gale’a spełnia warunki **(G1)**-**(G6)**, **(G7’)**, **(G8)**, **(G9)**, **(C1)** oraz $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1^*}$ będzie (y^0, Y^1, t_1^*) – optymalnym procesem wzrostu – rozwiązaniem zadania (1.80)-(1.81) ze zbiorem stanów docelowych Y^1 postaci (1.95). Wówczas dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba naturalna k_ε , że liczba okresów czasu, w których zachodzi warunek (1.28), nie przekracza k_ε . Liczba k_ε nie zależy od minimalnej docelowej wielkości produkcji y^1 (tj. postaci zbioru stanów docelowych Y^1) ani od t_1^* .

Dowód. Postępując jak przy dowodzie twierdzenia 1.21 i zakładając, że w okresach $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k < t_1^*$ zachodzi warunek (1.28), dochodzimy do warunku (1.87). Przy przyjętych założeniach, zgodnie z lematem 1.6, istnieje taka liczba naturalna l i taki (y^0, Y^1, t_1) – dopuszczalny proces $\{\tilde{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$ postaci (1.83), że $\tilde{y}(t_1) = \sigma \alpha_M^{t_1} \bar{s} \in Y^1$, $t_1 > l$, oraz $\tilde{y}(t_1 - l) = \sigma \alpha_M^{t_1 - l} \bar{s} \leq y^1$ (liczba l nie zależy od y^1 ani od t_1). Ponieważ $Y^1 \ni y^*(t_1^*) \geq y^1 \geq \tilde{y}(t_1 - l)$, więc:

$$\langle \bar{p}, y^*(t_1^*) \rangle \geq \langle \bar{p}, \tilde{y}(t_1 - l) \rangle = \sigma \alpha_M^{t_1 - l} \langle \bar{p}, \bar{s} \rangle > 0. \quad (1.102)$$

Łącząc (1.87), (1.102), dostajemy nierówność:

$$\alpha_M^{t_1^* - k} (\alpha_M - \delta_\varepsilon)^k \langle \bar{p}, y^0 \rangle \geq \sigma \alpha_M^{t_1 - l} \langle \bar{p}, \bar{s} \rangle > 0,$$

z której wynika (wobec tego, że $t_1 \geq t_1^*$), iż:

$$0 < \left(\frac{\alpha_M}{\alpha_M - \delta_\varepsilon} \right)^k \leq \frac{\alpha_M^l \langle \bar{p}, y^0 \rangle}{\sigma \langle \bar{p}, \bar{s} \rangle},$$

czyli:

$$k \leq B = \frac{\ln A}{\ln \alpha_M - \ln(\alpha_M - \delta_\varepsilon)},$$

gdzie $A = \frac{\alpha_M^l \langle \bar{p}, y^0 \rangle}{\sigma \langle \bar{p}, \bar{s} \rangle} > 1$ ($B > 0$). W charakterze liczby k_ε wystarczy przyjąć najmniejszą liczbę naturalną większą od B . Liczba B , podobnie jak l , nie zależy od y^1 ani od t_1 . ■

Aktualne są uwagi 1-3 do twierdzenia 1.10. Twierdzenia 1.21, 1.23 pozostają prawdziwe także wówczas, gdy w zadaniu (1.80)-(1.81) warunek początkowy $y(0) = y^0 > 0$ zastąpimy słabszym warunkiem:

$$y(0) = y^0 \geq 0$$

oraz jednym z następujących postulatów:

- istnieje taki $(y^0, \check{t})$ – dopuszczalny proces $\{\check{y}(t)\}_{t=0}^{\check{t}}$, że $\check{y}(\check{t}) > 0$ (prowadzący do dodatniego wektora produkcji),
- istnieje taki $(y^0, \check{t})$ – dopuszczalny proces $\{\check{y}(t)\}_{t=0}^{\check{t}}$, że $\check{y}(\check{t}) \in N$ (prowadzący do magistrali).

Na zakończenie tego punktu zostanie przedstawiony dowód, że również po zmianie postaci zbioru stanów docelowych ((1.82) na (1.95)) optymalna trajektoria $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1^*}$ prowadząca w okresie $\check{t} < t_1$ do magistrali N pozostaje na niej do końca horyzontu $T^* = \{0, 1, \dots, t_1^*\}$. Aktualne są wszystkie założenia obowiązujące w twierdzeniu 1.23 poza **(C1)**, który zastąpimy obecnie warunkiem następującym:

(C1') Wektor $y^1 > y^0$ ograniczający w (1.95) (z dołu) zbiór stanów docelowych Y^1 spełnia warunek:

$$\frac{\max_i \frac{y_i^1}{\bar{s}_i}}{\min_i \frac{y_i^1}{\bar{s}_i}} \leq \alpha_M.$$

Podobnie jak w **(C1)** wektorem y^1 może być każdy wektor produkcji większy od początkowego wektora y^0 , w którym przy $\|y^1\| \rightarrow +\infty$ rozpiętość między wartościami jego współrzędnych (obecnie zrelatywizowana względem współrzędnych wektora $\bar{s}$ struktury produkcji na magistrali) rośnie nie szybciej niż liniowo ze współczynnikiem α_M .

Poniższy lemat jest (częściowo) odpowiednikiem lematu 1.6.

■ **Lemat 1.7.** Jeżeli zachodzą warunki (G1)-(G6), (G7'), (G8), (G9), (C1') oraz (y^0, Y^1, t_1^*) – optymalny proces wzrostu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1^*}$ (rozwiązanie zadania (1.80)-(1.81) ze zbiorem stanów docelowych (1.95)) w pewnym okresie $\check{t} < t_1^*$ dociera do magistrali:

$$y^*(\check{t}) \in N,$$

to istnieje taki (y^0, Y^1, t_1) – dopuszczalny proces $\{\tilde{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$:

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} y^*(t), & t = 0, 1, \dots, \check{t}, \\ \alpha_M^{t-\check{t}} y^*(\check{t}), & t = \check{t} + 1, \dots, t_1, \end{cases} \quad (1.103)$$

$t_1 \geq t_1^*$, że:

$$\tilde{y}(t_1) \geq y^1 \text{ \& } \tilde{y}(t_1 - 1) \leq y^1.$$

Dowód. Przy założeniach lematu istnieje taki (y^0, Y^1, t_1) – dopuszczalny proces postaci (1.103) (począwszy od $t = \check{t}$ biegnący po magistrali N), że $\tilde{y}(t_1) \geq y^1$ oraz t_1 jest najmniejszą liczbą naturalną spełniającą warunek:

$$t_1 \geq \tau_1 = \check{t} + \frac{\ln A_1}{\ln \alpha_M}, \quad (1.104)$$

gdzie $A_1 = \max_i \frac{y_i^1}{y_i^*(\check{t})} = \sigma^{-1} \max_i \frac{y_i^1}{\bar{s}_i} > 1$, $\sigma = \|y^*(\check{t})\| > 0$, $\bar{s} = \frac{y^*(\check{t})}{\|y^*(\check{t})\|}$. W procesie tym $\forall t \in \{\check{t}, \check{t} + 1, \dots, t_1\}$ ($\tilde{y}(t) \in N$). Oznaczmy przez l_{y^1} taką najmniejszą liczbę (niekoniecznie naturalną), przy której spełniona jest nierówność:

$$\alpha_M^{\tau_1 - \check{t} - l_{y^1}} y^*(\check{t}) \leq y^1. \quad (1.105)$$

Liczba taka istnieje (gdyż $y^1 > 0$ oraz $\alpha_M > 1$) oraz:

$$l_{y^1} = \tau_1 - \check{t} - \frac{\ln A_2}{\ln \alpha_M} \geq 0,$$

gdzie $A_2 = \min_i \frac{y_i^1}{y_i^*(\check{t})} = \sigma^{-1} \min_i \frac{y_i^1}{\bar{s}_i} > 0$ ($A_2 \leq A_1$). Z (C1') wynika, że:

$$\frac{A_1}{A_2} \leq \alpha_M, \text{ czyli } \frac{\ln A_2}{\ln \alpha_M} \geq \frac{\ln A_1}{\ln \alpha_M} - 1,$$

a stąd, wobec (1.104) dochodzimy do konkluzji, że:

$$l_{y^1} = \tau_1 - \check{t} - \frac{\ln A_2}{\ln \alpha_M} = \check{t} + \frac{\ln A_1}{\ln \alpha_M} - \check{t} - \frac{\ln A_2}{\ln \alpha_M} \leq 1.$$

Każdemu docelowemu wektorowi produkcji y^1 spełniającemu warunek **(C1')** odpowiada więc taka nieujemna liczba $l_{y^1} \leq 1$, że zachodzi warunek (1.105).

W szczególności:

$$\tilde{y}(t_1 - 1) = \alpha_M^{t_1 - \check{t} - 1} y^*(\check{t}) \leq \alpha_M^{t_1 - \check{t} - l_{y^1}} y^*(\check{t}) \leq y^1,$$

co zamyka dowód. ■

‘Bardzo silne’ twierdzenie o magistrali w stacjonarnej gospodarce Gale’a, w której optymalny proces wzrostu jest rozwiązaniem minimalnoczasowego problemu (1.80)-(1.81) ze zbiorem stanów docelowych (1.95), brzmi następująco.

Twierdzenie 1.24. Jeżeli:

- zachodzą warunki **(G1)-(G6), (G7'), (G8), (G9), (C1')**,
- (y^0, Y^1, t_1^*) – optymalny proces wzrostu (rozwiązanie zadania (1.80)-(1.81) ze zbiorem stanów docelowych (1.95)) w pewnym okresie $\check{t} < t_1^*$ dociera do magistrali,

$$y^*(\check{t}) \in N,$$

- rozwiązanie zadania (1.80)-(1.81) jest jednoznaczne,

to:

$$\forall t \in \{\check{t} + 1, \dots, t_1^*\} (y^*(t) \in N). \quad (1.107)$$

Dowód. Weźmy dowolny taki (y^0, Y^1, t_1^*) – optymalny proces $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1^*}$, który w okresie $\check{t} < t_1^*$ dociera do magistrali. Z definicji (y^0, Y^1, t_1^*) – optymalnego procesu wzrostu, wobec (1.11), otrzymujemy warunek:

$$\langle \bar{p}, y^*(t + 1) \rangle \leq \alpha_M \langle \bar{p}, y^*(t) \rangle, \quad t = 0, 1, \dots, t_1^* - 1,$$

a stąd, w szczególności:

$$\langle \bar{p}, y^*(t_1^*) \rangle \leq \alpha_M^{t_1^* - \check{t}} \langle \bar{p}, y^*(\check{t}) \rangle. \quad (1.108)$$

Jeżeli $y^*(\tau) \notin N$ dla pewnego $\tau \in \{\check{t} + 1, \dots, t_1^* - 1\}$ lub $y^*(t_1^*) \notin N$, to podobnie jak w twierdzeniu 1.22:

$$\exists \varepsilon > 0 (d(y^*(\tau), N) \geq \varepsilon \vee d(y^*(t_1^*), N) \geq \varepsilon),$$

co prowadzi do warunku:

$$\langle \bar{p}, y^*(\tau + 1) \rangle \leq (\alpha_M - \delta_\varepsilon) \langle \bar{p}, y^*(\tau) \rangle, \quad (1.109)$$

gdzie $\delta_\varepsilon > 0$.

Z (1.108), (1.109) otrzymujemy górne ograniczenie wartości produkcji wytworzonej w okresie t_1^* :

$$\langle \bar{p}, y^*(t_1^*) \rangle \leq \alpha_M^{t_1^* - \check{t} - 1} (\alpha_M - \delta_\varepsilon) \langle \bar{p}, y^*(\check{t}) \rangle. \quad (1.110)$$

W świetle lematu 1.7 istnieje (y^0, Y^1, t_1) – dopuszczalny proces postaci (1.103) spełniający warunek:

$$\tilde{y}(t_1 - 1) = \alpha_M^{t_1 - \check{t} - 1} y^*(\check{t}) \leq y^1.$$

Wówczas:

$$\langle \bar{p}, y^*(t_1^*) \rangle \geq \langle \bar{p}, y^1 \rangle \geq \langle \bar{p}, \tilde{y}(t_1 - 1) \rangle = \alpha_M^{t_1 - \check{t} - 1} \langle \bar{p}, y^*(\check{t}) \rangle. \quad (1.111)$$

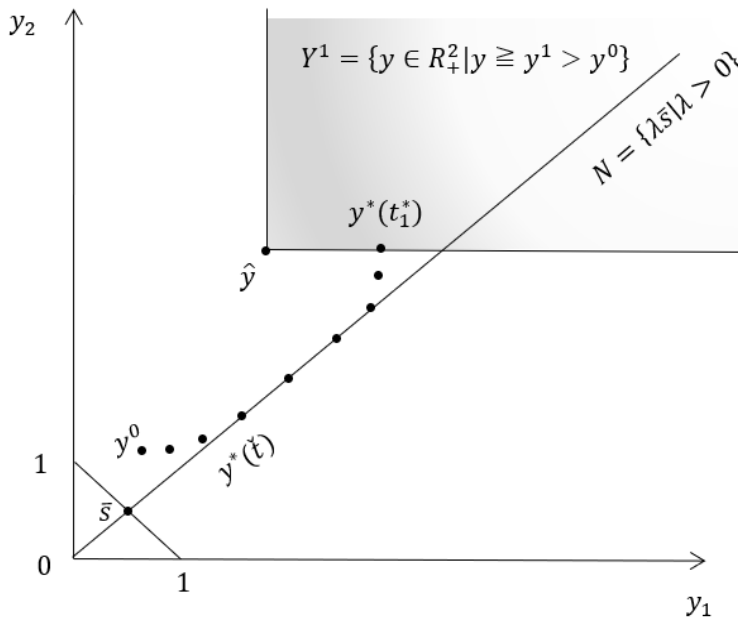
Z (1.110), (1.111) (zważywszy, że $t_1 \geq t_1^*$) dostajemy nierówność:

$$\alpha_M - \delta_\varepsilon \geq \alpha_M^{t_1 - t_1^*}. \quad (1.112)$$

Dalej dowód przebiega jak w twierdzeniu 1.22. Jeżeli $t_1 = t_1^*$, to sam proces $\{\tilde{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$ jest (y^0, Y^1, t_1^*) – optymalny. Gdy $t_1 = t_1^* + 1$, wówczas $\alpha_M - \delta_\varepsilon \geq \alpha_M$, zatem $\delta_\varepsilon \leq 0$, wbrew założeniu. Gdy $t_1 - t_1^* = k \geq 2$, wtedy z (1.112)

dostajemy $\alpha_M - \delta_\varepsilon > \alpha_M^k$, co jest sprzeczne z warunkiem $\alpha_M > 1$. Otrzymane sprzeczności zamykają dowód. ■

Aktualna jest uwaga do twierdzenia 1.22. Przykładowy przebieg (y^0, Y^1, t_1^*) – optymalnego procesu wzrostu w R^2 spełniającego warunki twierdzenia 1.24 ilustruje rysunek 1.8.



Rysunek 1.8. Ilustracja twierdzenia 1.24. Przebieg (y^0, Y^1, t_1^*) – optymalnego procesu wzrostu (rozwiązania zadania (1.80)-(1.81) ze zbiorem stanów docelowych (1.95)) w otoczeniu magistrali $N = \{\lambda \bar{s} | \lambda > 0\} \subset R_+^2$

ROZDZIAŁ 2

Stacjonarna gospodarka Gale'a z wieloma magistralami

W stacjonarnej gospodarce Gale'a, którą zajmowaliśmy się w rozdziale 1, magistrała produkcyjna była określona jednoznacznie, a jej obrazem była półprosta N w przestrzeni wektorów produkcji R_+^n zwana promieniem von Neumanna. Nie ma żadnych szczególnych argumentów przemawiających za istnieniem w gospodarce tylko jednej magistrali. W tym rozdziale przyjrzymy się stacjonarnej gospodarce Gale'a z całą rodziną (wiązką) magistral, którą dalej umownie nazywamy *magistralą wielopasmową*.

Ustalone zostaną warunki występowania w gospodarce wielopasmowej magistrali oraz jej niektóre własności, ale głównym celem jest dowód, że również w gospodarce Gale'a z magistralą wielopasmową obserwujemy charakterystyczną stabilność optymalnych procesów wzrostu.

Prezentowane w rozdziale wyniki badań nawiązują do artykułów [72], [73].

2.1. Wielopasmowa magistrała produkcyjna

Jeżeli zachodzą warunki (G1)-(G7) z rozdziału 1, wówczas istnieje taki optymalny proces $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z$, że:

$$\alpha(\bar{x}, \bar{y}) = \max_{(x,y) \in Z \setminus \{0\}} \alpha(x, y) = \alpha_M > 0, \quad (2.1)$$

gdzie $\alpha(x, y) = \max\{\alpha \mid \alpha x \leq y\}$ (zob. rozdz.1, pkt 1.2, twierdzenie 1.2). Gdy dodatkowo zachodzi warunek (G8), to zgodnie z twierdzeniem 1.6 w gospodarce Gale'a istnieje optymalny stan równowagi $\{\alpha_M, (\bar{x}, \bar{y}), \bar{p}\}$, w którym:

$$\alpha_M \bar{x} \leq \bar{y}, \quad (2.2)$$

$$\forall (x, y) \in Z \ (\langle \bar{p}, y \rangle - \alpha_M \langle \bar{p}, x \rangle \leq 0), \quad (2.3)$$

$$\langle \bar{p}, \bar{y} \rangle > 0. \quad (2.4)$$

Każdy z warunków **(G9)**, **(G10)** zapewnia, że proces produkcji $(\bar{x}, \bar{y})$ w równowadze jest określony jednoznacznie z dokładnością do struktury (mnożenia przez stałą dodatnią). W gospodarce Gale'a istnieje wówczas dokładnie jedna związana z takim procesem magistrala produkcyjna $N = \{\lambda \bar{s} | \lambda > 0\}$, gdzie $\bar{s} = \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|} = \frac{\bar{y}}{\|\bar{y}\|} \geq 0$. Bez warunku **(G9)** (lub **(G10)**) rozwiązanie zadania (2.1) może być niejednoznaczne (z dokładnością do struktury), tzn. nie musi spełniać warunku:

$$\forall (x^1, y^1) \in Z \quad \forall (x^2, y^2) \in Z$$

$$(\alpha(x^1, y^1) = \alpha(x^2, y^2) = \alpha_M \Rightarrow \exists \lambda > 0 ((x^1, y^1) = \lambda(x^2, y^2))).$$

Taka sytuacja interesuje nas obecnie. Dana jest przestrzeń produkcyjna Gale'a $Z \subset R_+^{2n}$ spełniająca warunki **(G1)**-**(G8)**. Przez $Z_{opt} \subset Z \setminus \{0\}$ oznaczamy zbiór wszystkich optymalnych procesów produkcji w takiej przestrzeni:

$$Z_{opt} = \{(\bar{x}, \bar{y}) \in Z | \alpha(\bar{x}, \bar{y}) = \alpha_M\}.$$

W rozdziale 1 (przy założeniach **(G1)**-**(G9)**) (lub **(G1)**-**(G8)**, **(G10)**) zbiór ten był półprostą w R_+^{2n} niezawierającą 0. O jego obecnym kształcie mówi następujący lemat.

■ **Lemat 2.1.** Jeżeli zachodzą warunki **(G1)**-**(G8)**, to zbiór $Z_{opt} \subset Z \subset R_+^{2n}$ jest stożkiem wypukłym (z wierzchołkiem w początku układu współrzędnych) niezawierającym 0.

Dowód. Weźmy dowolną parę optymalnych procesów $(\bar{x}^i, \bar{y}^i) \in Z_{opt}$, $i = 1, 2$, oraz takie liczby $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, że $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$. Niech $(\bar{x}, \bar{y}) = \lambda_1(\bar{x}^1, \bar{y}^1) + \lambda_2(\bar{x}^2, \bar{y}^2)$. Wówczas przy przyjętych założeniach $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z \setminus \{0\}$, czyli:

$$\alpha(\bar{x}, \bar{y}) \leq \alpha_M. \quad (2.5)$$

Ponieważ $(\bar{x}^i, \bar{y}^i) \in Z_{opt}$, $i = 1, 2$, więc $\alpha(\bar{x}^1, \bar{y}^1) = \alpha(\bar{x}^2, \bar{y}^2) = \alpha_M$, zatem:

$$\alpha_M \bar{x}^1 \leq \bar{y}^1 \text{ oraz } \alpha_M \bar{x}^2 \leq \bar{y}^2$$

i wobec tego:

$$\alpha_M \bar{x} = \alpha_M (\lambda_1 \bar{x}^1 + \lambda_2 \bar{x}^2) \leq \lambda_1 \bar{y}^1 + \lambda_2 \bar{y}^2 = \bar{y},$$

skąd wnioskujemy, że:

$$\alpha(\bar{x}, \bar{y}) \geq \alpha_M. \quad (2.6)$$

Z (2.5), (2.6) otrzymujemy $\alpha(\bar{x}, \bar{y}) = \alpha_M$, zatem $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z_{opt}$. ■

De facto lemat pozostaje prawdziwy także bez warunku **(G8)**. Natomiast przy założeniach **(G1)-(G8)** każda trójka $\{\alpha_M, (\bar{x}, \bar{y}), \bar{p}\}$ z dowolnym procesem $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z_{opt}$ tworzy optymalny stan równowagi von Neumanna. W równowadze takiej ceny $\bar{p}$ są dodatnie (zob. uwagę do twierdzenia 1.6, s. 39).

Niech S będzie zbiorem wektorów struktury nakładów $\frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|}$ lub produkcji $\frac{\bar{y}}{\|\bar{y}\|}$ we wszystkich optymalnych procesach $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z_{opt}$:

$$S = \left\{ s \mid \exists (\bar{x}, \bar{y}) \in Z_{opt} \left(s = \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|} \vee s = \frac{\bar{y}}{\|\bar{y}\|} \right) \right\}.$$

Ponieważ $\forall \left((\bar{x}, \bar{y}) \in Z_{opt} \left((\bar{x}, \alpha_M \bar{x}) \in Z_{opt} \text{ \& } (\bar{y}, \alpha_M \bar{y}) \in Z_{opt} \right) \right)$, więc równoważnie:

$$S = \left\{ s \mid \exists (\bar{x}, \bar{y}) \in Z_{opt} \left(s = \frac{\bar{y}}{\|\bar{y}\|} \right) \right\}. \quad (2.7)$$

W rozdziale 1, w gospodarce Gale'a z pojedynczą magistralą N , zbiór S redukowal się do jednego punktu. Obecnie o jego własnościach mówi lemat 2.2.

■ **Lemat 2.2.** Jeżeli zachodzą warunki **(G1)-(G8)**, to zbiór S jest zwarty i wypukły.

Dowód. (Zwartość) Weźmy dowolny ciąg wektorów $s^i \in S$, $i = 1, 2, \dots$. Ponieważ $S \subset S_+^n(1) = \{s \in R_+^n \mid \|s\| = 1\}$ i simpleks $S_+^n(1)$ jest zbiorem zwartym, więc:

$$\exists \{s^{ij}\}_{j=1}^{\infty} \left(s^{ij} \rightarrow_j \bar{s} \in S_+^n(1) \right).$$

Niech $\eta^{ij} = \alpha_M s^{ij}$. Wówczas:

$$(s^{ij}, \eta^{ij}) = (s^{ij}, \alpha_M s^{ij}) \in Z, \quad j = 1, 2, \dots,$$

$$(s^{ij}, \eta^{ij}) \rightarrow_j (\bar{s}, \bar{\eta}) = (\bar{s}, \alpha_M \bar{s}) \in Z.$$

Skoro $\alpha(\bar{s}, \bar{\eta}) = \alpha_M$, to $(\bar{s}, \bar{\eta}) \in Z_{opt}$ oraz $\frac{\bar{\eta}}{\|\bar{\eta}\|} = \bar{s} \in S_+^n(1)$, czyli $\bar{s} \in S$.

(Wypukłość) Weźmy dowolne wektory $s^1, s^2 \in S$ oraz liczby $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$. Pokażemy, że $s = \alpha s^1 + \beta s^2 \in S$. Z założenia $s^1, s^2 \in S$, zatem:

$$\exists (\bar{x}^i, \bar{y}^i) \in Z_{opt} \left(s^i = \frac{\bar{y}^i}{\|\bar{y}^i\|} \right), \quad i = 1, 2.$$

Oczywiście, $\alpha(\bar{x}^1, \bar{y}^1) = \alpha(\bar{x}^2, \bar{y}^2) = \alpha_M$. Z **(G1)** oraz dodatniej jednorodności stopnia 0 funkcji $\alpha(\cdot)$ wynika, że $(\tilde{x}^i, s^i) \in Z_{opt}$, gdzie $\tilde{x}^i = \lambda_i \bar{x}^i$, $\lambda_i = \frac{1}{\|\bar{y}^i\|} > 0$, $i = 1, 2$. Stożek Z_{opt} jest zbiorem wypukłym, więc $(x', y') = \alpha(\tilde{x}^1, s^1) + \beta(\tilde{x}^2, s^2) \in Z_{opt}$ oraz:

$$s = \alpha s^1 + \beta s^2 = \frac{\alpha s^1 + \beta s^2}{\|\alpha s^1 + \beta s^2\|} = \frac{y'}{\|y'\|},$$

tj. $s \in S$, c.n.d. ■

Wprost z definicji zbioru S wynika, że jeżeli w gospodarce Gale'a spełniającej warunki **(G1)-(G8)** struktura nakładów i/lub produkcji w dopuszczalnym procesie $(x, y) \in Z$ różni się od magistralnej, to efektywność technologiczna takiego procesu jest niższa od optymalnej:

$$\forall (x, y) \in Z \left(\frac{x}{\|x\|} \notin S \vee \frac{y}{\|y\|} \notin S \Rightarrow \alpha(x, y) < \alpha_M \right).$$

Z każdym (unormowanym) wektorem $s \in S$ związany jest promień von Neumanna $N_s = \{\lambda s | \lambda > 0\}$. Zbiór:

$$\mathbb{N} = \bigcup_{s \in S} N_s = \{\lambda s \mid \lambda > 0, s \in S\}$$

nazywamy *wielopasmową magistralą produkcyjną* w stacjonarnej gospodarce Gale'a. Tworzy ją wiązka promieni (pojedynczych magistral) N_s , $s \in S$, gdzie S jest zbiorem unormowanych wektorów struktury produkcji na wielopasmowej magistrali. Wielopasmowa magistrala $\mathbb{N} \subset R_+^n$ jest stożkiem wypukłym niezawierającym 0.

2.2. Dopuszczalne i stacjonarne procesy wzrostu

Podobnie jak w rozdziale 1 zakładamy, że czas zmienia się skokowo, $t \in T = \{0, 1, \dots, t_1\}$, $t_1 < +\infty$. Przez $(x(t), y(t))$ oznaczamy dopuszczalny proces produkcji w okresie t . W gospodarce Gale'a nakłady ponoszone w okresie następnym pochodzą z produkcji wytworzonej w okresie poprzednim, $x(t+1) \leq y(t)$, stąd (wobec **(G4)**):

$$(y(t), y(t+1)) \in Z, \quad t = 0, 1, \dots, t_1 - 1. \quad (2.8)$$

(równoważnie: $y(t+1) \in a(y(t))$, $t = 0, 1, \dots, t_1 - 1$). W okresie początkowym $t = 0$ wektor produkcji jest dany:

$$y(0) = y^0 \geq 0. \quad (2.9)$$

O ciągu wektorów produkcji $\{y(t)\}_{t=0}^{t_1}$ spełniających warunki (2.8), (2.9) mówimy tradycyjnie, że opisuje (y^0, t_1) – dopuszczalny proces wzrostu (zob. rozdz. 1, def. 1.3).

Jeżeli (y^0, t_1) – dopuszczalny proces ma szczególną postać:

$$\bar{y}(t) = \alpha_M^t y^0, \quad t = 0, 1, \dots, t_1, \quad (2.10)$$

wtedy, podobnie jak w rozdziale 1, nazywamy go optymalnym stacjonarnym procesem wzrostu (z tempem α_M). Przy założeniach **(G1)-(G7)**, w świetle twierdzenia 1.8 procesy wzrostu postaci (2.10) istnieją, gdy y^0 jest wektorem produkcji

w takim (optymalnym) procesie $(x^0, y^0) \in Z$, że $\alpha(x^0, y^0) = \alpha_M$. W gospodarce Gale'a z wielopasmową magistralą $\mathbb{N}$ każdy optymalny stacjonarny proces wzrostu (2.10) biegnie po magistrali (promieniu) $N_{s^0} \in \mathbb{N}$, $s^0 = \frac{y^0}{\|y^0\|} \in S$. Podobnie jak w gospodarce Gale'a z pojedynczą magistralą, przy przyjętych założeniach nie ma stacjonarnych procesów wzrostu z tempem $\gamma > \alpha_M$. Dowolna dodatnia λ -wielokrotność optymalnego stacjonarnego procesu jest optymalnym stacjonarnym procesem (z początkowym wektorem produkcji λy^0). Suma dwóch optymalnych stacjonarnych procesów $y^1(t) = \alpha_M^t y^{01}$, $y^2(t) = \alpha_M^t y^{02}$ ($\frac{y^{0i}}{\|y^{0i}\|} = s^i \in S$, $i = 1, 2$) jest optymalnym stacjonarnym procesem (z początkowym wektorem produkcji $y^0 = y^{01} + y^{02}$). Reasumując, w gospodarce Gale'a z wielopasmową magistralą optymalne stacjonarne procesy wzrostu tworzą stożek wypukły $\mathbb{N} \subset R_+^n \setminus \{0\}$ (niezawierający 0). Ponieważ po wielopasmowej magistrali biegną wszystkie optymalne stacjonarne procesy wzrostu:

$$\bar{y}(t) = \alpha_M^t \bar{y}, \text{ gdzie } \frac{\bar{y}}{\|\bar{y}\|} = \bar{s} \in S, \text{ czyli } (\bar{y}(t), \bar{y}(t+1)) = (\alpha_M^t \bar{y}, \alpha_M^{t+1} \bar{y}) \in Z$$

oraz $\langle \bar{p}, \bar{y} \rangle > 0$ (zgodnie z (2.4)), więc:

$$\beta(\bar{y}(t), \bar{y}(t+1), \bar{p}) = \frac{\langle \bar{p}, \bar{y}(t+1) \rangle}{\langle \bar{p}, \bar{y}(t) \rangle} = \frac{\langle \bar{p}, \alpha_M^{t+1} \bar{y} \rangle}{\langle \bar{p}, \alpha_M^t \bar{y} \rangle} = \alpha_M, t = 0, 1, \dots, t_1 - 1,$$

co pokazuje, że procesy takie wyróżniają się nie tylko maksymalną efektywnością technologiczną, ale także najwyższą efektywnością ekonomiczną.

Wprowadźmy następującą miarę odległości (kątovej) wektora $z \in R_+^n \setminus \{0\}$ od wielopasmowej magistrali $\mathbb{N}$:

$$d(z, \mathbb{N}) = \min_{z' \in \mathbb{N}} \left\| \frac{z}{\|z\|} - \frac{z'}{\|z'\|} \right\|. \quad (2.11)$$

Jeżeli w dopuszczalnym procesie $(x, y) \in Z$ zachodzi warunek $x \notin \mathbb{N}$ lub $y \notin \mathbb{N}$, tj. $d(x, \mathbb{N}) > 0$ lub $d(y, \mathbb{N}) > 0$, to technologiczna efektywność takiego procesu $\alpha(x, y) < \alpha_M$, a wtedy wobec **(G8)** również jego efektywność ekonomiczna $\beta(x, y, \bar{p}) < \alpha_M$. Odpowiednikiem lematu 1.1 jest obecnie lemat 2.3,

w którym nie jest obecnie potrzebny warunek **(G9)** zapewniający jednoznaczność magistrali (zamiast pojedynczej magistrali N mamy bowiem teraz pasmo magistral $\mathbb{N}$).

■ **Lemat 2.3.** Jeżeli zachodzą warunki **(G1)-(G8)**, to:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon \in (0, \alpha_M) \forall (x, y) \in Z \ (d(x, \mathbb{N}) \geq \varepsilon \vee d(y, \mathbb{N}) \geq \varepsilon \Rightarrow \beta(x, y, \bar{p}) \leq \alpha_M - \delta_\varepsilon). \quad (2.12)$$

Dowód. Podobnie jak w lemacie 1.1 przy dowodzie wystarczy ograniczyć się do dopuszczalnych procesów produkcji (x, y) ze zbioru:

$$\mathbb{V}(\varepsilon) = \{(x, y) \in Z \mid \|x, y\| = 1 \ \& \ (d(x, \mathbb{N}) \geq \varepsilon \vee d(y, \mathbb{N}) \geq \varepsilon)\}.$$

Z definicji mamy $d(z, \mathbb{N}) = \min_{z' \in \mathbb{N}} f(z, z')$, gdzie $f(z, z') = \left\| \frac{z}{\|z\|} - \frac{z'}{\|z'\|} \right\|$, lub inaczej:

$$d(z, \mathbb{N}) = \min_{s \in S} f(z, s).$$

Ponieważ $f \in C^0(R_+^n \setminus \{0\} \times R_+^n \setminus \{0\})$ oraz zbiór S jest zwarty, więc:

$$\forall z \geq 0 \exists \bar{s} \in S \ (f(z, \bar{s})) = \min_{s \in S} f(z, s).$$

Ustalmy dowolną liczbę $\varepsilon > 0$. Pokażemy, że zbiór $\mathbb{V}(\varepsilon)$ jest zwarty (ograniczony i domknięty w R^{2n}). Zbiór jest ograniczony z założenia, gdyż $\mathbb{V}(\varepsilon) \subset S_+^{2n}(1)$ (zawiera się w sympleksie jednostkowym w R_+^{2n}). Aby wykazać, że jest domknięty w R^{2n} , weźmy ciąg $\{x^i, y^i\}_{i=1}^\infty$ procesów ze zbioru $\mathbb{V}(\varepsilon)$ zbieżnym do granicy $(\bar{x}, \bar{y})$. Wówczas:

$$\forall i \left((x^i, y^i) \in Z \ \& \ \|(x^i, y^i)\| = 1 \ \& \ \left(\left\| \frac{x^i}{\|x^i\|} - \bar{s} \right\| \geq \varepsilon \vee \left\| \frac{y^i}{\|y^i\|} - \bar{s} \right\| \geq \varepsilon \right) \right)$$

oraz:

$$(\bar{x}, \bar{y}) \in Z, \quad \|\bar{x}, \bar{y}\| = 1, \quad (2.13)$$

przy czym $\bar{x} \neq 0$. Nie można jednak wykluczyć, że $\bar{y} = 0$ (wtedy $\|\bar{x}\| = 1$). Rozpatrzmy kolejno dwa przypadki.

$$\mathbf{1}^0 \forall i \left((x^i, y^i) \in \mathbb{V}(\varepsilon) \right) \& \lim_i (x^i, y^i) = (\bar{x}, \bar{y}) \quad \text{oraz} \quad \bar{x} \neq 0 \quad \text{ i } \quad \bar{y} \neq 0.$$

Niech $\xi^i = \frac{x^i}{\|x^i\|}$, $\eta^i = \frac{y^i}{\|y^i\|}$. Wobec ciągłości funkcji $f(\cdot)$ oraz zwartości zbioru S stwierdzamy, że $\forall i$:

$$\exists \bar{s}_x^i \in S \left(f(x^i, \bar{s}_x^i) = \|\xi^i - \bar{s}_x^i\| = \min_{s \in S} f(x^i, s) = d(x^i, \mathbb{N}) \geq \varepsilon \right)$$

lub:

$$\exists \bar{s}_y^i \in S \left(f(y^i, \bar{s}_y^i) = \|\eta^i - \bar{s}_y^i\| = \min_{s \in S} f(y^i, s) = d(y^i, \mathbb{N}) \geq \varepsilon \right)$$

oraz:

$$\exists \left\{ \bar{s}_x^{ij} \right\}_{j=1}^{\infty} \left(\bar{s}_x^{ij} \rightarrow_j \bar{s}_x \right) \& \forall j \left(f(x^{ij}, \bar{s}_x^{ij}) = \min_{s \in S} f(x^{ij}, s) = d(x^{ij}, \mathbb{N}) \geq \varepsilon \right)$$

lub:

$$\exists \left\{ \bar{s}_y^{ik} \right\}_{k=1}^{\infty} \left(\bar{s}_y^{ik} \rightarrow_k \bar{s}_y \right) \& \forall k \left(f(y^{ik}, \bar{s}_y^{ik}) = \min_{s \in S} f(y^{ik}, s) = d(y^{ik}, \mathbb{N}) \geq \varepsilon \right).$$

Wówczas:

$$f(\bar{x}, \bar{s}_x) = d(\bar{x}, \mathbb{N}) \geq \varepsilon \tag{2.14}$$

oraz:

$$f(\bar{y}, \bar{s}_y) = d(\bar{y}, \mathbb{N}) \geq \varepsilon. \tag{2.15}$$

$$\mathbf{2}^0 \forall i \left((x^i, y^i) \in \mathbb{V}(\varepsilon) \right) \& \lim_i (x^i, y^i) = (\bar{x}, \bar{y}) \quad \text{oraz} \quad \bar{x} \neq 0, \quad \text{natomiast} \quad \bar{y} = 0.$$

Rozumując jak w p. $\mathbf{1}^0$, stwierdzamy, że zachodzi warunek (2.14). Nie zachodzi wprowadzić warunek (2.15), gdyż nie istnieje wektor $\bar{s}_y = \frac{\bar{y}}{\|\bar{y}\|}$, ale alternatywa:

$$d(\bar{x}, \mathbb{N}) \geq \varepsilon \vee d(\bar{y}, \mathbb{N}) \geq \varepsilon \tag{2.16}$$

pozostaje prawdziwa. Na podstawie (2.13)-(2.16) wnioskujemy, że zbiór $V(\varepsilon)$ jest domknięty. Jest także ograniczony, więc jest zwarty.

Dalej dowód przebiega podobnie jak w lemacie 1.1. Wobec **(G8)**:

$$\forall(x, y) \in \mathbb{V}(\varepsilon) \quad (0 \leq \langle \bar{p}, y \rangle < \alpha_M \langle \bar{p}, x \rangle),$$

a to znaczy, że:

$$\forall(x, y) \in \mathbb{V}(\varepsilon) \quad \left(0 \leq \beta(x, y, \bar{p}) = \frac{\langle \bar{p}, y \rangle}{\langle \bar{p}, x \rangle} < \alpha_M\right).$$

Funkcja $\beta(\cdot, \bar{p})$ jest ciągła na $\mathbb{V}(\varepsilon)$, więc istnieje rozwiązanie zadania:

$$\max_{(x, y) \in \mathbb{V}(\varepsilon)} \beta(x, y, \bar{p}) = b(\varepsilon) < \alpha_M,$$

czyli:

$$\exists \delta_\varepsilon \in (0, \alpha_M) \quad \forall(x, y) \in \mathbb{V}(\varepsilon) (\beta(x, y, \bar{p}) \leq \alpha_M - \delta_\varepsilon).$$

Biorąc $\delta_\varepsilon = \frac{1}{2}(\alpha_M - b(\varepsilon)) > 0$, dochodzimy do konkluzji, że:

$$\forall(x, y) \in \mathbb{V}(\varepsilon) (\langle \bar{p}, y \rangle \leq (\alpha_M - \delta_\varepsilon) \langle \bar{p}, x \rangle),$$

c.n.d. ■

Uwaga 1. Weźmy dowolny (y^0, t_1) – dopuszczalny proces $\{y(t)\}_{t=0}^{t_1}$. Wówczas para wektorów $(y(t), y(t+1))$ jest dopuszczalnym procesem produkcji w okresie $t+1$ (z wektorem nakładów $y(t)$ oraz wektorem produkcji $y(t+1)$). Jeżeli $y(t) \notin \mathbb{N}$ lub $y(t+1) \notin \mathbb{N}$ we wszystkich okresach czasu $t \in T$, to przy przyjętych założeniach zarówno technologiczna, jak i ekonomiczna efektywność takiego procesu produkcji jest zawsze niższa od optymalnej.

Uwaga 2. Jeżeli początkowy wektor produkcji y^0 spełnia warunek $\frac{y^0}{\|y^0\|} = s^0 \in S$, to istnieje (y^0, t_1) – dopuszczalny proces wzrostu $\{\bar{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$:

$$\bar{y}(t) = y^0 \alpha_M^t \in N_{s^0} \in \mathbb{N}, \quad t = 0, 1, \dots, t_1$$

(optymalny stacjonarny proces biegnący po magistrali N_{s^0}), w którym technologiczna oraz ekonomiczna efektywność wszystkich procesów produkcji $(\bar{y}(t), \bar{y}(t+1))$ jest zawsze maksymalna:

$$\alpha(\bar{y}(t), \bar{y}(t+1)) = \beta(\bar{y}(t), \bar{y}(t+1), \bar{p}) = \alpha_M, \quad t = 0, 1, \dots, t_1 - 1.$$

Uwaga 3. Jeżeli początkowy wektor produkcji y^0 spełnia warunek $\frac{y^0}{\|y^0\|} = s^0 \notin S$ oraz (y^0, t_1) – dopuszczalny proces $\{y(t)\}_{t=0}^{t_1}$ w pewnym okresie $\check{t} < t_1$ dociera do wielopasmowej magistrali $\mathbb{N}$, czyli:

$$\exists s \in S(y(\check{t}) \in N_s \in \mathbb{N}),$$

to istnieje także (y^0, t_1) – dopuszczalny proces $\{\tilde{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$:

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} y(t), & t = 0, 1, \dots, \check{t}, \\ \alpha_M^{t-\check{t}} y(\check{t}), & t = \check{t} + 1, \dots, t_1, \end{cases}$$

który w okresach $\check{t}, \check{t} + 1, \dots, t_1$ biegnie po magistrali N_s (por. uwagę 4 do twierdzenia 1.8). Technologiczna i ekonomiczna efektywność procesów produkcji $(\tilde{y}(t), \tilde{y}(t+1))$ w początkowych okresach $t = 0, 1, \dots, \check{t} - 1$ jest niższa od optymalnej, natomiast począwszy od $t = \check{t}$ do końca horyzontu oba te wskaźniki osiągną maksymalny poziom.

Uwaga 4. Weźmy dwie magistrale $N_s, N_{s'} \in \mathbb{N}$, $s \neq s'$. Jeżeli w pewnym (y^0, t_1) – dopuszczalnym procesie wzrostu $\{\tilde{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$ gospodarka w okresie $\tau < t_1$ znajduje się na magistrali (promieniu) N_s (wytwarza wektor produkcji $\tilde{y}(\tau) \in N_s$) oraz istnieje taki dopuszczalny proces:

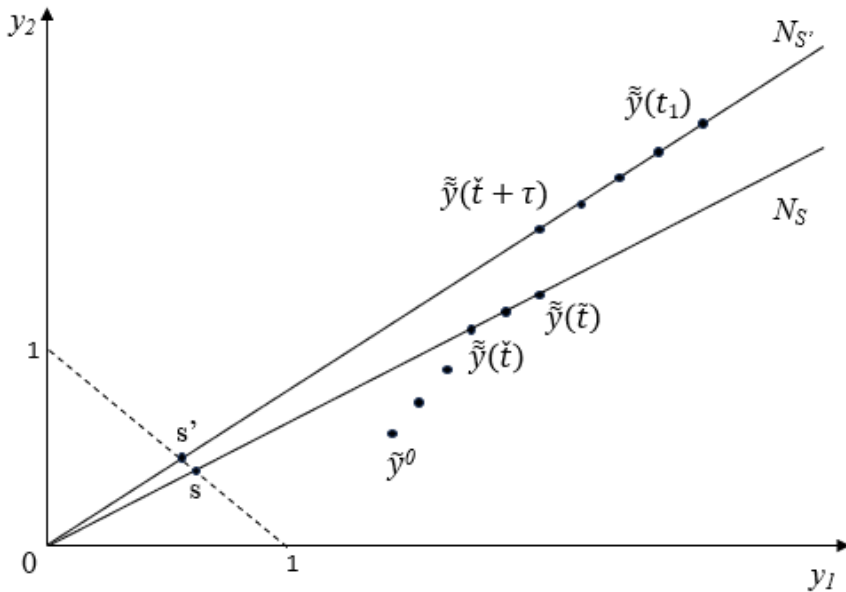
$$(\tilde{y}(\tau), y') \in Z, \tag{2.17}$$

że $y' \in N_{s'}$, wówczas gospodarka może już w następnym okresie wytworzyć produkcję $\tilde{\tilde{y}}(\tau+1) = y'$, przechodząc (z technologiczną efektywnością $\alpha(\tilde{y}(\tau), \tilde{\tilde{y}}(\tau+1)) \leq \alpha_M$) z promienia N_s na promień $N_{s'}$. Weźmy dla przykładu

(y^0, t_1) – dopuszczalny proces $\{\tilde{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$, który w okresie $\check{t} < t_1$ prowadzi do magistrali N_s . Jeżeli obok magistrali N_s istnieje magistrala $N_{s'}$ z takim wektorem $y' \in N_{s'}$, że w pewnym okresie $\tau \in \{\check{t} + 1, \dots, t_1 - 1\}$ zachodzi warunek (2.17), to (y^0, t_1) – dopuszczalny jest także następujący proces $\{\tilde{\tilde{y}}(t)\}_{t=0}^{t_1}$:

$$\tilde{\tilde{y}}(t) = \begin{cases} \tilde{y}(t) = y(t), & t = 0, 1, \dots, \check{t}, \\ \tilde{y}(t) = \alpha_M^{t-\check{t}} y(\check{t}), & t = \check{t} + 1, \dots, \tau, \\ \alpha_M^{t-\tau-1} y', & t = \tau + 1, \dots, t_1, \end{cases} \quad (2.18)$$

który w okresach $t = 0, 1, \dots, \check{t} - 1$ leży poza wielopasmową magistralą N , potem w okresach $t = \check{t}, \check{t} + 1, \dots, \tau$ biegnie po magistrali N_s , a następnie w końcowych okresach $t = \tau + 1, \dots, t_1$ po magistrali $N_{s'}$ (rys. 2.1). Takich „przejść” między magistralami może być oczywiście więcej.



Rysunek 2.1. Przykładowy przebieg (y^0, t_1) – dopuszczalnej trajektorii $\{\tilde{\tilde{y}}(t)\}_{t=0}^{t_1}$ postaci (2.18) w otoczeniu wielopasmowej magistrali $N \subset R_+^2$

2.3. Problem wzrostu docelowego. 'Słaby' efekt magistrali

Interesuje nas zadanie maksymalizacji wartości produkcji mierzonej w cenach von Neumanna w końcowym okresie t_1 horyzontu T :

$$\begin{aligned} \max \langle \bar{p}, y(t_1) \rangle \\ \text{p.w. (2.8), (2.9).} \end{aligned} \tag{2.19}$$

Będący jego rozwiązaniem ciąg $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ nazywamy $(y^0, t_1, \bar{p})$ – optymalnym procesem wzrostu. W rozdziale 1, pkt 1.6 pokazaliśmy, że jeżeli przyjmiemy oznaczenia:

$$R_{y^0,0} = \{y^0\}, R_{y^0,t} = \{y \mid \exists x \in R_{y^0,t-1} (y \in a(x))\}, \quad t = 1, 2, \dots, t_1,$$

gdzie $a(x) = \{y \mid (x, y) \in Z\}$, to zadanie (2.19) jest równoważne z zadaniem:

$$\max_{y \in R_{y^0,t_1}} \langle \bar{p}, y \rangle \tag{2.20}$$

w tym sensie, że wektor $y^* \in R_{y^0,t_1}$ jest rozwiązaniem zadania (2.20) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki $(y^0, t_1, \bar{p})$ – optymalny proces wzrostu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ (rozwiązanie zadania (2.19)), w którym $y^*(t_1) = y^*$. Zbiór R_{y^0,t_1} tworzą wszystkie wektory produkcji możliwe do wytworzenia w końcowym okresie t_1 w gospodarce Gale'a startującej w okresie początkowym $t = 0$ z poziomu produkcji y^0 . Przy przyjętych założeniach, zgodnie z twierdzeniem 1.9, zadanie (2.20) ma rozwiązanie. Tym samym także zadanie (2.19) ma rozwiązanie.

■ **Twierdzenie 2.1. ('Słabe' twierdzenie o wielopasmowej magistrali)** Załóżmy, że zachodzą warunki **(G1)-(G8)** oraz istnieje taki $(y^0, \check{t})$ – dopuszczalny proces $\{\check{y}(t)\}_{t=0}^{\check{t}}$, $\check{t} < t_1$, że $\check{y}(\check{t}) \in \mathbb{N}$. Wtedy dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba naturalna k_ε , że liczba okresów czasu, w których $(y^0, t_1, \bar{p})$ – optymalny proces wzrostu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ (rozwiązanie zadania (2.19)) spełnia warunek:

$$d(y^*(t), \mathbb{N}) \geq \varepsilon \tag{2.21}$$

nie przekracza k_ε . Liczba k_ε nie zależy od długości horyzontu T . Metryka $d(\cdot)$ ma postać (2.11).

Dowód (przebiega podobnie jak d-d twierdzenia 1.10, po zastąpieniu pojedynczej magistrali N przez wielopasmową magistralę $\mathbb{N}$). Z definicji $(y^0, t_1, \bar{p})$ – optymalnego procesu wzrostu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$, wobec (2.3), (2.8) mamy:

$$\langle \bar{p}, y^*(t+1) \rangle \leq \alpha_M \langle \bar{p}, y^*(t) \rangle, \quad t = 0, 1, \dots, t_1 - 1. \quad (2.22)$$

Założmy, że w okresach $\tau_1, \dots, \tau_k < t_1$ zachodzi warunek (2.21). Wówczas, zgodnie z lematem 2.3, istnieje taka liczba $\delta_\varepsilon \in (0, \alpha_M)$, że:

$$\langle \bar{p}, y^*(t+1) \rangle \leq (\alpha_M - \delta_\varepsilon) \langle \bar{p}, y^*(t) \rangle, \quad t = \tau_1, \dots, \tau_k. \quad (2.23)$$

Łącząc (2.22), (2.23), dostajemy:

$$\langle \bar{p}, y^*(t_1) \rangle \leq \alpha_M^{t_1-k} (\alpha_M - \delta_\varepsilon)^k \langle \bar{p}, y^0 \rangle. \quad (2.24)$$

Z założenia istnieje $(y^0, \check{t})$ – dopuszczalny proces $\{\check{y}(t)\}_{t=0}^{\check{t}}$ prowadzący w okresie $\check{t} < t_1$ do wielopasmowej magistrali $\mathbb{N}$. Istnieje zatem taki promień $N_s \in \mathbb{N}$ i taka liczba $\sigma = \|\check{y}(\check{t})\| > 0$, że $\sigma s = \check{y}(\check{t}) \in N_s$ oraz ciąg wektorów produkcji $\{\check{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$:

$$\check{y}(t) = \begin{cases} \check{y}(t), & t = 0, 1, \dots, \check{t}, \\ \sigma \alpha_M^{t-\check{t}} s, & t = \check{t} + 1, \dots, t_1, \end{cases} \quad (2.25)$$

tworzy (y^0, t_1) – dopuszczalny proces utworzony ze „sklejenia” procesu $\{\check{y}(t)\}_{t=0}^{\check{t}}$ i stacjonarnego procesu postaci (2.10) z tempem α_M (dla $t > \check{t}$). Wówczas:

$$\langle \bar{p}, y^*(t_1) \rangle \geq \langle \bar{p}, \check{y}(t_1) \rangle = \sigma \alpha_M^{t_1-\check{t}} \langle \bar{p}, s \rangle > 0. \quad (2.26)$$

Z (2.24), (2.26) wynika nierówność:

$$\sigma \alpha_M^{t_1-\check{t}} \langle \bar{p}, s \rangle \leq \alpha_M^{t_1-k} (\alpha_M - \delta_\varepsilon)^k \langle \bar{p}, y^0 \rangle,$$

a stąd, po przekształceniach, otrzymujemy następujące górne oszacowanie liczby k :

$$k \leq \frac{\ln A}{\ln \alpha_M - \ln(\alpha_M - \delta_\varepsilon)} = B, \quad (2.27)$$

gdzie $0 < A = \max_{s \in S} \frac{\alpha_M^{\check{t}}(\bar{p}, y^0)}{\sigma(\bar{p}, s)} < +\infty$. W charakterze liczby k_ε wystarczy wziąć najmniejszą liczbę naturalną większą od $\max\{0, B\}$. ■

Twierdzenie głosi, że jeżeli choćby jeden dopuszczalny proces wzrostu prowadzi ze stanu początkowego y^0 do wielopasmowej magistrali $\mathbb{N}$, to w długich okresach czasu każdy optymalny proces wzrostu „prawie zawsze” przebiega w jej dowolnie bliskim otoczeniu (kątowym).

Uwaga 1. Podobnie jak w gospodarce z pojedynczą magistralą, również obecnie liczba okresów czasu, w których ekonomiczna efektywność $\beta(y^*(t), y^*(t+1), \bar{p})$ procesów $(y^*(t), y^*(t+1)) \in Z$, $t = 1, 2, \dots, t_1 - 1$, jest niższa od optymalnej o co najmniej δ_ε , zależy od rozmieszczenia poszczególnych elementów ciągu $\tau_1, \dots, \tau_k$ w horyzoncie T . Okresów takich jest jednak zawsze nie więcej niż k_ε (zob. uwagę 2 do twierdzenia 1.10, rozdz. 1, pkt 1.7).

Uwaga 2. Gdy wśród pojedynczych magistral (promieni von Neumanna) tworzących wielopasmową magistralę $\mathbb{N}$ znajdzie się taki promień N_s , którego dodatnim współrzędnym odpowiadają w zadaniu (2.19) także dodatnie współrzędne początkowego wektora produkcji y^0 (w szczególności gdy $y^0 > 0$), wówczas warunek istnienia $(y^0, \check{t})$ – dopuszczalnego procesu prowadzącego do wielopasmowej magistrali $\mathbb{N}$ jest spełniony już w okresie $\check{t} = 1$ (por. uwagę 4 do twierdzenia 1.10 w rozdziale 1).

Uwaga 3. Twierdzenie pozostaje prawdziwe również gdy $(y^0, t_1, \bar{p})$ – optymalny proces wzrostu zastąpimy (y^0, t_1, p) – optymalnym procesem z dowolnym dodatnim wektorem cen p (zob. analogiczną uwagę 5 do twierdzenia 1.10).

Weźmy standardową funkcję użyteczności $u: R_+^n \rightarrow R_+^1$ z rozdziału 1, pkt 1.9, spełniającą warunki **(U1)**, **(U2)**. Niech $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ będzie rozwiązaniem zadania:

$$\max u(y(t_1)) \quad (2.28)$$

p.w. (2.8), (2.9).

Przy przyjętych standardowych założeniach zadanie to, podobnie jak zadanie (2.19), ma rozwiązanie. Nazywamy je tradycyjnie (y^0, t_1, u) – optymalnym procesem wzrostu. O jego magistralnych własnościach mówi poniższe twierdzenie.

■ **Twierdzenie 2.2.** Jeżeli zachodzą warunki **(G1)**–**(G8)**, **(U1)**, **(U2)** oraz istnieje $(y^0, \check{t})$ – dopuszczalny proces $\{\check{y}(t)\}_{t=0}^{\check{t}}$ prowadzący w okresie $\check{t} < t_1$ do wielopasmowej magistrali N , to dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba naturalna k_ε , że liczba okresów czasu, w których rozwiązanie $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ zadania (2.28) spełnia warunek (2.21) nie przekracza k_ε . Liczba k_ε nie zależy od długości horyzontu T .

Dowód. Postępując podobnie jak przy dowodzie twierdzenia 2.1, dochodzimy do warunku (2.24):

$$\langle \bar{p}, y^*(t_1) \rangle \leq \alpha_M^{t_1-k} (\alpha_M - \delta_\varepsilon)^k \langle \bar{p}, y^0 \rangle.$$

Stąd, wobec **(U2)**, otrzymujemy górne ograniczenie wartości funkcji użyteczności:

$$u(y^*(t_1)) \leq a \langle \bar{p}, y^*(t_1) \rangle \leq a \alpha_M^{t_1-k} (\alpha_M - \delta_\varepsilon)^k \langle \bar{p}, y^0 \rangle \quad (2.29)$$

gdzie a jest pewną liczbą dodatnią. Z drugiej strony, zważywszy na definicję (y^0, t_1, u) – optymalnego procesu wzrostu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$, własności **(U1)** funkcji użyteczności oraz postać (2.25) (y^0, t_1) – dopuszczalnego procesu $\{\check{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$, dochodzimy do ograniczenia dolnego:

$$u(y^*(t_1)) \geq u(\check{y}(t_1)) = u(\sigma \alpha_M^{t_1-\check{t}} s) = \sigma \alpha_M^{t_1-\check{t}} u(s) > 0. \quad (2.30)$$

Z (2.29), (2.30) otrzymujemy nierówność:

$$\sigma \alpha_M^{t_1 - \check{t}} u(s) \leq a \alpha_M^{t_1 - k} (\alpha_M - \delta_\varepsilon)^k \langle \bar{p}, y^0 \rangle,$$

co daje oszacowanie (2.27) liczby k , z tym że obecnie $0 < A = \max_{s \in S} \frac{a \alpha_M^{\check{t}} \langle \bar{p}, y^0 \rangle}{\sigma u(s)} < +\infty$. Podobnie jak w twierdzeniu 2.1 w charakterze liczby k_ε wystarczy wziąć najmniejszą liczbę naturalną większą od $\max\{0, B\}$, gdzie $B = \frac{\ln A}{\ln \alpha_M - \ln(\alpha_M - \delta_\varepsilon)}$. ■

Aktualne są uwagi 1, 2 do twierdzenia 2.1.

2.4. ‘Silny’ oraz ‘bardzo silny’ efekt magistrali

Weźmy liczbę $\varepsilon > 0$ i oznaczmy przez $\mathbb{Z}(\varepsilon)$ zbiór dopuszczalnych procesów produkcji $(x, y) \neq 0$ z nakładami i/lub wynikami odległymi o co najmniej ε od wielopasmowej magistrali $\mathbb{N}$ (w metryce $d(\cdot)$, zob. (2.11)):

$$\mathbb{Z}(\varepsilon) = \{(x, y) \in Z \mid d(x, \mathbb{N}) \geq \varepsilon \vee d(y, \mathbb{N}) \geq \varepsilon\}$$

(por. podobny zbiór (1.34) w gospodarce Gale’a z pojedynczą magistralą N ; rozdz. 1, pkt 1.7). Zgodnie z lematem 2.3 efektywność ekonomiczna $\beta(x, y, \bar{p})$ każdego procesu $(x, y) \in \mathbb{Z}(\varepsilon)$ jest niższa od optymalnej o co najmniej $\delta_\varepsilon > 0$. Dowód ‘silnego’ twierdzenia o wielopasmowej magistrali poprzedzimy trzema faktami – odpowiednikami lematów 1.3, 1.4 w gospodarce Gale’a z pojedynczą magistralą (rozdz. 1, pkt 1.7).

■ **Fakt 1.** Jeżeli zachodzą warunki **(G1)-(G8)**, wtedy funkcja $\beta(\cdot, \bar{p})$ jest ciągła na $\mathbb{Z}(\varepsilon)$.

Dowód. Funkcja $\beta(\cdot, \bar{p})$ jest ciągła na zwartym zbiorze $\mathbb{V}(\varepsilon) = \{(x, y) \in \mathbb{Z}(\varepsilon) \mid \|x, y\| = 1\}$ (zob. lemat 2.3). Jest dodatnio jednorodna stopnia 0, więc jest ciągła także na $\mathbb{Z}(\varepsilon)$. ■

■ **Fakt 2.** Gdy zachodzą warunki **(G1)-(G8)**, to:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \max_{(x, y) \in \mathbb{Z}(\varepsilon)} \beta(x, y, \bar{p}) = b(\varepsilon), \quad (2.31)$$

przy czym $b(\varepsilon) < \alpha_M$.

Dowód: zob. lemat 1.3 (2i) – po zastąpieniu zbioru $Z(\varepsilon)$ przez $\mathbb{Z}(\varepsilon)$ oraz zbioru $V(\varepsilon)$ przez $\mathbb{V}(\varepsilon)$. ■

Przyjmijmy oznaczenie $\delta(\varepsilon) = \alpha_M - b(\varepsilon)$, gdzie funkcja $b(\cdot)$ ma postać (2.31). Zgodnie z lematem 2.3:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) \in (0, \alpha_M) \forall (x, y) \in \mathbb{Z}(\varepsilon) (\langle \bar{p}, y \rangle \leq (\alpha_M - \delta(\varepsilon)) \langle \bar{p}, x \rangle). \quad (2.32)$$

Odpowiednikiem warunku **(G11)** w gospodarce Gale’a z pojedynczą magistralą jest obecnie następujący warunek:

(G11’) Efektywność ekonomiczna procesu $(x, y) \in Z \setminus \{0\}$ maleje w miarę oddalania się (w sensie metryki $d(\cdot)$) nakładów x i/lub produkcji y od wielopasmowej magistrali $\mathbb{N}$. Równoważnie funkcja $b(\cdot)$ maleje (czyli funkcja $\delta(\cdot)$ rośnie) na obszarze określoności.

Warunek jest spełniony w szczególności, gdy wszędzie poza Z_{opt} graniczna przestrzeń produkcyjna Gale’a jest stożkiem silnie wypukłym: dla dowolnych liczb $\alpha, \beta > 0$ i każdej pary liniowo niezależnych procesów $(x^1, y^1), (x^2, y^2) \in Z \setminus Z_{opt}$ ich kombinacja liniowa $(x, y) = \alpha(x^1, y^1) + \beta(x^2, y^2)$ jest punktem wewnętrznym przestrzeni produkcyjnej Z .

O zbiorze S wektorów struktury produkcji w optymalnych procesach $(x, y) \in Z_{opt}$ zakładamy, że spełnia następujący warunek:

$$(G12) \quad \exists I = \{i_1, i_2, \dots, i_k \mid 0 < k \leq n\} \forall s \in S (i \in I \Rightarrow s_i > 0 \ \& \ j \notin I \Rightarrow s_j = 0).$$

Ponieważ $(x, y) \in Z_{opt}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $s = \frac{y}{\|y\|} \in S$, warunek ten mówi, że w każdym optymalnym procesie produkcji $(x, y) \in Z_{opt}$ wytwarzane są wyłącznie towary $i_1, i_2, \dots, i_k$. Nie wyklucza to w szczególności przypadku, gdy $k = n$, tj. gdy w każdym optymalnym procesie wytwarzane są wszystkie towary.

■ **Fakt 3.** Jeżeli zachodzą warunki **(G1)-(G8)**, **(G12)** i technologiczna efektywność produkcji $\alpha(\cdot)$ jest funkcją ciągłą na zbiorze $S_{opt} = \{(s, \alpha_M s) | s \in S\} \subset \Omega(1)$ (równoważnie, na $Z_{opt} \subset Z$), to:

$$\forall s \in S_+^n(1) \forall \bar{s} \in S \exists \sigma(s, \bar{s}) \in (0, 1] \forall \delta \in (0, \alpha_M) \exists \varepsilon' > 0$$

$$\left(\|s - \bar{s}\| < \varepsilon' \Rightarrow ((s, \sigma(s, \bar{s})\alpha_M \bar{s}) \in \Omega(1) \wedge \alpha(s, \sigma(s, \bar{s})\alpha_M \bar{s}) \geq \alpha_M - \delta) \right),$$

gdzie:

$$S_+^n(1) = \{x \in R_+^n | \|x\| = 1\}, \quad \Omega(1) = \{(x, y) \in Z | \|x\| = 1\}.$$

Dowód. Weźmy wektor $\bar{s} \in S \subset S_+^n(1)$. Niech $I = \{i | \bar{s}_i > 0\}$. Pokażemy, że istnieje takie $\tilde{\varepsilon}$ -otoczenie wektora $\bar{s} \in S$ w $S_+^n(1)$:

$$U_{\tilde{\varepsilon}}(\bar{s}) = \{s \in S_+^n(1) | \|s - \bar{s}\| < \tilde{\varepsilon}\},$$

że $\forall s \in U_{\tilde{\varepsilon}}(\bar{s}) \forall i \in I (\bar{s}_i > 0)$. Niech $\tilde{\varepsilon} = \min_{i \in I} \bar{s}_i = \bar{s}_k > 0$ oraz $s \in U_{\tilde{\varepsilon}}(\bar{s})$.

Wówczas:

$$\forall i \in I (|s_i - \bar{s}_i| \leq \|s - \bar{s}\| < \bar{s}_k),$$

tzn. $-\bar{s}_k < s_i - \bar{s}_i < \bar{s}_k$, czyli:

$$\forall i \in I (s_i > \bar{s}_i - \bar{s}_k \geq 0).$$

Zważywszy że $\|s\| = \|\bar{s}\| = 1$ stwierdzamy, że istnieje liczba:

$$\lambda(s, \bar{s}) = \min\{\lambda | \lambda s \geq \bar{s}\} = \max_{i \in I} \frac{\bar{s}_i}{s_i} \geq 1.$$

Ponieważ $(\bar{s}, \alpha_M \bar{s}) \in \Omega(1) \subset Z$, więc z **(G4)** dostajemy $(\lambda(s, \bar{s})s, \alpha_M \bar{s}) \in Z$, czyli:

$$(s, \sigma(s, \bar{s})\alpha_M \bar{s}) \in \Omega(1), \tag{2.33}$$

gdzie $\sigma(s, \bar{s}) = \frac{1}{\lambda(s, \bar{s})} \leq 1$.

Funkcja $\sigma(\cdot, \bar{s})$ jest ciągła w punkcie $\bar{s}$, $\sigma(\bar{s}, \bar{s}) = 1$, funkcja $\alpha(\cdot)$ jest ciągła w punkcie $(\bar{s}, \alpha_M \bar{s})$ oraz:

$$\alpha(\bar{s}, \alpha_M \bar{s}) = \max_{(x, y) \in \Omega(1)} \alpha(x, y) = \alpha_M,$$

więc:

$$\forall \delta \in (0, \alpha_M) \exists \varepsilon' > 0 (\|s - \bar{s}\| < \varepsilon' \leq \tilde{\varepsilon} \Rightarrow \alpha(s, \sigma(s, \bar{s})\alpha_M \bar{s}) \geq \alpha_M - \delta). \quad (2.34)$$

Z (2.33), (2.34) wynika teza. ■

Fakt 3 dowodzi, że jeżeli unormowany wektor nakładów s leży dostatecznie blisko któregośkolwiek wektora $\bar{s} \in S$ struktury produkcji na wielopasmowej magistrali $\mathbb{N}$ (oraz $\alpha(\cdot)$ jest funkcją ciągłą na S_{opt}), to istnieje proces, który z efektywnością dowolnie bliską optymalnej z nakładów s prowadzi do wielopasmowej magistrali. Równoważnie: jeżeli wektor nakładów w dopuszczalnym procesie $(x, y) \in Z$ leży dostatecznie blisko wielopasmowej magistrali $\mathbb{N}$ (w sensie metryki $d(\cdot)$) oraz funkcja $\alpha(\cdot)$ jest ciągła na Z_{opt} , to istnieje dopuszczalny proces $(x, \bar{y}) \in Z$ z wektorem produkcji $\bar{y} \in N_{\bar{s}} \in \mathbb{N}$, $\bar{s} = \frac{\bar{y}}{\|\bar{y}\|}$, którego technologiczna efektywność różni się niewiele („dowolnie mało”) od α_M .

Poniższe twierdzenie jest odpowiednikiem twierdzenia 1.11 po zastąpieniu pojedynczej magistrali N wielopasmową magistralą $\mathbb{N}$. Dla zapewnienia przejrzystości wyводу cały dowód przytaczamy w pełnym brzmieniu, mimo że po części jest on powtórzeniem dowodu twierdzenia 1.11.

■ **Twierdzenie 2.3. (*‘Silne’ twierdzenie o wielopasmowej magistrali*)** Niech $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ będzie $(y^0, t_1, \bar{p})$ – optymalnym procesem wzrostu (rozwiązaniem zadania (2.19)) w stacjonarnej gospodarce spełniającej warunki **(G1)**–**(G8)**, **(G11’)**, **(G12)**. Jeżeli istnieje taki $(y^0, \check{t})$ – dopuszczalny proces $\{\check{y}(t)\}_{t=0}^{\check{t}}$, $\check{t} < t_1$, że $\check{y}(\check{t}) \in \mathbb{N}$ oraz technologiczna efektywność produkcji $\alpha(\cdot)$ jest funkcją ciągłą na zbiorze $S_{opt} = \{(s, \alpha_M s) \mid s \in S\}$, to dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka niezależna od długości horyzontu $T = \{0, 1, \dots, t_1\}$ liczba naturalna k_ε , że:

$$\forall t_1 > 2k_\varepsilon \quad \forall t \in \{k_\varepsilon, k_\varepsilon + 1, \dots, t_1 - k_\varepsilon\} (d(y^*(t), \mathbb{N}) < \varepsilon)$$

(metryka $d(\cdot)$ ma postać (2.11)).

Dowód. Pokażemy najpierw, że:

$$\exists \tilde{\varepsilon} > 0 \forall \bar{s} \in S (s \in U_{\tilde{\varepsilon}}(\bar{s}) \Rightarrow \forall i \in I (s_i > 0)), \quad (2.35)$$

gdzie $U_{\tilde{\varepsilon}}(\bar{s}) = \{s \in S_+^n \mid \|s - \bar{s}\| < \tilde{\varepsilon}\}$, $I = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$. Istotnie, ponieważ zbiór $S \subset R_+^n$ jest zwarty, to wobec (G12):

$$\forall i \in I \exists v_i = \min_{\bar{s} \in S} \bar{s}_i > 0.$$

Niech $\tilde{\varepsilon} = \min_{i \in I} v_i = v_k = v > 0$, $\bar{s} \in S$ oraz $s \in U_{\tilde{\varepsilon}}(\bar{s})$. Wówczas (podobnie jak przy dowodzie faktu 3) stwierdzamy, że:

$$\forall i \in I (|s_i - \bar{s}_i| \leq \|s - \bar{s}\| < v),$$

tzn. $-v < s_i - \bar{s}_i < v$, czyli $s_i > \bar{s}_i - v \geq 0$, $i \in I$.

Weźmy dowolną liczbę $\varepsilon > 0$, liczbę $\delta(\varepsilon) \in (0, \alpha_M)$ spełniającą warunek (2.32), liczbę $\delta \in (0, \delta(\varepsilon))$ oraz odpowiadającą jej liczbę $\varepsilon' \in (0, \min\{\varepsilon, \tilde{\varepsilon}\})$ z faktu 3. Zgodnie ze ‘słabym’ twierdzeniem o magistrali istnieje taka liczba naturalna $k_{\varepsilon'}$, że jeżeli $t_1 > k_{\varepsilon'}$, to:

$$d(y^*(t), \mathbb{N}) < \varepsilon' \quad (2.36)$$

co najmniej w jednym okresie $t < t_1$. Niech $t_1 > 2k_{\varepsilon'}$ oraz τ_1 będzie pierwszym, a τ_2 ostatnim okresem, w którym w horyzoncie $T = \{0, 1, \dots, t_1\}$ zachodzi warunek (2.36). Wówczas:

$$\exists \bar{s} \in S (d(y^*(\tau_1), \mathbb{N}) = \|s^*(\tau_1) - \bar{s}\| < \varepsilon'),$$

gdzie $s^*(\tau_1) = \frac{y^*(\tau_1)}{\|y^*(\tau_1)\|} \geq 0$. W świetle (2.35), zważywszy że $\varepsilon' < \tilde{\varepsilon}$, mamy:

$$s_i^*(\tau_1) = \frac{y_i^*(\tau_1)}{\|y^*(\tau_1)\|} > 0, i \in I,$$

natomiast w myśl faktu 3:

$$\left(\frac{y^*(\tau_1)}{\|y^*(\tau_1)\|}, \sigma^* \alpha_M \bar{s} \right) \in \Omega(1),$$

czyli:

$$(y^*(\tau_1), \rho \sigma^* \alpha_M \bar{s}) \in Z, \quad (2.37)$$

oraz $\alpha(s^*(\tau_1), \sigma^* \alpha_M \bar{s}) \geq \alpha_M - \delta$, gdzie $\sigma^* = \sigma(s^*(\tau_1), \bar{s})$, $\rho = \|y^*(\tau_1)\| > 0$.

Ponieważ $(\bar{s}, \alpha_M \bar{s}) \in Z$, zatem (wobec **(G1)**):

$$(\rho \sigma^* \alpha_M \bar{s}, \rho \sigma^* \alpha_M^2 \bar{s}) \in Z,$$

$$(\rho \sigma^* \alpha_M^2 \bar{s}, \rho \sigma^* \alpha_M^3 \bar{s}) \in Z,$$

itd. Stąd i z (2.37) płynie wniosek, że (y^0, t_1) – dopuszczalny proces $\{\tilde{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$:

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} y^*(t), & t = 0, 1, \dots, \tau_1, \\ \rho \sigma^* \alpha_M^{t-\tau_1} \bar{s}, & t = \tau_1 + 1, \dots, t_1. \end{cases}$$

Dalej dowód przebiega podobnie jak dowód twierdzenia 1.11. Z definicji optymalnego procesu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ otrzymujemy warunek:

$$\langle \bar{p}, y^*(t_1) \rangle \geq \langle \bar{p}, \tilde{y}(t_1) \rangle = \rho \sigma^* \alpha_M^{t_1-\tau_1} \langle \bar{p}, \bar{s} \rangle > 0. \quad (2.38)$$

Założmy, że k' jest liczbą okresów między τ_1 i τ_2 , w których:

$$d(y^*(t), \mathbb{N}) \geq \varepsilon.$$

Wówczas z (2.3), (2.8), (2.32) dostajemy:

$$\langle \bar{p}, y^*(t_1) \rangle \leq (\alpha_M - \delta(\varepsilon'))^{t_1-\tau_2} \alpha_M^{\tau_2-\tau_1-k'} (\alpha_M - \delta(\varepsilon))^{k'} \langle \bar{p}, y^*(\tau_1) \rangle. \quad (2.39)$$

Łącząc (2.38), (2.39), dochodzimy do warunku:

$$0 < \rho \sigma^* \alpha_M^{t_1-\tau_1} \langle \bar{p}, \bar{s} \rangle \leq (\alpha_M - \delta(\varepsilon'))^{t_1-\tau_2} \alpha_M^{\tau_2-\tau_1-k'} (\alpha_M - \delta(\varepsilon))^{k'} \langle \bar{p}, y^*(\tau_1) \rangle,$$

czyli:

$$\left(\frac{\alpha_M - \delta(\varepsilon)}{\alpha_M} \right)^{k'} \geq \left(\frac{\alpha_M}{\alpha_M - \delta(\varepsilon')} \right)^{t_1-\tau_2} \frac{\rho \sigma^* \langle \bar{p}, \bar{s} \rangle}{\langle \bar{p}, y^*(\tau_1) \rangle} > 0,$$

lub inaczej:

$$\left(\frac{\alpha_M - \delta(\varepsilon)}{\alpha_M}\right)^{k'} \geq \left(\frac{\alpha_M}{\alpha_M - \delta(\varepsilon')}\right)^{t_1 - \tau_2} \frac{\sigma^* \langle \bar{p}, \bar{s} \rangle}{\langle \bar{p}, s^*(\tau_1) \rangle} > 0. \quad (2.40)$$

Zgodnie z faktem 3:

$$\alpha = \alpha(s^*(\tau_1), \sigma^* \alpha_M \bar{s}) \geq \alpha_M - \delta,$$

zatem $\alpha s^*(\tau_1) \leq \sigma^* \alpha_M \bar{s}$, a więc także $(\alpha_M - \delta)s^*(\tau_1) \leq \sigma^* \alpha_M \bar{s}$. Wówczas:

$$(\alpha_M - \delta) \langle \bar{p}, s^*(\tau_1) \rangle \leq \sigma^* \alpha_M \langle \bar{p}, \bar{s} \rangle,$$

czyli:

$$\frac{\sigma^* \langle \bar{p}, \bar{s} \rangle}{\langle \bar{p}, s^*(\tau_1) \rangle} \geq \frac{\alpha_M - \delta}{\alpha_M} > 0. \quad (2.41)$$

Z (2.40), (2.41) dostajemy:

$$\left(\frac{\alpha_M - \delta(\varepsilon)}{\alpha_M}\right)^{k'} \geq \left(\frac{\alpha_M}{\alpha_M - \delta(\varepsilon')}\right)^{t_1 - \tau_2} \frac{\alpha_M - \delta}{\alpha_M} > 0,$$

a ponieważ $0 < \delta(\varepsilon') < \delta(\varepsilon) < \alpha_M$ (gdyż $0 < \varepsilon' < \varepsilon$), funkcja $\delta(\cdot)$ jest rosnąca zgodnie z **(G11')** oraz $\delta \in (0, \delta(\varepsilon))$ i $t_1 - \tau_2 \geq 0$, więc ostatecznie dochodzimy do warunku:

$$\left(\frac{\alpha_M - \delta(\varepsilon)}{\alpha_M}\right)^{k'} > \left(\frac{\alpha_M}{\alpha_M - \delta(\varepsilon')}\right)^{t_1 - \tau_2} \frac{\alpha_M - \delta(\varepsilon)}{\alpha_M} > 0,$$

z którego wynika, że:

$$\left(\frac{\alpha_M - \delta(\varepsilon)}{\alpha_M}\right)^{k' - 1} > 1,$$

lub równoważnie:

$$(\alpha_M - \delta(\varepsilon))^{k' - 1} > \alpha_M^{k' - 1}.$$

Jedyną nieujemną liczbą całkowitą spełniającą ten warunek jest $k' = 0$. Aby zakończyć dowód, wystarczy przyjąć $k_\varepsilon = k_{\varepsilon'}$. ■

Aktualne są uwagi 1, 2 do twierdzenia 2.1. ‘Silne’ twierdzenie o wielopasmowej magistrali pozostaje prawdziwe po zastąpieniu kryterium maksymalizacji wartości produkcji kryterium maksymalizacji użyteczności produkcji wytworzonej w końcowym okresie horyzontu T . O funkcji użyteczności $u(\cdot)$ zakładamy, że poza standardowymi warunkami (U1), (U2) spełnia następujący warunek:

$$(U3') \quad \forall s \in S(u(s) = a(\bar{p}, s)),$$

będący modyfikacją warunku (U3) z rozdz. 1. pkt 1.9 i głoszący, że hiperpłaszczyzna $y_{n+1} = a(\bar{p}, \cdot)$ aproksymująca funkcję użyteczności z góry jest na wielopasmowej magistrali (dla każdego $y \in \mathbb{N}$) styczna do jej wykresu. Pozostałe warunki nie ulegają zmianie.

Twierdzenie 2.4. Załóżmy, że:

- zachodzą warunki (G1)-(G8), (G11'), (G12), (U1), (U2), (U3'),
- trajektoria $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ jest (y^0, t_1, u) – optymalnym procesem wzrostu (rozwiązaniem zadania (2.28)),
- istnieje taki $(y^0, \check{t})$ – dopuszczalny proces $\{\check{y}(t)\}_{t=0}^{\check{t}}$, że $\check{t} < t_1$ oraz $\check{y}(\check{t}) \in \mathbb{N}$,
- funkcja $\alpha(\cdot)$ jest ciągła na $S_{opt} = \{(s, \alpha_M s) \mid s \in S\}$.

Wtedy dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba naturalna k_ε (niezależna od długości horyzontu T), że:

$$\forall t_1 > 2k_\varepsilon \quad \forall t \in \{k_\varepsilon, k_\varepsilon + 1, \dots, t_1 - k_\varepsilon\} (d(y^*(t), \mathbb{N}) < \varepsilon).$$

Dowód. Podstawiając w warunkach (2.38), (2.39) $u(y^*(t))$ zamiast $\langle \bar{p}, y^*(t_1) \rangle$ oraz $u(s)$ zamiast $\langle \bar{p}, s \rangle$ i powtarzając dowód twierdzenia 2.3, dochodzimy do pary nierówności:

$$u(y^*(t_1)) \geq \rho \sigma^* \alpha_M^{t_1 - \tau_1} u(s) > 0,$$

$$u(y^*(t_1)) \leq a(\bar{p}, y^*(t_1)) \leq a(\alpha_M - \delta(\varepsilon'))^{t_1 - \tau_2} \alpha_M^{\tau_2 - \tau_1 - k'} (\alpha_M \delta(\varepsilon))^{k'} \langle \bar{p}, y^*(\tau_1) \rangle.$$

Łącząc je, po uwzględnieniu **(U3')**, dochodzimy do warunku (2.40). Dalej dowód przebiega jak w twierdzeniu 2.3. ■

Aktualne są uwagi 1, 2 do twierdzenia 2.1. O szczególnym przypadku, gdy w gospodarce Gale'a z wielopasmową magistralą sam $(y^0, t_1, \bar{p})$ – optymalny proces w pewnym okresie $\check{t} < t_1$ dociera do wielopasmowej magistrali, mówi kolejne twierdzenie.

■ **Twierdzenie 2.5. ('Bardzo silne' twierdzenie o wielopasmowej magistrali)** Jeżeli zachodzą warunki **(G1)-(G8)** oraz $(y^0, t_1, \bar{p})$ – optymalny proces $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ (rozwiązanie zadania (2.19)) w pewnym okresie $\check{t} < t_1$ dociera do wielopasmowej magistrali $\mathbb{N}$:

$$y^*(\check{t}) \in \mathbb{N}, \quad (2.42)$$

to:

$$\forall t \in \{\check{t} + 1, \dots, t_1\} (y^*(t) \in \mathbb{N}).$$

Dowód. Inkluzja (2.42) oznacza, że istnieje promień $N_s \in \mathbb{N}$, do którego w okresie $\check{t} < t_1$ prowadzi $(y^0, t_1, \bar{p})$ – optymalny proces $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$:

$$y^*(\check{t}) \in N_s \in \mathbb{N}.$$

Dalej dowód przebiega analogicznie jak dowód twierdzenia 1.12, po podstawieniu $N = N_s$. ■

Przy założeniach **(G1)-(G8)** 'bardzo silne' twierdzenie o wielopasmowej magistrali pozostaje prawdziwe także po zastąpieniu $(y^0, t_1, \bar{p})$ – optymalnego procesu wzrostu procesem (y^0, t_1, u) – optymalnym, w którym funkcja użyteczności spełnia warunki **(U1), (U2), (U3')**. Dowód przebiega podobnie jak dowód twierdzenia 1.12 po zastąpieniu pojedynczej magistrali N przez promień $N_s \in \mathbb{N}$.

2.5. Wzrost optymalny w gospodarce z kryterium maksymalizacji użyteczności produkcji wytworzonej w całym horyzoncie T

Zastępując w zadaniu wzrostu docelowego (2.28) funkcję użyteczności zdefiniowaną na wektorach produkcji wytworzonej w końcowym okresie t_1 horyzontu T ogólniejszym kryterium oceny procesów w postaci zdyskontowanej użyteczności produkcji wytworzonej w gospodarce we wszystkich okresach horyzontu, otrzymujemy następujący problem optymalnego wzrostu:

$$\max \sum_{t=0}^{t_1} (1 - \gamma)^t u(y(t)) \quad (2.43)$$

pw. (2.8), (2.9).

Jest to zadanie (1.66) z rozdziału 1, w którym nie obowiązuje obecnie założenie o istnieniu w gospodarce Gale’a tylko jednej magistrali produkcyjnej. Parametr $\gamma \in (0,1)$ jest stopą dyskonta użyteczności produkcji. Każdy ciąg wektorów produkcji $\{y(t)\}_{t=0}^{t_1}$ spełniający warunki (2.8), (2.9) nazywamy tradycyjnie (y^0, t_1) – dopuszczalnym procesem wzrostu. Ciąg $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ będący rozwiązaniem zadania (2.43) nazywamy (y^0, T, u) – optymalnym procesem wzrostu. Przy założeniach (G1)-(G7), (U1) zadanie to ma rozwiązanie.

Poniższe twierdzenie jest odpowiednikiem ‘słabego’ twierdzenia 1.19 o magistrali w stacjonarnej gospodarce Gale’a z pojedynczą magistralą i kryterium maksymalizacji zdyskontowanej użyteczności produkcji wytworzonej w całym horyzoncie T .

■ **Twierdzenie 2.6.** Załóżmy, że:

- zachodzą warunki (G1)-(G8), (U1), (U2),
- istnieje taki $(y^0, \check{t})$ – dopuszczalny proces $\{\check{y}(t)\}_{t=0}^{\check{t}}$, $\check{t} < t_1$, że $\check{y}(\check{t}) \in N_{\check{s}} \in \mathbb{N}$,
- zdyskontowane tempo wzrostu produkcji $(1 - \gamma)\alpha_M$ jest większe od 1.

Wtedy dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka niezależna od długości horyzontu T liczba naturalna k_ε , że liczba okresów czasu, w których (y^0, T, u) – optymalny proces wzrostu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ – rozwiązanie zadania (2.43) – spełnia warunek (2.21) nie przekracza k_ε .

Dowód przebiega podobnie jak dowód twierdzenia 1.19 po uwzględnieniu lematu 2.3 zamiast lematu 1.1, zastąpieniu warunku (1.28) przez warunek (2.21) oraz magistrali N przez promień $N_\delta \in \mathbb{N}$, do którego z założenia w okresie $\check{t} < t_1$ prowadzi $(y^0, \check{t})$ – dopuszczalny proces $\{\check{y}(t)\}_{t=0}^{\check{t}}$. ■

Aktualne są uwagi 1, 2 do twierdzenia 2.1. Twierdzenie pozostaje prawdziwe po zastąpieniu kryterium maksymalizacji zdyskontowanej użyteczności produkcji w zadaniu (2.43) przez kryterium maksymalizacji wartości produkcji wytworzonej w całym horyzoncie T (mierzonej w cenach von Neumanna):

$$\max \sum_{t=0}^{t_1} \langle \bar{p}, y(t) \rangle$$

pw. (2.8), (2.9).

Dowód przebiega podobnie jak dowód twierdzenia 1.19. Należy przyjąć $\gamma = 0$, a warunki (1.70), (1.71) zastąpić warunkami:

$$\sum_{t=1}^{t_1} \langle \bar{p}, y^*(t) \rangle \leq \langle \bar{p}, y^0 \rangle \left[\sum_{t=1}^{t_1-k} \alpha_M^t + \alpha_M^{t_1-k} \sum_{\tau=1}^k (\alpha_M - \delta_\varepsilon)^\tau \right],$$

$$\sum_{t=1}^{t_1} \langle \bar{p}, y^*(t) \rangle \geq \sigma \langle \bar{p}, \check{s} \rangle \sum_{\tau=1}^{t_1-\check{t}} \alpha_M^\tau > 0.$$

Przy dowodzie, w warunku (1.72) parametr C przyjmuje wówczas wartość $C = \frac{\sigma \langle \bar{p}, \check{s} \rangle}{\langle \bar{p}, y^0 \rangle}$.

Uzupełniając założenia twierdzenia 2.6 o warunek (**U3'**), otrzymujemy następującą ‘bardzo silną’ wersję efektu magistrali w gospodarce Gale’a z wieloma magistralami oraz ogólnym kryterium maksymalizacji zdyskontowanej użyteczności produkcji wytworzonej w horyzoncie T .

■ **Twierdzenie 2.7.** Jeżeli zachodzą warunki (G1)-(G8), (U1), (U2), (U3') oraz sam (y^0, T, u) – optymalny proces $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ w pewnym okresie $\check{t} < t_1$ prowadzi do wielopasmowej magistrali N (spełnia warunek (2.42)), to pozostaje na niej do końca horyzontu T .

Dowód przebiega podobnie jak dowód twierdzenia 1.20, po zastąpieniu pojedynczej magistrali N przez promień $N_{\check{s}} \in \mathbb{N}$, do którego w okresie $\check{t} < t_1$ dociera (y^0, T, u) – optymalny proces oraz uwzględnieniu lematu 2.3 zamiast lematu 1.1.

■

W twierdzeniu nie wymaga się, aby zdyskontowane tempo wzrostu produkcji $(1 - \gamma)\alpha_M$ było większe od 1.

Podobnie jak ‘słabe’ twierdzenie 2.6, również ‘bardzo silne’ twierdzenie 2.7 o wielopasmowej magistrali pozostaje aktualne po zastąpieniu kryterium maksymalizacji zdyskontowanej użyteczności produkcji w zadaniu (2.43) przez kryterium maksymalizacji wartości produkcji wytworzonej w całym horyzoncie T . Dowód przebiega analogicznie jak dowód twierdzenia 1.20 po zastąpieniu pojedynczej magistrali N przez promień $N_{\check{s}} \in \mathbb{N}$, do którego dociera $(y^0, T, \bar{p})$ – optymalny proces, uwzględnieniu lematu 2.3 zamiast lematu 1.1 oraz zamiast (U3) warunku (U3'), z którego w szczególności wynika, że $u(\check{s}) = a\langle \bar{p}, \check{s} \rangle$.

ROZDZIAŁ 3

Niestacjonarna gospodarka Gale'a z graniczną technologią

Założenie stacjonarności gospodarki, które można usprawiedliwić w krótkich okresach czasu, w dłuższej perspektywie jest nie do przyjęcia. Jest bowiem niezgodne z obserwacją realnych procesów gospodarczych, a ponadto (co wydaje się co najmniej równie ważne) jest sprzeczne z zasadą racjonalnego gospodarowania. Nowe technologie sprzyjają generalnie racjonalnemu gospodarowaniu zasobami, ochronie środowiska, etc. W gospodarce Gale'a syndromem postępu technologicznego jest dynamika w czasie przestrzeni produkcyjnych.

Szczególna wersja niestacjonarnej gospodarki Gale'a z przestrzeniami produkcyjnymi będącymi ucieleśnieniem zmiennej technologii zbieżnej z czasem do pewnej technologii granicznej jest przedmiotem naszego zainteresowania w tym rozdziale, zob. [61], [70], [71], [74-76].

3.1. Przestrzenie produkcyjne w niestacjonarnej gospodarce Gale'a. Graniczna przestrzeń produkcyjna

Czas zmienia się skokowo, $t = 0, 1, \dots$. Przez $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ oznaczamy nieujemny wektor towarów zużywanych, a przez $y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$ nieujemny wektor towarów wytwarzanych w gospodarce w okresie t . Jeżeli z nakładów $x(t)$ możliwe jest wytworzenie produkcji $y(t)$, wtedy o parze $(x(t), y(t))$ mówimy, że opisuje technologicznie dopuszczalny proces produkcji w okresie t . Niepusty zbiór $Z(t)$ wszystkich technologicznie dopuszczalnych procesów produkcji z dowolną metryką $\rho: Z(t) \times Z(t) \rightarrow R_+^1$ (miarą odległości między procesami $z^1, z^2 \in Z(t)$) (zob. rozdz. 1, pkt 1.1) tworzy przestrzeń produkcyjną gospodarki w okresie czasu t . Inkluzja $(x, y) \in Z(t)$ oznacza, że w świetle technologii, jaką dysponuje gospodarka w okresie t , z wektora nakładów x możliwe jest wytworzenie wektora produkcji y . W razie potrzeby zamiennie stosujemy

zapis $(x(t), y(t)) \in Z(t)$. Przestrzenie produkcyjne $Z(t)$, $t = 0, 1, \dots$, spełniają następujące warunki:

$$(GL1) \quad \forall \lambda \geq 0 \quad \forall (x, y) \in Z(t) \quad (\lambda(x, y) \in Z(t)).$$

$$(GL2) \quad \forall (x^1, y^1) \in Z(t) \quad \forall (x^2, y^2) \in Z(t) \quad ((x^1, y^1) + (x^2, y^2) \in Z(t)).$$

$$(GL3) \quad (x, y) \in Z(t) \text{ \& } x = 0 \Rightarrow y = 0.$$

$$(GL4) \quad \forall (x, y) \in Z(t) \quad \forall x' \geq x \quad ((x', y) \in Z(t)).$$

$$(GL5) \quad \forall (x, y) \in Z(t) \quad \forall 0 \leq y' \leq y \quad ((x, y') \in Z(t)).$$

$$(GL6) \quad \text{Przestrzenie produkcyjne } Z(t) \text{ s\k{a} zbiorami domkni\k{e}tymi w } R^{2n}.$$

$$(GL7) \quad Z(t) \subseteq Z(t+1) \subseteq \bar{Z} \text{ i } \bar{Z} \text{ jest takim najmniejszym zborem domkni\k{e}tym w } R^{2n} \text{ zawieraj\k{a}cym wszystkie przestrzenie produkcyjne } Z(t), \text{ \é je\k{z}eli } (x, y) \in \bar{Z} \text{ oraz } x = 0, \text{ to } y = 0 \text{ (tj. zachodzi warunek (GL3))}.$$

Przestrzenie produkcyjne $Z(t)$ spełniające warunki (GL1)-(GL6) nazywamy gale'owskimi. Zgodnie z inkluzją $Z(t) \subseteq Z(t+1)$ rozwój technologii w gospodarce zwiększa z czasem jej możliwości wytwórcze. Zapis $(x, y) \in \bar{Z}$ oznacza, że graniczna technologia, której ucieleśnieniem jest **graniczna przestrzeń produkcyjna** $\bar{Z}$, umożliwia wytworzenie wektora produkcji y z wektora nakładów x . Gospodarkę z przestrzeniami produkcyjnymi spełniającymi warunki (GL1)-(GL7) nazywamy **niestacjonarną gospodarką Gale'a z graniczną technologią**. Warunki (GL1)-(GL6) są odpowiednikami warunków (G1)-(G6) w stacjonarnej gospodarce Gale'a z rozdziału 1.

Przestrzenie produkcyjne $Z(t)$, $t = 0, 1, \dots$, oraz graniczna przestrzeń produkcyjna $\bar{Z}$ są stożkami domkniętymi w R^{2n} z wierzchołkami w 0.

■ **Twierdzenie 3.1.** Jeżeli zachodzą warunki (GL1)-(GL7), to:

$$(i) \quad (x, y) \in \bar{Z} \Leftrightarrow \exists (x(t), y(t)) \in Z(t), t = 0, 1, \dots \left(\lim_t (x(t), y(t)) = (x, y) \right),$$

(2i) graniczna przestrzeń produkcyjna $\bar{Z}$ jest gale'owska, tj. spełnia warunki (GL1)-(GL6).

Dowód. (i) (Konieczność) Niech $(x, y) \in \bar{Z}$. Utwórzmy ciąg $\{(x(t), y(t))\}_{t=0}^{\infty}$, w którym $\forall t \left(x(t) = x \ \& \ (x(t), y(t)) \in Z(t) \right)$ oraz:

$$y(t) = \arg \min_{(x, y') \in Z(t)} \|y' - y\|. \quad (3.1)$$

Ciąg taki istnieje, gdyż $\forall t$ zadanie (3.1) ma rozwiązanie (norma $\|\cdot\|$ jest bowiem funkcją ciągłą, a zbiór $a_t(x) = \{y' | (x, y') \in Z(t)\}$ jest niepusty i zwarty, zob. tw. 3.3 (6i)). Pokażemy, że tak zbudowany ciąg jest zbieżny do granicy (x, y) . Faktycznie, ponieważ $\forall t \ (x(t) = x)$, wystarczy wykazać, że $\lim_t y(t) = y$. Z inkluzji $Z(t) \subseteq Z(t+1) \subseteq \bar{Z} = \text{dom } \bigcup_{t=0}^{\infty} Z(t)$ wnioskujemy, że:

$$\|y(t+1) - y\|, \quad (3.2)$$

tj. ciąg $\{y(t)\}_{t=0}^{\infty}$ jest ograniczony, więc zawiera podciąg $\{y(t_k)\}_{k=1}^{\infty}$ zbieżny do pewnej granicy y^0 . Załóżmy, że $y^0 \neq y$. Z definicji przestrzeni $Z(t)$ oraz $\bar{Z} = \text{dom } \bigcup_{t=0}^{\infty} Z(t)$ wynika, że:

$$y^0 \leq y. \quad (3.3)$$

Niech $\tilde{y} = \frac{1}{2}(y^0 + y)$. Wówczas $y^0 \leq \tilde{y} \leq y$ oraz $(x, \tilde{y}) \in \bar{Z}$ (zgodnie z (GL5)). Jednocześnie:

$$(x, \tilde{y}) \notin \text{dom}(\bigcup_{t=0}^{\infty} Z(t)).$$

Istotnie, gdyby $(x, \tilde{y}) \in \text{dom } \bigcup_{t=0}^{\infty} Z(t)$, to istniałby ciąg procesów $(x, \tilde{y}(t)) \in Z(t)$, $t = 0, 1, \dots$, zbieżny do $(x, \tilde{y})$, gdzie $\tilde{y} \geq y^0$ i zgodnie z (3.3) mielibyśmy:

$$\|\tilde{y} - y\| < \|y^0 - y\|,$$

wbrew definicji (3.1) ciągu $\{y(t)\}_{t=0}^{\infty}$. Zatem $\lim_k y(t_k) = y$. Wówczas na podstawie (3.2) wnioskujemy, że $\lim_t y(t) = y$.

(Dostateczność) Ponieważ $(x(t), y(t)) \in Z(t) \subseteq \bar{Z}$, $t = 0, 1, \dots$, oraz $\lim_t (x(t), y(t)) = (x, y)$ i graniczna przestrzeń produkcyjna $\bar{Z}$ jest domknięta w R^{2n} , zatem $(x, y) \in \bar{Z}$.

(2i) Pokażemy, że graniczna przestrzeń produkcyjna spełnia warunki **(GL1)**, **(GL2)**, **(GL4)** oraz **(GL5)**. Weźmy dowolne dwa procesy $(x^1, y^1), (x^2, y^2) \in \bar{Z}$ oraz dowolne liczby $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$. Zgodnie z definicją zbioru $\bar{Z}$ istnieją ciągi procesów $(x^1(t), y^1(t)), (x^2(t), y^2(t)) \in Z(t)$, $t = 0, 1, \dots$, zbieżne (odpowiednio) do $(x^1, y^1), (x^2, y^2)$. Jednocześnie:

$$(x(t), y(t)) = \lambda_1(x^1(t), y^1(t)) + \lambda_2(x^2(t), y^2(t)) \in Z(t),$$

czyli $\lim_t (x(t), y(t)) = \lambda_1(x^1, y^1) + \lambda_2(x^2, y^2) \in \bar{Z}$. Tym samym spełnione są warunki **(GL1)**, **(GL2)**. Podobnie, jeżeli $(x, y) \in \bar{Z}$, to istnieje ciąg procesów $(x(t), y(t)) \in Z(t)$, $t = 0, 1, \dots$, zbieżny do (x, y) . Niech $x' \geq x$, $0 \leq y' \leq y$, $\tilde{x}(t) = x(t) + x' - x$ oraz:

$$\tilde{y}(t) = (\max\{0, y_1(t) + y'_1 - y_1\}, \dots, \max\{0, y_n(t) + y'_n - y_n\}).$$

Wówczas $\tilde{x}(t) \geq x(t)$, $0 \leq \tilde{y}(t) \leq y(t)$, $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) \in Z(t)$, $\lim_t (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) = (x', y') \in \bar{Z}$ (gdyż przestrzeń produkcyjna $\bar{Z}$ jest zbiorem domkniętym w R^{2n}) i spełnione są warunki **(GL4)**, **(GL5)**.

Warunki **(GL3)**, **(GL6)** są spełnione na mocy założenia. ■

3.2. Technologiczna i ekonomiczna efektywność produkcji. Równowaga von Neumanna w gospodarce z graniczną technologią

Ustalmy okres czasu t . Z każdym niezerowym procesem $(x, y) \in Z(t) \setminus \{0\}$ związany jest wskaźnik $\alpha(x, y) = \max \{\alpha \mid \alpha x \leq y\}$ technologicznej efektywno-

ści procesu (x, y) w okresie t . O wybranych własnościach określonej na przestrzeniach $Z(t)$, $t = 0, 1, \dots, \bar{Z}$, dodatnio jednorodnej stopnia 0 funkcji $\alpha(\cdot)$ mówi następujące twierdzenie.

■ **Twierdzenie 3.2.** Jeżeli zachodzą warunki **(GL1)-(GL7)**, to:

$$(i) \quad \forall t \exists (\bar{x}(t), \bar{y}(t)) \in Z(t) \left(\alpha(\bar{x}(t), \bar{y}(t)) = \max_{(x,y) \in Z(t) \setminus \{0\}} \alpha(x, y) = \alpha_{M,t} \geq 0 \right)$$

oraz:

$$\exists (\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{Z} \left(\alpha(\bar{x}, \bar{y}) = \max_{(x,y) \in \bar{Z} \setminus \{0\}} \alpha(x, y) = \alpha_M \geq 0 \right).$$

$$(2i) \quad \forall t \quad (\alpha_{M,t} \leq \alpha_{M,t+1} \leq \alpha_M).$$

(3i) Jeżeli graniczny proces $(\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{Z}$ z maksymalną technologiczną efektywnością $\alpha(\bar{x}, \bar{y}) = \alpha_M$ jest dodatni, to:

$$\lim_t \alpha_{M,t} = \alpha_M > 0$$

oraz istnieje taki okres czasu t' , że $\forall t \geq t' \quad (\alpha_{M,t} > 0)$.

Dowód. (i) Dowód przebiega analogicznie jak dowód twierdzenia 1.2(i) (rozdz. 1, pkt 1.2; po zastąpieniu przestrzeni Z przez $Z(t)$, $\bar{Z}$).

(2i) Zgodnie z **(GL7)** $Z(t) \subseteq Z(t+1) \subseteq \bar{Z}$, stąd:

$$\begin{aligned} \alpha_{M,t} &= \max_{(x,y) \in Z(t) \setminus \{0\}} \alpha(x, y) = \alpha(\bar{x}(t), \bar{y}(t)) \leq \alpha_{M,t+1} = \max_{(x,y) \in Z(t+1) \setminus \{0\}} \alpha(x, y) = \\ &= \alpha(\bar{x}(t+1), \bar{y}(t+1)) \leq \alpha_M = \max_{(x,y) \in \bar{Z} \setminus \{0\}} \alpha(x, y) = \alpha(\bar{x}, \bar{y}). \end{aligned}$$

(3i) Ciąg $\{\alpha_{M,t}\}_{t=0}^{\infty}$ jest niemalejący i ograniczony, więc istnieje $\lim_t \alpha_{M,t} = \bar{\alpha} \leq \alpha_M$. Załóżmy, że $\bar{\alpha} < \alpha_M$. Wówczas:

$$\forall t \quad (\alpha_{M,t} \leq \alpha_{M,t+1} \dots \leq \bar{\alpha} < \alpha_M). \quad (3.4)$$

Zgodnie z twierdzeniem 3.1:

$$\exists \{(x(t), y(t))\}_{t=0}^{\infty} \forall t (x(t), y(t)) \in Z(t) \& \left(\lim_t (x(t), y(t)) = (\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{Z} \right).$$

W punkcie $(\bar{x}, \bar{y}) > 0$ funkcja $\alpha(\cdot)$ jest ciągła, więc:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists t_{\varepsilon} (t > t_{\varepsilon} \Rightarrow \alpha_{M,t} \geq \alpha(x(t), y(t)) > \alpha_M - \varepsilon).$$

Biorąc $\varepsilon = \alpha_M - \bar{\alpha} (> 0)$ dostajemy:

$$\forall t > t_{\varepsilon} (\alpha_{M,t} \geq \alpha(x(t), y(t)) > \alpha_M - \varepsilon = \bar{\alpha}),$$

co przeczy (3.4) i kończy dowód. ■

Proces $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ nazywamy *optymalnym procesem produkcji w niestacjonarnej gospodarce w okresie t*.

Proces $(\bar{x}, \bar{y})$ nazywamy *optymalnym procesem produkcji w niestacjonarnej gospodarce z graniczną technologią (granicznie optymalnym procesem produkcji)*. Procesy te są określone z dokładnością do struktury.

Liczbę:

$$\alpha_{M,t} = \max_{(x,y) \in Z(t) \setminus \{0\}} \alpha(x, y) = \alpha(\bar{x}(t), \bar{y}(t)), \quad \alpha_M = \max_{(x,y) \in \bar{Z} \setminus \{0\}} \alpha(x, y) = \alpha(\bar{x}, \bar{y})$$

nazywamy *optymalnym wskaźnikiem technologicznej efektywności produkcji* (odpowiednio) *w niestacjonarnej gospodarce w okresie t* oraz *w niestacjonarnej gospodarce z graniczną technologią*.

W celu uproszczenia dalszych wywodów zakładamy, że graniczna przestrzeń produkcyjna spełnia następujący warunek regularności (zob. rozdz. 1, pkt 1.3; komentarz do twierdzenia 1.5):

$$(GL8) \quad \forall (\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{Z} (\alpha(\bar{x}, \bar{y}) = \alpha_M \Rightarrow \bar{y} > 0).$$

Jeżeli zachodzą warunki (GL1)-(GL8), to:

$$\exists (\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{Z} (\alpha_M \bar{x} = \bar{y} > 0). \quad (3.5)$$

Mówiąc dalej o granicznie regularnej gospodarce, mamy na myśli gospodarkę spełniającą ten warunek. Niech $(\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{Z}$ będzie granicznie optymalnym procesem produkcji (spełniającym warunek (3.5)). Wówczas:

$$\frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|} = \frac{\alpha_M^{-1}\bar{y}}{\|\alpha_M^{-1}\|} = \frac{\bar{y}}{\|\bar{y}\|} = \bar{s} > 0.$$

Wektor $\bar{s}$ charakteryzuje strukturę produkcji (nakładów) w granicznie optymalnym procesie $(\bar{x}, \bar{y})$. Półprostą:

$$\bar{N} = \{\lambda\bar{s} | \lambda > 0\}$$

nazywamy *magistralą produkcyjną (promieniem von Neumanna) w niestacjonarnej gospodarce Gale'a z graniczną technologią*.

Zastępując w twierdzeniu 1.5 przestrzeń produkcyjną Z graniczną przestrzenią $\bar{Z}$ oraz warunki (G1)-(G7) na (GL1)-(GL8), dochodzimy do konkluzji, że w niestacjonarnej gospodarce Gale'a z graniczną technologią spełniającą warunki (GL1)-(GL8) istnieje taki granicznie optymalny proces $(\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{Z}$ oraz takie ceny $\bar{p}$, że zachodzą warunki:

$$\alpha_M \bar{x} \leq \bar{y}, \quad (3.6)$$

$$\forall (x, y) \in \bar{Z} \ (\langle \bar{p}, y \rangle - \alpha_M \langle \bar{p}, x \rangle \leq 0), \quad (3.7)$$

$$\langle \bar{p}, \bar{y} \rangle > 0, \quad (3.8)$$

czyli:

$$\beta(x, y, \bar{p}) = \frac{\langle \bar{p}, y \rangle}{\langle \bar{p}, x \rangle} \leq \alpha_M$$

(wszędzie, gdzie $\langle \bar{p}, x \rangle \neq 0$) oraz:

$$\beta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}) = \alpha_M > 0,$$

gdzie $\alpha(\bar{x}, \bar{y}) = \alpha_M$. O trójce $\{\alpha_M, (\bar{x}, \bar{y}), \bar{p}\}$ mówimy, że *charakteryzuje niestacjonarną gospodarkę Gale’a z graniczną technologią w optymalnym stanie równowagi von Neumanna* (tworzy *granicznie optymalny stan równowagi*).

3.3. Optymalne procesy wzrostu w gospodarce z graniczną technologią i pojedynczą magistrą

Weźmy optymalny proces produkcji $(\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{Z}$. Niech $\bar{N} = \{\lambda \bar{s} | \lambda > 0\}$ będzie odpowiadającą mu magistrą produkcyjną. W celu zapewnienia jednoznaczności magistrali zakładamy, że:

$$(GL9) \quad \forall (x, y) \in \bar{Z} \setminus \{0\} (x \notin \bar{N} \vee y \notin \bar{N} \Rightarrow \beta(x, y, \bar{p}) < \alpha_M),$$

czyli:

$$\forall (x, y) \in \bar{Z} \setminus \{0\} (x \notin \bar{N} \vee y \notin \bar{N} \Rightarrow \langle \bar{p}, y \rangle < \alpha_M \langle \bar{p}, x \rangle).$$

Jest to odpowiednik warunku **(G10)** z rozdziału 1. Aktualnie pozostaje twierdzenie 1.7 o jednoznaczności magistrali produkcyjnej po zastąpieniu przestrzeni produkcyjnej Z przez graniczną przestrzeń $\bar{Z}$ oraz warunków **(G1)-(G7)**, **(G9)** przez warunki **(GL1)-(GL9)**.

Nietrudno zauważyć, że jeżeli zachodzą warunki **(GL1)-(GL9)**, to w niestacjonarnej gospodarce Gale’a z graniczną technologią:

- ceny $\bar{p}$ w równowadze von Neumanna są dodatnie,
- $\forall (x, y) \in \bar{Z} \setminus \{0\} (x \notin \bar{N} \vee y \notin \bar{N} \Rightarrow \alpha(x, y) < \alpha_M)$.

Istotnie, niech trójka $\{\alpha_M, (\bar{x}, \bar{y}), \bar{p}\}$ tworzy stan równowagi w niestacjonarnej gospodarce z graniczną technologią. Zgodnie z (3.5) istnieje w szczególności taki (optymalny) proces $(\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{Z}$, że $\alpha_M \bar{x} = \bar{y} > 0$ (tj. $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{N}$). Załóżmy, że $\bar{p}_i = 0$. Wówczas (wobec **(GL4)**):

$$(\tilde{x}, \bar{y}) = (\bar{x} + e^i, \bar{y}) \in \bar{Z},$$

gdzie $e^i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ jest wektorem n -wymiarowym z jedynką na i -tym miejscu, $\tilde{x} \notin \bar{N}$. Jednocześnie:

$$\beta(\tilde{x}, \bar{y}, \bar{p}) = \frac{\langle \bar{p}, \bar{y} \rangle}{\langle \bar{p}, \tilde{x} \rangle} = \frac{\langle \bar{p}, \bar{y} \rangle}{\langle \bar{p}, \bar{x} \rangle} = \beta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}) = \alpha_M,$$

co jest sprzeczne z **(GL9)**. Do podobnego wniosku dochodzimy biorąc zamiast procesu $(\tilde{x}, \bar{y}) \in \bar{Z}$ proces $(\bar{x}, \tilde{y}) \in \bar{Z}$ z wektorem produkcji $\tilde{y} = (\bar{y}_1, \dots, \tilde{y}_i, \dots, \bar{y}_n)$, $0 \leq \tilde{y}_i < \bar{y}_i$.

Weźmy teraz dowolny proces $(x, y) \in \bar{Z} \setminus \{0\}$, w którym $x \notin \bar{N}$ lub $y \notin \bar{N}$. Załóżmy wbrew tezie, że $\alpha(x, y) = \alpha_M$. Wówczas $\alpha_M x \leq y$ oraz:

$$\begin{aligned} (x', y') &= (x, \alpha_M x) \in \bar{Z}, \quad (x'', y'') = (y, \alpha_M y) \in \bar{Z}, \quad \frac{x'}{\|x'\|} = \frac{x}{\|x\|} \neq \bar{s}, \quad \frac{y''}{\|y''\|} = \\ &= \frac{\alpha_M y}{\|\alpha_M y\|} = \frac{y}{\|y\|} \neq \bar{s}, \end{aligned}$$

czyli $x', y' \notin \bar{N}$ oraz $x'', y'' \notin \bar{N}$. Natomiast:

$$\beta(x', y', \bar{p}) = \frac{\langle \bar{p}, y' \rangle}{\langle \bar{p}, x' \rangle} = \frac{\langle \bar{p}, \alpha_M x \rangle}{\langle \bar{p}, x \rangle} = \alpha_M, \quad \beta(x'', y'', \bar{p}) = \frac{\langle \bar{p}, y'' \rangle}{\langle \bar{p}, x'' \rangle} = \frac{\langle \bar{p}, \alpha_M y \rangle}{\langle \bar{p}, y \rangle} = \alpha_M,$$

co pozostaje w sprzeczności z **(GL9)**.

Równie łatwo zauważyć, że gdy zachodzi warunek **(GL9)**, to:

$$\alpha(\bar{x}, \bar{y}) = \alpha_M \Leftrightarrow \alpha_M \bar{x} = \bar{y}.$$

Weźmy graniczny proces produkcji $(x, y) \in \bar{Z}$. Z **(GL1)-(GL9)** wynika następująca własność niestacjonarnej gospodarki z graniczną przestrzenią produkcyjną $\bar{Z}$ (charakterystyczna także dla stacjonarnej gospodarki Gale'a ze stałą w czasie przestrzenią produkcyjną Z ; zob. rozdz. 1, pkt 1.5, lemat 1.1):

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon \in (0, \alpha_M) \forall (x, y) \in \bar{Z} (d(x, \bar{N}) \geq \varepsilon \vee d(y, \bar{N}) \geq \varepsilon \Rightarrow \beta(x, y, \bar{p}) \leq \\ \leq \alpha_M - \delta_\varepsilon), \end{aligned} \tag{3.9}$$

gdzie, podobnie jak dotąd, przez $d(x, \bar{N}) = \left\| \frac{x}{\|x\|} - \bar{s} \right\|$, $d(y, \bar{N}) = \left\| \frac{y}{\|y\|} - \bar{s} \right\|$ oznaczamy odległość kątową wektora nakładów x oraz produkcji y od magistrali $N = \{\lambda \bar{s} | \lambda > 0\}$. Dowód przebiega podobnie jak dowód lematu 1.1 z rozdziału 1, po zastąpieniu przestrzeni produkcyjnej Z przez graniczną przestrzeń $\bar{Z}$ oraz warunków (G1)-(G9) przez warunki (GL1)-(GL9).

Ustalmy horyzont $T = \{0, 1, \dots, t_1\}$, $t_1 < +\infty$. Niech $y^0 \geq 0$ będzie danym początkowym wektorem produkcji. Ciąg wektorów $\{y(t)\}_{t=0}^{t_1}$ spełniających warunki:

$$(y(t), y(t+1)) \in Z(t+1), \quad t = 0, 1, \dots, t_1 - 1, \quad (3.10)$$

$$y(0) = y^0 \geq 0 \quad (3.11)$$

tworzy (y^0, t_1) – dopuszczalny proces wzrostu (trajektorię produkcji). Przy przyjętych założeniach procesy takie istnieją $\forall y^0 \geq 0 \quad \forall t_1 < +\infty$.

Niech $x \geq 0$ będzie dowolnym wektorem nakładów oraz:

$$a_t(x) = \{y | (x, y) \in Z(t)\}, \quad a(x) = \{y | (x, y) \in \bar{Z}\}.$$

■ **Twierdzenie 3.3.** Jeżeli przestrzenie produkcyjne $Z(t)$, $t = 0, 1, \dots$, spełniają warunki (GL1)-(GL7), to przekształcenia technologiczne $a_t(\cdot)$, $t = 0, 1, \dots$, mają następujące własności:

- (i) $\forall t \quad \forall \lambda \geq 0 \quad \forall x \geq 0 \quad (a_t(\lambda x) = \lambda a_t(x)).$
- (2i) $\forall t \quad \forall x^1 \geq 0 \quad \forall x^2 \geq 0 \quad (a_t(x^1) + a_t(x^2) \subseteq a_t(x^1 + x^2)).$
- (3i) $\forall t \quad (a_t(0) = \{0\}).$
- (4i) $\forall t \quad \forall x \geq 0 \quad \forall x' \geq x \quad \forall y \in a_t(x) \quad (y \in a_t(x')).$
- (5i) $\forall t \quad \forall y \geq 0 \quad \forall 0 \leq y' \leq y \quad \forall y \in a_t(x) \quad (y' \in a_t(x)).$

(6i) $\forall t \forall x \geq 0$ zbiory $a_t(x)$ są niepuste, zwarte (ograniczone i domknięte w R^n) oraz wypukłe.

(7i) Przekształcenia $a_t(\cdot)$ są półciągłe.

(8i) $\forall t \forall x \geq 0 (a_t(x) \subseteq a_{t+1}(x))$.

(9i) Własnościami (i)-(7i) charakteryzuje się także przekształcenie technologiczne $a(\cdot)$.

Dowód. (i)-(7i) Dowód przebiega analogicznie jak dowód twierdzenia 1.1 (po zastąpieniu multifunkcji $a(\cdot)$ przez multifunkcję $a_t(\cdot)$ oraz warunków (G1)-(G6) przez (GL1)-(GL6)).

(8i) Własność jest konsekwencją inkluzji $Z(t) \subseteq Z(t+1)$, $t = 0, 1, \dots$ (warunek (GL7)).

(9i) Gdy zachodzą warunki (GL1)-(GL7), wtedy zgodnie z twierdzeniem 3.1(2i) graniczna przestrzeń produkcyjna $\bar{Z}$ jest gale'owska, tj. spełnia warunki (GL1)-(GL6), zatem własnościami (i)-(7i) charakteryzuje się również multifunkcja $a(\cdot)$, c.n.d. ■

Wprost z (GL7) wynika ponadto, że:

$$\forall t \forall x \geq 0 (a_t(x) \subseteq a(x)).$$

Niech:

$$R_{y^0,0} = \{y^0\},$$

$$R_{y^0,t} = \{y | \exists x \in R_{y^0,t-1} (y \in a_t(x))\} = \bigcup_{x \in R_{y^0,t-1}} a_t(x), \quad t = 1, 2, \dots, t_1.$$

Przy założeniach (GL1)-(GL6) zbiory $R_{y^0,t}$ są niepuste, zwarte i wypukłe (dowód przebiega analogicznie jak dowód lematu 1.2, rozdz. 1, pkt. 1.6; po zastąpieniu przestrzeni produkcyjnej Z przez $Z(t)$, a w konsekwencji multifunkcji $a(\cdot)$ przez $a_t(\cdot)$, $t = 0, 1, \dots$). Innymi słowy $\forall y^0 \geq 0 \forall t_1 < +\infty$ istnieją (y^0, t_1) – dopuszczalne procesy wzrostu.

Rozpatrzmy najpierw zadanie maksymalizacji wartości produkcji (mierzonej w cenach von Neumanna) wytworzonej w ostatnim okresie t_1 horyzontu $T = \{0, 1, \dots, t_1\}$ (zadanie wzrostu docelowego):

$$\begin{aligned} & \max \langle \bar{p}, y(t_1) \rangle \\ & \text{p.w. (3.10), (3.11)} \\ & (\text{wektor } y^0 \text{ ustalony}) \end{aligned} \tag{3.12}$$

równoważne z zadaniem:

$$\max_{y \in R_{y^0, t_1}} \langle \bar{p}, y \rangle,$$

które przy przyjętych założeniach ma rozwiązanie $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$. Nazywamy je $(y^0, t_1, \bar{p})$ – *optymalnym procesem wzrostu (trajektorią produkcji) w niestacjonarnej gospodarce Gale’a z graniczną technologią*.

W twierdzeniach mówiących o magistralnej stabilności optymalnych procesów wzrostu istotną rolę gra warunek zapewniający możliwość dotarcia gospodarki do magistrali (w jakimkolwiek, choćby jednym, dopuszczalnym procesie; zob. rozdz.1, uwaga 3 do twierdzenia 1.10), który w niestacjonarnej gospodarce z graniczną technologią przyjmuje następującą postać:

(GL10) Istnieje taki $(y^0, \check{t} + 1)$ – dopuszczalny proces $\{\check{y}(t)\}_{t=0}^{\check{t}+1}$, $\check{t} < t_1$, że:

$$\alpha(\check{y}(t), \check{y}(t+1)) = \alpha_M.$$

Poniższe twierdzenie jest odpowiednikiem twierdzenia 1.10.

■ **Twierdzenie 3.4. (‘Słabe’ twierdzenie o magistrali)** W niestacjonarnej gospodarce Gale’a z graniczną technologią spełniającą warunki **(GL1)-(GL10)** dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba naturalna k_ε (niezależna od długości horyzontu T), że liczba okresów czasu, w których $(y^0, t_1, \bar{p})$ – optymalny proces $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ (rozwiązanie zadania (3.12)) spełnia warunek (1.28) (po podstawieniu $\bar{N}$ zamiast N) nie przekracza k_ε .

Dowód (przebiega podobnie jak dowód twierdzenia 1.10 po podstawieniu granicznej przestrzeni produkcyjnej $\bar{Z}$ zamiast Z). Zgodnie z (3.10):

$$(y^*(t), y^*(t+1)) \in Z(t+1) \subseteq \bar{Z}, \quad t = 0, 1, \dots, t_1 - 1,$$

zatem wobec (3.7):

$$\langle \bar{p}, y^*(t+1) \rangle \leq \alpha_M \langle \bar{p}, y^*(t) \rangle, \quad t = 0, 1, \dots, t_1 - 1.$$

Po uwzględnieniu (3.11) otrzymujemy nierówność:

$$\langle \bar{p}, y^*(t_1) \rangle \leq \alpha_M^{t_1} \langle \bar{p}, y^0 \rangle. \quad (3.13)$$

Jeżeli w okresach $\tau_1, \dots, \tau_k < t_1$ zachodzi warunek (1.28), to w świetle (3.9):

$$\langle \bar{p}, y^*(t+1) \rangle \leq (\alpha_M - \delta_\varepsilon) \langle \bar{p}, y^*(t) \rangle, \quad t = \tau_1, \dots, \tau_k. \quad (3.14)$$

Z (3.13), (3.14) dostajemy:

$$\langle \bar{p}, y^*(t_1) \rangle \leq \alpha_M^{t_1-k} (\alpha_M - \delta_\varepsilon)^k \langle \bar{p}, y^0 \rangle. \quad (3.15)$$

Zgodnie z **(GL10)** (y^0, t_1) – dopuszczalny jest następujący proces $\{\tilde{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$:

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} \check{y}(t), & t = 0, 1, \dots, \check{t}, \\ \sigma \alpha_M^{t-\check{t}} \bar{s}, & t = \check{t} + 1, \dots, t_1 \end{cases}$$

($\sigma = \|\check{y}(\check{t})\| > 0$; $\bar{s}$ jest wektorem struktury produkcji na magistrali $\bar{N}$), a wówczas:

$$\langle \bar{p}, y^*(t_1) \rangle \geq \langle \bar{p}, \tilde{y}(t_1) \rangle = \sigma \alpha_M^{t_1-\check{t}} \langle \bar{p}, \bar{s} \rangle > 0. \quad (3.16)$$

Łącząc (3.15), (3.16), po przekształceniach dochodzimy do warunku:

$$\left(\frac{\alpha_M - \delta_\varepsilon}{\alpha_M} \right)^k \geq \frac{\sigma \langle \bar{p}, \bar{s} \rangle}{\alpha_M^{\check{t}} \langle \bar{p}, y^0 \rangle} > 0,$$

który pozwala na oszacowanie liczby k :

$$k \leq \frac{\ln A}{\ln \alpha_M - \ln(\alpha_M - \delta_\varepsilon)} = B,$$

gdzie $A = \frac{\alpha_M^{\check{t}} \langle \bar{p}, y^0 \rangle}{\sigma \langle \bar{p}, \bar{s} \rangle} > 0$. W celu zakończenia dowodu w charakterze liczby k_ε wystarczy wziąć najmniejszą liczbę naturalną większą od $\max \{0, B\}$. ■

Uwaga 1. Podobnie jak w gospodarce z pojedynczą magistralą, również obecnie liczba okresów czasu, w których ekonomiczna efektywność $\beta(y^*(t), y^*(t+1), \bar{p})$ procesów $(y^*(t), y^*(t+1)) \in Z$, $t = 1, 2, \dots, t_1 - 1$ jest niższa od optymalnej o co najmniej δ_ε , zależy od rozmieszczenia poszczególnych elementów ciągu $\tau_1, \dots, \tau_k$ w horyzoncie T . Okresów takich jest jednak zawsze nie więcej niż k_ε .

Uwaga 2. Mający naturalne uzasadnienie warunek **(GL10)** (zob. uwagę 3 do twierdzenia 1.10) informuje dodatkowo, że w niestacjonarnej gospodarce ze zmienną technologią magistrala istnieje co najmniej od okresu $\check{t}$ (wcześniej może istnieć, choć nie musi).

Uwaga 3. Twierdzenie pozostaje prawdziwe także bez warunku **(GL10)**, gdy warunek początkowy (3.11) zastąpimy silniejszym warunkiem:

$$y(0) = y^0 > 0$$

oraz założymy, że granicznie optymalny proces produkcji $(\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{Z}$ spełnia nie tylko postulat regularności, ale jest także dopuszczalnym procesem w gospodarce Gale’a we wszystkich okresach czasu $t = 0, 1, \dots$, czyli $\forall t \geq 0 ((\bar{x}, \bar{y}) \in Z(t))$. Warunek **(GL10)** jest wówczas spełniony dla $\check{t} = 1$, a teza twierdzenia 3.2(2i) przyjmuje postać: $\forall t \geq 0 (\alpha_{M,t} = \alpha_M)$.

Uwaga 4. Podobnie jak ‘słabe’ twierdzenia o magistrali prezentowane w rozdziałach 1, 2, również twierdzenie 3.4 pozostaje prawdziwe, gdy $(y^0, t_1, \bar{p})$ – optymalny proces wzrostu zastąpimy (y^0, t_1, p) – optymalnym procesem z dowolnym dodatnim wektorem cen p .

Uwaga 5. Twierdzenie pozostaje aktualne, gdy warunek **(GL8)** zastąpimy warunkiem słabej regularności:

$$\textbf{(GL8')} \quad (\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{Z} \ \& \ \alpha(\bar{x}, \bar{y}) = \alpha_M \Rightarrow \exists t_s + \infty \exists \{y(t)\}_{t=0}^{t_s} \\ \left((y(t-1), y(t)) \in \bar{Z}, t = 1, \dots, t_s; y(0) = \bar{y}, y(t_s) > 0 \right)$$

(zob. rozdz. 1, pkt 1.3, komentarz do twierdzenia 1.5).

Przy tym założeniu dodatni wektor $\bar{s}$ struktury produkcji na magistrali zostaje w twierdzeniu 3.4 zastąpiony przez półdodatni wektor $\bar{s} \geq 0$.

Uwaga 6. Twierdzenie jest prawdziwe także po zastąpieniu w zadaniu (3.12) kryterium maksymalizacji wartości produkcji mierzonej w cenach von Neumanna w końcowym okresie horyzontu T przez kryterium maksymalizacji użyteczności produkcji:

$$\max u(y(t_1)) \\ \text{p.w. (3.10), (3.11),}$$

z funkcją użyteczności $u(\cdot)$ spełniającą warunki **(U1)-(U2)** (rozdz. 1, pkt 1.9).

Przy dowodzie ‘silnego’ twierdzenia o magistrali w niestacjonarnej gospodarce Gale’a z graniczną technologią istotną rolę gra lemat 1.4 z rozdziału 1. Należy tylko pamiętać, że obecnie obowiązują warunki **(GL1)-(GL9)**, wektor $\bar{s}$ struktury produkcji na magistrali jest w świetle **(GL8)** dodatni, zatem $I = \{1, 2, \dots, n\}$, a zamiast przestrzeni produkcyjnej Z mamy graniczną przestrzeń $\bar{Z}$. Treść i dowód lematu nie ulegają zmianie. Aktualne pozostają również treść oraz dowody lematów 1.1, 1.3 z tą różnicą, że zamiast przestrzeni Z (w gospodarce ze stałą w czasie technologią produkcji) obecnie mamy graniczną przestrzeń produkcyjną $\bar{Z}$, której zamiast zbiorów $Z(\varepsilon)$, $V(\varepsilon)$ odpowiadają zbiory:

$$\bar{Z}(\varepsilon) = \{(x, y) \in \bar{Z} \mid d(x, \bar{N}) \geq \varepsilon \vee d(y, \bar{N}) \geq \varepsilon\},$$

$$\bar{V}(\varepsilon) = \left\{ (x, y) \in \bar{Z} \mid \|x, y\| = 1 \text{ \& } \left(d(x, \bar{N}) = \left\| \frac{x}{\|x\|} - \bar{s} \right\| \geq \varepsilon \vee d(y, \bar{N}) = \left\| \frac{y}{\|y\|} - \bar{s} \right\| \geq \varepsilon \right) \right\}.$$

W myśl lematu 1.1 zbiór $\bar{V}(\varepsilon)$ jest zwarty, a zgodnie z lematem 1.3:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \max_{(x,y) \in \bar{Z}(\varepsilon)} \beta(x, y, \bar{p}) = \max_{(x,y) \in \bar{V}(\varepsilon)} \beta(x, y, \bar{p}) = b(\varepsilon) < \alpha_M.$$

Przy założeniach **(GL1)-(GL9)** funkcja $b(\cdot)$ jest nierosnąca, $b(\varepsilon) \in (0, \alpha_M)$ oraz $b(\varepsilon) \rightarrow \alpha_M$ przy $\varepsilon \rightarrow 0$. Zatem jeżeli $\delta(\varepsilon) = \alpha_M - b(\varepsilon)$, wtedy $\delta(\cdot)$ jest funkcją niemalejącą, $\delta(\varepsilon) \rightarrow 0$ gdy $\varepsilon \rightarrow 0$. Analogicznie jak w przypadku stacjonarnej gospodarki Gale'a (z niezmienną w czasie technologią) zakładamy, że:

(GL11) Funkcja $b(\cdot)$ maleje (równoważnie funkcja $\delta(\cdot)$ rośnie) na obszarze określoności.

Zgodnie z tym warunkiem efektywność ekonomiczna procesów produkcji maleje w miarę jak struktura nakładów/wyników odbiega w nich coraz bardziej od optymalnej.

■ **Twierdzenie 3.5. ('Silne' twierdzenie o magistrali)** Weźmy $(y^0, t_1, \bar{p})$ – optymalny proces wzrostu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$, rozwiązanie zadania (3.12). Jeżeli niestacjonarna gospodarka Gale'a z graniczną technologią spełnia warunki **(GL1)-(GL11)** oraz funkcja $\alpha(\cdot)$ jest ciągła w punkcie $(\bar{s}, \alpha_M \bar{s})$, to $\forall \varepsilon > 0$ istnieje taka liczba naturalna k_ε (niezależna od długości horyzontu T), że:

$$\forall t_1 > \check{t} + 2k_\varepsilon \quad \forall t \in \{\check{t} + k_\varepsilon, \check{t} + k_\varepsilon + 1, \dots, t_1 - k_\varepsilon\} (d(y^*(t), \bar{N}) < \varepsilon)$$

(metryka $d(\cdot)$ ma postać (1.28), po podstawieniu $\bar{N}$ zamiast N).

Dowód. Weźmy dowolną liczbę $\varepsilon > 0$, liczbę $\delta(\varepsilon) \in (0, \alpha_M)$ spełniającą warunek (3.9), liczbę $\delta \in (0, \delta(\varepsilon))$ oraz odpowiadającą jej liczbę $\varepsilon' \in (0, \min\{\varepsilon, \bar{\varepsilon}\})$ z lematu 1.4 spełniającą warunek $U_{\varepsilon'}(\bar{s}) = \{s \in R^n \mid \|s - \bar{s}\| < \varepsilon'\}$ (taka liczba istnieje, gdyż $\bar{s} > 0$). Zgodnie ze 'słabym' twierdzeniem o magistrali istnieje taka liczba naturalna $k_{\varepsilon'}$, że jeżeli $t_1 > k_{\varepsilon'}$, to:

$$d(y^*(t), \bar{N}) = \left\| \frac{y^*(t)}{\|y^*(t)\|} - \bar{s} \right\| < \varepsilon' \quad (3.17)$$

co najmniej raz w horyzoncie $T = \{0, 1, \dots, t_1\}$. Wektor $s^*(t) = \frac{y^*(t)}{\|y^*(t)\|}$ w (3.17) jest oczywiście dodatni. Niech $t_1 > \check{t} + 2k_{\varepsilon'}$ oraz τ_1 będzie pierwszym (po $\check{t}$), a τ_2 ostatnim okresem, w którym w horyzoncie T zachodzi ten warunek. Dalej dowód przebiega analogicznie jak dowód twierdzenia 1.11, po zastąpieniu przestrzeni produkcyjnej Z przez graniczną przestrzeń $\bar{Z}$. ■

Aktualne pozostają uwagi 1-3 oraz 5 do twierdzenia 3.4. Aktualna jest również uwaga 6, jeżeli funkcja użyteczności $u(\cdot)$ obok (U1), (U2) spełnia jeszcze warunek (U3) (rozdz. 1, pkt 1.9).

Prostą konsekwencją twierdzenia 3.4 jest następujące ‘bardzo silne’ twierdzenie o magistrali w niestacjonarnej gospodarce Gale’a z graniczną technologią.

■ **Twierdzenie 3.6. (*‘Bardzo silne’ twierdzenie o magistrali*)** Niech niestacjonarna gospodarka Gale’a z graniczną przestrzenią produkcyjną $\bar{Z}$ spełnia warunki (GL1)-(GL9). Jeżeli w gospodarce takiej sam $(y^0, t_1, \bar{p})$ – optymalny proces wzrostu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ w pewnym okresie $\check{t} < t_1$ prowadzi do magistrali $\bar{N}$, czyli spełnia warunek:

$$\alpha(y^*(\check{t}), y^*(\check{t} + 1)) = \alpha_M, \quad (3.18)$$

to:

$$\forall t \in \{\check{t} + 1, \dots, t_1\} (y^*(t) \in \bar{N}).$$

Dowód przebiega podobnie jak dowód twierdzenia 1.12, po zastąpieniu przestrzeni Z przez graniczną przestrzeń produkcyjną $\bar{Z}$ oraz warunku $y^*(\check{t}) \in \bar{N}$ przez warunek (3.18), który zapewnia istnienie procesu $\{\tilde{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$:

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} y^*(t), & t = 0, 1, \dots, \check{t}, \\ \sigma \alpha_M^{t-\check{t}} \bar{s}, & t = \check{t} + 1, \dots, t_1, \end{cases}$$

takiego samego jak (y^0, t_1) – dopuszczalny proces (1.43) w twierdzeniu 1.12. Dalejsza część dowodu – jak w twierdzeniu 1.12. ■

Aktualne pozostają uwagi 2, 5 do twierdzenia 3.5. Uwaga 6, podobnie jak w przypadku twierdzenia 3.5, jest aktualna, gdy funkcja użyteczności $u(\cdot)$ obok **(U1)**, **(U2)** spełnia jeszcze warunek **(U3)** (rozdz. 1, pkt 1.9).

Na zakończenie poświęcimy jeszcze chwilę uwagi zadaniu maksymalizacji wartości produkcji mierzonej w cenach von Neumanna w niestacjonarnej gospodarce z graniczną technologią wytworzonej w całym horyzoncie T :

$$\max \sum_{t=0}^{t_1} \langle \bar{p}, y(t) \rangle \quad (3.19)$$

p.w. (3.10), (3.11).

Jest to analog zadania (1.47) z rozdziału 1. Przy przyjętych założeniach zadanie to ma rozwiązanie, które, podobnie jak rozwiązanie zadania (1.47), nazywamy $(y^0, T, \bar{p})$ – optymalnym procesem wzrostu. Odpowiednikiem twierdzeń 1.14, 1.15 jest następujące twierdzenie.

■ **Twierdzenie 3.7. (i)** Jeżeli w niestacjonarnej gospodarce z graniczną technologią:

- zachodzą warunki **(GL1)**–**(GL10)**,
- optymalne tempo na magistrali $\alpha_M > 1$,

to dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba naturalna k_ε , że liczba okresów czasu, w których $(y^0, T, \bar{p})$ – optymalny proces $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ – rozwiązanie zadania (3.19) – spełnia warunek (1.28) (po podstawieniu $\bar{N}$ zamiast N) nie przekracza k_ε . Liczba k_ε nie zależy od t_1 .

(2i) Jeżeli zachodzą warunki **(GL1)**–**(GL9)** oraz $(y^0, T, \bar{p})$ – optymalny proces wzrostu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ w okresie $\check{t} < t_1$ spełnia warunek $\alpha(y^*(\check{t}), y^*(\check{t} + 1)) = \alpha_M$ (prowadzi do magistrali $\bar{N}$), to pozostaje na niej do końca horyzontu T .

Dowód obu części twierdzenia przebiega podobnie jak dowody twierdzeń 1.14, 1.15, po zastąpieniu przestrzeni Z przez graniczną przestrzeń produkcyjną $\bar{Z}$ (na-
leży pamiętać, że $Z(t) \subseteq Z(t+1) \subseteq \bar{Z}$, $t = 0, 1, \dots$). ■

W części (i) twierdzenia 3.7 aktualne są uwagi 1-3, 5 do twierdzenia 1.4. Do części (2i) odnoszą się uwagi 2, 5. W obu przypadkach aktualna pozostaje uwaga 6, o ile funkcja użyteczności $u(\cdot)$ spełnia warunki (U1)-(U3) z rozdz. 1, pkt 1.9.

3.4. Optymalne procesy wzrostu w gospodarce z graniczną technologią i wieloma magistralami

O jednoznaczności magistrali produkcyjnej w niestacjonarnej gospodarce z graniczną technologią spełniającej warunki (GL1)-(GL9) przesądza warunek (GL9). Przyjrzymy się optymalnym procesom wzrostu, gdy w gospodarce warunek ten nie obowiązuje. Przy założeniach (GL1)-(GL8) aktualne pozostają twierdzenia 3.1, 3.2, z tym że obecnie, bez warunku (GL9), graniczna przestrzeń produkcyjna $\bar{Z}$ może zawierać więcej niż jeden (określony z dokładnością do struktury) optymalny proces produkcji $(\bar{x}, \bar{y})$. Zbiór wszystkich optymalnych procesów produkcji w niestacjonarnej gospodarce z graniczną technologią oznaczamy przez $\bar{Z}_{opt}$:

$$\bar{Z}_{opt} = \left\{ (\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{Z} \mid \alpha(\bar{x}, \bar{y}) = \max_{(x,y) \in \bar{Z} \setminus \{0\}} \alpha(x, y) = \alpha_M > 0 \right\}.$$

Przez $\bar{S}$ oznaczamy zbiór wektorów struktury produkcji $\frac{\bar{y}}{\|\bar{y}\|}$ w optymalnych procesach $(\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{Z}_{opt}$:

$$\bar{S} = \left\{ s \mid \exists (x, y) \in \bar{Z}_{opt} \left(s = \frac{y}{\|y\|} \right) \right\}$$

(por. analogiczny zbiór (2.7) w stacjonarnej gospodarce z wieloma magistralami; rozdz. 2, pkt 2.1). Zbiór $\bar{Z}_{opt}$ jest stożkiem wypukłym w R_+^{2n} niezawierającym 0, zbiór $\bar{S}$ zawiera wyłącznie wektory dodatnie, jest wypukły i zwarty; zob. lematy

2.1, 2.2 – po zastąpieniu warunków **(G1)**–**(G8)** przez warunki **(GL1)**–**(GL8)** oraz zbiorów Z_{opt} , S przez $\bar{Z}_{opt}$, $\bar{S}$.

Z każdym granicznie optymalnym procesem $(x, y) \in \bar{Z}_{opt}$ związana jest magistrała produkcyjna:

$$\bar{N}_s = \{\lambda s \mid \lambda > 0\}, \quad s = \frac{y}{\|y\|} \in \bar{S}.$$

Zbiór:

$$\bar{N} = \bigcup_{s \in \bar{S}} \bar{N}_s = \{\lambda s \mid \lambda > 0, s \in \bar{S}\}$$

tworzy wielopasmową magistrałę produkcyjną (jest stożkiem wypukłym w R_+^n nie zawierającym 0).

Niech $\{\alpha_M, (\bar{x}, \bar{y}), \bar{p}\}$ będzie optymalnym stanem równowagi von Neumanna w niestacjonarnej gospodarce Gale’a z graniczną technologią. Przy przyjętych założeniach stan taki istnieje (zob. (3.6)–(3.8)). Co więcej, każda trójka $\{\alpha_M, (\bar{x}, \bar{y}), \bar{p}\}$ z dowolnym procesem $(\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{Z}_{opt}$ tworzy optymalny stan równowagi w takiej gospodarce. Warunek **(GL9)** zastąpimy obecnie warunkiem:

$$\textbf{(GL9')} \quad \forall (x, y) \in \bar{Z} \setminus \{0\} (x \notin \bar{N} \vee y \notin \bar{N} \Rightarrow \beta(x, y, \bar{p}) < \alpha_M).$$

Na pierwszy rzut oka warunek ten wydaje się nie różnić od warunku **(GL9)**. Różnica jest jednak istotna: obecnie, zamiast pojedynczej magistrali $\bar{N}$, mamy w **(GL9')** wiązkę magistral $\bar{N}$. Ponieważ warunek $\alpha(x, y) < \alpha_M$ oznacza, że $x \notin \bar{N} \vee y \notin \bar{N}$, zatem w świetle tego warunku nie osiąga maksymalnej efektywności ekonomicznej żaden proces produkcji, któremu nie towarzyszy najwyższa efektywność technologiczna: jeżeli $(x, y) \notin \bar{Z}_{opt}$ (czyli $\alpha(x, y) < \alpha_M$), to $\beta(x, y, \bar{p}) < \alpha_M$.

Weźmy wektor $z \in R_+^n \setminus \{0\}$ i przyjmijmy oznaczenie:

$$d(z, \bar{N}) = \min_{z' \in \bar{N}} \left\| \frac{z}{\|z\|} - \frac{z'}{\|z'\|} \right\| = \min_{s \in \bar{S}} \left\| \frac{z}{\|z\|} - s \right\|. \quad (3.20)$$

Jeżeli niestacjonarna gospodarka Gale’a z graniczną technologią i wielopasmową magistralą spełnia warunki **(GL1)-(GL8)**, **(GL9’)**, to zgodnie z lematem 2.3 (po zastąpieniu przestrzeni produkcyjnej Z przez graniczną przestrzeń $\bar{Z}$ oraz warunków **(G1)-(G8)** przez **(GL1)-(GL8)**):

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon \in (0, \alpha_M) \forall (x, y) \in \bar{Z} (d(x, \bar{N}) \geq \varepsilon \vee d(y, \bar{N}) \geq \varepsilon \Rightarrow \beta(x, y, \bar{p}) \leq \alpha_M - \delta_\varepsilon), \quad (3.21)$$

gdzie metryka $d(\cdot)$ ma postać (3.20). Fakt ten gra kluczową rolę przy dowodzie następującego ‘słabego’ twierdzenia o magistrali w niestacjonarnej gospodarce z graniczną technologią i wielopasmową magistralą.

■ **Twierdzenie 3.8.** Niech niestacjonarna gospodarka z graniczną technologią i wielopasmową magistralą $\bar{N}$ spełnia warunki **(GL1)-(GL8)**, **(GL9’)**, **(GL10)**. Wówczas dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba naturalna k_ε , że liczba okresów czasu, w których $(y^0, t_1, \bar{p})$ – optymalny proces $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ (rozwiązanie zadania (3.12) spełnia warunek:

$$d(y^*(t), \bar{N}) \geq \varepsilon \quad (3.22)$$

nie przekracza k_ε . Liczba k_ε nie zależy od długości horyzontu $T = \{0, 1, \dots, t_1\}$.

Dowód przebiega analogicznie jak dowód twierdzenia 2.1 (po zastąpieniu wielopasmowej magistrali N w stacjonarnej gospodarce Gale’a z przestrzenią produkcyjną Z przez wielopasmową magistralę $\bar{N}$ w niestacjonarnej gospodarce z graniczną przestrzenią $\bar{Z}$). ■

Po zastąpieniu pojedynczej magistrali N przez wielopasmową magistralę $\bar{N}$ aktualne są uwagi 1, 2, 4-6 do twierdzenia 3.4. Aktualna pozostaje także uwaga 3, gdy warunek początkowy (3.11) zastąpimy warunkiem $y(0) = y^0 > 0$ oraz założeniem, że istnieje granicznie optymalny proces produkcji $(\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{Z}_{opt}$ spełniający postulat regularności, będący jednocześnie dopuszczalnym procesem produkcji w gospodarce Gale’a we wszystkich okresach czasu $t = 0, 1, \dots$.

Aktualne pozostają fakty 1, 2 z rozdziału 2, pkt 2.4, po zastąpieniu:

- (i) zbiorów Z, Z_{opt}, S przez $\bar{Z}, \bar{Z}_{opt}, \bar{S}$,
- (2i) wielopasmowej magistrali $\bar{N}$ przez $\bar{\bar{N}}$,
- (3i) metryki $d(z, N)$ postaci (2.11) przez metrykę $d(z, \bar{N})$ postaci (3.20),
- (4i) zbiorów $\mathbb{Z}(\varepsilon), \mathbb{V}(\varepsilon)$ przez zbiory:

$$\bar{\mathbb{Z}}(\varepsilon) = \{(x, y) \in \bar{Z} \mid d(x, \bar{N}) \geq \varepsilon \vee d(y, \bar{N}) \geq \varepsilon\},$$

$$\bar{\mathbb{V}}(\varepsilon) = \{(x, y) \in \bar{\mathbb{Z}}(\varepsilon) \mid \|x, y\| = 1\}$$

oraz warunków **(G1)-(G8)** przez warunki **(GL1)-(GL8), (GL9')**. Przy tych samych warunkach **(GL1)-(GL8), (GL9')** prawdziwy pozostaje również fakt 3. Wymagany przy jego dowodzie warunek **(G12)** jest obecnie spełniony na mocy **(GL8)** (zgodnie z **(GL8)** wszystkie wektory struktury produkcji na wielopasmowej magistrali $\bar{N}$ są bowiem dodatnie). Obowiązuje dotychczasowy warunek **(GL11)** głoszący, że efektywność ekonomiczna granicznych procesów $(x, y) \in \bar{Z} \setminus \{0\}$ maleje w miarę ich oddalania się (w sensie metryki kątowej $d(\cdot)$) od wielopasmowej magistrali $\bar{N}$ (zob. pkt 3.3), z tym że teraz:

$$b(\varepsilon) = \max_{(x, y) \in \bar{\mathbb{Z}}(\varepsilon)} \beta(x, y, \bar{p}).$$

Zgodnie z warunkiem **(GL10)**, poczynwszy od okresu $\bar{t}$, w gospodarce mamy co najmniej jeden promień $N_s \in \bar{N}$, na którym może ona rozwijać się (zwiększać produkcję) w maksymalnym tempie α_M . Jest to swoisty „pas szybkiego ruchu” gospodarki dostępny na wielopasmowej magistrali od okresu $\bar{t}$. Warunek, który sformułowano poniżej, rozszerza tę możliwość na wszystkie promienie von Neumanna (pojedyncze magistrale) $N_s, s \in \bar{S}$, składające się na wielopasmową magistralę $\bar{N}$. Dodatkowo stanowi, że okresy t_s sukcesywnego udostępniania gospodarce kolejnych „pasów szybkiego ruchu” N_s nie przekraczają pewnego granicznego okresu $\bar{t} < +\infty$:

$$\textbf{(GL12)} \quad \exists \bar{t} < +\infty \forall s \in \bar{S} \exists t_s < \bar{t} \left((s, \alpha_M s) \in Z(t_s + 1) \subseteq \dots \subseteq \bar{Z} \right).$$

Zatem jeżeli horyzont T jest długi, $t_1 > \bar{t}$, to:

$$\forall s \in \bar{S} \forall y^s \in N_s \forall t \in \{\bar{t} + 1, \dots, t_1\} (y^s(t) = \alpha_M^{t-\bar{t}} y^s \in N_s \in \bar{N}).$$

Po granicznym okresie $\bar{t}$ wszystkie optymalne procesy produkcji są w zasięgu możliwości technologicznych/produkcyjnych gospodarki:

$$\forall t \geq \bar{t} (\bar{Z}_{opt} \subset \bar{Z}).$$

■ **Twierdzenie 3.9.** Jeżeli niestacjonarna gospodarka Gale’a z graniczną technologią i wielopasmową magistralą spełnia warunki **(GL1)**-**(GL8)**, **(GL9’)**, **(GL10)**, **(GL11)**, **(GL12)** oraz:

- funkcja $\alpha(\cdot)$ jest ciągła na zbiorze $\bar{S}_{opt} = \{(s, \alpha_M s \mid s \in \bar{S})\}$,
- ciąg $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ jest $(y^0, t_1, \bar{p})$ – optymalnym procesem (rozwiązaniem zadania (3.12)),

to:

$$\forall t_1 > \bar{t} + 2k_\varepsilon \forall t \in \{\bar{t} + k_\varepsilon, \bar{t} + k_\varepsilon + 1, \dots, t_1 - k_\varepsilon\} (d(y^*(t), \bar{N}) < \varepsilon)$$

(metryka $d(\cdot)$ ma postać (3.20)).

Dowód przebiega podobnie jak dowód twierdzenia 2.3, po uwzględnieniu sformułowanych wyżej uwag **(i)**-**(4i)**. ■

Aktualne są uwagi 1, 2 do twierdzenia 3.4. Aby aktualna była także uwaga 3, należy warunek początkowy (3.11) zastąpić warunkiem $y(0) = y^0 > 0$ oraz założeniem, że istnieje granicznie optymalny proces produkcji $(\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{Z}_{opt}$ spełniający postulat regularności, będący jednocześnie dopuszczalnym procesem w gospodarce Gale’a we wszystkich okresach czasu $t = 0, 1, \dots$.

Również aktualna pozostaje uwaga 5 do twierdzenia 3.4 po uwzględnieniu obok **(GL8’)** następującego warunku:

$$\exists I = \{i_1, i_2, \dots, i_k \mid 0 < k \leq n\} \forall s \in \bar{S} (i \in I \Rightarrow s_i > 0 \ \& \ j \notin I \Rightarrow s_j = 0)$$

(jest to odpowiednik warunku **(G12)** z rozdz.2, pkt 2.3).

Aktualna jest uwaga 6 do twierdzenia 3.4, z tym że funkcja użyteczności $u(\cdot)$ zamiast warunku (U3) powinna teraz spełniać warunek (U3'); rozdz. 2, pkt 2.4.

Odpowiednikiem twierdzenia 2.5 o wielopasmowej magistrali w stacjonarnej gospodarce jest następujące ‘bardzo silne’ twierdzenie o wielopasmowej magistrali w niestacjonarnej gospodarce z graniczną technologią.

■ **Twierdzenie 3.10.** Gdy niestacjonarna gospodarka z graniczną technologią i wielopasmową magistralą spełnia warunki (GL1)-(GL8), (GL9') oraz optymalny proces $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ – rozwiązanie zadania (3.12) – w pewnym okresie $\check{t} < t_1$ prowadzi do wielopasmowej magistrali $\bar{N}$:

$$\alpha(y^*(\check{t}), y^*(\check{t} + 1)) = \alpha_M,$$

to pozostaje na niej do końca horyzontu T .

Dowód przebiega podobnie jak dowód twierdzenia 2.5 (po zastąpieniu wielopasmowej magistrali N w stacjonarnej gospodarce Gale’a z przestrzenią produkcyjną Z przez wielopasmową magistralę $\bar{N}$ w niestacjonarnej gospodarce z graniczną przestrzenią $\bar{Z}$). ■

Analogiem zadania (2.43) z rozdziału 2 (oraz zadania (1.66) z rozdziału 1) jest następujące zadanie maksymalizacji zdyskontowanej użyteczności produkcji wytworzonej w niestacjonarnej gospodarce z graniczną technologią i wielopasmową magistralą w całym horyzoncie $T = \{0, 1, \dots, t_1\}$:

$$\begin{aligned} \max \sum_{t=0}^{t_1} (1 - \gamma)^t u(y(t)) \\ \text{pw. (3.10), (3.11),} \end{aligned} \tag{3.23}$$

z funkcją użyteczności $u(\cdot)$ spełniającą standardowe warunki oraz stopą dyskonta $\gamma \in (0, 1)$.

■ **Twierdzenie 3.11. (i)** Jeżeli w niestacjonarnej gospodarce Gale’a z graniczną technologią i wielopasmową magistralą spełniającą warunki (GL1)-(GL8),

(GL9'), (GL10) zdyskontowane tempo wzrostu produkcji $(1 - \gamma)\alpha_M > 1$ oraz funkcja użyteczności $u(\cdot)$ spełnia standardowe warunki (U1), (U2) (zob. rozdz. 2, pkt 2.3), to dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka niezależna od długości horyzontu T liczba naturalna k_ε , że liczba okresów czasu, w których $(y^0, T, u(\cdot))$ – optymalny proces $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ – rozwiązanie zadania (3.23) spełnia warunek (3.22) nie przekracza k_ε .

(2i) Jeżeli gospodarka spełnia warunki (GL1)-(GL8), (GL9'), (U1), (U2) oraz (U3') (po zastąpieniu zbioru S przez $\bar{S}$) i rozwiązanie $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ zadania (3.23) w pewnym okresie $\check{t} < t_1$ dociera do wielopasmowej magistrali $\bar{N}$:

$$\alpha(y^*(\check{t}), y^*(\check{t} + 1)) = \alpha_M,$$

to pozostaje na niej do końca horyzontu T .

Dowód (i) przebiega podobnie jak dowód twierdzenia 1.19 po zastąpieniu pojedynczej magistrali N przez promień $N_\check{s} \in \bar{N}$, do którego zgodnie z (GL10) w okresie $\check{t} < t_1$ dociera $(y^0, \check{t} + 1)$ – dopuszczalny proces $\{\check{y}(t)\}_{t=0}^{\check{t}+1}$, warunku (1.28) przez (3.22) oraz uwzględnieniu warunku (3.21) zamiast (1.17).

Dowód (2i) przebiega podobnie jak dowód twierdzenia 1.20, po zastąpieniu pojedynczej magistrali N przez promień $N_\check{s} \in \bar{N}$, do którego w okresie $\check{t} < t_1$ dociera (y^0, T, u) – optymalny proces oraz uwzględnieniu warunku (3.21) zamiast (1.17). ■

3.5. Minimalnoczasowy problem wzrostu

W nawiązaniu do pierwszego z dwóch minimalnoczasowych problemów wzrostu w stacjonarnej gospodarce Gale'a przedstawionych w rozdziale 1, pkt 1.10 prześledzimy najpierw przebieg optymalnych procesów będących rozwiązaniem następującego zadania:

znaleźć

$$\min t_1 \quad (3.24)$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{aligned} (y(t), y(t+1)) &\in Z(t), \quad t = 0, 1, \dots, t_1 - 1, \\ y(0) &= y^0 \geq 0, \\ y(t_1) &\in Y^1, \end{aligned} \quad (3.25)$$

w którym, analogicznie jak w (1.82), zbiór stanów docelowych:

$$Y^1 = \{y \in R_+^n \mid \langle \bar{p}, y \rangle \geq V^1 > \langle \bar{p}, y^0 \rangle\} \quad (3.26)$$

tworzą wektory produkcji o wartości (mierzonej w cenach von Neumanna) nie mniejszej niż V^1 . Różnica polega na tym, że obecnie zamiast stałej (niezmiennej w czasie) przestrzeni produkcyjnej Z mamy ciąg przestrzeni $Z(t)$, $t = 0, 1, \dots$, zbieżnych z czasem do granicznej przestrzeni $\bar{Z}$. Poza tym początkowy wektor produkcji y^0 w zadaniu (3.24)-(3.25) jest półdodatni (w zadaniu (1.81)-(1.82) był to wektor dodatni).

Każdy ciąg wektorów produkcji $\{y(t)\}_{t=0}^{t_1^*}$ spełniający układ (3.25) ze zbiorem stanów docelowych (3.26) tworzy (y^0, Y^1, t_1) – dopuszczalny proces wzrostu w niestacjonarnej gospodarce Gale’a. Dopuszczalny proces $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1^*}$ prowadzący do zbioru stanów docelowych w najkrótszym czasie t_1^* nazywamy procesem (y^0, Y^1, t_1^*) – optymalnym. Obowiązują warunki (GL1)-(GL7), (GL9’), (GL10) oraz zamiast (GL8) następujący (silniejszy) warunek:

$$(GL8') \quad \forall (\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{Z} (\alpha(\bar{x}, \bar{y}) = \alpha_M \Rightarrow \bar{y} > 0 \ \& \ \alpha_M > 1)$$

(jest to odpowiednik warunku (G7’) z rozdz.1, pkt 1.10; wskaźnik $\alpha_M > 1$ jest atrybutem gospodarki produktywnej).

■ **Lemat 3.1.** Jeżeli zachodzą warunki (GL1)-(GL7), (GL8’), (GL10), to:

(i) istnieją (y^0, Y^1, t_1) – dopuszczalne procesy wzrostu,

(2i) zadanie (3.24)-(3.25) ze zbiorem stanów docelowych (3.26) ma rozwiązanie.

Dowód. (i) W świetle (GL10) istnieje trajektoria produkcji $\{\check{y}(t)\}_{t=0}^{\check{t}+1}$, która w okresie $\check{t} + 1$ prowadzi do wielopasmowej magistrali $\bar{N}$ i wobec tego, że $V^1 > \langle \bar{p}, y^0 \rangle$ oraz $\alpha_M > 1$, istnieje (y^0, Y^1, t_1) – dopuszczalny proces $\{\check{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$ postaci:

$$\check{y}(t) = \begin{cases} \check{y}(t), & t = 0, 1, \dots, \check{t}, \\ \sigma \alpha_M^{t-\check{t}} \check{s}, & t = \check{t} + 1, \dots, t_1, \end{cases} \quad (3.27)$$

gdzie $\check{y}(t) = y^0$, $\sigma = \|\check{y}(\check{t})\| > 0$, $\check{s} = \frac{\check{y}(\check{t})}{\|\check{y}(\check{t})\|} \in N_{\check{s}} \subset \bar{N}$, oraz okres t_1 , w którym proces (3.27) dociera do zbioru Y^1 , jest najmniejszą liczbą naturalną spełniającą warunek:

$$t_1 \geq \max \left\{ \check{t} + 1, \check{t} + \frac{\ln A_1}{\ln \alpha_M} \right\}, A_1 = \frac{V^1}{\sigma \langle \bar{p}, \check{s} \rangle} > 0. \quad (3.28)$$

(2i) Dowód przebiega analogicznie jak dowód lematu 1.5(2i), po zastąpieniu przekształcenia technologicznego $a(x) = \{y \mid (x, y) \in Z\}$ przez $a_t(x) = \{y \mid (x, y) \in Z(t)\}$. ■

Warunki (GL1)-(GL7), (GL8'), (GL9'), (GL10) nie wykluczają przypadku, gdy (y^0, Y^1, t_1^*) – optymalny proces prowadzi do zbioru stanów docelowych Y^1 w okresie $t_1^* \leq \check{t}$. Sytuacja taka może mieć miejsce w przypadku „mało ambitnego” celu Y^1 , gdy docelowa wartość produkcji V^1 w (3.26) różni się nieznacznie (jest niewiele wyższa) od wartości produkcji w początkowym okresie $t = 0$. Jest to przypadek mało interesujący i dalej się nim nie zajmujemy.

Natomiast gdy $t_1^* > \check{t}$, wówczas o przebiegu optymalnych procesów wzrostu w niestacjonarnej gospodarce Gale’a z graniczną technologią i wielopasmową magistralą mówi następujące ‘słabe’ twierdzenie.

■ **Twierdzenie 3.12.** Jeżeli zachodzą warunki (GL1)-(GL7), (GL8'), (GL9'), (GL10) oraz proces $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1^*}$ jest takim rozwiązaniem zadania (3.24)-(3.25), że $t_1^* > \check{t}$ (gdzie $\check{t}$ jest okresem czasu, o którym mowa w (GL10)), to dla dowolnej

liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba naturalna k_ε , że liczba okresów czasu $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$, w których zachodzi warunek (3.22), nie przekracza k_ε . Liczba k_ε nie zależy od docelowej wartości produkcji V^1 ani od t_1^* .

Dowód. Z definicji (y^0, Y^1, t_1^*) – optymalnego procesu mamy:

$$(y^*(t), y^*(t+1)) \in Z(t+1) \subseteq \bar{Z}, \quad t = 0, 1, \dots, t_1^* - 1.$$

Wówczas, zgodnie z (3.10):

$$\langle \bar{p}, y^*(t+1) \rangle \leq \alpha_M \langle \bar{p}, y^*(t) \rangle, \quad t = 0, 1, \dots, t_1^* - 1, \quad (3.29)$$

czyli:

$$\langle \bar{p}, y^*(t_1^*) \rangle \leq \alpha_M^{t_1^*} \langle \bar{p}, y^0 \rangle.$$

Założmy, że w okresach $\tau_1, \dots, \tau_k$ ma miejsce warunek (3.22). Wtedy, zgodnie z (3.21), istnieje taka liczba $\delta_\varepsilon \in (0, \alpha_M)$, że:

$$\langle \bar{p}, y^*(t+1) \rangle \leq (\alpha_M - \delta_\varepsilon) \langle \bar{p}, y^*(t) \rangle, \quad t = \tau_1, \dots, \tau_k. \quad (3.30)$$

Stąd, wobec (3.29), (3.30), dochodzimy do nierówności:

$$\langle \bar{p}, y^*(t_1^*) \rangle \leq \alpha_M^{t_1^*-k} (\alpha_M - \delta_\varepsilon)^k \langle \bar{p}, y^0 \rangle. \quad (3.31)$$

Zgodnie z lematem 3.1 istnieje (y^0, Y^1, t_1) – dopuszczalny proces wzrostu $\{\tilde{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$ postaci (3.27). W procesie tym wektor produkcji spełnia oczywiście warunek $\tilde{y}(t_1) \in Y^1$, zatem $\langle \bar{p}, \tilde{y}(t_1) \rangle \geq V^1$. Ponieważ jest to proces dopuszczalny, więc $t_1 \geq t_1^*$. Z założenia $t_1^* > \check{t}$, czyli $t_1 \geq t_1^* > \check{t}$ i skoro są to liczby naturalne, to $t_1 - 1 \geq \check{t}$. Z konstrukcji (y^0, Y^1, t_1) – dopuszczalnego procesu $\{\tilde{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$ wynika wówczas, że:

$$\tilde{y}(t_1) = \sigma \alpha_M^{t_1-\check{t}} \check{s} \in Y^1 \quad \text{oraz} \quad \tilde{y}(t_1 - 1) = \sigma \alpha_M^{t_1-\check{t}-1} \check{s} \notin Y^1$$

(gdyby zachodził warunek $\tilde{y}(t_1 - 1) \in Y^1$, wtedy spełniona byłaby nierówność $\langle \bar{p}, \tilde{y}(t_1 - 1) \rangle \geq V^1$, co przeczyłoby jednak temu, że t_1 jest najwcześniejszym

okresem, w którym gospodarka w procesie (3.27) dociera do Y^1). Istnieje więc także (y^0, Y^1, t_1) – dopuszczalny proces $\{\tilde{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$:

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} \tilde{y}(t), & t = 0, 1, \dots, t_1 - 1, \\ \tilde{y}(t_1 - 1) + y', & t = t_1, \end{cases}$$

w którym wektor y' spełnia warunek:

$$0 \leq y' \leq \sigma(\alpha_M - 1)\alpha_M^{t_1-\tilde{t}-1}\check{s}$$

oraz:

$$\langle \bar{p}, y' \rangle = V^1 - \langle \bar{p}, \tilde{y}(t_1 - 1) \rangle = V^1 - \langle \bar{p}, \tilde{y}(t_1 - 1) \rangle = V^1 - \sigma\alpha_M^{t_1-\tilde{t}-1}\langle \bar{p}, \check{s} \rangle > 0,$$

gdzie (podobnie jak w (3.27):

$$\sigma = \|\tilde{y}(\check{t})\| = \|\check{y}(\check{t})\| > 0, \quad \check{s} = \frac{\check{y}(\check{t})}{\|\check{y}(\check{t})\|} \in N_{\check{s}} \subset \bar{N}.$$

Procesy $\{\tilde{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$, $\{\check{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$ różnią się (ewentualnie) tylko jednym (ostatnim) elementem: $\tilde{y}(t_1) \leq \check{y}(t_1)$. W procesie $\{\check{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$ gospodarka w okresie t_1 osiąga wartość produkcji $\langle \bar{p}, \check{y}(t_1) \rangle = V^1$. Natomiast o wektorze $\tilde{y}(t_1)$ możemy tylko powiedzieć, że $\langle \bar{p}, \tilde{y}(t_1) \rangle \geq V^1$. Zgodnie z definicją (y^0, Y^1, t_1^*) – optymalnego procesu:

$$\langle \bar{p}, y^*(t_1^*) \rangle \geq V^1 = \langle \bar{p}, \check{y}(t_1) \rangle = \langle \bar{p}, \tilde{y}(t_1 - 1) + y' \rangle = \sigma\alpha_M^{t_1-\tilde{t}-1}\langle \bar{p}, \check{s} \rangle + \langle \bar{p}, y' \rangle > 0. \quad (3.32)$$

Łącząc (3.31), (3.32), dostajemy:

$$\alpha_M^{t_1^*-k}(\alpha_M - \delta_\varepsilon)^k \langle \bar{p}, y^0 \rangle \geq \sigma\alpha_M^{t_1-\tilde{t}-1}\langle \bar{p}, \check{s} \rangle + \langle \bar{p}, y' \rangle > 0.$$

Ponieważ $t_1 \geq t_1^*$, $\alpha_M > 1$ oraz $\langle \bar{p}, y' \rangle > 0$, dochodzimy stąd do warunku:

$$k < B = \frac{\ln A}{\ln \alpha_M - \ln(\alpha_M - \delta_\varepsilon)}, \quad \text{gdzie } A = \frac{\alpha_M^{\tilde{t}+1}\langle \bar{p}, y^0 \rangle}{\sigma\langle \bar{p}, \check{s} \rangle} > 0.$$

W charakterze liczby k_ε , o której mowa w tezie twierdzenia, wystarczy wziąć np. najmniejszą liczbę naturalną większą od $\max\{0, B\}$. Liczba B , a więc także liczba k_ε , nie zależy ani od V^1 , ani od t_1^* . ■

Aktualne pozostają uwagi 1-3 do twierdzenia 3.4.

Drugi minimalnoczasowy problem wzrostu, podobnie jak w rozdziale 1, pkt 1.10, różni się od pierwszego postacią zbioru stanów docelowych Y^1 . Interesuje nas mianowicie rozwiązanie zadania (3.24)-(3.25), w którym (analogicznie jak w (1.95)):

$$Y^1 = \{y \in R_+^n \mid y \geq y^1\}. \quad (3.33)$$

Prawdziwy pozostaje lemat 3.1 ze zbiorem stanów docelowych (3.33). W szczególności zadanie (3.24)-(3.25) ze zbiorem Y^1 postaci (3.33) ma rozwiązanie. O docelowym wektorze produkcji $y^1 > y^0$ zakładamy, że spełnia następujący warunek **(C1)** z rozdziału 1, pkt 1.10:

$$\exists M > 0 \left(\frac{\max_i y_i^1}{\min_i y_i^1} \leq M \right)$$

(przy przyjętych założeniach liczba $M \geq 1$).

■ **Lemat 3.2.** Jeżeli w zadaniu (3.24)-(3.25) zbiór stanów docelowych ma postać (3.33) oraz zachodzą warunki **(GL1)**-(**GL7**), **(GL8')**, **(GL10)**, **(C1)**, to:

(i) $\forall y^1 > y^0$ istnieje (y^0, Y^1, t_1) – dopuszczalny proces $\{\tilde{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$ postaci (3.27), w którym okres t_1 jest najmniejszą liczbą naturalną spełniającą warunek:

$$t_1 \geq \max \left\{ \check{t} + 1, \check{t} + \frac{\ln A_1}{\ln \alpha_M} \right\}, A_1 = \sigma^{-1} \max_i \frac{y_i^1}{s_i} > 0, \quad (3.34)$$

(2i) istnieje taka liczba naturalna $l \geq 1$, niezależna od y^1 ani od t_1 , że jeżeli $t_1 > \check{t} + l$, to $\tilde{y}(t_1 - l) \leq y^1$.

Dowód (i) przebiega analogicznie jak dowód lematu 3.1(i).

(2i) Zgodnie z konstrukcją (y^0, Y^1, t_1) –dopuszczalnego procesu (3.27) mamy:

$$\tilde{y}(t_1) = \sigma \alpha_M^{t_1 - \check{t}} \check{s} \geq y^1,$$

gdzie $\sigma = \|\ddot{y}(\check{t})\| > 0$, $\check{s} = \frac{\ddot{y}(\check{t})}{\|\ddot{y}(\check{t})\|} \in N_{\check{s}} \subset \bar{N}$, $t_1 \geq \check{t} + 1$. Niech l_{y^1} będzie taką najmniejszą liczbą naturalną, że:

$$\sigma \alpha_M^{t_1 - \check{t} - l_{y^1}} \check{s} \leq y^1.$$

Wobec tego, że $\sigma > 0$, $\check{s} > 0$, $y^1 > 0$ oraz $\alpha_M > 1$, liczba taka istnieje i spełnia warunek:

$$l_{y^1} \geq t_1 - \check{t} - \frac{\ln A_2}{\ln \alpha_M}, \quad (3.35)$$

gdzie $A_2 = \sigma^{-1} \min_i \frac{y_i^1}{\check{s}_i} > 0$ ($0 < A_2 \leq A_1$).

Okres czasu t_1 jest najmniejszą liczbą naturalną spełniającą warunek (3.34), zatem:

$$t_1 \leq \max \left\{ \check{t} + 1, \check{t} + \frac{\ln A_1}{\ln \alpha_M} + 1 \right\}.$$

Analogicznie, skoro l_{y^1} jest najmniejszą liczbą naturalną spełniającą warunek (3.35), to:

$$l_{y^1} \leq t_1 - \check{t} - \frac{\ln A_2}{\ln \alpha_M} + 1,$$

czyli:

$$\begin{aligned} l_{y^1} &\leq \max \left\{ \check{t} + 1 - \check{t} - \frac{\ln A_2}{\ln \alpha_M} + 1, \check{t} + \frac{\ln A_1}{\ln \alpha_M} + 1 - \check{t} - \frac{\ln A_2}{\ln \alpha_M} + 1 \right\} = \\ &= \max \left\{ 2 - \frac{\ln A_2}{\ln \alpha_M}, \frac{\ln A_1}{\ln \alpha_M} + 2 \right\} \leq \max \left\{ 2, \frac{\ln A_1}{\ln \alpha_M} + 2 \right\}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

gdzie:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\max_i \frac{y_i^1}{\check{s}_i}}{\min_i \frac{y_i^1}{\check{s}_i}} \leq \frac{\max_i y_i^1}{\min_j \check{s}_j} = \frac{\max_j \check{s}_j}{\min_j \check{s}_j} \cdot \frac{\max_i y_i^1}{\min_i y_i^1} = C \frac{\max_i y_i^1}{\min_i y_i^1} \leq C \cdot M, \quad (3.37)$$

gdzie $C = \frac{\max_j \check{s}_j}{\min_j \check{s}_j} \geq 1$ oraz liczba $M \geq 1$ spełnia warunek **(C1)**. Ponieważ $C, M \geq 1$, z (3.36), (3.37) otrzymujemy nierówność:

$$l_{y^1} \leq Q = \frac{\ln(C \cdot M)}{\ln \alpha_M} + 2.$$

Aby zakończyć dowód, wystarczy w charakterze liczby l wziąć najmniejszą liczbę naturalną nie mniejszą od Q . ■

Analogiem twierdzenia 3.12 mówiącym o asymptotycznych (magistralnych) własnościach optymalnych procesów wzrostu w niestacjonarnej gospodarce Gale'a z graniczną technologią oraz zbiorem stanów docelowych (3.33) jest obecnie twierdzenie 3.13.

■ **Twierdzenie 3.13.** Jeżeli zachodzą warunki **(GL1)-(GL7)**, **(GL8')**, **(GL9')**, **(GL10)** oraz **(C1)** i proces $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1^*}$ jest takim rozwiązaniem zadania (3.24)-(3.25) ze zbiorem stanów docelowych (3.33), że $t_1^* > \check{t}$ (gdzie $\check{t}$ jest okresem czasu, o którym mowa w **(GL10)**), to dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba naturalna k_ε , że liczba okresów czasu $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$, w których zachodzi warunek (3.22) nie przekracza k_ε . Liczba k_ε nie zależy od postaci zbioru stanów docelowych (wielkości wektora produkcji y^1), ani od t_1^* .

Dowód. Początkowa część dowodu przebiega podobnie jak w twierdzeniu 3.12: zakładając, że w okresach $\tau_1, \dots, \tau_k$ zachodzi warunek (3.22), dochodzimy do nierówności (3.31).

Zgodnie z lematem 3.2 istnieje taki (y^0, Y^1, t_1) – dopuszczalny proces $\{\tilde{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$ postaci (3.27), że $\tilde{y}(t_1) = \sigma \alpha_M^{t_1 - \check{t}} \check{s} \in Y^1$ (czyli $\tilde{y}(t_1) \geq y^1$) oraz $\tilde{y}(t_1 - l) = \sigma \alpha_M^{t_1 - \check{t} - l} \check{s} \leq y^1$, gdzie $t_1 > \check{t} + l$.

Weźmy (y^0, Y^1, t_1^*) – optymalny proces $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1^*}$. Ponieważ $y^*(t_1^*) \in Y^1$, zatem $y^*(t_1^*) \geq y^1 \geq \tilde{y}(t_1 - l)$, czyli:

$$\langle \bar{p}, y^*(t_1^*) \rangle \geq \langle \bar{p}, \tilde{y}(t_1 - l) \rangle = \sigma \alpha_M^{t_1^* - \check{t} - l} \langle \bar{p}, \check{s} \rangle > 0. \quad (3.38)$$

Z (3.31), (3.38) wynika wówczas, że:

$$\alpha_M^{t_1^* - k} (\alpha_M - \delta_\varepsilon)^k \langle \bar{p}, y^0 \rangle \geq \sigma \alpha_M^{t_1^* - \check{t} - l} \langle \bar{p}, \check{s} \rangle > 0,$$

skąd otrzymujemy (zważywszy, że $t_1 \geq t_1^* > \check{t}$):

$$\left(\frac{\alpha_M}{\alpha_M - \delta_\varepsilon} \right)^k \leq \frac{\alpha_M^{\check{t} + l} \langle \bar{p}, y^0 \rangle}{\sigma \langle \bar{p}, \check{s} \rangle} = A$$

($A > 0$) i ostatecznie:

$$k \leq B = \frac{\ln A}{\ln \alpha_M - \ln(\alpha_M - \delta_\varepsilon)}.$$

W charakterze liczby k_ε wystarczy wziąć np. najmniejszą liczbę naturalną większą od $\max \{0, B\}$. ■

Podobnie jak w przypadku twierdzenia 3.12 aktualne pozostają uwagi 1-3 do twierdzenia 3.4.

ROZDZIAŁ 4

Niestacjonarna gospodarka Gale'a z graniczną technologią i inwestycjami

Cechą charakterystyczną gospodarki Gale'a, którą zajmowaliśmy się w dwóch pierwszych rozdziałach, była jej stacjonarność, czego wyrazem była niezmienna (stała w czasie) technologia produkcji. Zmiany technologiczne warunkujące dynamikę przestrzeni produkcyjnych zostały wprowadzić uwzględnione w rozdziale 3, ale przy milczącym założeniu, że nie wymagają one żadnych nakładów (inwestycyjnych) – są swoistym darem Boga, natury. Powstaje naturalne pytanie, czy w modelach dynamiki ekonomicznej z gale'owskimi przestrzeniami produkcyjnymi efekt magistrali będzie miał także miejsce po uwzględnieniu mechanizmu inwestycyjnego? Niniejszy rozdział daje na to pytanie odpowiedź. Problem był podjęty m.in. w artykułach [83], [84].

4.1. Założenia wstępne

Podobnie jak w rozdziale 3 przez $Z(t) \subset R_+^{2n}$ oznaczamy zbiór wszystkich technologicznie dopuszczalnych procesów produkcji w gospodarce w okresie $t = 0, 1, \dots$. Zapis $(x(t), y(t)) \in Z(t)$ (równoważnie $(x, y) \in Z(t)$) głosi, że w świetle technologii, którą dysponuje gospodarka w okresie t z wektora nakładów $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ można wytworzyć wektor produkcji $y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$. Lista towarów jest rozumiana szeroko i obejmuje wszelkie dobra/towary konsumpcyjne, inwestycyjne, kapitałowe zużywane i/lub wytwarzane w gospodarce. Zbiory $Z(t)$, $t = 0, 1, \dots$, spełniają następujące warunki:

$$(GI1) \quad \forall \lambda \geq 0 \quad \forall (x, y) \in Z(t) \quad (\lambda(x, y) \in Z(t)).$$

$$(GI2) \quad \forall (x^1, y^1) \in Z(t) \quad \forall (x^2, y^2) \in Z(t) \quad ((x^1, y^1) + (x^2, y^2) \in Z(t)).$$

$$(GI3) \quad (x, y) \in Z(t) \text{ \& } x = 0 \Rightarrow y = 0.$$

$$(GI4) \quad \forall (x, y) \in Z(t) \forall x' \geq x \left((x', y) \in Z(t) \right).$$

$$(GI5) \quad \forall (x, y) \in Z(t) \forall 0 \leq y' \leq y \left((x, y') \in Z(t) \right).$$

$$(GI6) \quad \text{Przestrzenie produkcyjne } Z(t) \text{ s\ä zbiorami domkni\ätymi w } R^{2n}.$$

Analogiczne warunki **(GL1)-(GL6)** spełniają przestrzenie produkcyjne $Z(t)$, $t = 0, 1, \dots$, w rozdziale 3. Podobnie jak w rozdziale 3 nazywamy je przestrzeniami produkcyjnymi (zbiorami technologicznymi) w niestacjonarnej gospodarce Gale'a. Z ka\ßdym niezerowym procesem produkcji $(x(t), y(t)) \in Z(t)$ zwi\äzany jest wska\ßznik technologicznej efektywno\ßci $\alpha(x(t), y(t)) = \max \{ \alpha | \alpha x(t) \leq y(t) \}$. W ka\ßdzej przestrzeni produkcyjnej Gale'a $Z(t)$ (spełniającej warunki **(GI1)-(GI6)**) istnieje, okre\ßslony z dok\äadno\ßci\ä do mno\ßżenia przez sta\äłą dodatnią, optymalny proces produkcji:

$$(\bar{x}(t), \bar{y}(t)) = \arg \max_{(x,y) \in Z(t) \setminus \{0\}} \alpha(x, y)$$

(rozdz. 3, pkt 3.2, tw. 3.2(i)). Liczb\ä:

$$\alpha_{M,t} = \alpha(\bar{x}(t), \bar{y}(t)) = \max_{(x,y) \in Z(t) \setminus \{0\}} \alpha(x, y) \geq 0$$

nazywamy, podobnie jak dot\äd, optymalnym wska\ßznikiem technologicznej efektywno\ßci produkcji w okresie t . Interesuje nas gospodarka z dodatnią optymalną technologiczną efektywno\ßci\ä produkcji. Stosowny prosty warunek zostanie sformu\älowany w punkcie 4.2.

4.2. Dynamika. Dopuszczalne procesy wzrostu. Graniczna przestrze\än produkcyjna

Zak\äładamy, \ße:

- technologia produkcji w okresie $t + 1$ (jej uciele\ßsnieniem jest przestrze\än produkcyjna $Z(t + 1)$) zale\ßży od technologii produkcji w okresie poprzednim oraz

nakładów inwestycyjnych $i(t) = (i_1(t), \dots, i_n(t)) \geq 0$ skutkujących w roku następnym (współrzędne wektora $i(t)$ mają wymiar strumienia JN/R; dla uproszczenia zakładamy roczny cykl inwestycyjny),

- źródłem inwestycji $i(t)$ jest produkcja wytworzona w gospodarce w okresie t :

$$0 \leq i(t) \leq y(t). \quad (4.1)$$

Oznaczmy przez $\sigma(R_+^{2n})$ rodzinę przestrzeni produkcyjnych Gale'a (stożków wypukłych i domkniętych w R_+^{2n} spełniających warunki **(GI1)**–**(GI6)**). Dynamikę technologii opisuje równanie rekurencyjne:

$$Z(t+1) = F_t(Z(t), i(t)), \quad t = 0, 1, \dots, \quad (4.2)$$

w którym odwzorowanie (multifunkcja) $F_t: \sigma(R_+^{2n}) \times R_+^n \rightarrow \sigma(R_+^{2n})$ ma następujące własności:

$$(F1) \quad \forall t \forall Z \in \sigma(R_+^{2n}) (F_t(Z, 0) = Z).$$

$$(F2) \quad \forall t \forall Z \in \sigma(R_+^{2n}) \forall i^1 \geq i^2 \geq 0 (F_t(Z, i^1) \supseteq F_t(Z, i^2)).$$

$$(F3) \quad \forall t \forall Z^1, Z^2 \in \sigma(R_+^{2n}) \forall i \geq 0 (Z^1 \supseteq Z^2 \Rightarrow F_t(Z^1, i) \supseteq F_t(Z^2, i)).$$

Przestrzeń produkcyjna $Z(0)$ jest dana:

$$Z(0) = Z^0 \subset R_+^{2n}. \quad (4.3)$$

Zgodnie z (4.2) o dynamice przestrzeni produkcyjnych (o technologii produkcji) decydują inwestycje. W szczególności brak inwestycji sprawia, że technologia produkcji nie zmienia się (w tej wersji modelu wektor $i(t)$ utożsamiamy z inwestycjami netto pomnażającymi majątek produkcyjny). Im większe są nakłady inwestycyjne w okresie t , tym większe zdolności produkcyjne gospodarki w okresie następnym. Podobnie, jeżeli $Z^1(t) \supseteq Z^2(t)$, to przy takich samych nakładach inwestycyjnych $i(t)$ w okresie $t+1$ przestrzenie produkcyjne spełniają warunek $Z^1(t+1) \supseteq Z^2(t+1)$.

Gospodarka jest zamknięta w tym sensie, że nakłady $x(t + 1)$ (ponoszone w gospodarce w okresie $t + 1$) mogą pochodzić tylko z produkcji $y(t)$ (wytworzonej w okresie poprzednim), pomniejszonej o inwestycje $i(t)$:

$$x(t + 1) \leq y(t) - i(t), \quad t = 0, 1, \dots,$$

co w świetle **(GI4)** prowadzi do warunku:

$$(y(t) - i(t), y(t + 1)) \in Z(t + 1), \quad t = 0, 1, \dots \quad (4.4)$$

Ustalony jest początkowy wektor produkcji y^0 w okresie $t = 0$:

$$y(0) = y^0 \geq 0. \quad (4.5)$$

O ciągach wektorów produkcji $\{y(t)\}_{t=0}^{\infty}$, inwestycji $\{i(t)\}_{t=0}^{\infty}$ oraz przestrzeni produkcyjnych $\{Z(t)\}_{t=0}^{\infty}$ spełniających warunki (4.1)-(4.5) mówimy, że opisują (Z^0, y^0, ∞) – dopuszczalny proces wzrostu w gospodarce Gale’a z inwestycjami. Ciąg $\{y(t)\}_{t=0}^{\infty}$ nazywamy (y^0, ∞) – dopuszczalną trajektorią produkcji, ciąg $\{i(t)\}_{t=0}^{\infty}$ – dopuszczalną trajektorią inwestycji (odpowiadającą (y^0, ∞) – dopuszczalnej trajektorii produkcji), o ciągu przestrzeni produkcyjnych $\{Z(t)\}_{t=0}^{\infty}$ mówimy, że tworzy (Z^0, ∞) – ciąg przestrzeni produkcyjnych. We wszystkich (Z^0, y^0, ∞) – dopuszczalnych procesach wzrostu przestrzenie produkcyjne spełniają warunek $Z(t + 1) \supseteq Z(t)$. Wówczas:

$$\forall t \quad (\alpha_{M,t+1} \geq \alpha_{M,t})$$

i dla zapewnienia dodatniej optymalnej technologicznej efektywności gospodarki w każdym okresie t wystarczy warunek:

$$\textbf{(GI7)} \quad \alpha_{M,0} > 0.$$

Innym możliwym warunkiem zapewniającym dodatnią wartość optymalnych wskaźników technologicznej efektywności $\alpha_{M,t}, t = 0, 1, \dots$, jest poniższy odpowiednik warunku **(G7)** z rozdziału 1, pkt 1.2:

$$(GI7') \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \exists (x^i, y^i) \in Z(0) (y_i^i > 0).$$

Przyjęte dotąd reguły wzrostu nie chronią przed taką nierealistyczną sytuacją, gdy $\lim_t \alpha_{M,t} = +\infty$. Jeżeli bowiem $\lim_t \alpha_{M,t} = +\infty$, to łatwo pokazać, że bez dodatkowych założeń w gospodarce takiej z upływem czasu z tego samego wektora nakładów, np. $x(t) = e = (1, 1, \dots, 1)$, można wytworzyć dowolnie duży wektor produkcji $y(t)$:

$$\exists \{y(t)\}_{t=0}^{\infty} \forall t \left((e, y(t)) \in Z(t) \right) \& \|y(t)\| \xrightarrow{t} +\infty.$$

Aby wykluczyć taką sytuację, zakładamy, że:

(F4) (i) Istnieje wypukły i domknięty zbiór $\bar{Z} \subset R_+^{2n}$ zawierający wszystkie zbiory (stożki) $Z(t)$ należące do któregośkolwiek (Z^0, ∞) – dopuszczalnego ciągu przestrzeni produkcyjnych w dowolnym (Z^0, y^0, ∞) – dopuszczalnym procesie wzrostu.

(2i) Zbiór $\bar{Z}$ jest takim najmniejszym zbiorem spełniającym warunek **(i)**, że jeżeli $(x, y) \in Z$ oraz $x = 0$, to $y = 0$ (por. warunek **(GL7)**; rozdz. 3).

■ **Twierdzenie 4.1.** Jeżeli zbiory $Z(t), t = 0, 1, \dots$, są przestrzeniami produkcyjnymi Gale’a oraz zachodzą warunki **(F1)–(F4)**, to zbiór $\bar{Z}$ jest również przestrzenią gale’owską (spełnia warunki **(GI1)–(GI6)**).

Dowód podzielimy na kilka etapów.

1⁰. Oznaczmy przez $\tilde{Z}$ sumę (teoriomnogościową) przestrzeni produkcyjnych we wszystkich (Z^0, y^0, ∞) – dopuszczalnych procesach wzrostu, $\tilde{Z} \subseteq \bar{Z}$. Jeżeli $z \in \tilde{Z}$, to istnieje (Z^0, ∞) – dopuszczalny ciąg przestrzeni produkcyjnych $\{Z(t)\}_{t=0}^{\infty}$ oraz okres czasu τ , w którym $z \in Z(\tau) \subseteq \tilde{Z}$. Przestrzeń $Z(\tau)$ jest stokiem (wypukłym), więc $\lambda z \in Z(\tau) \subseteq \tilde{Z}$, gdzie λ jest dowolną liczbą nieujemną. Zatem:

$$\forall z \in \tilde{Z} \forall \lambda \geq 0 (\lambda z \in \tilde{Z}).$$

2⁰. Niech $\text{conv } \tilde{Z}$ będzie najmniejszym zbiorem wypukłym zawierającym $\tilde{Z}$ (powłoką wypukłą zbioru $\tilde{Z}$). Pokażemy, że $\text{conv } \tilde{Z}$ jest stożkiem wypukły spełniającym warunki **(GI1)**–**(GI5)**.

(a) Niech $z \in \text{conv } \tilde{Z}$. Wtedy:

$$\exists z^1, z^2 \in \tilde{Z} \exists \alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1 (z = \alpha z^1 + \beta z^2).$$

Weźmy dowolną liczbę $\lambda \geq 0$. Ponieważ $z^1, z^2 \in \tilde{Z}$, więc (zgodnie z **1⁰**) również $\lambda z^1, \lambda z^2 \in \tilde{Z}$ i z definicji zbioru $\text{conv } \tilde{Z}$ dostajemy: $\alpha \lambda z^1 + \beta \lambda z^2 = \lambda(\alpha z^1 + \beta z^2) = \lambda z \in \text{conv } \tilde{Z}$, czyli:

$$\forall z \in \text{conv } \tilde{Z} \forall \lambda \geq 0 (\lambda z \in \text{conv } \tilde{Z}). \quad (4.6)$$

Weźmy teraz dwa dowolne wektory $z^1, z^2 \in \text{conv } \tilde{Z}$. Niech $z = z^1 + z^2$. Jeśli $z^1 = 0$, to $z = z^2 \in \text{conv } \tilde{Z}$. Podobnie, gdy $z^2 = 0$, to $z = z^1 \in \text{conv } \tilde{Z}$. Załóżmy teraz, że $z^1, z^2 \neq 0$ i przyjmijmy oznaczenia:

$$\bar{z}^1 = \frac{z^1}{\|z^1\|}, \quad \bar{z}^2 = \frac{z^2}{\|z^2\|}, \quad \lambda_1 = \frac{1}{\|z^1\|}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{\|z^2\|}.$$

Wówczas $\|\bar{z}^1\| = \|\bar{z}^2\| = 1$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, $\bar{z}^1 = \lambda_1 z^1 \in \text{conv } \tilde{Z}$ oraz $\bar{z}^2 = \lambda_2 z^2 \in \text{conv } \tilde{Z}$. Niech $\alpha = \frac{\|z^1\|}{\|z^1 + z^2\|}$, $\beta = \frac{\|z^2\|}{\|z^1 + z^2\|}$, wtedy $\alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$. Ponieważ $\text{conv } \tilde{Z}$ jest zbiorem wypukłym, więc:

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \alpha \bar{z}^1 + \beta \bar{z}^2 = \frac{\|z^1\| \bar{z}^1}{\|z^1 + z^2\|} + \frac{\|z^2\| \bar{z}^2}{\|z^1 + z^2\|} = \frac{\|z^1\|}{\|z^1 + z^2\|} \cdot \frac{z^1}{\|z^1\|} + \frac{\|z^2\|}{\|z^1 + z^2\|} \cdot \frac{z^2}{\|z^2\|} = \frac{z^1}{\|z^1 + z^2\|} + \\ &+ \frac{z^2}{\|z^1 + z^2\|} = \frac{z^1 + z^2}{\|z^1 + z^2\|} = \frac{z}{\|z\|} \in \text{conv } \tilde{Z}. \end{aligned}$$

Zatem:

$$\forall z^1, z^2 \in \text{conv } \tilde{Z} \left(z = \frac{z}{\|z\|} = \frac{z^1 + z^2}{\|z^1 + z^2\|} \in \text{conv } \tilde{Z} \right).$$

Biorąc $\lambda = \|z\| > 0$, dostajemy $\lambda \bar{z} = z \in \text{conv } \tilde{Z}$ i ostatecznie:

$$\forall z^1, z^2 \in \text{conv } \tilde{Z} (z = z^1 + z^2 \in \text{conv } \tilde{Z}). \quad (4.7)$$

Warunki (4.6),(4.7) są równoważne z **(GI1)**, **(GI2)**. Zbiór $\text{conv } \tilde{Z}$ jest stożkiem wypukłym.

(b) Aby udowodnić, że wypukły stożek $\text{conv } \tilde{Z}$ spełnia warunek **(GI3)**, założmy, *a contrario*, że należy do niego wektor $z = (0, y) = (0, \dots, 0, y_1, \dots, y_n)$ z zerowymi nakładami i wektorem produkcji y zawierającym co najmniej jedną współrzędną dodatnią. Wtedy, zgodnie z definicją wypukłego stożka $\text{conv } \tilde{Z}$, istnieją takie wektory $z^1 = (0, y^1) \in \tilde{Z}$, $z^2 = (0, y^2) \in \tilde{Z}$ oraz liczby $\alpha, \beta \geq 0$, że $\alpha + \beta = 1$ oraz:

$$z = (0, y) = \alpha z^1 + \beta z^2 = (0, \alpha y^1 + \beta y^2) \in \text{conv } \tilde{Z}.$$

Zbiór $\tilde{Z}$ jest sumą przestrzeni produkcyjnych we wszystkich (Z^0, y^0, ∞) – dopuszczalnych procesach wzrostu, więc istnieją takie (Z^0, ∞) – dopuszczalne ciągi przestrzeni $\{Z^i(t)\}_{t=0}^{\infty}$, $i = 1, 2$, oraz okresy czasu τ_1, τ_2 , że:

$$z^1 = (0, y^1) = z^1(\tau_1) = (0, y^1(\tau_1)) \in Z^1(\tau_1), \quad (4.8)$$

$$z^2 = (0, y^2) = z^2(\tau_2) = (0, y^2(\tau_2)) \in Z^2(\tau_2). \quad (4.9)$$

Ponieważ $y = y^1 + y^2 \neq 0$ (oraz wektory y^1, y^2 są nieujemne), więc albo $y^1 = y^1(\tau_1) \neq 0$, albo $y^2 = y^2(\tau_2) \neq 0$ (albo zachodzi jedno i drugie). Jeżeli $y^1(\tau_1) \neq 0$, to warunek (4.8) pozostaje w sprzeczności z **(GI3)**. Podobnie, gdy $y^2(\tau_2) \neq 0$, wtedy sprzeczny z **(GI3)** jest warunek (4.10). Jeżeli więc $z = (0, y) \in \text{conv } \tilde{Z}$, to $y = 0$ i zachodzi warunek **(GI3)**.

(c) Niech $z = (x, y) \in \text{conv } \tilde{Z}$. Jeżeli przy tym $(x, y) \in \tilde{Z} \subseteq \text{conv } \tilde{Z}$, to istnieje taki (Z^0, ∞) – dopuszczalny ciąg przestrzeni $\{Z(t)\}_{t=0}^{\infty}$ oraz okres czasu τ , że $z = (x, y) \in Z(\tau) \subseteq \tilde{Z}$. Wtedy zgodnie z **(GI4)**, **(GI5)**:

$$\forall x' \geq x \quad \forall 0 \leq y' \leq y \quad ((x', y') \in Z(\tau)).$$

Zatem:

$$(x, y) \in \tilde{Z} \Rightarrow \forall x' \geq x \forall 0 \leq y' \leq y \left((x', y') \in Z(\tau) \subseteq \tilde{Z} \subseteq \text{conv } \tilde{Z} \right). \quad (4.10)$$

Jeżeli $z = (x, y) \in \text{conv } \tilde{Z}$, $z \notin \tilde{Z}$, to:

$$\begin{aligned} \exists z^1 = (x^1, y^1) \in \tilde{Z} \quad \exists z^2 = (x^2, y^2) \in \tilde{Z} \quad \exists \alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = \\ = 1 \left(z = (x, y) = \alpha(x^1, y^1) + \beta(x^2, y^2) \in \text{conv } \tilde{Z} \right). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Ponieważ $(x^1, y^1) \in \tilde{Z}$, $(x^2, y^2) \in \tilde{Z}$, więc, rozumując jak wyżej, stwierdzamy, że:

$$\begin{aligned} \forall x'^1 \geq x^1 \forall 0 \leq y'^1 \leq y^1 \left((x'^1, y'^1) \in \tilde{Z} \subseteq \text{conv } \tilde{Z} \right), \\ \forall x'^2 \geq x^2 \forall 0 \leq y'^2 \leq y^2 \left((x'^2, y'^2) \in \tilde{Z} \subseteq \text{conv } \tilde{Z} \right). \end{aligned}$$

Niech $z' = (x', y') = \alpha(x'^1, y'^1) + \beta(x'^2, y'^2)$ (z liczbami α, β jak w (4.11)). Wtedy $z' = (x', y') \in \text{conv } \tilde{Z}$ oraz:

$$\begin{aligned} x' = \alpha x'^1 + \beta x'^2 \geq \alpha x^1 + \beta x^2 = x, \\ 0 \leq y' = \alpha y'^1 + \beta y'^2 \leq \alpha y^1 + \beta y^2 = y. \end{aligned}$$

W ten sposób dochodzimy do konkluzji:

$$(x, y) \in (\text{conv } \tilde{Z}) \setminus \tilde{Z} \Rightarrow \forall x' \geq x \forall 0 \leq y' \leq y \left((x', y') \in \text{conv } \tilde{Z} \right). \quad (4.12)$$

W myśl (4.10), (4.12) wypukły stożek $\text{conv } \tilde{Z}$ spełnia warunki **(GI4)**, **(GI5)**.

3⁰. Powróćmy do zbioru $\bar{Z}$. Z założenia jest on jest najmniejszym, wypukłym i domkniętym zbiorem zawierającym wszystkie przestrzenie produkcyjne należące do jakiegokolwiek (Z^0, y^0, ∞) – dopuszczalnego procesu wzrostu, tzn. najmniejszym zbiorem domkniętym zawierającym $\text{conv } \tilde{Z}$.

Pokażemy, że zbiór $\bar{Z}$ spełnia warunki **(GI1)**, **(GI2)**, **(GI4)**, **(GI5)**. W tym celu weźmy dwa wektory $z^1 = (x^1, y^1) \in \bar{Z}$, $z^2 = (x^2, y^2) \in \bar{Z}$, liczby $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ oraz wektor $z = (x, y) = \lambda_1 z^1 + \lambda_2 z^2 = \lambda_1(x^1, y^1) + \lambda_2(x^2, y^2)$. Wektory z^1, z^2 są punktami skupienia zbioru $\text{conv } \tilde{Z}$, więc istnieją ciągi $z^{1i} = (x^{1i}, y^{1i})$, $z^{2i} = (x^{2i}, y^{2i}) \in \text{conv } \tilde{Z}$, $i = 1, 2, \dots$, zbieżne (odpowiednio)

do z^1, z^2 . Zbiór $\text{conv } \tilde{Z}$ jest stożkiem wypukłym, więc $\forall i (z^i = \lambda_1 z^{1i} + \lambda_2 z^{2i} \in \text{conv } \tilde{Z})$, a wówczas:

$$\lim_i z^i = \lim_i (\lambda_1 z^{1i} + \lambda_2 z^{2i}) = \lambda_1 z^1 + \lambda_2 z^2 = \lambda_1 (x^1, y^1) + \lambda_2 (x^2, y^2) = z \in \bar{Z}.$$

Zbiór $\bar{Z}$ spełnia więc warunki **(GI1)**, **(GI2)** (jest stożkiem wypukłym). Podobnie, jeżeli $z = (x, y) \in \bar{Z}$, to istnieje ciąg $z^i = (x^i, y^i) \in \text{conv } \tilde{Z}$, $i = 1, 2, \dots$, zbieżny do z . Niech:

$$x' \geq x, 0 \leq y' \leq y, \tilde{x}^i = x^i + x' - x,$$

$$\tilde{y}^i = \max\{0, y^i + y' - y\} = (\max\{0, y_1^i + y'_1 - y_1\}, \dots, \max\{0, y_n^i + y'_n - y_n\}).$$

Wówczas $\tilde{x}^i \geq x^i$, $0 \leq \tilde{y}^i \leq y^i$, $\tilde{z}^i = (\tilde{x}^i, \tilde{y}^i) \in \text{conv } \tilde{Z} \subseteq \bar{Z}$ oraz:

$$\lim_i \tilde{z}^i = \lim_i (\tilde{x}^i, \tilde{y}^i) = (x', y') = z' \in \bar{Z}$$

(gdyż z założenia $\bar{Z}$ jest zbiorem domkniętym), czyli:

$$\forall (x, y) \in \bar{Z} \forall x' \geq x \forall 0 \leq y' \leq y ((x', y') \in \bar{Z}).$$

Zbiór $\bar{Z}$ spełnia zatem także warunki **(GI4)**, **(GI5)**. Warunki **(GI3)**, **(GI6)** zachodzą na mocy założenia. ■

Alternatywny dowód twierdzenia 4.1 wynika wprost z twierdzenia 3.1. Warunki **(GI1)**–**(GI6)** są bowiem analogiczne do warunków **(GL1)**–**(GL6)**, a przy założeniach **(F1)**–**(F4)** przestrzenie produkcyjne Gale'a spełniają także warunek **(GL7)**.

Zbiór $\bar{Z}$ jest znaną już nam z rozdziału 3 graniczną przestrzenią produkcyjną. Warunek $(x, y) \in \bar{Z}$ oznacza, że w świetle granicznej technologii z nakładów x można wytworzyć produkcję y . Liczba:

$$\alpha(x, y) = \max\{\alpha \mid \alpha x \leq y\}$$

(gdzie $(x, y) \in \bar{Z} \setminus \{0\}$) jest wskaźnikiem technologicznej efektywności granicznego procesu (x, y) . Aktualne pozostaje twierdzenie 3.2(i), zgodnie z którym (w szczególności):

$$\exists (\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{Z} \left(\alpha(\bar{x}, \bar{y}) = \max_{(x, y) \in \bar{Z} \setminus \{0\}} \alpha(x, y) = \alpha_M \right).$$

Liczba α_M jest optymalnym wskaźnikiem technologicznej efektywności w gospodarce Gale'a z graniczną przestrzenią produkcyjną. Z inkluzji $\bar{Z} \supseteq Z(t+1) \supseteq Z(t)$, $t = 0, 1, \dots$, wobec (GI7) dostajemy:

$$\forall t \left(\alpha_M \geq \alpha_{M,t+1} \geq \alpha_{M,t} \geq \alpha_{M,0} > 0 \right).$$

Proces $(\bar{x}, \bar{y})$ jest optymalnym procesem produkcji w gospodarce Gale'a z graniczną przestrzenią produkcyjną (granicznie optymalnym procesem produkcji).

Gospodarkę z przestrzeniami produkcyjnymi $Z(t)$, $t = 0, 1, \dots$, $\bar{Z}$ spełniającą warunki (GI1)-(GI7), (F1)-(F4) oraz reguły wzrostu (4.1)-(4.5) nazywamy **niestacjonarną gospodarką Gale'a z inwestycjami i graniczną technologią**.

Niech podobnie jak w rozdziale 3:

$$\bar{Z}_{opt} = \{(\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{Z} \mid \alpha(\bar{x}, \bar{y}) = \alpha_M > 0\}$$

będzie zbiorem optymalnych procesów produkcji w gospodarce z graniczną technologią (przestrzenią produkcyjną $\bar{Z}$), któremu odpowiada zbiór:

$$\bar{S} = \left\{ s \mid \exists (x, y) \in \bar{Z}_{opt} \left(s = \frac{y}{\|y\|} \right) \right\}$$

wektorów struktury produkcji $\frac{\bar{y}}{\|\bar{y}\|}$ w procesach $(\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{Z}_{opt}$. Przy przyjętych założeniach (podobnie jak w rozdziale 3, pkt 3.4) zbiór $\bar{Z}_{opt}$ jest stożkiem wypukłym zawartym w $R_+^{2n} \setminus \{0\}$, zbiór $\bar{S}$ jest wypukły i zwarty. Każdemu wektorowi $s \in \bar{S}$ towarzyszy pojedyncza magistrala produkcyjna:

$$\bar{N}_s = \{\lambda s \mid \lambda > 0\},$$

których suma:

$$\bar{N} = \bigcup_{s \in \bar{S}} \bar{N}_s = \{\lambda s \mid \lambda > 0, s \in \bar{S}\}$$

tworzy **wielopasmową magistralę produkcyjną w gospodarce Gale'a z graniczną technologią i inwestycjami**. Przy przyjętych założeniach maksymalną technologiczną efektywność gospodarka z graniczną technologią osiąga oczywiście tylko na wielopasmowej magistrali:

$$\forall (x, y) \in \bar{Z} \setminus \{0\} (x \notin \bar{N} \vee y \notin \bar{N} \Rightarrow \alpha(x, y) < \alpha_M). \quad (4.13)$$

Weźmy graniczną przestrzeń produkcyjną $\bar{Z}$. Podstawiając:

$$Z(0) = \bar{Z} \text{ oraz } i(t) = 0, \quad t = 0, 1, \dots,$$

z (4.2), (4.3) otrzymujemy $Z(t) \equiv \bar{Z} = \text{const}$. Niech $\bar{y} \in \bar{N}$, wówczas:

$$(\bar{y}, \alpha_M \bar{y}) \in Z_{opt} \subset \bar{Z}, \quad (\alpha_M \bar{y}, \alpha_M^2 \bar{y}) \in Z_{opt} \subset \bar{Z}, \dots,$$

i ciąg $\{\bar{y}(t)\}_{t=0}^\infty$, w którym:

$$\bar{y}(t) = \alpha_M^t \bar{y}, \quad t = 0, 1, \dots, \quad (4.14)$$

tworzy $(\bar{y}, \infty)$ – dopuszczalną trajektorię produkcji w gospodarce Gale'a z graniczną technologią i początkowym wektorem produkcji $y(0) = \bar{y} \in \bar{N}$. W gospodarce takiej $(\bar{Z}, \bar{y}, \infty)$ – dopuszczalny proces wzrostu tworzy trójka $\{\bar{y}(t)\}_{t=0}^\infty, \{i(t)\}_{t=0}^\infty, \{Z(t)\}_{t=0}^\infty$ z trajektorią produkcji postaci (4.14), inwestycjami $i(t) = 0$ oraz przestrzeniami produkcyjnymi $Z(t) = \bar{Z}, \quad t = 0, 1, \dots$.

Na trajektorii (4.14) gospodarka osiąga najwyższe możliwe tempo wzrostu $\alpha_M > 0$ oraz:

$$\forall t \left(\frac{\bar{y}(t)}{\|\bar{y}(t)\|} = \frac{\bar{y}}{\|\bar{y}\|} = \bar{s} \in \bar{S} \right),$$

dlatego nazywamy ją stacjonarną trajektorią produkcji z maksymalnym tempem wzrostu (w skrócie: optymalną stacjonarną trajektorią produkcji). Dowolna dodatnia wielokrotność oraz suma dwóch takich trajektorii jest znowu optymalną stacjonarną trajektorią produkcji (każdorazowo z zerowymi inwestycjami i stałymi

przestrzeniami produkcyjnymi $Z(t) = \bar{Z}$, $t = 0, 1, \dots$). Wszystkie leżą na wielopasmowej magistrali $\bar{N}$.

Podobnie jak w rozdziale 3 (pkt 3.2) zakładamy, że w granicznie optymalnych procesach wytwarzane są wszystkie towary:

$$(GI8) \quad \forall (\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{Z} \ (\alpha(\bar{x}, \bar{y}) = \alpha_M \Rightarrow \bar{y} > 0).$$

Zbiór $\bar{S}$ (wektorów struktury produkcji we wszystkich optymalnych procesach $(\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{Z}_{opt}$) składa się wówczas wyłącznie z dodatnich wektorów.

Przy założeniach **(GI1)-(GI8)** w gospodarce Gale'a z inwestycjami i graniczną technologią istnieje stan równowagi von Neumanna $\{\alpha_M, (\bar{x}, \bar{y}), \bar{p}\}$ z optymalnym procesem produkcji $(\bar{x}, \bar{y})$ i cenami $\bar{p}$, w którym:

$$\begin{aligned} \alpha_M \bar{x} &\leq \bar{y}, \\ \forall (x, y) \in \bar{Z} \ (\langle \bar{p}, y \rangle - \alpha_M \langle \bar{p}, x \rangle &\leq 0), \\ \langle \bar{p}, \bar{y} \rangle &> 0 \end{aligned} \tag{4.15}$$

(zob. rozdz. 1, pkt 1.3, definicja 1.2 oraz twierdzenie 1.5 – po podstawieniu granicznej przestrzeni $\bar{Z}$ zamiast Z). W stanie takim dochodzi do zrównania efektywności ekonomicznej produkcji $\beta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}) = \frac{\langle \bar{p}, \bar{y} \rangle}{\langle \bar{p}, \bar{x} \rangle}$ (mierzonej w cenach von Neumanna $\bar{p}$) z efektywnością technologiczną $\alpha(\bar{x}, \bar{y})$ na najwyższym możliwym do osiągnięcia przez gospodarkę poziomie $\beta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}) = \frac{\langle \bar{p}, \bar{y} \rangle}{\langle \bar{p}, \bar{x} \rangle} = \alpha_M$. Poniższy warunek zapewnia, że stan taki może mieć miejsce tylko w równowadze; wyklucza mianowicie sytuację, w której gospodarka mogłaby osiągnąć maksymalną efektywność ekonomiczną, mimo że nie towarzyszy jej najwyższa efektywność technologiczna:

$$(GI9) \quad \forall (x, y) \in \bar{Z} \setminus \{0\} (x \notin \bar{N} \vee y \notin \bar{N} \Rightarrow \beta(x, y, \bar{p}) < \alpha_M)$$

(jest to odpowiednik warunku **(GL9')** z rozdz. 3, pkt 3.4).

Jeżeli zachodzą warunki **(GI1)-(GI9)**, to podobnie jak w rozdz. 3 w optymalnym stanie równowagi ceny $\bar{p}$ są dodatnie. Istotnie, założmy że istnieje taki

stan równowagi $\{\alpha_M, (\bar{x}, \bar{y}), \bar{p}\}$, w którym $\bar{p}_i = 0$. Niech $\tilde{x} = \bar{x} + e^i$; $e^i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$. Wówczas $(\tilde{x}, \bar{y}) \in \bar{Z}$, $(\tilde{x}, \bar{y}) > 0$, $\tilde{x} \notin \bar{N}$ i (zgodnie z (4.13)) $\alpha(\tilde{x}, \bar{y}) < \alpha_M$, co jest sprzeczne z (GI9).

4.3. Optymalne procesy wzrostu. 'Słaby' oraz 'bardzo silny' efekt magistrali

Definicja (Z^0, y^0, ∞) – dopuszczalnego procesu w gospodarce Gale'a z inwestycjami i nieskończonym horyzontem $T = \{0, 1, \dots\}$ formułowana w punkcie 4.2 była niezbędna dla ustalenia warunków istnienia oraz niektórych własności granicznej przestrzeni produkcyjnej $\bar{Z}$. Zasadniczo jednak, podobnie jak w rozdziałach wcześniejszych, interesuje nas gospodarka funkcjonująca w skończonym horyzoncie $T = \{0, 1, \dots, t_1\}$, $t_1 < +\infty$. O (skończonych) ciągach produkcji $\{y(t)\}_{t=0}^{t_1}$, inwestycji $\{i(t)\}_{t=0}^{t_1-1}$ oraz przestrzeni produkcyjnych $\{Z(t)\}_{t=0}^{t_1}$ spełniających warunki (4.1)–(4.5) mówimy, że opisują (Z^0, y^0, t_1) – dopuszczalny proces wzrostu w gospodarce Gale'a z inwestycjami. Jeżeli trójka $\{y(t)\}_{t=0}^{\infty}$, $\{i(t)\}_{t=0}^{\infty}$, $\{Z(t)\}_{t=0}^{\infty}$ tworzy (Z^0, y^0, ∞) – dopuszczalny proces wzrostu (w nieskończonym horyzoncie czasu), to trójka $\{y(t)\}_{t=0}^{t_1}$, $\{i(t)\}_{t=0}^{t_1-1}$, $\{Z(t)\}_{t=0}^{t_1}$ tworzy oczywiście (Z^0, y^0, t_1) – dopuszczalny proces wzrostu w skończonym horyzoncie T .

Ciąg $\{y(t)\}_{t=0}^{t_1}$ nazywamy (y^0, t_1) – dopuszczalną trajektorią produkcji, ciąg $\{i(t)\}_{t=0}^{t_1-1}$ – dopuszczalną trajektorią inwestycji (towarzyszącą (y^0, t_1) – dopuszczalnej trajektorii produkcji). O sekwencji zbiorów $\{Z(t)\}_{t=0}^{t_1}$ mówimy, że tworzy (Z^0, t_1) – dopuszczalny ciąg przestrzeni produkcyjnych. Przy przyjętych założeniach (Z^0, y^0, t_1) – dopuszczalne procesy istnieją $\forall t_1 \leq +\infty$.

Podobnie jak dotąd, przez $u(\cdot)$ oznaczamy funkcję użyteczności produkcji w gospodarce Gale'a określoną na wektorach produkcji w ostatnim okresie $t_1 < +\infty$ horyzontu T , spełniającą standardowe warunki (U1), (U2) (zob. rozdz. 1, pkt 1.9).

Zajmiemy się następującym zadaniem wzrostu docelowego (maksymalizacji użyteczności produkcji wytworzonej w końcowym okresie ustalonego horyzontu $T = \{0, 1, \dots, t_1\}$):

$$\begin{aligned} & \max u(y(t_1)) \\ & \text{p.w. (4.1)-(4.5)} \end{aligned} \tag{4.16}$$

(przestrzeń Z^0 oraz wektor y^0 – ustalone).

Ciąg wektorów produkcji będący rozwiązaniem tego zadania oznaczamy przez $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ z i nazywamy (y^0, t_1, u) – optymalną trajektorią produkcji. Towarzyszy mu ciąg wektorów inwestycji $\{i^*(t)\}_{t=0}^{t_1-1}$ (optymalna trajektoria inwestycji) oraz optymalny ciąg przestrzeni produkcyjnych $\{Z^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$. O trójce ciągów $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$, $\{i^*(t)\}_{t=0}^{t_1-1}$, $\{Z^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ spełniających warunki (4.1)-(4.5) mówimy, że opisują (Z^0, y^0, t_1, u) – optymalny proces wzrostu.

Multifunkcja $F_t: \sigma(R_+^{2n}) \times R_+^n \rightarrow \sigma(R_+^{2n})$ w (4.2) spełnia następujący warunek półciągłości (z góry):

(F5) Jeżeli $\{y^k(t)\}_{t=0}^{t_1}$, $\{i^k(t)\}_{t=0}^{t_1-1}$, $\{Z^k(t)\}_{t=0}^{t_1}$ ($k = 1, 2, \dots$) jest takim ciągiem (Z^0, y^0, t_1) – dopuszczalnych procesów wzrostu, że:

$$y^k(t) \xrightarrow{k} \bar{y}(t), \quad t = 0, 1, \dots, t_1, \quad i^k(t) \xrightarrow{k} \bar{i}(t), \quad t = 0, 1, \dots, t_1 - 1,$$

oraz:

$$\bar{Z}(t+1) = F_t(\bar{Z}(t), \bar{i}(t)), \quad t = 0, 1, \dots, t_1 - 1$$

($\bar{y}(0) = y^0$, $\bar{Z}(0) = Z^0$), to trójka $\{\bar{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$, $\{\bar{i}(t)\}_{t=0}^{t_1-1}$, $\{\bar{Z}(t)\}_{t=0}^{t_1}$ jest (Z^0, y^0, t_1) – dopuszczalnym procesem wzrostu.

Warunek **(F5)** głosi, że granica ciągu (Z^0, y^0, t_1) – dopuszczalnych procesów wzrostu jest też procesem dopuszczalnym, a więc jeżeli:

$$(y^k(t) - i^k(t), y^k(t+1)) \in Z^k(t+1), \quad t = 0, 1, \dots, t_1 - 1,$$

$$0 \leq i^k(t) \leq y^k(t), \quad t = 0, 1, \dots, t_1 - 1,$$

$$Z^k(t+1) = F_t(Z^k(t), i^k(t)), \quad t = 0, 1, \dots, t_1 - 1,$$

$$Z^k(0) = Z^0, \quad y^k(0) = y^0$$

oraz:

$$\forall t \in \{0, 1, \dots, t_1\} \left(\lim_k y^k(t) = \bar{y}(t); \quad \bar{y}(0) = y^0 \right)$$

$$\forall t \in \{0, 1, \dots, t_1 - 1\} \left(\lim_k i^k(t) = \bar{i}(t) \right)$$

i utworzymy taki ciąg przestrzeni produkcyjnych $\{\bar{Z}(t)\}_{t=0}^{t_1}$, że:

$$\forall t \in \{0, 1, \dots, t_1 - 1\} \left(\bar{Z}(t+1) = F_t(\bar{Z}(t), \bar{i}(t)); \quad \bar{Z}(0) = Z^0 \right),$$

to:

$$(\bar{y}(t) - \bar{i}(t), \bar{y}(t+1)) \in \bar{Z}(t+1), \quad t = 0, 1, \dots, t_1 - 1$$

(gdzie $0 \leq \bar{i}(t) \leq \bar{y}(t)$, $t = 0, 1, \dots, t_1 - 1$; $\bar{Z}(0) = Z^0$, $\bar{y}(0) = y^0$).

■ **Twierdzenie 4.2.** Jeżeli zachodzą warunki **(GI1)-(GI6)**, **(F1)-(F5)** oraz funkcja użyteczności $u(\cdot)$ jest ciągła (zgodnie z **(U1)**), wówczas zadanie (4.16) ma rozwiązanie, tj. istnieje taka (y^0, t_1, u) – optymalna trajektoria produkcji $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$, że:

$$u(y^*(t_1)) \geq u(y(t_1))$$

(tutaj $y(t_1)$ jest wektorem produkcji możliwej do wytworzenia w okresie t_1 w dowolnym (Z^0, y^0, t_1) – dopuszczalnym procesie wzrostu).

Dowód. Wprowadźmy oznaczenie:

$$R_{y^0,0} = \{y^0\}$$

oraz dla $t \geq 1$:

$$R_{y^0,t} = \{y = y(t) \mid \exists \{i(\theta)\}_{\theta=0}^{t-1} \exists \{y(\theta)\}_{\theta=0}^t \exists \{Z(\theta)\}_{\theta=0}^t \forall \theta \in \{0, 1, \dots, t-1\} (0 \leq i(\theta) \leq y(\theta), (y(\theta) - i(\theta), y(\theta+1)) \in Z(\theta+1) = F_\theta(Z(\theta), i(\theta)); y(0) = y^0, Z(0) = Z^0)\}.$$

Przez $R_{y^0,t}$ oznaczamy zbiór wszystkich wektorów produkcji możliwych do wytworzenia przez gospodarkę w okresie t w pewnym (Z^0, y^0, t_1) – dopuszczalnym procesie wzrostu. Pokażemy, że $\forall t < +\infty$ zbiory $R_{y^0,t}$ są zwarte (ograniczone i domknięte).

Jednoelementowy zbiór $R_{y^0,0}$ jest oczywiście zwarty. Dowód zwartości zbiorów $R_{y^0,t}$ dla $t \geq 1$ przeprowadzimy metodą indukcji.

(I) Udowodnimy, że zwarty (ograniczony i domknięty) jest zbiór $R_{y^0,1}$.

(Ograniczoność) Załóżmy, że zbiór:

$$R_{y^0,1} = \left\{ y \mid \exists i(0) \geq 0 \left(i(0) \leq y^0, (y^0 - i(0), y) \in Z(1) = F_0(Z^0, i(0)) \right) \right\}$$

jest nieograniczony. Zatem:

$$\begin{aligned} \exists \{i^k(0)\}_{k=1}^{\infty} \exists \{y^k\}_{k=1}^{\infty} \left(0 \leq i^k(0) \leq y^0 \text{ \& } (y^0 - i^k(0), y^k) \in Z^k(1) = \right. \\ \left. F_0(Z^0, i^k(0)) \subseteq \bar{Z}; \|y^k\| \xrightarrow{k} +\infty \right) \end{aligned}$$

($\bar{Z}$ jest graniczną przestrzenią produkcyjną spełniającą warunki **(GI1)**–**(GI6)**, po podstawieniu $Z(t) = \bar{Z}$). Niech:

$$(\xi^k, \eta^k) = \left(\frac{y^0 - i^k(0)}{\|y^k\|}, \frac{y^k}{\|y^k\|} \right).$$

Wówczas:

$$\forall k \left((\xi^k, \eta^k) \in Z, \xi^k \xrightarrow{k} 0, \|\eta^k\| = 1 \right),$$

więc:

$$\exists \{\xi^{k_j}, \eta^{k_j}\}_{j=1}^{\infty} \left(\xi^{k_j} \xrightarrow{j} 0, \eta^{k_j} \xrightarrow{j} \bar{\eta} \neq 0 \right).$$

Graniczna przestrzeń produkcyjna $\bar{Z}$ jest zbiorem domkniętym, więc $(0, \bar{\eta}) \in \bar{Z}$, co jest sprzeczne z **(GI3)**. Zbiór $R_{y^0,1}$ jest więc ograniczony.

(Domkniętość) Weźmy ciąg $\{y^k\}_{k=1}^{\infty}$ wektorów $y^k \in R_{y^0,1}$ zbieżny do $\bar{y}$. Wówczas:

$$\exists \{i^k(0)\}_{k=1}^{\infty} \left(0 \leq i^k(0) \leq y^0 \& (y^0 - i^k(0), y^k) \in Z^k(1) = F_0(Z^0, i^k(0)) \right).$$

Nieujemny ciąg $\{i^k(0)\}_{k=1}^{\infty}$ jest ograniczony, więc zawiera podciąg zbieżny:

$$\exists \{i^{k_j}(0)\}_{j=1}^{\infty} \left(0 \leq i^{k_j}(0) \xrightarrow{j} \bar{i} \leq y^0 \right).$$

Niech $x^{k_j} = y^0 - i^{k_j}(0)$. Wtedy:

$$\forall j \left((x^{k_j}, y^{k_j}) \in Z^{k_j}(1) = F_0(Z^0, i^{k_j}(0)) \right)$$

oraz $x^{k_j} \xrightarrow{j} \bar{x} = y^0 - \bar{i}$, $y^{k_j} \xrightarrow{j} \bar{y}$. Zgodnie z **(F5)**:

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (y^0 - \bar{i}, \bar{y}) \in \bar{Z}(1) = F_1(Z^0, \bar{i}),$$

czyli $\bar{y} \in R_{y^0,1}$. Zbiór $R_{y^0,1}$ jest zatem domknięty, a ponieważ jest także ograniczony, więc jest zwarty.

(II) Udowodnimy, że jeżeli zwarte (ograniczone i domknięte) są zbiory $R_{y^0,0}, \dots, R_{y^0,t}$, to zwarty jest również zbiór $R_{y^0,t+1}$.

(Ograniczoność) Załóżmy, że zbiór $R_{y^0,t+1}$ jest nieograniczony:

$$\exists \{y^k\}_{k=1}^{\infty} \left(y^k \in R_{y^0,t+1} \& \|y^k\| \xrightarrow{k} +\infty \right).$$

Wówczas:

$$\begin{aligned} & \forall k \exists \{i^k(\theta)\}_{\theta=0}^t \exists \{y^k(\theta)\}_{\theta=0}^{t+1} \exists \{Z^k(\theta)\}_{\theta=0}^{t+1} \forall \theta \in \{0, 1, \dots, t\} \left(0 \leq i^k(\theta) \leq \right. \\ & \leq y^k(\theta), \left(y^k(\theta) - i^k(\theta), y^k(\theta + 1) \right) \in Z^k(\theta + 1) = F_{\theta}(Z^k(\theta), i^k(\theta)) \subseteq \\ & \subseteq \bar{Z}; Z^k(0) = Z^0, y^k(0) = y^0; \|y^k(t + 1)\| = \|y^k\| \xrightarrow{k} +\infty \Big). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Niech $x^k = y^k(t) - i^k(t)$. Zbiór $R_{y^0,t}$ jest zwarty z założenia, więc ciąg $\{y^k(t)\}_{k=1}^\infty$ jest ograniczony, a ponieważ $0 \leq i^k(t) \leq y^k(t)$, więc ograniczony jest także ciąg $\{x^k\}_{k=1}^\infty$ oraz:

$$\forall k \left\{ (x^k, y^k) = (y^k(t) - i^k(t), y^k(t+1)) \in Z^k(t+1) \subseteq \bar{Z} \right\},$$

gdzie (przypominamy) $\bar{Z}$ jest graniczną przestrzenią produkcyjną. Przyjmując oznaczenie:

$$(\xi^k, \eta^k) = \left(\frac{x^k}{\|y^k\|}, \frac{y^k}{\|y^k\|} \right) = \left(\frac{y^k(t) - i^k(t)}{\|y^k\|}, \frac{y^k}{\|y^k\|} \right),$$

dochodzimy, podobnie jak w **(I)** do wniosku, że:

$$\exists \{ \xi^{k_j}, \eta^{k_j} \}_{j=1}^\infty \left((\xi^{k_j}, \eta^{k_j}) \in \bar{Z} \ \& \ (\xi^{k_j}, \eta^{k_j}) \xrightarrow{j} (0, \bar{\eta}) \in \bar{Z} \right),$$

gdzie $\bar{\eta} \neq 0$, co jest niemożliwe (sprzeczne z **(GI3)**). Tym samym zbiór $R_{y^0,t+1}$ jest ograniczony.

(Domkniętość) Niech $y^k = y^k(t+1) \in R_{y^0,t+1}$, $k = 1, 2, \dots$, oraz $y^k \xrightarrow{k} \bar{y} = \bar{y}(t+1)$. Ponieważ zbiory $R_{y^0,0}, \dots, R_{y^0,t}$ z założenia są zwarte, więc $\forall \theta \in \{0, 1, \dots, t\}$ ciągi $\{i^k(\theta)\}_{k=1}^\infty, \{y^k(\theta)\}_{k=1}^\infty$ w (4.17) mają zbieżne podciągi:

$$\exists \{i^{k_j}(\theta)\}_{j=1}^\infty \exists \{y^{k_j}(\theta)\}_{j=1}^\infty \left(0 \leq i^{k_j}(\theta) \xrightarrow{j} \bar{i}(\theta), y^{k_j}(\theta) \xrightarrow{j} \bar{y}(\theta) \right)$$

$$0 \leq \bar{i}(\theta) \leq \bar{y}(\theta), \quad \theta = 0, 1, \dots, t,$$

$$y^{k_j}(0) = \bar{y}(0) = y^0.$$

Zgodnie z **(F5)**:

$$(\bar{y}(\theta) - \bar{i}(\theta), \bar{y}(\theta+1)) \in \bar{Z}(\theta+1) = F_\theta(\bar{Z}(\theta), \bar{i}(\theta)), \quad \theta = 0, 1, \dots, t$$

($\bar{Z}(0) = Z^0$, $\bar{y}(0) = y^0$), zatem ciągi wektorów produkcji $\{\bar{y}(\theta)\}_{\theta=0}^{t+1}$, inwestycji $\{\bar{i}(\theta)\}_{\theta=0}^t$ oraz przestrzeni produkcyjnych $\{\bar{Z}(\theta)\}_{\theta=0}^{t+1}$ tworzą ($Z^0, y^0, t+1$) – dopuszczalny proces wzrostu, czyli $\bar{y} = \bar{y}(t+1) \in R_{y^0, t+1}$. Zbiór $R_{y^0, t+1}$ jest ograniczony i domknięty w R^n , więc jest zwarty.

Zadanie (4.16) jest równoważne z zadaniem maksymalizacji ciągłej funkcji $u(\cdot)$ na zwartym zbiorze R_{y^0, t_1} :

$$\max_{y \in R_{y^0, t_1}} u(y),$$

które zgodnie z twierdzeniem Weierstrassa ma rozwiązanie. Tym samym istnieje (y^0, t_1, u) – optymalna trajektoria produkcji $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ – rozwiązanie zadania (4.16). ■

Formułowanym dotąd twierdzeniom o magistrali zawsze towarzyszył warunek mówiący o możliwości osiągnięcia przez gospodarkę magistrali w jakimkolwiek dopuszczalnym procesie wzrostu; zob. rozdz.1, pkt 1.7, uwaga 3 do tw. 1.10. Obecnie warunek ten brzmi następująco:

(GI10) Istnieje ($Z^0, y^0, \check{t}+1$) – dopuszczalny proces wzrostu

$$\{\check{y}(t)\}_{t=0}^{\check{t}+1}, \{\check{i}(t)\}_{t=0}^{\check{t}}, \{\check{Z}(t)\}_{t=0}^{\check{t}+1}, \check{t} < t_1, \text{ w którym } \check{i}(\check{t}) = 0 \text{ oraz:}$$

$$\alpha(\check{y}(\check{t}), \check{y}(\check{t}+1)) = \alpha_M.$$

Jeżeli zachodzi ten warunek, to $\check{y}(\check{t}) \in \bar{N}$. Pokażemy, że umożliwia on nie tylko dojście gospodarki do wielopasmowej magistrali, ale także pobyt na niej (i wzrost z tempem α_M) do końca horyzontu T . Obowiązują warunki **(GI1)-(GI10)**, **(F1)-(F5)**.

■ **Lemat 4.1.** Przy przyjętych założeniach (w szczególności, gdy zachodzi warunek **(GI10)**) istnieje (y^0, t_1) – dopuszczalna trajektoria produkcji $\{\tilde{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$ następującej postaci:

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} \check{y}(t), & t = 0, 1, \dots, \check{t}, \\ \alpha_M^{t-\check{t}} \check{y}(\check{t}), & t = \check{t} + 1, \dots, t_1, \end{cases} \quad (4.18)$$

w której $\check{y}(t) \in \bar{N}$ dla $t = \check{t}, \check{t} + 1, \dots, t_1$.

Dowód. Z definicji $(Z^0, y^0, \check{t} + 1)$ – dopuszczalnego procesu wzrostu mamy:

$$\check{y}(0) = y^0, \check{Z}(0) = Z^0,$$

$$(\check{y}(t) - \check{I}(t), \check{y}(t + 1)) \in \check{Z}(t + 1),$$

$$\check{Z}(t + 1) = F_t(\check{Z}(t), \check{I}(t)),$$

$$0 \leq \check{I}(t) \leq \check{y}(t),$$

$$t = 0, 1, \dots, \check{t}.$$

Jeżeli zachodzi warunek **(GI10)**, to:

$$\check{I}(\check{t}) = 0 \text{ oraz } \alpha_M \check{y}(\check{t}) \leq \check{y}(\check{t} + 1).$$

Biorąc $i(t) = 0$ dla $t = \check{t} + 1, \dots, t_1 - 1$, dostajemy:

$$\forall t \in \{\check{t} + 1, \dots, t_1\} \quad (Z(t) = \check{Z}(\check{t}) \subseteq \bar{Z})$$

i wobec tego:

$$(\check{y}(\check{t}), \alpha_M \check{y}(\check{t})) \in \check{Z}(\check{t}) \subseteq \bar{Z},$$

$$(\alpha_M \check{y}(\check{t}), \alpha_M^2 \check{y}(\check{t})) \in \check{Z}(\check{t}) \subseteq \bar{Z},$$

.....

$$(\alpha_M^{t_1-\check{t}-1} \check{y}(\check{t}), \alpha_M^{t_1-\check{t}} \check{y}(\check{t})) \in \check{Z}(\check{t}) \subseteq \bar{Z},$$

lub inaczej:

$$(\bar{y}(t), \bar{y}(t + 1)) \in \check{Z}(\check{t}) \subseteq \bar{Z}, \quad t = \check{t}, \check{t} + 1, \dots, t_1 - 1,$$

gdzie:

$$\bar{y}(t) = \alpha_M^{t-\check{t}} \check{y}(\check{t}).$$

Wówczas trajektoria produkcji (4.18) wraz z trajektorią inwestycji:

$$\bar{i}(t) = \begin{cases} \check{i}(t), & t = 0, 1, \dots, \check{t} - 1, \\ 0, & t = \check{t}, \check{t} + 1, \dots, t_1 - 1, \end{cases}$$

i ciągiem przestrzeni produkcyjnych:

$$\bar{Z}(t) = \begin{cases} \check{Z}(t), & t = 0, 1, \dots, \check{t}, \\ \check{Z}(\check{t}), & t = \check{t} + 1, \dots, t_1, \end{cases}$$

tworzy (Z^0, y^0, t_1) – dopuszczalny proces wzrostu, w którym gospodarka od okresu $\check{t}$ do końca horyzontu T pozostaje na magistrali. ■

Warunek **(GI10)** informuje ponadto, że w gospodarce Gale’a z inwestycjami od okresu $\check{t}$ istnieje co najmniej jedna magistrala:

$$\bar{N}_{\check{s}} = \left\{ \lambda \check{s} \mid \lambda > 0, \check{s} = \frac{\check{y}(\check{t})}{\|\check{y}(\check{t})\|} \right\} \in \bar{N}$$

(por. uwagę 2 do twierdzenia 3.4 w rozdziale 3).

■ **Twierdzenie 4.3. (‘Słabe’ twierdzenie o magistrali)** Niech $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ będzie (y^0, t_1, u) – optymalną trajektorią produkcji (rozwiązaniem zadania (4.15)). Jeżeli zachodzą warunki **(GI1)**–**(GI10)**, **(F1)**–**(F5)**, **(U1)**, **(U2)**, to $\forall \varepsilon > 0$ istnieje taka liczba naturalna k_ε , że liczba okresów czasu, w których:

$$d(y^*(t), \bar{N}) \geq \varepsilon \tag{4.19}$$

nie przekracza k_ε . Liczba k_ε nie zależy od długości horyzontu T . Metryka $d(\cdot)$ ma postać (3.20).

Dowód. Pamiętając, że przestrzenie produkcyjne $Z(t)$, $t = 0, 1, \dots$, oraz $\bar{Z}$ spełniają warunek:

$$\forall t (Z(t) \subseteq \bar{Z}),$$

z definicji (y^0, t_1, u) – optymalnej trajektorii produkcji $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$, zgodnie z (4.4), (4.15) oraz **(F4)** mamy:

$$\langle \bar{p}, y^*(t+1) \rangle \leq \alpha_M \langle \bar{p}, y^*(t) - i^*(t) \rangle, \quad t = 0, 1, \dots, t_1 - 1,$$

czyli:

$$\begin{aligned} \langle \bar{p}, y^*(t_1) \rangle &\leq \alpha_M \langle \bar{p}, y^*(t_1 - 1) - i^*(t_1 - 1) \rangle \leq \alpha_M^2 \langle \bar{p}, y^*(t_1 - 2) \rangle - \\ &- \alpha_M \langle \bar{p}, i^*(t_1 - 1) \rangle - \alpha_M^2 \langle \bar{p}, i^*(t_1 - 2) \rangle \leq \dots \leq \alpha_M^{t_1} \langle \bar{p}, y^0 \rangle - \\ &- \sum_{k=1}^{t_1} \alpha_M^k \langle \bar{p}, i^*(t_1 - k) \rangle. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Przy założeniach **(GI1)**–**(GI9)** aktualny jest warunek (3.21). Oznaczmy przez $\mathcal{A} = \{\tau_1, \dots, \tau_k\}$ zbiór okresów czasu, w których zachodzi warunek (4.19); $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_k < t_1$. Wówczas, zgodnie z (3.21):

$$\langle \bar{p}, y^*(t+1) \rangle \leq (\alpha_M - \delta_\varepsilon) \langle \bar{p}, y^*(t) - i^*(t) \rangle, \quad t \in \mathcal{A}. \quad (4.21)$$

Z (4.20), (4.21) wynika, że:

$$\begin{aligned} \langle \bar{p}, y^*(t_1) \rangle &\leq \alpha_M^{t_1-k} (\alpha_M - \delta_\varepsilon)^k \langle \bar{p}, y^0 \rangle - \sum_{\substack{\tau=0 \\ \tau \notin \mathcal{A}}}^{t_1-1} \alpha_M^{t_1-\tau} \langle \bar{p}, i^*(\tau) \rangle - \sum_{\tau \in \mathcal{A}} (\alpha_M - \\ &- \delta_\varepsilon)^{t_1-\tau} \langle \bar{p}, i^*(\tau) \rangle \leq \alpha_M^{t_1-k} (\alpha_M - \delta_\varepsilon)^k \langle \bar{p}, y^0 \rangle. \end{aligned}$$

Wobec **(U2)** dochodzimy do warunku:

$$u(y^*(t_1)) \leq a \alpha_M^{t_1-k} (\alpha_M - \delta_\varepsilon)^k \langle \bar{p}, y^0 \rangle. \quad (4.22)$$

Z drugiej strony, w myśl lematu 4.1 istnieje (y^0, t_1) – dopuszczalna trajektoria produkcji $\{\tilde{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$ postaci (4.18), więc zważywszy na dodatnią jednorodność stopnia 1 funkcji użyteczności (warunek **(U1)**):

$$u(y^*(t_1)) \geq u(\tilde{y}(t_1)) = u\left(\alpha_M^{t_1-\tilde{t}} \tilde{y}(\tilde{t})\right) = \sigma \alpha_M^{t_1-\tilde{t}} u(\tilde{s}) > 0, \quad (4.23)$$

$\sigma = \|\tilde{y}(\tilde{t})\| > 0$, $\tilde{s} = \frac{\tilde{y}(\tilde{t})}{\|\tilde{y}(\tilde{t})\|} \in \bar{S}$. Z (4.22), (4.23) dostajemy nierówność:

$$0 < \sigma \alpha_M^{t_1-\tilde{t}} u(\tilde{s}) \leq a \alpha_M^{t_1-k} (\alpha_M - \delta_\varepsilon)^k \langle \bar{p}, y^0 \rangle,$$

która pozwala na oszacowanie liczby k :

$$k \leq \frac{\ln A}{\ln \alpha_M - \ln(\alpha_M - \delta_\varepsilon)} = B,$$

gdzie $A = \max_{s \in \bar{S}} \frac{a\alpha_M^{\bar{t}}(\bar{p}, y^0)}{\sigma u(s)} > 0$. Jeżeli $B < 0$, to $k_\varepsilon = 0$ i (y^0, t_1, u) – optymalna trajektoria produkcji $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ we wszystkich okresach czasu $t \in T$ pozostaje na wielopasmowej magistrali, także w początkowym okresie $t = 0$, co oznacza, że (y^0, t_1) – dopuszczalna trajektoria produkcji $\{\tilde{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$ postaci (4.18) jest jednocześnie (y^0, t_1, u) – optymalną. Jeżeli $B \geq 0$, wtedy w charakterze liczby k_ε , o której mowa w tezie twierdzenia, wystarczy wziąć najmniejszą liczbę całkowitą większą od B . ■

Uwaga 1. Liczba okresów czasu, w których zgodnie z (3.21) ekonomiczna efektywność $\beta(y^*(t), y^*(t+1), \bar{p})$ procesów $(y^*(t), y^*(t+1)) \in Z$ różni się od optymalnej o co najmniej δ_ε , zależy od rozmieszczenia elementów ciągu $\tau_1, \dots, \tau_k$ w horyzoncie T . Zawsze okresów takich jest jednak co najmniej k , co prowadzi do warunku (4.22) (zob. uwagę 2 do twierdzenia 1.10, rozdz. 1, pkt 1.9).

Uwaga 2. Jeżeli istnieje taki optymalny proces produkcji $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z(0) \subseteq \bar{Z}$, że $\alpha(\bar{x}, \bar{y}) = \alpha_{M,0} = \alpha_M$ oraz początkowy wektor produkcji y^0 w (4.5) jest dodatni, wtedy warunek **(GI10)** zachodzi dla $\bar{t} = 0$. Zerowej trajektorii inwestycji $\bar{t}(t) = 0$, $t = 0, 1, \dots, t_1 - 1$ odpowiada wówczas w (4.18) (y^0, t_1) – dopuszczalna trajektoria produkcji $\{\tilde{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$:

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} y^0, & t = 0, \\ \sigma \alpha_M^t \bar{s}, & t = 1, \dots, t_1, \end{cases}$$

$$\sigma = \min_i \frac{y_i^0}{\bar{s}_i} > 0; \quad \bar{s} = \frac{\bar{y}}{\|\bar{y}\|} > 0.$$

Uwaga 3. Twierdzenie pozostaje prawdziwe, gdy warunek **(GI7)** zastąpimy warunkiem **(GI7')**, a warunek **(GI8)** warunkiem słabej regularności **(GL8')** (zob. uwagę 5 do twierdzenia 3.4, rozdz. 3, pkt 3.3).

Prześledzimy teraz przebieg (y^0, t_1, u) – optymalnej trajektorii produkcji $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$, która w pewnym okresie $\check{t} < t_1$ prowadzi do wielopasmowej magistrali $\bar{\mathbb{N}}$, tj. gdy warunek **(GI10)** zostaje zastąpiony warunkiem następującym:

$$\textbf{(GI10')} \quad \exists \check{t} < t_1 (\alpha(y^*(\check{t}), y^*(\check{t} + 1)) = \alpha_M).$$

Jeżeli zachodzi ten warunek, wówczas (Z^0, y^0, t_1) – dopuszczalny jest proces $\{\check{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$, $\{\check{i}(t)\}_{t=0}^{t_1-1}$, $\{\check{Z}(t)\}_{t=0}^{t_1}$, w którym:

$$\check{y}(t) = \begin{cases} y^*(t), & t = 0, 1, \dots, \check{t}, \\ \alpha_M^{t-\check{t}} y^*(\check{t}), & t = \check{t} + 1, \dots, t_1, \end{cases} \quad (4.24)$$

$$\check{i}(t) = \begin{cases} i^*(t), & t = 0, 1, \dots, \check{t} - 1, \\ 0, & t = \check{t}, \dots, t_1 - 1, \end{cases}$$

$$\check{Z}(t) = \begin{cases} Z^*(t), & t = 0, 1, \dots, \check{t}, \\ Z^*(\check{t}), & t = \check{t} + 1, \dots, t_1, \end{cases}$$

$$(Z(0) = Z^0 \text{ oraz } y(0) = y^0)$$

(dowód przebiega podobnie jak dowód lematu 4.1).

■ **Twierdzenie 4.4. (*‘Bardzo silne’ twierdzenie o magistrali*)** Jeżeli zachodzą warunki **(GI1)-(GI9)**, **(GI10')**, **(F1)-(F5)**, **(U1)**, **(U2)** oraz **(U3')** (po zastąpieniu zbioru S przez $\bar{S}$; zob. analogiczny warunek w twierdzeniu 3.11**(2i)**; rozdz. 3, pkt 3.4), to:

$$\forall t \in \{\check{t} + 1, \dots, t_1\} (y^*(t) \in \bar{\mathbb{N}}).$$

Dowód. Z definicji (y^0, t_1, u) – optymalnej trajektorii produkcji $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$, zgodnie z (4.4), (4.15), **(F4)** (podobnie jak przy dowodzie twierdzenia 4.3) mamy:

$$\langle \bar{p}, y^*(t + 1) \rangle \leq \alpha_M \langle \bar{p}, y^*(t) - i^*(t) \rangle, \quad t = 0, 1, \dots, t_1 - 1,$$

zatem w szczególności:

$$\begin{aligned}
\langle \bar{p}, y^*(t_1) \rangle &\leq \alpha_M \langle \bar{p}, y^*(t_1 - 1) - i^*(t_1 - 1) \rangle \leq \alpha_M^2 \langle \bar{p}, y^*(t_1 - 2) \rangle - \\
&- \alpha_M^2 \langle \bar{p}, i^*(t_1 - 2) \rangle - \alpha_M \langle \bar{p}, i^*(t_1 - 1) \rangle \leq \dots \leq \alpha_M^{t_1 - \check{t}} \langle \bar{p}, y^*(\check{t}) \rangle - \\
&- \sum_{k=1}^{t_1 - \check{t}} \alpha_M^k \langle \bar{p}, i^*(t_1 - k) \rangle.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Jeżeli w pewnym okresie $t' \in \{\check{t} + 1, \dots, t_1\}$ zachodzi warunek:

$$y^*(t') \notin \bar{\mathbb{N}}, \tag{4.26}$$

to:

$$\exists \varepsilon > 0 (d(y^*(t'), \bar{\mathbb{N}}) \geq \varepsilon). \tag{4.27}$$

Istotnie, zakładając, że:

$$d(y^*(t'), \bar{\mathbb{N}}) = \min_{y' \in \bar{\mathbb{N}}} \left\| \frac{y^*(t')}{\|y^*(t')\|} - \frac{y'}{\|y'\|} \right\| = 0$$

oraz przyjmując oznaczenia $s^*(t') = \frac{y^*(t')}{\|y^*(t')\|}$, $s' = \frac{y'}{\|y'\|}$, otrzymujemy:

$$\min_{y' \in \bar{\mathbb{N}}} \left\| \frac{y^*(t')}{\|y^*(t')\|} - \frac{y'}{\|y'\|} \right\| = \inf_{s' \in \bar{S}} \|s^*(t') - s'\| = 0,$$

co wobec zwartości zbioru $\bar{S}$ i ciągłości normy $\|\cdot\|$ oznacza, że $s^*(t') = s'$, tj. $y^*(t') \in \bar{\mathbb{N}}$, wbrew założeniu.

Gdy warunek (4.26) zachodzi dla $t' < t_1$, to wobec (4.27), zgodnie z (3.21), istnieje taka liczba $\delta_\varepsilon > 0$, że:

$$\langle \bar{p}, y^*(t' + 1) \rangle \leq (\alpha_M - \delta_\varepsilon) \langle \bar{p}, y^*(t') - i^*(t') \rangle.$$

Podobnie, gdy warunek (4.26) zachodzi dla $t' = t_1$, to:

$$\langle \bar{p}, y^*(t_1) \rangle \leq (\alpha_M - \delta_\varepsilon) \langle \bar{p}, y^*(t_1 - 1) - i^*(t_1 - 1) \rangle.$$

Łącząc te warunki z (4.25), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \langle \bar{p}, y^*(t_1) \rangle &\leq \alpha_M^{t_1-\check{t}-1} (\alpha_M - \delta_\varepsilon) \langle \bar{p}, y^*(\check{t}) \rangle - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq t_1-t'}}^{t_1-\check{t}} \alpha_M^k \langle \bar{p}, i^*(t_1-k) \rangle - \\ &\quad - (\alpha_M - \delta_\varepsilon)^{t_1-t'} \langle \bar{p}, i^*(t') \rangle, \end{aligned}$$

czyli w szczególności:

$$\langle \bar{p}, y^*(t_1) \rangle \leq \alpha_M^{t_1-\check{t}-1} (\alpha_M - \delta_\varepsilon) \langle \bar{p}, y^*(\check{t}) \rangle,$$

a stąd (wobec (U2)):

$$u(y^*(t_1)) \leq \alpha \alpha_M^{t_1-\check{t}-1} (\alpha_M - \delta_\varepsilon) \langle \bar{p}, y^*(\check{t}) \rangle = \sigma \alpha \alpha_M^{t_1-\check{t}-1} (\alpha_M - \delta_\varepsilon) \langle \bar{p}, s^* \rangle, \quad (4.28)$$

gdzie $s^* = \frac{y^*(\check{t})}{\|y^*(\check{t})\|}$, $\sigma = \|y^*(\check{t})\| > 0$.

Trajektoria produkcji $\{\check{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$ postaci (4.24) jest (y^0, t_1) – dopuszczalna, więc:

$$u(y^*(t_1)) \geq u(\check{y}(t_1)) = u\left(\alpha_M^{t_1-\check{t}} y^*(\check{t})\right),$$

czyli zgodnie z (U1):

$$u(y^*(t_1)) \geq \alpha_M^{t_1-\check{t}} u(y^*(\check{t})) = \sigma \alpha \alpha_M^{t_1-\check{t}} u(s^*) = \sigma \alpha \alpha_M^{t_1-\check{t}} \langle \bar{p}, s^* \rangle. \quad (4.29)$$

Z (4.28), (4.29) otrzymujemy nierówność:

$$\sigma \alpha \alpha_M^{t_1-\check{t}-1} (\alpha_M - \delta_\varepsilon) \langle \bar{p}, s^* \rangle \geq \sigma \alpha \alpha_M^{t_1-\check{t}} \langle \bar{p}, s^* \rangle > 0,$$

z której wynika, że $\delta_\varepsilon = 0$. Otrzymana sprzeczność zamyka dowód. ■

Aktualna jest uwaga 3 do twierdzenia 4.3.

4.4. Gospodarka Gale’a z graniczną technologią, inwestycjami i zmiennym tempem wzrostu na wielopasmowej magistrali

Twierdzenia o magistrali sformułowane w punktach 4.1-4.3 pokazują, że podobnie jak we wszystkich wersjach niestacjonarnej gospodarki Gale’a z egzogenicznym

postępem technicznym (bez inwestycji) prezentowanych w rozdziale 3, również obecnie – w niestacjonarnej gospodarce Gale’a z inwestycjami – magistrala jawi się jako swoista „droga szybkiego ruchu”, do której zbliżają się (zgodnie ze ‘słabym’ twierdzeniem o magistrali) lub po której biegną (w świetle ‘bardzo silnego’ twierdzenia o magistrali) wszystkie optymalne trajektorie produkcji. Podobnie jak dotąd, na wielopasmowej magistrali gospodarka rozwija się w maksymalnym tempie, pozostając jednocześnie w neumannowskiej równowadze wzrostu. Słabą stroną przedstawionego modelu gospodarki jest natomiast nieuwzględnienie w nim *explicit* majątku produkcyjnego oraz przyjęcie upraszczającego założenia, że wstrzymanie inwestycji (produkcyjnych) w okresie t skutkuje jedynie tym, iż w kolejnym okresie technologia produkcji nie zmienia się. Z formalnego punktu widzenia oznacza to, że uwzględniony jest tylko wpływ, jaki na technologię produkcji w gospodarce mają inwestycje netto. W tym punkcie założenie to zostanie znacznie osłabione. Zajmiemy się bowiem taką niestacjonarną gospodarką typu Gale’a z graniczną technologią i inwestycjami, w której zbyt niski poziom inwestycji (w szczególności ich brak) może prowadzić do redukcji (kurczenia się) majątku produkcyjnego, a w konsekwencji do spadku zdolności wytwórczych. Innymi słowy, obok inwestycji netto powiększających trwały majątek produkcyjny uwzględniamy również inwestycje restytucyjne potrzebne do odtworzenia jego zużywanej, ulegającej deprecjacji części. W modelu pojawia się dodatkowa zmienna – trwały majątek produkcyjny, który utożsamiamy z wektorem $k = (k_1, \dots, k_n) \geq 0$ dóbr kapitałowych w gospodarce (zasób, wymiar: JN).

Bez zmiany pozostają warunki **(GI1)-(GI9)**, **(F2)-(F5)** oraz (4.1.)-(4.5). Przez $\sigma(R_+^{2n})$ oznaczamy, podobnie jak dotąd, rodzinę przestrzeni produkcyjnych (stożków wypukłych i domkniętych w R_+^{2n}) spełniających warunki **(GI1)-(GI6)**. Każdej przestrzeni produkcyjnej $Z \in \sigma(R_+^{2n})$ odpowiada wektor dóbr kapitałowych (zasób):

$$k = K(Z). \quad (4.30)$$

O odwzorowaniu $K: \sigma(R_+^{2n}) \rightarrow R_+^n$ zakładamy, że spełnia następujące dwa proste warunki:

$$(K1) \quad K(\{0\}) = 0.$$

$$(K2) \quad \forall Z^1, Z^2 \in \sigma(R_+^{2n}) \setminus \{0\} (Z^1 \supseteq Z^2 \Rightarrow K(Z^1) \geq K(Z^2) \geq 0)$$

(odwzorowanie jest monotoniczne, rosnącym zdolnościom wytwórczym gospodarki towarzyszy wzrost zasobów majątku produkcyjnego).

Uwzględnienie majątku produkcyjnego sprawia, że zmianie ulega teraz warunek (F1). Zamiast niego obowiązuje warunek:

$$(F1') \quad \forall t \forall Z \in \sigma(R_+^{2n}) \forall i:$$

$$i \geq k\mu \Rightarrow F_t(Z, i) \supseteq Z,$$

$$i = k\mu \Rightarrow F_t(Z, i) = Z,$$

$$i \leq k\mu \Rightarrow F_t(Z, i) \subseteq Z,$$

gdzie $\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mu_n \end{pmatrix}$ jest diagonalną macierzą współczynników deprecjacji

majątku, $0 \leq \mu_i < 1$, $i = 1, \dots, n$; $k = K(Z)$.

Zgodnie z tym warunkiem $k\mu$ jest wektorem inwestycji restytucyjnych umożliwiających odtworzenie (reprodukcję) zużytego majątku produkcyjnego. Współczynnik μ_i informuje, jaka część (ułamek) i -tej współrzędnej wektora dóbr kapitałowych $k = K(Z)$ ulega deprecjacji w ciągu jednego okresu czasu (np. roku) i wymaga odtworzenia w postaci inwestycji restytucyjnych (gdyby zachodziła taka konieczność). Warunkiem utrzymania w okresie $t + 1$ technologii produkcji analogicznej jak w okresie t jest przeznaczenie na ten cel inwestycji $i(t) = k(t)\mu$. Wówczas $Z(t + 1) = F_t(Z(t), k(t)\mu) = Z(t)$, gdzie $k(t) = K(Z(t))$. Jeśli nakłady inwestycyjne w okresie t przekraczają wielkość inwestycji restytucyjnych, wówczas potencjał produkcyjny gospodarki rośnie, natomiast jeżeli są niższe, wtedy jej zdolności wytwórcze maleją.

Jeżeli gospodarka Gale’a spełnia warunki **(GI1)-(GI9)**, **(F1’)**, **(F2)-(F4)**, to:

- istnieje graniczna przestrzeń produkcyjna $\bar{Z}$,
- istnieją (granicznie) optymalne procesy produkcji $(\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{Z}_{opt} \subset \bar{Z}$,
- zbiór $\bar{S} = \left\{ \bar{s} \mid \bar{s} = \frac{\bar{y}}{\|\bar{y}\|}, \alpha(\bar{x}, \bar{y}) = \alpha_M > 0 \right\}$ wektorów struktury produkcji we wszystkich optymalnych procesach $(\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{Z}_{opt}$ jest zwarty, wypukły i zawiera tylko wektory dodatnie,
- istnieje wielopasmowa magistrala $\bar{N} = \bigcup_{s \in \bar{S}} N^s$, gdzie $N^s = \{ \lambda s \mid \lambda > 0 \}$,
- istnieją takie (dodatnie) ceny von Neumanna $\bar{p}$, że trójka $\{ \alpha_M, (\bar{x}, \bar{y}), \bar{p} \}$ z każdym procesem $(\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{Z}_{opt}$ tworzy optymalny stan równowagi von Neumanna, tj. spełnia warunki (4.15),
- aktualny jest warunek (3.21).

Rozpatrzmy następujące zadanie wzrostu docelowego (maksymalizacji użyteczności produkcji wytworzonej w ostatnim okresie horyzontu T):

znaleźć:

$$\max u(y(t_1)) \quad (4.31)$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{aligned} (y(t) - i(t), y(t+1)) &\in Z(t+1), \quad t = 0, 1, \dots, t_1 - 1, \\ 0 &\leq i(t) \leq y(t), \quad t = 0, 1, \dots, t_1 - 1, \\ k(t) &= K(Z(t)), \quad t = 0, 1, \dots, t_1, \\ Z(t+1) &= F_t(Z(t), i(t)), \quad t = 0, 1, \dots, t_1 - 1, \\ Z(0) &= Z^0 \subset R_+^{2n}, \quad y(0) = y^0 \geq 0. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Jeżeli spełniony jest warunek **(F5)** oraz funkcja użyteczności $u(\cdot)$ charakteryzuje się standardowymi własnościami **(U1)**, **(U2)**, wówczas zadanie to ma rozwiązanie. Ciąg wektorów produkcji $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ będący jego rozwiązaniem nazywamy (y^0, t_1, u) – optymalną trajektorią produkcji. Odpowiadający mu ciąg wektorów inwestycji nazywamy optymalną trajektorią inwestycji i oznaczamy przez $\{i^*(t)\}_{t=0}^{t_1-1}$. Przez $\{Z^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ oznaczamy będący rozwiązaniem zadania (4.31)-

(4.32) ciąg optymalnych przestrzeni produkcyjnych, a przez $\{k^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ optymalną trajektorię wektorów majątku produkcyjnego (dóbr kapitałowych). Złożony z ciągów $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$, $\{i^*(t)\}_{t=0}^{t_1-1}$, $\{Z^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$, $\{k^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ (Z^0, y^0, t_1) – dopuszczalny proces nazywamy procesem (Z^0, y^0, u, t_1) – optymalnym.

Ostatni warunek **(GI10)** potrzebny przy dowodzie ‘słabego’ twierdzenia o wielopasmowej magistrali w gospodarce Gale’a z regułami wzrostu (4.31), (4.32) składa się z dwóch części. W części **(GI10)(i)** mówi o istnieniu dopuszczalnego procesu wzrostu prowadzącego w pewnym okresie $\check{t} < t_1$ do wielopasmowej magistrali, na której następnie gospodarka może rozwijać się (funkcjonować) do końca horyzontu T :

(GI10)(i) $\exists \check{t} < t_1 \exists s \in \bar{S} \exists (Z^0, y^0, t_1)$ – dopuszczalny proces wzrostu:

$$\{\check{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}, \{\check{l}(t)\}_{t=0}^{t_1-1}, \{\check{Z}(t)\}_{t=0}^{t_1}, \{\check{k}(t)\}_{t=0}^{t_1} \& \forall t \in \{\check{t}, \check{t}+1, \dots, t_1\} (\check{y}(t) \in N_s).$$

Aby wyjaśnić sens części **(GI10)(2i)**, przyjmijmy oznaczenie $\alpha_{t+1} = \alpha(\check{y}(t), \check{y}(t+1))$, $t = \check{t}, \check{t}+1, \dots, t_1$ (tempo wzrostu produkcji na wielopasmowej magistrali w (Z^0, y^0, t_1) – dopuszczalnym procesie, począwszy od okresu $t = \check{t}$). Ponieważ $\check{y}(\check{t}), \dots, \check{y}(t_1) \in N_s$, więc:

$$\exists \lambda_{\check{t}} > 0, \lambda_{\check{t}+1} > 0, \dots, \lambda_{t_1} > 0 (\check{y}(\check{t}) = \lambda_{\check{t}}s, \check{y}(\check{t}+1) = \lambda_{\check{t}+1}s, \dots, \check{y}(t_1) = \lambda_{t_1}s),$$

czyli:

$$\forall t \in \{\check{t}, \check{t}+1, \dots, t_1-1\} (\alpha_{t+1} = \alpha(\check{y}(t), \check{y}(t+1)) > 0)$$

oraz:

$$\forall t \in \{\check{t}+1, \dots, t_1\} (\check{y}(t) = (\prod_{\theta=1}^{t-\check{t}} \alpha_{\check{t}+\theta}) \check{y}(\check{t})). \quad (4.33)$$

Z drugiej strony, trajektoria produkcji oraz inwestycji w (Z^0, y^0, t_1) – dopuszczalnym procesie $\{\check{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$, $\{\check{l}(t)\}_{t=0}^{t_1-1}$, $\{\check{Z}(t)\}_{t=0}^{t_1}$, $\{\check{k}(t)\}_{t=0}^{t_1}$ spełniają warunek:

$$(\check{y}(t) - \check{l}(t), \check{y}(t+1)) \in \check{Z}(t+1) \subseteq \bar{Z}, \quad t = 0, 1, \dots, t_1 - 1,$$

czyli w szczególności:

$$0 < \alpha_{t+1} = \alpha(\check{y}(t), \check{y}(t+1)) \leq \alpha(\check{y}(t) - \check{l}(t), \check{y}(t+1)) \leq \alpha_{M,t+1} \leq \alpha_M, \\ t = \check{t}, \dots, t_1 - 1. \quad (4.34)$$

Jeżeli zatem zachodzi warunek **(GI10)(i)**, to w dopuszczalnym procesie $\{\check{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}, \{\check{l}(t)\}_{t=0}^{t_1-1}, \{\check{Z}(t)\}_{t=0}^{t_1}, \{\check{k}(t)\}_{t=0}^{t_1}$ gospodarka – począwszy od momentu dojścia do magistrali – rozwija się w poszczególnych okresach $\check{t} + 1, \dots, t_1$ w (ogólnie różnym) tempie $\alpha_{t+1}, \dots, \alpha_{t_1} \in (0, \alpha_M]$. Tempo wzrostu produkcji na magistrali α_{t+1} oraz optymalna technologiczna efektywność gospodarki $\alpha_{M,t+1}$ ($t = \check{t}, \dots, t_1 - 1$) zależą od technologii produkcji, która z okresu na okres może podlegać nawet znacznym wahaniom. Bez dodatkowych warunków wskaźniki $\alpha_{t+1}, \alpha_{M,t+1}$ mogą zatem istotnie różnić się, zarówno między sobą, jak i w czasie.

Regularny przebieg procesów wzrostu na magistrali w gospodarce Gale’a w okresach $t = \check{t} + 1, \dots, t_1$ zapewnia następujący warunek:

(GI10)(2i) Niech $\gamma(t_1) = \prod_{t=\check{t}}^{t_1-1} \frac{\alpha_M}{\alpha_{t+1}}$. Zakładamy, że ciąg $\{\gamma(t_1)\}_{t_1=\check{t}+1}^\infty$ jest ograniczony.

Przy tym założeniu wskaźniki $\alpha_{t+1}, \alpha_{M,t+1}$ z czasem stabilizują się, zmierzając do wspólnej granicy. Istotnie, zgodnie z (4.34) mamy $\alpha_{t+1} \leq \alpha_{M,t+1} \leq \alpha_M$, więc ciąg $\{\gamma(t_1)\}_{t_1=\check{t}+1}^\infty$ jest niemalejący, $\gamma(t+1) \geq \gamma(t)$, a ponieważ jest ograniczony, więc ma granicę:

$$\exists \lim_{t_1} \gamma(t_1) = \prod_{t=\check{t}}^\infty \frac{\alpha_M}{\alpha_{t+1}} = M < +\infty \quad (4.35)$$

($M \geq 1$). Łatwo zauważyć, że:

¹ Lub inaczej: $(\check{x}(t+1), \check{y}(t+1)) \in \check{Z}(t+1) \subseteq \bar{Z}$, gdzie $\check{x}(t+1) = \check{y}(t) - \check{l}(t)$, $t = 0, 1, \dots, t_1 - 1$.

$$\lim_t \alpha_t = \lim_t \alpha_{M,t} = \alpha_M.$$

■ **Twierdzenie 4.5.** Jeżeli gospodarka Gale’a z inwestycjami i graniczną technologią spełnia warunki **(GI1)-(GI9)**, **(GI10)(i, 2i)**, **(F1’)**, **(F2)-(F5)**, **(U1)**, **(U2)**, to dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba naturalna k_ε , że liczba okresów czasu, w których (y^0, t_1, u) – optymalna trajektoria produkcji $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ (rozwiązanie zadania (4.31)-(4.32)) spełnia warunek (4.19) nie przekracza k_ε . Liczba k_ε nie zależy od długości horyzontu T .

Dowód. Postępując analogicznie jak przy dowodzie twierdzenia 4.3, dochodzimy do warunku:

$$u(y^*(t_1)) \leq a\alpha_M^{t_1-k} (\alpha_M - \delta_\varepsilon)^k \langle \bar{p}, y^0 \rangle \quad (4.36)$$

(zob. (4.22)). Zgodnie z **(GI10)(i)** istnieje (y^0, t_1) – dopuszczalna trajektoria produkcji $\{\check{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$, która w okresie $\check{t} < t_1$ prowadzi do magistrali, pozostając na niej do końca horyzontu T (zob. (4.33):

$$\begin{aligned} \check{y}(t) &= \left(\prod_{\theta=1}^{t-\check{t}} \alpha_{\check{t}+\theta} \right) \check{y}(\check{t}) = \sigma \left(\prod_{\theta=1}^{t-\check{t}} \alpha_{\check{t}+\theta} \right) \check{s}, \quad t = \check{t} + 1, \dots, t_1, \\ \check{s} &= \frac{\check{y}(\check{t})}{\|\check{y}(\check{t})\|} \in S, \sigma = \|\check{y}(\check{t})\| > 0, \end{aligned}$$

czyli (zważywszy na dodatnią jednorodność stopnia 1 funkcji użyteczności; zob. **(U1)**):

$$u(y^*(t_1)) \geq u(\check{y}(t_1)) = u\left(\sigma \left(\prod_{\theta=1}^{t_1-\check{t}} \alpha_{\check{t}+\theta} \right) \check{s}\right) = \sigma \left(\prod_{\theta=1}^{t_1-\check{t}} \alpha_{\check{t}+\theta} \right) u(\check{s}) > 0. \quad (4.37)$$

Z (4.36), (4.37), po uwzględnieniu (4.35), otrzymujemy nierówność:

$$k \leq B = \frac{\ln A}{\ln \alpha_M - \ln(\alpha_M - \delta_\varepsilon)},$$

gdzie $A = \frac{aM\alpha_M^{\check{t}}(\bar{p}, y^0)}{\sigma u(\check{s})} > 0$. Jeżeli $B < 0$, to $k_\varepsilon = 0$, czyli (y^0, t_1, u) – optymalna trajektoria produkcji $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ we wszystkich okresach horyzontu czasu T pozostaje na wielopasmowej magistrali $\bar{\mathbb{N}}$. Jeżeli $B \geq 0$, to w charakterze liczby k_ε , o której mowa w tezie twierdzenia, wystarczy wziąć najmniejszą liczbę całkowitą większą od B . Liczba k_ε nie zależy od długości horyzontu T . ■

Jeżeli w twierdzeniu 4.5 (y^0, t_1, u) – optymalna trajektoria produkcji $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ w okresach czasu $t \in \{0, 1, \dots, \check{t}\}$ spełnia k_ε razy warunek (4.19), to:

$$\forall t \in \{\check{t} + 1, \dots, t_1\} (d(y^*(t), \bar{\mathbb{N}}) < \varepsilon).$$

Jest to prosta konsekwencja twierdzenia mówiąca, że jeżeli optymalna trajektoria produkcji w początkowej fazie wzrostu k_ε razy co najmniej o $\varepsilon > 0$ odbiega od magistrali $\bar{\mathbb{N}}$, to następnie do końca horyzontu T zawsze pozostaje już w jej ε -otoczeniu.

Zgodnie z warunkiem **(GI10)(i)** istnieje dopuszczalny proces wzrostu prowadzący w pewnym okresie $\check{t} < t_1$ do wielopasmowej magistrali, na której następnie gospodarka może rozwijać się (funkcjonować) do końca horyzontu T . Oczywiście, nie jest wykluczone, że do magistrali prowadzi w pewnym okresie $\check{t} < t_1$ sam proces optymalny $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$, $\{i^*(t)\}_{t=0}^{t_1-1}$, $\{Z^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$, $\{k^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$. Rozpatrzmy bliżej tę sytuację, zastępując warunek **(GI10)(i)** warunkiem następującym:

(GI10)(i') $\exists \check{t} < t_1 \exists \check{s} \in S \exists (Z^0, y^0, t_1)$ – dopuszczalny proces wzrostu

$$\{\check{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}, \{\check{i}(t)\}_{t=0}^{t_1-1}, \{\check{Z}(t)\}_{t=0}^{t_1}, \{\check{k}(t)\}_{t=0}^{t_1}$$

$$\left(\forall t \in \{0, 1, \dots, \check{t}\} (\check{y}(t) = y^*(t)) \right) \& \forall t \in \{\check{t}, \check{t} + 1, \dots, t_1\} (\check{y}(t) \in N_{\check{s}}).$$

Zgodnie z tym warunkiem:

(a) istnieje (y^0, t_1, u) – optymalna trajektoria produkcji, która w pewnym okresie $\check{t} < t_1$ prowadzi do wielopasmowej magistrali, $y^*(\check{t}) \in N_{\check{s}} \in \bar{\mathbb{N}}$, po czym

(b) począwszy od okresu $\check{t}$ gospodarka może rozwijać się na magistrali, pozostając na niej do końca horyzontu T . Warunek **(GI10)(2i)** nie zmienia się.

Poniższe twierdzenie jest szczególnym przypadkiem twierdzenia 4.5 mówiącym o przebiegu optymalnej trajektorii produkcji, która w pewnym okresie czasu sama dociera do wielopasmowej magistrali.

■ **Twierdzenie 4.6.** Jeżeli:

- zachodzą warunki **(GI1)-(GI9)**, **(GI10)(i', 2i)**, **(F1')**, **(F2)-(F5)**, **(U1)**, **(U2)** oraz **(U3')** (po zastąpieniu zbioru S przez $\bar{S}$),
- (y^0, t_1, u) – optymalna trajektoria produkcji $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ w pewnym okresie $\check{t} < t_1$ prowadzi do wielopasmowej magistrali $\bar{N}$,

to dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba naturalna k'_ε , że liczba okresów czasu $t \in \{\check{t} + 1, \dots, t_1\}$, w których trajektoria ta oddala się co najmniej o ε od magistrali, nie przekracza k'_ε . Liczba k'_ε nie zależy od długości horyzontu T , początkowego wektora produkcji, cen równowagi ani od postaci funkcji użyteczności.

Dowód przebiega podobnie jak dowód twierdzenia 4.5. Zakładając, że (y^0, t_1, u) – optymalna trajektoria produkcji $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ w okresie $\check{t} < t_1$ dociera do wielopasmowej magistrali, $y^*(\check{t}) \in N_s \in \bar{N}$, a następnie k' razy (w okresach czasu $t \in \{\check{t} + 1, \dots, t_1\}$) oddala się od niej zgodnie z (4.19), standardowo dochodzimy do warunku:

$$\langle \bar{p}, y^*(t_1) \rangle \leq \alpha_M^{t_1 - \check{t} - k'} (\alpha_M - \delta_\varepsilon)^{k'} \langle \bar{p}, y^*(\check{t}) \rangle,$$

co wobec **(U2)** prowadzi do nierówności:

$$u(y^*(t_1)) \leq a \alpha_M^{t_1 - \check{t} - k'} (\alpha_M - \delta_\varepsilon)^{k'} \langle \bar{p}, y^*(\check{t}) \rangle \quad (4.38)$$

(por. np. (4.36)). Z drugiej strony $u(y^*(t_1)) \geq u(\check{y}(t_1))$, gdzie $\{\check{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$ jest zgodnie z **(GI10)(i')** taką (y^0, t_1) – dopuszczalną trajektorią produkcji, że:

$$\check{y}(t_1) = \left(\prod_{\theta=1}^{t_1 - \check{t}} \alpha_{t+\theta} \right) y^*(\check{t})$$

(zob. (4.33)). Wówczas, zważywszy na **(U1)**, **(U2)**, **(U3')**, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} u(y^*(t_1)) &\geq u\left(\left(\prod_{\theta=1}^{t_1-\check{t}} \alpha_{\check{t}+\theta}\right) y^*(\check{t})\right) = \left(\prod_{\theta=1}^{t_1-\check{t}} \alpha_{\check{t}+\theta}\right) u(y^*(\check{t})) = \\ &= \left(\prod_{\theta=1}^{t_1-\check{t}} \alpha_{\check{t}+\theta}\right) a\langle \bar{p}, y^*(\check{t}) \rangle. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Z (4.38), (4.39), po przekształceniach, uwzględniając (4.35), dochodzimy do nierówności:

$$k' \leq B = \frac{\ln M - \check{t} \ln \alpha_M}{\ln \alpha_M - \ln(\alpha_M - \delta_\varepsilon)}.$$

Jeżeli $B < 0$, to $k'_\varepsilon = 0$, czyli (y^0, t_1, u) – optymalna trajektoria produkcji $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ we wszystkich okresach horyzontu czasu $t \in \{\check{t}, \check{t} + 1, \dots, t_1\}$, pozostaje w ε – otoczeniu wielopasmowej magistrali $\bar{N}$. Jeżeli $B \geq 0$, to w charakterze liczby k'_ε wystarczy wziąć najmniejszą liczbę całkowitą większą od B . ■

Uwaga 1. Liczba k'_ε nie zależy od początkowego wektora produkcji y^0 , cen równowagi $\bar{p}$ ani postaci funkcji użyteczności. Tym twierdzenie to różni się od poprzedniego twierdzenia, w którym liczba k_ε zależy zarówno od początkowego wektora produkcji y^0 , cen równowagi $\bar{p}$, jak i postaci (wartości) funkcji użyteczności $u(\check{y}(t)) = \sigma u(\check{s})$.

Uwaga 2. Warunki **(F1)**–**(F3)**, **(K1)**, **(K2)** ustalające własności odwzorowań (multifunkcji) $F_t(\cdot)$, $K(\cdot)$ uzależniających technologię produkcji (dynamikę przestrzeni produkcyjnych oraz majątku) od inwestycji, mają bardzo ogólną postać. Jest to zabieg zamierzony, który pozwala na idące w różnych kierunkach rozszerzenia/rozwinęcia przedstawionej gospodarki Gale’a z inwestycjami, co stwarza interesującą rozległą perspektywę badawczą.

ROZDZIAŁ 5

Niestacjonarna gospodarka Gale'a bez technologii granicznej

Postulat niestacjonarności (zmienności technologii produkcji) jest zgodny z obserwacją realnych procesów gospodarczych. Natomiast hipoteza o istnieniu jakiejkolwiek technologii granicznej jest trudna do weryfikacji. Tymczasem w rozdziałach 3, 4 grała ona istotną rolę, przesądzając m.in. o istnieniu oraz własnościach magistrali produkcyjnej. Obecnie odchodzimy od założenia, że w gospodarce zmieniająca się z upływem czasu technologia produkcji zmierza do pewnej technologii granicznej.

Poza tym jednym założeniem rozpatrywany model nie różni się od modelu gospodarki z rozdziału 3. Pokażemy, że również bez założenia o istnieniu technologii granicznej gospodarka Gale'a charakteryzuje się magistralnymi własnościami. Podobnie jak w rozdziale 3 pominięty zostaje blok warunków wiążących przyszłą technologię produkcji (dynamikę przestrzeni produkcyjnych) z przeznaczanymi na ten cel bieżącymi inwestycjami. Rozbudowany blok tych warunków będzie uwzględniony w następnym rozdziale.

Efektowi magistrali w niestacjonarnej gospodarce Gale'a bez założenia o istnieniu technologii granicznej poświęcone są m.in. artykuły [64-66], [77], [78].

5.1. Gospodarka z rosnącą efektywnością produkcji, pojedynczą magistralą i chwilową równowagą von Neumanna. Podstawowe założenia

Ustalony jest horyzont $T = \{0, 1, \dots, t_1\}$, $t_1 < +\infty$, w którym przestrzenie produkcyjne $Z(t) \subset R_+^{2n}$ spełniają warunki:

$$(GN1) \quad \forall \lambda \geq 0 \quad \forall (x, y) \in Z(t) \quad (\lambda(x, y) \in Z(t)).$$

$$(GN2) \quad \forall (x^1, y^1) \in Z(t) \quad \forall (x^2, y^2) \in Z(t) \quad ((x^1, y^1) + (x^2, y^2) \in Z(t)).$$

$$(GN3) \quad (x, y) \in Z(t) \ \& \ x = 0 \Rightarrow y = 0.$$

$$(GN4) \quad \forall (x, y) \in Z(t) \ \forall x' \geq x \ ((x', y) \in Z(t)).$$

$$(GN5) \quad \forall (x, y) \in Z(t) \ \forall 0 \leq y' \leq y \ ((x, y') \in Z(t)).$$

$$(GN6) \quad \text{Przestrzenie produkcyjne } Z(t) \text{ s}{\kern 1pt} \text{ zbiorami domkn}{\kern 1pt} \text{ietymi w } R^{2n}.$$

$$(GN7) \quad Z(t) \subseteq Z(t + 1).$$

Podobne warunki **(GL1)-(GL7)** (poza warunkiem istnienia granicznej przestrzeni produkcyjnej $\bar{Z}$) spełniała niestacjonarna gospodarka Gale'a w rozdziale 3). Przez $(x(t), y(t)) \in Z(t)$ (lub $(x, y) \in Z(t)$) oznaczamy dopuszczalny proces produkcji w okresie t . Liczba:

$$\alpha(x(t), y(t)) = \max\{\alpha \mid \alpha x(t) \leq y(t)\}$$

jest wskaźnikiem technologicznej efektywności procesu $(x(t), y(t))$ w okresie t . Funkcja $\alpha(\cdot)$ jest w każdym okresie czasu t określona oraz dodatnio jednorodna stopnia 0 na $Z(t) \setminus \{0\}$. Jeżeli zachodzą warunki **(GN1)-(GN7)**, wtedy:

$$\forall t \in T \ \exists (\bar{x}(t), \bar{y}(t)) \in Z(t) \left(\alpha(\bar{x}(t), \bar{y}(t)) = \max_{(x,y) \in Z(t) \setminus \{0\}} \alpha(x, y) = \alpha_{M,t} \geq 0 \right)$$

(dowód przebiega analogicznie jak dowód twierdzenia 1.2(i), po zastąpieniu przestrzeni Z przez $Z(t)$; rozdz. 1, pkt 1.2).

Zakładamy wi{e}cej, mianowicie że:

$$(GN8) \quad \forall t \in T \ \exists (\bar{x}(t), \bar{y}(t)) \in Z(t) \ (\alpha(\bar{x}(t), \bar{y}(t)) = \alpha_{M,t} \ \& \ \bar{y}(t) > 0)$$

(warunek regularności gospodarki). Jeżeli zachodzi warunek **(GN8)**, wówczas:

$$\forall t \in T \ (\alpha_{M,t} > 0),$$

a o parze $(\bar{x}(t), \bar{y}(t)) \in Z(t)$ mówimy, że tworzy optymalny proces produkcji w okresie t . Wszystkie optymalne procesy produkcji są określone z dokładnością do struktury.

Niech $(x(t), y(t)) \in Z(t)$ oraz $p(t) = (p_1(t), \dots, p_n(t)) \geq 0$ będzie wektorem cen towarów w okresie t . Liczba:

$$\beta(x(t), y(t), p(t)) = \frac{\langle p(t), y(t) \rangle}{\langle p(t), x(t) \rangle}$$

(tam, gdzie $\langle p(t), x(t) \rangle \neq 0$) jest wskaźnikiem ekonomicznej efektywności procesu $(x(t), y(t))$ przy cenach $p(t)$. W regularnej gospodarce Gale'a spełniającej warunki (GN1)-(GN8) w każdym okresie czasu $t \in T$ istnieją takie ceny $\bar{p}(t) \geq 0$, przy których:

$$\alpha_{M,t} \bar{x}(t) \leq \bar{y}(t), \quad (5.1)$$

$$\forall (x, y) \in Z(t) (\langle \bar{p}(t), y \rangle \leq \alpha_{M,t} \langle \bar{p}(t), x \rangle), \quad (5.2)$$

$$\langle \bar{p}(t), \bar{y}(t) \rangle > 0 \quad (5.3)$$

(dowód przebiega jak dowód twierdzenia 1.5, rozdz.1, pkt 1.3, po uwzględnieniu warunku regularności i zastąpieniu przestrzeni produkcyjnej Z przez $Z(t)$).

O trójce $\{\alpha_{M,t}, (\bar{x}(t), \bar{y}(t)), \bar{p}(t)\}$ mówimy, że definiuje stan **chwilowej równowagi von Neumanna**. Ceny $\bar{p}(t)$ nazywamy **cenami równowagi chwilowej** (cenami von Neumanna) w niestacjonarnej gospodarce Gale'a w okresie t . Optymalne procesy produkcji $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ oraz ceny $\bar{p}(t)$ w chwilowej równowadze są w każdym okresie t określone z dokładnością do struktury (mnożenia przez stałą dodatnią).

Zgodnie z (5.1)-(5.3) równowaga chwilowa oznacza taki stan gospodarki w okresie t , tj. taki proces $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ i takie ceny $\bar{p}(t)$, przy których dochodzi do zrównania ekonomicznej efektywności produkcji z jej efektywnością technologiczną na najwyższym poziomie możliwym do osiągnięcia w okresie czasu t . Ceny

von Neumanna oraz optymalne procesy produkcji w takiej równowadze są określone z dokładnością do struktury (mnożenia przez stałą dodatnią).

Zakładamy, że niezależnie od długości horyzontu T możliwe jest ustalenie takich cen $\bar{p}(t)$, aby były nierosnące oraz jednostajnie ograniczone (z dołu i z góry):

$$\begin{aligned} \text{(GN9)} \quad \bar{p}(t+1) &\leq \bar{p}(t) \text{ \& } \exists 0 < \pi_{\min} \leq \pi_{\max} < +\infty \quad \forall t_1 \quad \forall t \in T \\ &(\pi_{\min} \leq \|\bar{p}(t)\| \leq \pi_{\max}). \end{aligned}$$

Weźmy proces $(x(t), y(t)) \in Z(t)$. Ponieważ w gospodarce Gale'a nakłady w okresie następnym pochodzą z produkcji wytworzonej w okresie poprzednim, $x(t+1) \leq y(t)$, więc w świetle warunku **(GN4)** standardowo dochodzimy do inkluzji:

$$(y(t), y(t+1)) \in Z(t+1), \quad t = 0, 1, \dots, t_1 - 1. \quad (5.4)$$

Początkowy wektor produkcji jest ustalony:

$$y(0) = y^0 \geq 0. \quad (5.5)$$

O ciągu wektorów $\{y(t)\}_{t=0}^{t_1}$ spełniającym warunki (5.4), (5.5) mówimy tradycyjnie, że tworzy (y^0, t_1) – dopuszczalny proces wzrostu w niestacjonarnej gospodarce Gale'a. Rozpatrzmy zadanie maksymalizacji wartości produkcji wytworzonej w ostatnim okresie horyzontu T mierzonej w cenach von Neumanna $\bar{p}(t_1)$:

$$\begin{aligned} \max \langle \bar{p}(t_1), y(t_1) \rangle \\ \text{p.w. (5.4), (5.5).} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Zadanie to ma rozwiązanie (zob. analogiczne zadanie (3.12) w rozdz. 3, pkt 3.3, po podstawieniu $\bar{p}(t)$ zamiast $\bar{p}$). Rozwiązanie $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ zadania (5.6) nazywamy $(y^0, t_1, \bar{p}(t_1))$ – optymalnym procesem wzrostu w niestacjonarnej gospodarce Gale'a.

Zgodnie z **(GN8)** istnieje taki optymalny proces produkcji $(\bar{x}(0), \bar{y}(0)) \in Z(0)$, że $\alpha(\bar{x}(0), \bar{y}(0)) = \alpha_{M,0} > 0$ oraz $\bar{y}(0) > 0$. Wobec **(GN4)** oraz (5.4) (zważywszy, że wszystkie procesy produkcji, w tym procesy optymalne, są określone z dokładnością do struktury) stwierdzamy, że istnieje optymalny proces produkcji $(\bar{x}(1), \bar{y}(1)) \in Z(1)$, w którym $0 < \bar{x}(1) \leq \bar{y}(0)$. Rozumując analogicznie, stwierdzamy dalej, że istnieje ciąg (dodatnich) optymalnych procesów produkcji $\{\bar{x}(t), \bar{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$, w którym $\bar{x}(t+1) \leq \bar{y}(t)$, $t = 0, 1, \dots, t_1 - 1$. Postulujemy nieco więcej, a mianowicie:

(GN10) Istnieje ciąg $\{\bar{x}(t), \bar{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$ optymalnych procesów produkcji spełniających warunek **(GN8)**, w którym nakłady w okresie następnym są równe produkcji wytworzonej w okresie poprzednim:

$$\bar{x}(t+1) = \bar{y}(t), \quad t = 0, 1, \dots, t_1 - 1. \quad (5.7)$$

Jeżeli zachodzi ten warunek, wtedy istnieje $(\bar{y}^0, t_1)$ – dopuszczalny proces wzrostu postaci:

$$\bar{y}(t) = \left(\prod_{\theta=1}^t \alpha_{M,\theta}\right) \bar{y}(0) > 0, \quad t = 1, \dots, t_1 \quad (5.8)$$

(wektora $\bar{y}(0)$ nie należy mylić z początkowym wektorem $y(0) = y^0$ w procesie (y^0, t_1) – dopuszczalnym). Proces ten jest określony z dokładnością do mnożenia przez stałą dodatnią w tym sensie, że $\forall \lambda > 0$ proces $\{\lambda \bar{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$ jest $(\lambda \bar{y}(0), t_1)$ – dopuszczalny. Charakteryzuje się też stałą w czasie (optymalną) strukturą produkcji:

$$\forall \lambda > 0 \left(\frac{\lambda \bar{y}(t)}{\|\lambda \bar{y}(t)\|} = \frac{\bar{y}(t)}{\|\bar{y}(t)\|} = \frac{(\prod_{\tau=1}^t \alpha_{M,\tau}) \bar{y}(0)}{\|(\prod_{\tau=1}^t \alpha_{M,\tau}) \bar{y}(0)\|} = \frac{\bar{y}(0)}{\|\bar{y}(0)\|} = \bar{s} = const. > 0 \right). \quad (5.9)$$

Półprosta:

$$N = \{\lambda \bar{s} \mid \lambda > 0\}$$

$(\bar{s} > 0)$ jest pojedynczą magistralą produkcyjną (promieniem von Neumanna) w niestacjonarnej gospodarce Gale’a bez technologii granicznej. Zakładamy, że

magistrala N jest w horyzoncie T określona jednoznacznie. Jej jednoznaczność zapewnia np. warunek:

$$\forall t \in T \forall (x(t), y(t)) \in Z(t) \setminus \{0\} (x(t) \notin N \vee y(t) \notin N \Rightarrow \alpha(x(t), y(t)) < \alpha_{M,t})$$

(jest to odpowiednik warunku **(G9)** z rozdz. 1, pkt 1.5). Jeżeli zachodzi ten warunek, to prawdziwa jest implikacja:

$$\alpha(x(t), y(t)) = \alpha_{M,t} \Rightarrow \alpha_M x(t) = y(t).$$

Na magistrali gospodarka rozwija się w maksymalnym, zmieniającym się w czasie tempie, generalnie rosnącym ze względu na rozwój technologii (o ile zachodzi warunek **(GN7)**), zachowując jednocześnie stałą strukturę produkcji. Jest to zasadnicza różnica w stosunku do rozdziałów wcześniejszych, w których wprowadzie gospodarka na magistrali osiąga maksymalne tempo wzrostu, ale jest ono stałe (niezmienne w czasie) niezależnie od długości horyzontu T .

5.2. Dwa twierdzenia o magistrali

Zgodnie z (5.2) efektywność ekonomiczna dowolnego dopuszczalnego procesu produkcji w okresie t nie przekracza technologicznej efektywności procesu optymalnego. Podobnie jak dotąd zakładamy, że w każdym okresie $t \in T$ efektywność ekonomiczna dowolnego procesu dopuszczalnego leżącego poza magistralą jest niższa od maksymalnej technologicznej efektywności, którą gospodarka osiąga tylko na magistrali:

$$\begin{aligned} \text{(GN11)} \quad \forall t \in T \forall (x, y) \in Z(t) \setminus \{0\} \left(x \notin N \vee y \notin N \Rightarrow \beta(x, y, \bar{p}(t)) = \right. \\ \left. = \frac{\langle \bar{p}(t), y \rangle}{\langle \bar{p}(t), x \rangle} < \alpha_{M,t} \right) \end{aligned}$$

(zob. warunek **(G10)** rozdz. 1, pkt 1.5, **(GN9)** rozdz. 3, pkt 3.3). Jeżeli zachodzi ten warunek, to:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \forall t \in T \exists \delta_{\varepsilon,t} \in (0, \alpha_{M,t}) \forall (x, y) \in Z(t) \\ \left(\left\| \frac{x}{\|x\|} - \bar{s} \right\| \geq \varepsilon \vee \left\| \frac{y}{\|y\|} - \bar{s} \right\| \geq \varepsilon \Rightarrow \beta(x, y, \bar{p}(t)) \leq \alpha_{M,t} - \delta_{\varepsilon,t} \right) \end{aligned} \quad (5.10)$$

(dowód przebiega podobnie jak dowód lematu 1.1 w rozdz. 1, pkt 1.5, po podstawieniu $Z(t)$, $\alpha_{M,t}$, $\delta_{\varepsilon,t}$, $\bar{p}(t)$ zamiast Z , α_M , δ_ε , $\bar{p}$ oraz uwzględnieniu warunków **(GN1)**-**(GN11)** zamiast **(G1)**-**(G9)**). Liczby $\delta_{\varepsilon,t}$, $\alpha_{M,t}$ spełniają warunek $0 < \frac{\delta_{\varepsilon,t}}{\alpha_{M,t}} < 1$, co nie wyklucza jednak mało realistycznej sytuacji, gdy przy rosnącej nieograniczenie długości horyzontu $T = \{0, 1, \dots, t_1\}$:

$$\lim_t \delta_{\varepsilon,t} = 0 \quad \text{dla pewnej liczby } \varepsilon > 0$$

(tj. gdy z upływem czasu efektywność ekonomiczna procesu produkcji zbliża się do optymalnej, mimo że struktura produkcji stale odbiega w nim o ε od magistralnej/optymalnej struktury $\bar{s}$). Dlatego dalej przyjmujemy, że parametr $\delta_{\varepsilon,t}$ w (5.10) spełnia następujący warunek:

$$\textbf{(GN12)} \quad \forall \varepsilon > 0 \exists v_\varepsilon > 0 \forall t_1 > 0 \forall t \in T \left(\frac{\delta_{\varepsilon,t}}{\alpha_{M,t}} \geq v_\varepsilon \right).$$

Warunek ten nie wyklucza wzrostu efektywności produkcji $\alpha_{M,t}$ (nawet nieograniczonego), ale pod warunkiem odpowiedniego wzrostu $\delta_{\varepsilon,t}$. W sensie geometrycznym warunek **(GN12)** oznacza specyficzny kształt przestrzeni produkcyjnych $Z(t)$: stożków z upływem czasu „coraz silniej wypukłych” w otoczeniu magistrali.

■ **Twierdzenie 5.1. (*‘Słabe’ twierdzenie o magistrali*)** Jeżeli niestacjonarna gospodarka Gale’a z pojedynczą magistralą N spełnia warunki **(GN1)**-**(GN12)** oraz istnieje taki $(y^0, \check{t})$ – dopuszczalny proces wzrostu $\{\check{y}(t)\}_{t=0}^{\check{t}}$, $\check{t} < t_1$, że $\check{y}(\check{t}) \in N$, to dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba naturalna k_ε , że liczba okresów czasu, w których $(y^0, t_1, \bar{p}(t_1))$ – optymalny proces wzrostu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ (rozwiązanie zadania (5.6)) spełnia warunek:

$$d(y^*(t), N) = \left\| \frac{y^*(t)}{\|y^*(t)\|} - \bar{s} \right\| \geq \varepsilon, \quad (5.11)$$

nie przekracza k_ε . Liczba k_ε nie zależy od długości horyzontu $T = \{0, 1, \dots, t_1\}$.

Dowód. Z założenia istnieje $(y^0, \check{t})$ – dopuszczalny proces wzrostu $\{\check{y}(t)\}_{t=0}^{\check{t}}$ prowadzący w okresie $\check{t} < t_1$ do magistrali N . Wówczas (y^0, t_1) – dopuszczalny jest proces $\{\check{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$:

$$\check{y}(t) = \begin{cases} \check{y}(t), & t = 0, 1, \dots, \check{t}, \\ \sigma\left(\prod_{\theta=1}^{t-\check{t}} \alpha_{M, \check{t}+\theta}\right)\bar{s}, & t = \check{t} + 1, \dots, t_1, \end{cases}$$

$\sigma = \|\check{y}(\check{t})\| > 0$. Z definicji procesu $(y^0, t_1, \bar{p}(t_1))$ – optymalnego $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ płynie wniosek, że:

$$\begin{aligned} \langle \bar{p}(t_1), y^*(t_1) \rangle &\geq \langle \bar{p}(t_1), \check{y}(t_1) \rangle = \langle \bar{p}(t_1), \sigma\left(\prod_{\theta=1}^{t_1-\check{t}} \alpha_{M, \check{t}+\theta}\right)\bar{s} \rangle = \\ &= \sigma\left(\prod_{\theta=1}^{t_1-\check{t}} \alpha_{M, \check{t}+\theta}\right) \langle \bar{p}(t_1), \bar{s} \rangle > 0. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Zgodnie z (5.2), (5.4):

$$\langle \bar{p}(t+1), y^*(t+1) \rangle \leq \alpha_{M, t+1} \langle \bar{p}(t+1), y^*(t) \rangle, \quad t = 0, 1, \dots, t_1 - 1.$$

Dla $t = t_1 - 1$ mamy:

$$0 < \langle \bar{p}(t_1), y^*(t_1) \rangle \leq \alpha_{M, t_1} \langle \bar{p}(t_1), y^*(t_1 - 1) \rangle.$$

Przy przyjętych założeniach ceny von Neumanna $\bar{p}(t)$ są dodatnie $\forall t \in T$. Istotnie, zakładając *a contrario*, że w pewnym okresie t' cena i -tego towaru $\bar{p}_i(t') = 0$ oraz biorąc optymalny proces produkcji $(\bar{x}(t'), \bar{y}(t'))$, w którym (zgodnie z (5.7)-(5.9)) $\bar{y}(t') = \alpha_{M, t'} \bar{x}(t') > 0$, $\frac{\bar{x}(t')}{\|\bar{x}(t')\|} = \frac{\bar{y}(t')}{\|\bar{y}(t')\|} = \bar{s} > 0$, dochodzimy do inkluzji: $\bar{x}(t') \in N$. Niech $\tilde{x}(t') = \bar{x}(t') + e^i$, gdzie $e^i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ jest wektorem z jedynką na i -tym miejscu. Wówczas oczywiście $\tilde{x}(t') \notin N$. Zgodnie z **(GN4)** proces $(\tilde{x}(t'), \bar{y}(t'))$ jest dopuszczalny, $(\tilde{x}(t'), \bar{y}(t')) \in Z(t')$. Jednocześnie:

$$\beta(\tilde{x}(t'), \bar{y}(t'), \bar{p}(t')) = \frac{\langle \bar{p}(t'), \bar{y}(t') \rangle}{\langle \bar{p}(t'), \tilde{x}(t') \rangle} = \frac{\langle \bar{p}(t'), \bar{y}(t') \rangle}{\langle \bar{p}(t'), \bar{x}(t') \rangle} = \alpha_{M, t'},$$

co jest sprzeczne z **(GN11)**. Sprzeczność otrzymaliśmy, zakładając, że istnieje wektor cen równowagi chwilowej $\bar{p}(t') \succ 0$. Ceny równowagi chwilowej są ponadto określone z dokładnością do struktury. Zgodnie z **(GN9)** istnieje wektor cen $\bar{p}(t_1 - 1) \geq \bar{p}(t_1)$, czyli:

$$\langle \bar{p}(t_1), y^*(t_1 - 1) \rangle \leq \langle \bar{p}(t_1 - 1), y^*(t_1 - 1) \rangle,$$

a stąd:

$$\langle \bar{p}(t_1), y^*(t_1) \rangle \leq \alpha_{M,t_1} \langle \bar{p}(t_1 - 1), y^*(t_1 - 1) \rangle \leq \alpha_{M,t_1} \alpha_{M,t_1-1} \langle \bar{p}(t_1 - 1), y^*(t_1 - 2) \rangle.$$

Dobierając ceny $\bar{p}(t_1 - 2)$ tak, aby spełniony był warunek:

$$\langle \bar{p}(t_1 - 1), y^*(t_1 - 2) \rangle \leq \langle \bar{p}(t_1 - 2), y^*(t_1 - 2) \rangle$$

otrzymujemy:

$$\langle \bar{p}(t_1), y^*(t_1) \rangle \leq \alpha_{M,t_1} \alpha_{M,t_1-1} \langle \bar{p}(t_1 - 2), y^*(t_1 - 2) \rangle.$$

Postępując tak dalej, ostatecznie dochodzimy do warunku:

$$\langle \bar{p}(t_1), y^*(t_1) \rangle \leq \prod_{t=1}^{t_1} \alpha_{M,t} \langle \bar{p}(0), y^0 \rangle. \quad (5.13)$$

Oznaczmy przez L_ε zbiór (dodatnich) okresów czasu $\tau_1 < \tau_2 < \dots \tau_k \leq t_1$, w których zachodzi k razy warunek (5.11). Wówczas, zgodnie z (5.10):

$$\beta(y^*(t-1), y^*(t), \bar{p}(t)) = \frac{\langle \bar{p}(t), y^*(t) \rangle}{\langle \bar{p}(t), y^*(t-1) \rangle} \leq \alpha_{M,t} - \delta_{\varepsilon,t}, \quad t \in L_\varepsilon,$$

czyli:

$$\langle \bar{p}(t), y^*(t) \rangle \leq (\alpha_{M,t} - \delta_{\varepsilon,t}) \langle \bar{p}(t), y^*(t-1) \rangle, \quad t \in L_\varepsilon,$$

Co, zważywszy na (5.13), prowadzi do nierówności:

$$\langle \bar{p}(t_1), y^*(t_1) \rangle \leq \left(\prod_{\substack{t=1 \\ t \notin L_\varepsilon}}^{t_1} \alpha_{M,t} \right) \left(\prod_{t \in L_\varepsilon} (\alpha_{M,t} - \delta_{\varepsilon,t}) \right) \langle \bar{p}(0), y^0 \rangle. \quad (5.14)$$

Łącząc (5.12), (5.14), dochodzimy do warunku:

$$0 < \sigma \left(\prod_{\theta=1}^{t_1-\bar{t}} \alpha_{M,\bar{t}+\theta} \right) \langle \bar{p}(t_1), \bar{s} \rangle \leq \left(\prod_{\substack{t=1 \\ t \notin L_\varepsilon}}^{t_1} \alpha_{M,t} \right) \left(\prod_{t \in L_\varepsilon} (\alpha_{M,t} - \delta_{\varepsilon,t}) \right) \langle \bar{p}(0), y^0 \rangle,$$

z którego wynika, że:

$$\left(\prod_{\substack{t=1 \\ t \notin L_\varepsilon}}^{\check{t}} \alpha_{M,t}\right) \left(\prod_{t \in L_\varepsilon}^{\check{t}} (\alpha_{M,t} - \delta_{\varepsilon,t})\right) \prod_{\substack{t=\check{t}+1 \\ t \in L_\varepsilon}}^{t_1} \left(1 - \frac{\delta_{\varepsilon,t}}{\alpha_{M,t}}\right) \geq \frac{\sigma(\bar{p}(t_1), \bar{s})}{\langle \bar{p}(0), y^0 \rangle} > 0,$$

czyli:

$$C_1 \prod_{\substack{t=\check{t}+1 \\ t \in L_\varepsilon}}^{t_1} \left(1 - \frac{\delta_{\varepsilon,t}}{\alpha_{M,t}}\right) \geq \frac{\sigma(\bar{p}(t_1), \bar{s})}{\langle \bar{p}(0), y^0 \rangle} > 0,$$

gdzie $C_1 = \prod_{t=1}^{\check{t}} \alpha_{M,t} > 0$. Zgodnie z (GN9):

$$\frac{\sigma(\bar{p}(t_1), \bar{s})}{\langle \bar{p}(0), y^0 \rangle} \geq \frac{\sigma \|\bar{p}(t_1)\| \bar{s}_{\min}}{\|\bar{p}(0)\| y_{\max}^0} \geq \frac{\sigma \pi_{\min} \bar{s}_{\min}}{\pi_{\max} y_{\max}^0} = C_2 > 0,$$

$\bar{s}_{\min} = \min_i \bar{s}_i > 0$, $y_{\max}^0 = \max_i y_i^0 > 0$. Jeżeli warunek (5.11) zachodzi

$\vartheta \leq k$ razy w okresach $\tau_1, \dots, \tau_\vartheta \leq \check{t}$, wówczas wobec (GN12):

$$C_1 (1 - \nu_\varepsilon)^{k-\vartheta} \geq C_1 \prod_{\substack{t=\check{t}+1 \\ t \in L_\varepsilon}}^{t_1} \left(1 - \frac{\delta_{\varepsilon,t}}{\alpha_{M,t}}\right) \geq C_2 > 0$$

i dochodzimy do nierówności:

$$(1 - \nu_\varepsilon)^{k-\vartheta} \geq C = \frac{C_2}{C_1} > 0, \quad (5.15)$$

z której, zważywszy że $\vartheta \leq \check{t}$, otrzymujemy oszacowanie liczby k :

$$k \leq \frac{\ln C}{\ln(1-\nu_\varepsilon)} + \check{t} = A.$$

Gdy warunek (5.11) zachodzi wyłącznie w okresach $\tau_1, \dots, \tau_k > \check{t}$, wtedy $\vartheta = 0$ i z (5.15) otrzymujemy oszacowanie $k \leq \frac{\ln C}{\ln(1-\nu_\varepsilon)}$. W obu przypadkach w charakterze liczby k_ε , o której mowa w tezie twierdzenia, wystarczy wziąć najmniejszą liczbę naturalną większą od $\min\{0, A\}$. Liczba ta nie zależy od długości horyzontu T . ■

Uwaga 1. Liczba okresów czasu, w których ekonomiczna efektywność optymalnych procesów $(y^*(t), y^*(t+1)) \in Z(t)$, $t = 1, 2, \dots, t_1 - 1$ jest niższa o $\delta_{\varepsilon,t}$ od optymalnej, zależy od rozmieszczenia elementów ciągu $\tau_1, \dots, \tau_k$ w horyzoncie T . Jest ich jednak zawsze nie więcej niż k_ε (zob. podobną uwagę 2 do twierdzenia 1.10; rozdz. 1, pkt 1.7).

Uwaga 2. Jeżeli początkowy wektor produkcji y^0 jest dodatni, wtedy dojście do magistrali (w jednym kroku) i dalszy pobyt na niej zapewnia (y^0, t_1) – dopuszczalny proces $\{\tilde{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$:

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} y^0, & t = 0, \\ \sigma(\prod_{\theta=1}^t \alpha_{M,\theta}) \bar{s}, & t = 1, \dots, t_1, \end{cases}$$

$$\sigma = \min \frac{y_i^0}{\bar{s}_i} > 0.$$

Uwaga 3. Twierdzenie 5.1 pozostaje prawdziwe również wtedy, gdy $(y^0, t_1, \bar{p}(t_1))$ – optymalny proces wzrostu zastąpimy $(y^0, t_1, p(t_1))$ – optymalnym procesem z dowolnym dodatnim wektorem cen $p(t_1)$.

Uwaga 4. Gdy:

- warunek (GN8) zastąpimy warunkiem następującym:

$$\begin{aligned} \exists I = \{i_1, \dots, i_k \leq n\} \forall t \in T \exists (\bar{x}(t), \bar{y}(t)) \in Z(t) \\ (\alpha(\bar{x}(t), \bar{y}(t)) = \alpha_{M,t} > 0 \ \& \ \bar{y}_i(t) > 0; \ i \in I), \end{aligned}$$

- każdy proces $(\bar{x}(t), \bar{y}(t)) \in Z(t)$ spełniający powyższy warunek ma dodatkowo tę własność, że:

$$\exists k < +\infty \exists \{z(\theta)\}_{\theta=1}^k \left((z(\theta), z(\theta+1)) \in Z(t), z(1) = \bar{y}(t), z(k) > 0 \right)$$

(warunek słabej regularności gospodarki),

- warunek (GN9) zastąpimy warunkiem:

$$\exists 0 < p^{min} \leq p^{max} < +\infty \forall t_1 \forall t \in T (p^{min} \leq \bar{p}(t) \leq p^{max}),$$

gdzie $p^{min} = (p_1^{min}, \dots, p_n^{min})$, $p^{max} = (p_1^{max}, \dots, p_n^{max})$, wtedy twierdzenie pozostaje aktualne mimo że gospodarka na magistrali nie wytwarza wszystkich towarów (wytwarza tylko towary $i \in I$).

O $(y^0, t_1, \bar{p}(t_1))$ – optymalnym procesie wzrostu, który sam prowadzi do magistrali, mówi kolejne twierdzenie.

■ **Twierdzenie 5.2. (Prawie ‘bardzo silne’ twierdzenie o magistrali)** Załóżmy, że w gospodarce Gale’a spełniającej warunki (GN1)-(GN12) w pewnym okresie $\check{t} < t_1$ $(y^0, t_1, \bar{p}(t_1))$ – optymalny proces $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ dociera do pojedynczej magistrali N :

$$y^*(\check{t}) \in N.$$

Ustalmy liczbę $\varepsilon > 0$ i odpowiadającą jej liczbę ν_ε spełniającą warunek (GN12). Jeżeli ceny von Neumanna w okresach $\check{t}+1, \dots, t_1$ nie zmieniają się gwałtownie i spełniają warunek:

$$\frac{\max_{t \in \{\check{t}, \dots, t_1\}} \langle \bar{p}(t), \bar{s} \rangle}{\min_{t \in \{\check{t}, \dots, t_1\}} \langle \bar{p}(t), \bar{s} \rangle} < \frac{1}{1 - \nu_\varepsilon}, \quad (5.16)$$

to:

$$\forall t \in \{\check{t} + 1, \dots, t_1\} (d(y^*(t), N) < \varepsilon)$$

(metryka $d(\cdot)$ ma postać (5.11)).

Dowód. Z definicji $(y^0, t_1, \bar{p}(t_1))$ – optymalnego procesu wzrostu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$, zgodnie z (5.2) mamy:

$$\langle \bar{p}(t+1), y^*(t+1) \rangle \leq \alpha_{M, t+1} \langle \bar{p}(t+1), y^*(t) \rangle, \quad t = 0, 1, \dots, t_1 - 1.$$

Dla $t = t_1 - 1$:

$$\langle \bar{p}(t_1), y^*(t_1) \rangle \leq \alpha_{M, t_1} \langle \bar{p}(t_1), y^*(t_1 - 1) \rangle.$$

Postępując jak przy dowodzie twierdzenia 5.1, dochodzimy do warunku:

$$= \langle \bar{p}(t_1), y^*(t_1) \rangle \leq \prod_{t=\check{t}+1}^{t_1} \alpha_{M, t} \langle \bar{p}(\check{t}), y^*(\check{t}) \rangle$$

(por. (5.13)). Ponieważ $y^*(\check{t}) \in N$, więc $y^*(\check{t}) = \sigma \bar{s} > 0$, gdzie $\sigma = \|y^*(\check{t})\| > 0$, czyli:

$$\langle \bar{p}(t_1), y^*(t_1) \rangle \leq \sigma (\prod_{t=\check{t}+1}^{t_1} \alpha_{M, t}) \langle \bar{p}(\check{t}), \bar{s} \rangle. \quad (5.17)$$

Założmy, że $y^*(t') \notin N$ w pewnym okresie $t' \in \{\check{t} + 1, \dots, t_1\}$. Wtedy:

$$\exists \varepsilon > 0 (d(y^*(t'), N) \geq \varepsilon)$$

i zgodnie z (5.10):

$$\langle \bar{p}(t'), y^*(t') \rangle \leq (\alpha_{M,t'} - \delta_{\varepsilon,t'}) \langle \bar{p}(t'), y^*(t' - 1) \rangle. \quad (5.18)$$

Z (5.17), (5.18) dostajemy:

$$\langle \bar{p}(t_1), y^*(t_1) \rangle \leq \sigma \left(\prod_{\substack{t=\check{t}+1 \\ t \neq t'}}^{t_1} \alpha_{M,t} \right) (\alpha_{M,t'} - \delta_{\varepsilon,t'}) \langle \bar{p}(\check{t}), \bar{s} \rangle. \quad (5.19)$$

Z założenia optymalny proces $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ w okresie $\check{t} < t_1$ prowadzi do magistrali, zatem ciąg wektorów produkcji $\{\check{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$:

$$\check{y}(t) = \begin{cases} y^*(t), & t = 0, 1, \dots, \check{t}, \\ \sigma \left(\prod_{\theta=1}^{t-\check{t}} \alpha_{M,\check{t}+\theta} \right) \bar{s}, & t = \check{t} + 1, \dots, t_1 \end{cases}$$

($\sigma = \|y^*(\check{t})\| > 0$), tworzy proces (y^0, t_1) – dopuszczalny, w którym począwszy od okresu $\check{t}$ trajektoria produkcji $\{\check{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$ biegnie po magistrali N . Zgodnie z definicją procesu optymalnego:

$$\langle \bar{p}(t_1), y^*(t_1) \rangle \geq \langle \bar{p}(t_1), \check{y}(t_1) \rangle = \sigma \prod_{t=\check{t}+1}^{t_1} \alpha_{M,t} \langle \bar{p}(t_1), \bar{s} \rangle > 0. \quad (5.20)$$

Z (5.19), (5.20) otrzymujemy nierówność:

$$0 < \sigma \left(\prod_{t=\check{t}+1}^{t_1} \alpha_{M,t} \right) \langle \bar{p}(t_1), \bar{s} \rangle \leq \sigma \left(\prod_{\substack{t=\check{t}+1 \\ t \neq t'}}^{t_1} \alpha_{M,t} \right) (\alpha_{M,t'} - \delta_{\varepsilon,t'}) \langle \bar{p}(\check{t}), \bar{s} \rangle,$$

z której, zważywszy na **(GN12)** oraz (5.16), wynika, że:

$$0 < \frac{1}{1-\nu_\varepsilon} \leq \frac{\alpha_{M,t'}}{\alpha_{M,t'} - \delta_{\varepsilon,t'}} \leq \frac{\langle \bar{p}(\check{t}), \bar{s} \rangle}{\langle \bar{p}(t_1), \bar{s} \rangle} < \frac{1}{1-\nu_\varepsilon}.$$

Otrzymana sprzeczność zamyka dowód. ■

Aktualna jest uwaga 4 do twierdzenia 5.1. W twierdzeniach 5.1, 5.2 nie korzystaliśmy z warunku **(GN7)**. Będzie on potrzebny w kolejnym twierdzeniu. Przedtem wróćmy na chwilę do twierdzenia 5.2. Ustalmy liczbę $\varepsilon > 0$ i odpowiadającą jej liczbę $\nu_\varepsilon > 0$ spełniającą warunek **(GN12)**. Stosunkowo łatwo pokazać, że jeżeli:

- zachodzą warunki (GN1)-(GN12),
- ceny von Neumanna nie rosną:

$$\bar{p}(t+1) \leq \bar{p}(t), \quad t = 0, \dots, t_1 - 1,$$

oraz spełniają warunek:

$$\frac{\max_{t \in T} \langle \bar{p}(t), \bar{s} \rangle}{\min_{t \in T} \langle \bar{p}(t), \bar{s} \rangle} < \frac{1}{1 - \nu_\varepsilon}$$

(nie maleją gwałtownie), to:

$$\exists k_\varepsilon \forall t \in \{t_\varepsilon + 1, \dots, t_1 - k_\varepsilon\} (d(y^*(t), N) < \varepsilon).$$

Jest to wersja pośrednia między ‘silnym’ i ‘bardzo silnym’ twierdzeniem o magistrali. Przy dowodzie kluczową rolę gra fakt, że jeżeli horyzont $T = \{0, 1, \dots, t_1\}$ jest dostatecznie długi, to w świetle twierdzenia 5.1 optymalna trajektoria produkcji $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ może znaleźć się w dowolnie bliskim ε – otoczeniu magistrali. Przy przyjętych założeniach oznacza to, że istnieje okres czasu $t_\varepsilon < t_1$ oraz dopuszczalny proces produkcji $(y^*(t_\varepsilon), \tilde{y}(t_\varepsilon + 1)) \in Z(t_\varepsilon + 1)$ prowadzący już w kolejnym okresie $t_\varepsilon + 1$ do magistrali N . Można wówczas utworzyć (y^0, t_1) – dopuszczalny proces wzrostu $\{\tilde{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$, który otrzymujemy „ze sklejenia” początkowego segmentu optymalnej trajektorii $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_\varepsilon}$ z trajektorią $\{\tilde{y}(t)\}_{t=t_\varepsilon+1}^{t_1}$ leżącą na magistrali począwszy od okresu $t = t_\varepsilon + 1$. Dalej dowód przebiega podobnie jak dowód twierdzenia 1.11 po zastąpieniu stałej przestrzeni produkcyjnej Z przez zmienne w czasie przestrzenie $Z(t)$.

5.3. Optymalne procesy wzrostu w gospodarce z pojedynczą magistralą i kryterium maksymalizacji wartości produkcji wytworzonej w całym horyzoncie T

Rozpatrzmy pokrótce następujące zadanie maksymalizacji łącznej wartości produkcji, mierzonej w cenach von Neumanna, wytworzonej w gospodarce w całym horyzoncie T :

$$\max \sum_{t=1}^{t_1} \langle \bar{p}(t), y(t) \rangle \quad (5.21)$$

p.w. (5.4), (5.5).

(jest to odpowiednik zadania (3.19) z rozdz. 3, pkt 3.3).

Dla uproszczenia zakładamy, że w zadaniu tym początkowy wektor produkcji w (5.5) jest dodatni. Przy przyjętych założeniach zadanie to ma rozwiązanie $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$, które nazywamy $(y^0, t_1, \{\bar{p}(t)\}_{t=0}^{t_1})$ – optymalnym procesem wzrostu (trajektorią produkcji). Warunek regularności **(GN8)** zastąpimy następującym (silniejszym) warunkiem:

$$\textbf{(GN8')} \quad \forall t \in T \exists (\bar{x}(t), \bar{y}(t)) \in Z(t) (\alpha(\bar{x}(t), \bar{y}(t)) = \alpha_{M,t} \text{ \& } \bar{y}(t) > 0)$$

oraz (w okresie początkowym $t = 0$):

$$\alpha(\bar{x}(0), \bar{y}(0)) = \max_{(x,y) \in Z(0) \setminus \{0\}} \alpha(x, y) = \alpha_{M,0} > 1.$$

Jeżeli zachodzi warunek **(GN8')**, wówczas gospodarka jest regularna (wytworza wszystkie towary) oraz (wobec **(GN7)**) produktywna (w każdym okresie $t \in T$ wytwarza więcej towarów niż ich zużywa):

$$\forall t \in T \setminus \{t_1\} (\alpha_{M,t+1} \geq \alpha_{M,t} \geq \alpha_{M,0} > 1).$$

O ‘słabej’ zbieżności optymalnych procesów wzrostu do magistrali w takiej niestacjonarnej gospodarce Gale’a mówi następujące twierdzenie, którego teza brzmi analogicznie jak teza twierdzenia 5.1. Inne są założenia, w tym w szczególności kryterium wzrostu.

■ **Twierdzenie 5.3.** Jeżeli w niestacjonarnej gospodarce Gale’a z pojedynczą magistralą produkcyjną N :

- początkowy wektor produkcji $y(0) = y^0$ w zadaniu (5.21) jest dodatni, $y^0 > 0$,
- zachodzą warunki **(GN1)-(GN7)**, **(GN8’)**, **(GN9)-(GN12)**

oraz:

- istnieje taki $(y^0, \check{t})$ – dopuszczalny proces wzrostu $\{\check{y}(t)\}_{t=0}^{\check{t}}$, $\check{t} < t_1$, że $\check{y}(\check{t}) \in N$,

to $\forall \varepsilon > 0$ istnieje taka liczba k_ε , że liczba okresów czasu, w których $(y^0, t_1, \{\bar{p}(t)\}_{t=0}^{t_1})$ – optymalny proces wzrostu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ spełnia warunek (5.11) nie przekracza k_ε . Liczba k_ε nie zależy od długości horyzontu T . Początkowy wektor produkcji $y^0 > 0$.

Dowód. Ponieważ początkowy wektor produkcji y^0 oraz wektor $\bar{s}$ struktury produkcji na magistrali są dodatnie, więc istnieje (y^0, t_1) – dopuszczalny proces wzrostu $\{\tilde{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$:

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} y^0, & t = 0, \\ \sigma(\prod_{\tau=1}^t \alpha_{M,\tau})\bar{s}, & t = 1, 2, \dots, t_1, \end{cases}$$

$\sigma = \min_i \frac{y_i^0}{\bar{s}_i} > 0$. Z definicji $(y^0, t_1, \{\bar{p}(t)\}_{t=0}^{t_1})$ – optymalnego procesu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$, uwzględniając **(GN9)**, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^{t_1} \langle \bar{p}(t), y^*(t) \rangle &\geq \sum_{t=1}^{t_1} \langle \bar{p}(t), \tilde{y}(t) \rangle = \sigma \sum_{t=1}^{t_1} (\prod_{\tau=1}^t \alpha_{M,\tau}) \langle \bar{p}(t), \bar{s} \rangle \geq \\ &\geq \sigma \pi_{\min} \bar{s}_{\min} \sum_{t=1}^{t_1} \prod_{\tau=1}^t \alpha_{M,\tau} > 0, \end{aligned} \quad (5.22)$$

$\bar{s}_{\min} = \min_i \bar{s}_i > 0$. Z drugiej strony, zgodnie z (5.2), (5.4):

$$\langle \bar{p}(t), y^*(t) \rangle \leq \alpha_{M,t} \langle \bar{p}(t), y^*(t-1) \rangle, \quad t = 1, \dots, t_1. \quad (5.23)$$

Weźmy liczbę $\varepsilon > 0$ i załóżmy, że w (dodatnich) okresach $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k \leq t_1$ zachodzi warunek (5.11). Wówczas, zgodnie z (5.10):

$$\langle \bar{p}(t), y^*(t) \rangle \leq (\alpha_{M,t} - \delta_{\varepsilon,t}) \langle \bar{p}(t), y^*(t-1) \rangle, \quad t = \tau_1, \dots, \tau_k. \quad (5.24)$$

Łącząc (5.23), (5.24) i uwzględniając (GN9), (GN13), po przekształceniach dochodzimy do nierówności:

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^{t_1} \langle \bar{p}(t), y^*(t) \rangle \leq & \pi_{max} y_{max}^0 [\alpha_{M,1} + \alpha_{M,1} \alpha_{M,2} + \dots + \prod_{\tau=1}^{t_1-k} \alpha_{M,\tau} + \\ & + (1 - \nu_\varepsilon) \prod_{\tau=1}^{t_1-k+1} \alpha_{M,\tau} + (1 - \nu_\varepsilon)^2 \prod_{\tau=1}^{t_1-k+2} \alpha_{M,\tau} + \\ & \dots + (1 - \nu_\varepsilon)^k \prod_{\tau=1}^{t_1} \alpha_{M,\tau}], \end{aligned} \quad (5.25)$$

$y_{max}^0 = \max_i y_i^0 > 0$. Z (5.22), (5.25) wynika, że:

$$G_\varepsilon(t_1, k) = \frac{B_\varepsilon(t_1, k)}{A(t_1)} \geq \frac{\sigma(\bar{p}(1), \bar{s})}{\langle \bar{p}(1), y^0 \rangle} \geq \frac{\sigma \pi_{min} \bar{s}_{min}}{\pi_{max} y_{max}^0} = C = const. > 0,$$

gdzie:

$$A(t_1) = \sum_{t=1}^{t_1} \prod_{\tau=1}^t \alpha_{M,\tau},$$

$$\begin{aligned} B_\varepsilon(t_1, k) = & \alpha_{M,1} + \alpha_{M,1} \alpha_{M,2} + \dots + \prod_{\tau=1}^{t_1-k} \alpha_{M,\tau} + (1 - \nu_\varepsilon) \prod_{\tau=1}^{t_1-k+1} \alpha_{M,\tau} + \\ & + (1 - \nu_\varepsilon)^2 \prod_{\tau=1}^{t_1-k+2} \alpha_{M,\tau} + \dots + (1 - \nu_\varepsilon)^k \prod_{\tau=1}^{t_1} \alpha_{M,\tau} > 0 \end{aligned}$$

lub równoważnie, po podstawieniu $\delta_\varepsilon = 1 - \nu_\varepsilon \in (0, 1)$:

$$G_\varepsilon(t_1, k) = \frac{A(t_1) - D_\varepsilon(t_1, k)}{A(t_1)} \geq C, \quad (5.26)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} D_\varepsilon(t_1, k) = & (1 - \delta_\varepsilon) \prod_{\tau=1}^{t_1-k+1} \alpha_{M,\tau} + (1 - \delta_\varepsilon^2) \prod_{\tau=1}^{t_1-k+2} \alpha_{M,\tau} + \\ & \dots + (1 - \delta_\varepsilon^k) \prod_{\tau=1}^{t_1} \alpha_{M,\tau}, \end{aligned}$$

gdy $t_1 \geq k > 0$, oraz $D_\varepsilon(t_1, k) = 0$ dla $k = 0$ (dla $k = 0$ nierówność (5.26) jest spełniona zawsze, tj. dla dowolnego $t_1 > 0$).

Założmy, że warunek (5.26) zachodzi k razy ($t_1 \geq k$). Dzieliąc w (5.26) licznik i mianownik przez $\prod_{\tau=1}^{t_1} \alpha_{M,\tau} > 0$, otrzymujemy:

$$G_\varepsilon(t_1, k) = \frac{\frac{1}{\prod_{\tau=2}^{t_1} \alpha_{M,\tau}} + \frac{1}{\prod_{\tau=3}^{t_1} \alpha_{M,\tau}} + \dots + 1 - \frac{1 - \delta_\varepsilon}{\prod_{\tau=t_1-k+2}^{t_1} \alpha_{M,\tau}} - \frac{1 - \delta_\varepsilon^2}{\prod_{\tau=t_1-k+3}^{t_1} \alpha_{M,\tau}} - \dots - (1 - \delta_\varepsilon^k)}{\frac{1}{\prod_{\tau=2}^{t_1} \alpha_{M,\tau}} + \frac{1}{\prod_{\tau=3}^{t_1} \alpha_{M,\tau}} + \dots + 1}.$$

Ponieważ (zgodnie z (GN7), (GN8)) $\alpha_{M,t+1} \geq \alpha_{M,t} > 1$, $t = 0, 1, \dots, t_1 - 1$, więc:

$$G_\varepsilon(t_1, k) < C, \quad (5.27)$$

gdy liczba k jest dostatecznie duża (oraz $t_1 \geq k$). Istotnie, jeżeli $k \rightarrow +\infty$ oraz $t_1 - k \rightarrow +\infty$, wtedy $G_\varepsilon(t_1, k) \rightarrow 0 < C$. W pozostałych przypadkach, gdy liczby t_1 i k są dostatecznie duże, zachodzi warunek (5.27), mimo że sam ciąg $G_\varepsilon(t_1, k)$, $t_1 = 1, 2, \dots$ ($k = 0, 1, \dots < t_1$) nie musi być zbieżny. Zawsze istnieje taka liczba naturalna k_ε , niezależna od t_1 (długości horyzontu T), że liczba okresów czasu, w których zachodzi warunek (5.11) nie przekracza k_ε . ■

Twierdzenie jest prawdziwe również gdy warunek $y^0 > 0$ zastąpimy założeniem, że istnieje $(y^0, \check{t})$ – dopuszczalny proces wzrostu $\{\check{y}(t)\}_{t=0}^{\check{t}}$ prowadzący w okresie $\check{t} < t_1$ do magistrali N . Aktualne pozostają także uwagi 1, 4 do twierdzenia 5.1.

5.4. Gospodarka z wieloma magistralami. Problem wzrostu docelowego z funkcją użyteczności ogólnej postaci

W twierdzeniach 5.1, 5.3 magistrala produkcyjna, na której gospodarka rozwija się w maksymalnym (zmiennym) tempie $\alpha_{M,t}$, jest pojedynczym promieniem $N = \{\lambda \bar{s} \mid \lambda > 0\}$ rozpiętym na wektorze $\bar{s}$ struktury produkcji w optymalnych procesach $(\bar{x}(t), \bar{y}(t)) \in Z(t)$, $t \in T$, spełniających warunek (GN10). Tak być może, ale tak być nie musi.

W tym punkcie (podobnie jak w rozdz. 3, pkt 3.4, 3.5 oraz w rozdz. 4) zakładamy, że w każdym okresie czasu $t \in T$ w gospodarce może istnieć wiele określonych z dokładnością do struktury optymalnych procesów produkcji. Zbiór takich procesów w okresie t oznaczamy przez $Z_{opt}(t)$:

$$Z_{opt}(t) = \{(x(t), y(t)) \in Z(t) \setminus \{0\} \mid \alpha(x(t), y(t)) = \alpha_{M,t} > 0\}.$$

Zbiory $Z_{opt}(t)$, $t = 0, 1, \dots, t_1$ są stożkami zawartymi w R_+^{2n} niezawierającymi 0 (dowód, zob. rozdz. 2, pkt 2.1, lemat 2.1, po zastąpieniu stałej przestrzeni produkcyjnej Z przez zmienną w czasie przestrzeń $Z(t)$). Jeżeli $(x, y) = (y(t), y(t)) \in Z_{opt}(t)$, to także:

$$(x, \alpha_{M,t}x) \in Z_{opt}(t) \text{ \& } (y, \alpha_{M,t}y) \in Z_{opt}(t).$$

Unormowany wektor $s(t) = \frac{y(t)}{\|y(t)\|}$ charakteryzuje strukturę produkcji w optymalnym procesie $(x(t), y(t)) \in Z_{opt}(t)$. Przez $S(t)$ oznaczamy zbiór wektorów struktury produkcji we wszystkich optymalnych procesach w okresie t :

$$S(t) = \left\{ s(t) \mid \exists (x(t), y(t)) \in Z_{opt}(t) \left(s(t) = \frac{y(t)}{\|y(t)\|} \right) \right\}$$

(równoważnie, $S(t) = \left\{ s(t) \mid \exists (\bar{x}(t), \bar{y}(t)) \in Z_{opt}(t) \left(s(t) = \frac{\bar{x}(t)}{\|\bar{x}(t)\|} \right) \right\}$). Przy założeniach **(GN1)-(GN8)** zbiory $S(t)$, $t = 0, 1, \dots, t_1$ są (niepuste) zwarte i wypukłe (rozdz. 2, pkt 2.2, lemat 2.2, po zastąpieniu przestrzeni Z przez $Z(t)$).

Weźmy dowolny okres czasu $t \in T$ oraz wektor (optymalnej) struktury produkcji $s = s(t) \in S(t)$. Półprosta:

$$N_s^t = \{\lambda s \mid \lambda > 0\} \subset R_+^n$$

jest pojedynczą magistralą produkcyjną (promieniem von Neumanna) w niestacjonarnej gospodarce Gale'a dostępną (co najmniej) począwszy od okresu t . Zbiór:

$$\mathbb{N}^t = \bigcup_{s \in S(t)} N_s^t = \{\lambda s \mid \lambda > 0, s \in S(t)\} \subset R_+^n$$

tworzy wielopasmową magistralę dostępną w niestacjonarnej gospodarce Gale'a począwszy od okresu t . Jeżeli $y \in \mathbb{N}^t$ oraz $\lambda > 0$, to oczywiście $\lambda y \in \mathbb{N}^t$. Jeżeli $y^1, y^2 \in \mathbb{N}^t$, wówczas $s^1 = \frac{y^1}{\|y^1\|} \in S(t)$ oraz $s^2 = \frac{y^2}{\|y^2\|} \in S(t)$.

Niech $y = y^1 + y^2$, wtedy:

$$s = \frac{y}{\|y\|} = \frac{y^1 + y^2}{\|y^1 + y^2\|} = \lambda_1 s^1 + \lambda_2 s^2,$$

gdzie $\lambda_1 = \frac{\|y^1\|}{\|y^1 + y^2\|} > 0$, $\lambda_2 = \frac{\|y^2\|}{\|y^1 + y^2\|} > 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Zbiór $S(t)$ jest wypukły, więc $s \in S(t)$, czyli $y = y^1 + y^2 \in \mathbb{N}^t$. Każda wielopasmowa magistrała $\mathbb{N}^t$ jest stożkiem wypukłym niezawierającym 0.

Jeżeli w niestacjonarnej gospodarce Gale'a spełniającej warunki **(GN1)**-**(GN8)** w pewnym okresie t struktura nakładów $\frac{x}{\|x\|}$ lub produkcji $\frac{y}{\|y\|}$ w jakimkolwiek procesie $(x, y) \in Z(t) \setminus \{0\}$ różni się od struktury magistralnej:

$$\frac{x}{\|x\|} \notin S(t) \vee \frac{y}{\|y\|} \notin S(t)$$

(równoważnie, $x(t) \notin \mathbb{N}^t$ lub $y(t) \notin \mathbb{N}^t$), to technologiczna efektywność takiego procesu jest niższa od optymalnej, $\alpha(x, y) < \alpha_{M,t}$.

Przy założeniach **(GN1)**-**(GN8)** w każdym okresie $t \in T$ istnieją określone z dokładnością do struktury dodatnie ceny $\bar{p}(t)$ tworzące z każdym optymalnym procesem produkcji $(\bar{x}(t), \bar{y}(t)) \in Z(t)$ stan chwilowej równowagi von Neumanna $\{\alpha_{M,t}, (\bar{x}(t), \bar{y}(t)), \bar{p}(t)\}$, tj. spełniające warunki (5.1)-(5.3).

Dotychczasowy warunek **(GN10)** zastąpimy obecnie następującym warunkiem:

$$\begin{aligned} \textbf{(GN10')} \quad \forall \check{t} < t_1 \quad \forall (\bar{x}(\check{t}), \bar{y}(\check{t})) \in Z_{opt}(\check{t}) \quad \exists (\bar{x}(\check{t} + 1), \bar{y}(\check{t} + 1)) \in Z_{opt}(\check{t} + 1) \\ (\bar{x}(\check{t} + 1) = \bar{y}(\check{t})), \end{aligned}$$

zgodnie z którym każdy wektor produkcji $\bar{y}(\check{t})$ wytworzonej w optymalnym procesie $(\bar{x}(\check{t}), \bar{y}(\check{t})) \in Z_{opt}(\check{t})$ w okresie $\check{t} < t_1$ jest jednocześnie wektorem nakładów w pewnym optymalnym procesie produkcji $(\bar{x}(\check{t} + 1), \bar{y}(\check{t} + 1)) \in Z_{opt}(\check{t} + 1)$ w okresie następnym. Wówczas, wobec (5.4):

$$\forall \check{t} < t_1 \quad \forall s(\check{t}) \in S(\check{t}) \quad \exists \{\bar{y}(t)\}_{t=\check{t}}^{t_1} \left(\frac{\bar{y}(\check{t})}{\|\bar{y}(\check{t})\|} = s(\check{t}) \& (\bar{y}(t), \bar{y}(t+1)) \in \right. \\ \left. \in Z(t+1), \quad \bar{y}(t+1) = \alpha_{M,t+1} \bar{y}(t), \quad t = \check{t}, \dots, t_1 - 1 \right).$$

Jeżeli ciąg wektorów produkcji $\{\bar{y}(t)\}_{t=\check{t}}^{t_1}$ spełnia ten warunek, to:

$$\bar{y}(t) = \left(\prod_{\theta=\check{t}+1}^t \alpha_{M,\theta} \right) \bar{y}(\check{t}), \quad t = \check{t} + 1, \dots, t_1. \quad (5.28)$$

Ciąg taki charakteryzuje się stałą strukturą produkcji:

$$\forall t \in \{\check{t} + 1, \dots, t_1\} \left(\frac{\bar{y}(t)}{\|\bar{y}(t)\|} = \frac{\bar{y}(\check{t})}{\|\bar{y}(\check{t})\|} = s(\check{t}) = \text{const.} \right),$$

dlatego mówimy, że opisuje on $(\check{t}, t_1)$ – **stacjonarny proces wzrostu ze stałą strukturą produkcji i zmiennym tempem** $\alpha_{M,t}$, $t = \check{t} + 1, \dots, t_1$. Każda dodatnia wielokrotność $(\check{t}, t_1)$ – stacjonarnego procesu wzrostu postaci (5.28) oraz suma dowolnych dwóch takich procesów jest znowu $(\check{t}, t_1)$ – stacjonarnym procesem. Z **(GN10')** wynika ponadto, że:

$$S(t) \subseteq S(t+1), \text{ czyli } \mathbb{N}^t \subseteq \mathbb{N}^{t+1}, \quad t = 0, 1, \dots, t_1 - 1$$

(rozwój technologii sprawia, że na wielopasmowej magistrali z czasem może rosnąć liczba tworzących ją promieni von Neumanna, swoistych kolejnych „pasów szybkiego ruchu”).

Wiązka promieni:

$$\mathbb{N}^{t_1} (= \cup_{t=0}^{t_1} \mathbb{N}^t)$$

tworzy najobszerniejszą („najszerszą”) wielopasmową magistralę w gospodarce w całym horyzoncie T . Nazywamy ją umownie **wielopasmową magistralą w niestacjonarnej gospodarce Gale’a** (w horyzoncie T). Dla $\check{t} = 0$ każdy $(0, t_1)$ – stacjonarny proces $\{\bar{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$ postaci (5.28) spełnia warunek:

$$\bar{y}(0) \in \mathbb{N}^0 \& \forall t \in \{1, \dots, t_1\} \quad (\bar{y}(t) = \left(\prod_{\theta=1}^t \alpha_{M,\theta} \right) \bar{y}(0) \in \mathbb{N}^0 \subseteq \dots \subseteq \mathbb{N}^{t_1}),$$

czyli przez wszystkie okresy czasu $t \in T$ (począwszy od $t = 0$) leży na (biegnie po) wielopasmowej magistrali $\mathbb{N}^{t_1}$. Dla $\check{t} = 1$ każdy $(1, t_1)$ – stacjonarny proces $\{\bar{y}(t)\}_{t=1}^{t_1}$ spełnia warunek:

$$\bar{y}(1) \in \mathbb{N}^1 \& \forall t \in \{2, \dots, t_1\} (\bar{y}(t) = (\prod_{\theta=2}^t \alpha_{M,\theta}) \bar{y}(1) \in \mathbb{N}^1 \subseteq \dots \subseteq \mathbb{N}^{t_1}),$$

czyli leży na (biegnie po) wielopasmowej magistrali $\mathbb{N}^{t_1}$ począwszy od okresu $t = 1$. Ogólnie, każdy $(\check{t}, t_1)$ – stacjonarny proces $\{\bar{y}(t)\}_{t=\check{t}}^{t_1}$ ($\check{t} < t_1$) pozostaje na wielopasmowej magistrali $\mathbb{N}^{t_1}$ od okresu $\check{t}$ do końca horyzontu T . Na wielopasmowej magistrali gospodarka osiąga w każdym okresie czasu najwyższe tempo wzrostu.

Odpowiednikiem warunku **(GN11)** jest obecnie następujący warunek:

$$\begin{aligned} \text{(GN11')} \quad \forall t \in T \quad \forall (x, y) \in Z(t) \setminus \{0\} \quad & \left(x \notin \mathbb{N}^{t_1} \vee y \notin \mathbb{N}^{t_1} \Rightarrow \beta(x, y, \bar{p}(t_1)) = \right. \\ & \left. = \frac{\langle \bar{p}(t_1), y \rangle}{\langle \bar{p}(t_1), x \rangle} < \alpha_{M, t_1} \right). \end{aligned}$$

Przy założeniach **(GN1)-(GN8)**, **(GN10')**, **(GN11')** aktualny jest lemat 2.3 z rozdz. 2, pkt 2.2 (po zastąpieniu przestrzeni produkcyjnej Z przez $Z(t)$, wektora cen $\bar{p}$ przez $\bar{p}(t)$, wielopasmowej magistrali $\bar{\mathbb{N}}$ przez $\mathbb{N}^t$ oraz uwzględnieniu metryki (3.20) zamiast (2.11)).

Warunek **(GN12)** (przypomnijmy) wyklucza nierealistyczną sytuację, kiedy efektywność ekonomiczna procesu produkcji z czasem zbliża się do maksymalnej, mimo że struktura nakładów w takim procesie stale odbiega o ε od struktury optymalnej (magistralnej). Natomiast dzięki poniższemu warunkowi:

$$\text{(GN13)} \quad \exists \rho > 0 \left(\lim_t \frac{\prod_{\theta=1}^t \alpha_{M,\theta}}{\alpha_{M,t}^t} \geq \rho \right)$$

w gospodarce Gale'a ze zmienną technologią niedopuszczalne są gwałtowne wahania technologicznej efektywności produkcji (a w konsekwencji wahania tempa wzrostu gospodarczego). Ponadto warunek zapewnia, że technologiczna efektywność produkcji $\alpha_{M,t}$, $t = 0, 1, \dots$, nie rośnie z czasem nieograniczenie. Aby się

o tym przekonać, wprowadźmy oznaczenie $\Gamma_t = \frac{\prod_{\theta=1}^t \alpha_{M,\theta}}{\alpha_{M,t}^t}$. Wobec tego, że $\alpha_{M,t+1} \geq \alpha_{M,t} > 0$ (zob. **(GN7)**), ciąg $\{\Gamma_t\}_{t=1}^\infty$ jest nierosnący i ograniczony:

$$1 \geq \Gamma_t = \frac{\alpha_{M,1}}{\alpha_{M,t}} \cdot \frac{\alpha_{M,2}}{\alpha_{M,t}} \dots \frac{\alpha_{M,t}}{\alpha_{M,t}} \geq \frac{\alpha_{M,1}}{\alpha_{M,t+1}} \cdot \frac{\alpha_{M,2}}{\alpha_{M,t+1}} \dots \frac{\alpha_{M,t}}{\alpha_{M,t+1}} \cdot \frac{\alpha_{M,t+1}}{\alpha_{M,t+1}} = \Gamma_{t+1} > 0,$$

ma więc granicę $\bar{c} \geq 0$.

Warunek **(GN13)** wymaga, aby $\bar{c} \geq \rho > 0$. Pokażemy, że przy tym warunku ograniczony jest również (niemalejący) ciąg $\{\alpha_{M,t}\}_{t=0}^\infty$. Istotnie, niech $\gamma_{\theta,t} = \frac{\alpha_{M,\theta}}{\alpha_{M,t}}$, $1 \leq \theta \leq t$. Wówczas:

$$0 < \Gamma_t = \prod_{\theta=1}^t \gamma_{\theta,t} \leq \gamma_{1,t},$$

gdyż:

$$\forall \theta \in \{1, 2, \dots, t-1\} (0 < \gamma_{\theta,t} \leq \gamma_{\theta+1,t} \leq 1).$$

Założmy, że ciąg $\{\alpha_{M,t}\}_{t=0}^\infty$ jest nieograniczony, $\lim_t \alpha_{M,t} = +\infty$. Wtedy $\lim_t \gamma_{1,t} = 0$, tzn. $\lim_t \Gamma_t = 0$, wbrew **(G11)**. Niemalejący i ograniczony ciąg $\{\alpha_{M,t}\}_{t=0}^\infty$ ma więc granicę:

$$\lim_t \alpha_{M,t} = \alpha_M < +\infty.$$

Warunek **(GN13)** zachodzi np. gdy począwszy od pewnego okresu t gospodarka na wielopasmowej magistrali rozwija się w tempie:

$$\alpha_{M,t} \geq e^{cq^t} \alpha_M > 0, \quad c < 0, \quad q \in (0,1),$$

równoważnie: $\alpha_{M,t} \in \left[\frac{\alpha_M}{e^{c_1 q^t}}, \alpha_M \right)$, gdzie $c_1 = -c > 0$ lub inaczej $\ln \frac{\alpha_{M,t}}{\alpha_M} \geq cq^t$.

Istotnie, ponieważ:

$$\ln \Gamma_t = \ln \frac{\prod_{\theta=1}^t \alpha_{M,\theta}}{\alpha_{M,t}^t} = \sum_{\theta=1}^t \ln \frac{\alpha_{M,\theta}}{\alpha_{M,t}} \geq \sum_{\theta=1}^t \ln \frac{\alpha_{M,\theta}}{\alpha_M},$$

więc jeżeli $\ln \frac{\alpha_{M,t}}{\alpha_M} \geq cq^t$, to $\ln \Gamma_t \geq c \sum_{\theta=1}^t q^\theta$, czyli:

$$\lim_t \ln \Gamma_t \geq c \lim_t \sum_{\theta=1}^t q^\theta = c \sum_{\theta=1}^\infty q^\theta = \frac{cq}{1-q} < 0.$$

Stąd $e^{\ln \Gamma_t} = \Gamma_t \geq e^{c \sum_{\theta=1}^t q^\theta}$, a wówczas:

$$\lim_t \Gamma_t = \bar{c} \geq e^{c \sum_{\theta=1}^\infty q^\theta} = e^{\frac{cq}{1-q}} = \rho \in (0,1).$$

Niech $u(\cdot)$ będzie funkcją użyteczności spełniającą standardowy warunek **(U1)** (rozdz. 1, pkt 1.9) oraz:

$$\textbf{(U2')} \quad \exists a > 0 \forall y \geq 0 (u(y) \leq a \langle \bar{p}(t_1), y \rangle).$$

Zgodnie z **(U2')** funkcję użyteczności aproksymuje z góry forma liniowa $f(\cdot) = a \langle \bar{p}(t_1), \cdot \rangle$ z wektorem współczynników $a \bar{p}(t_1)$, gdzie a jest pewną liczbą dodatnią, $\bar{p}(t_1)$ jest wektorem cen w chwilowej równowadze von Neumanna w okresie t_1 .

Rozpatrzmy następujące zadanie wzrostu docelowego (maksymalizacji użyteczności produkcji w końcowym okresie horyzontu T):

$$\begin{aligned} & \max u(y(t_1)) \\ & \text{p.w. (5.4), (5.5)} \\ & (\text{wektor } y^0 \text{ ustalony}). \end{aligned} \tag{5.29}$$

(w stacjonarnej gospodarce z pojedynczą magistralą podobne zadanie (1.63) było sformułowane w rozdz.1, pkt. 1.9). Jego rozwiązanie nazywamy (y^0, t_1, u) – optymalnym procesem (ścieżką) wzrostu i oznaczamy przez $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$. Przy przyjętych założeniach rozwiązanie istnieje $\forall y^0 \geq 0 \quad \forall t_1 < +\infty$.

■ **Twierdzenie 5.4.** Jeżeli zachodzą warunki **(GN1)-(GN8)**, **(GN10')**, **(GN11')**, **(GN12)**, **(GN13)**, **(U1)**, **(U2')** oraz istnieje taki $(y^0, \check{t})$ – dopuszczalny proces $\{\check{y}(t)\}_{t=0}^{\check{t}}$, $\check{t} < t_1$, że $\check{y}(\check{t}) \in \mathbb{N}^{\check{t}} \subseteq \mathbb{N}^{t_1}$, to dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba naturalna k_ε , że liczba okresów czasu, w których (y^0, t_1, u) – optymalny proces wzrostu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ spełnia warunek:

$$d(y^*(t), \mathbb{N}^{t_1}) \geq \varepsilon \tag{5.30}$$

nie przekracza k_ε . Liczba k_ε nie zależy od długości horyzontu T . Metryka $d(\cdot)$ ma postać (3.20).

Dowód. Ponieważ $\forall t \in T (Z(t) \subseteq Z(t_1))$, zatem z definicji (y^0, t_1, u) – optymalnego procesu wzrostu, zgodnie z (5.2), (5.4) mamy:

$$\langle \bar{p}(t_1), y^*(t+1) \rangle \leq \alpha_{M,t_1} \langle \bar{p}(t_1), y^*(t) \rangle, \quad t = 0, 1, \dots, t_1 - 1, \quad (5.31)$$

$\|\bar{p}(t_1)\| = 1$. Załóżmy, że w okresach $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k < t_1$ zachodzi warunek (5.29).

Wówczas, w świetle lematu 2.3, istnieje taka liczba $\delta_{\varepsilon,t_1} \in (0, \alpha_{M,t_1})$, że:

$$\langle \bar{p}(t_1), y^*(t+1) \rangle \leq (\alpha_{M,t_1} - \delta_{\varepsilon,t_1}) \langle \bar{p}(t_1), y^*(t) \rangle, \quad t = \tau_1, \dots, \tau_k,$$

co łącznie z (5.31) prowadzi do nierówności:

$$\langle \bar{p}(t_1), y^*(t_1) \rangle \leq \alpha_{M,t_1}^{t_1-k} (\alpha_{M,t_1} - \delta_{\varepsilon,t_1})^k \langle \bar{p}(t_1), y^0 \rangle.$$

Po uwzględnieniu (**U2'**) otrzymujemy następujące górne ograniczenie użyteczności produkcji w ostatnim okresie horyzontu T :

$$u(y^*(t_1)) \leq a \alpha_{M,t_1}^{t_1-k} (\alpha_{M,t_1} - \delta_{\varepsilon,t_1})^k \langle \bar{p}(t_1), y^0 \rangle, \quad (5.32)$$

gdzie a jest pewną liczbą dodatnią. Jeżeli $(y^0, \check{t})$ – dopuszczalny proces $\{\check{y}(t)\}_{t=0}^{\check{t}}$ prowadzi w okresie $\check{t} < t_1$ do wielopasmowej magistrali, to $\check{s}(\check{t}) = \frac{\check{y}(\check{t})}{\|\check{y}(\check{t})\|} \in S(\check{t})$ i następujący ciąg wektorów produkcji $\{\check{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$:

$$\check{y}(t) = \begin{cases} \check{y}(t), & t = 0, 1, \dots, \check{t}, \\ \sigma(\prod_{\theta=\check{t}+1}^t \alpha_{M,\theta}) \check{s}(\check{t}), & t = \check{t} + 1, \dots, t_1 \end{cases}$$

($\sigma = \|\check{y}(\check{t})\| > 0$) tworzy (y^0, t_1) – dopuszczalny proces wzrostu, który otrzymujemy ze ”sklejenia” $(y^0, \check{t})$ – dopuszczalnego procesu $\{\check{y}(t)\}_{t=0}^{\check{t}}$ i $(\check{t} + 1, t_1)$ – stacjonarnego procesu postaci (5.28). Wówczas:

$$u(y^*(t_1)) \geq u(\check{y}(t_1)) = \sigma(\prod_{\theta=\check{t}+1}^{t_1} \alpha_{M,\theta}) u(\check{s}(\check{t})) > 0. \quad (5.33)$$

Z (5.32), (5.33) otrzymujemy nierówność:

$$a\alpha_{M,t_1}^{t_1-k}(\alpha_{M,t_1} - \delta_{\varepsilon,t_1})^k \langle \bar{p}(t_1), y^0 \rangle \geq \sigma(\prod_{\theta=\check{t}+1}^{t_1} \alpha_{M,\theta}) u(\check{s}(\check{t})) > 0,$$

czyli:

$$\left(\frac{\alpha_{M,t_1} - \delta_{\varepsilon,t_1}}{\alpha_{M,t_1}} \right)^k \geq \frac{\sigma u(\check{s}(\check{t}))}{a(\prod_{t=1}^{\check{t}} \alpha_{M,t}) \langle \bar{p}(t_1), y^0 \rangle} \cdot \frac{\prod_{t=1}^{t_1} \alpha_{M,t}}{\alpha_{M,t_1}^{t_1}}.$$

Zważywszy na **(GN12)**, **(GN13)** dochodzimy do warunku:

$$1 > (1 - \nu_\varepsilon)^k \geq \frac{\rho \sigma c_{min}}{a c_{max} \prod_{t=1}^{\check{t}} \alpha_{M,t}} > 0,$$

$$c_{min} = \min_{s \in S(\check{t})} u(s) > 0, \quad c_{max} = \max_{\substack{p \geq 0 \\ \|p\|=1}} \langle p, y^0 \rangle > 0, \text{ czyli:}$$

$$k \ln(1 - \nu_\varepsilon) \geq \ln C,$$

gdzie $C = \frac{\rho \sigma c_{min}}{a c_{max} \prod_{t=1}^{\check{t}} \alpha_{M,t}} > 0$. Stąd, wobec tego, że $0 < 1 - \nu_\varepsilon < 1$, dostajemy oszacowanie liczby k :

$$k \leq \frac{\ln C}{\ln(1 - \nu_\varepsilon)} = A.$$

W charakterze liczby k_ε wystarczy przyjąć najmniejszą liczbę naturalną większą od $\max\{0, A\}$. ■

Aktualne są uwagi 1, 2 do twierdzenia 5.1. Twierdzenie 5.4 pozostaje prawdziwe także, gdy warunek **(GN8)** zastąpimy następującym (słabszym) warunkiem:

(G8'') W każdym okresie czasu $t \in T$ istnieje optymalny proces produkcji

$$(\bar{x}(t), \bar{y}(t)) \in Z(t) \text{ spełniający warunek słabej regularności:}$$

$$\exists k < +\infty \exists \{z(\theta)\}_{\theta=1}^k \left((z(\theta), z(\theta+1)) \in Z(t) \mid z(1) = \bar{y}(t) \ \& \ z(k) > 0 \right)$$

(jeżeli zachodzi ten warunek, wtedy w każdym okresie $t \in T$ ceny chwilowej równowagi $\bar{p}(t)$ są dodatnie).

Kolejne twierdzenie 5.5 mówi o przebiegu optymalnego procesu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$, który sam w pewnym okresie $\check{t} < t_1$ prowadzi do magistrali, $y^*(\check{t}) \in \mathbb{N}^{\check{t}} \subseteq \mathbb{N}^{t_1}$,

a funkcja użyteczności poza warunkami (U1), (U2') spełnia dodatkowo następujący warunek:

(U3'') Jeżeli $y^*(\check{t}) \in \mathbb{N}^{\check{t}} \subseteq \mathbb{N}^{t_1}$, $\check{t} < t_1$, to $u(\check{s}) = a(\bar{p}(t_1), \check{s})$,

$$\text{gdzie } \check{s} = s^*(\check{t}) = \frac{y^*(\check{t})}{\|y^*(\check{t})\|} \in S(\check{t}) \subseteq S(t_1).$$

Warunek (UN3'') jest dostosowaną do specyfiki problemu wersją warunku (U3') z rozdz. 2, pkt 2.4. Głosi, że hiperpłaszczyzna H_p z wektorem tworzącym $p = a\bar{p}(t_1)$, ograniczająca z góry funkcję użyteczności, jest do niej styczna wzdłuż pojedynczej magistrali (promienia von Neumanna) $N_s^{\check{t}} = \{\lambda \check{s} | \lambda > 0\} \in \mathbb{N}^{\check{t}} \subseteq \mathbb{N}^{t_1}$. Dowód twierdzenia zyska na przejrzystości, gdy poprzedzimy je następującymi spostrzeżeniami (faktami).

Niech, tak jak dotąd, $\Gamma_t = \frac{\prod_{\theta=1}^t \alpha_{M,\theta}}{\alpha_{M,t}^t}$ oraz dla $t > \bar{t}$:

$$\Gamma_{\bar{t},t} = \frac{\prod_{\theta=\bar{t}+1}^t \alpha_{M,\theta}}{\alpha_{M,t}^{t-\bar{t}}}. \quad (5.34)$$

Wobec tego, że $\alpha_{M,t+1} \geq \alpha_{M,t}$ (zob. (GN7)), mamy:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\bar{t}+1,t} &\geq \Gamma_{\bar{t},t} > 0, \\ \Gamma_{\bar{t},t} &\geq \Gamma_{\bar{t},t+1} > 0 \end{aligned} \quad (5.35)$$

oraz

$$1 \geq \Gamma_{\bar{t},t} \geq \Gamma_t. \quad (5.36)$$

■ **Fakt 1.** $\forall \bar{t} < +\infty \exists \lim_t \Gamma_{\bar{t},t} \geq \rho > 0$.

Dowód. Ciąg (5.34) jest monotoniczny (nierosnący) i ograniczony (zob. (5.35)), więc ma granicę. Tezę otrzymujemy zważywszy na (5.36) i warunek (GN13). ■

■ **Fakt 2.** $\forall \delta \in (0, 1) \exists \bar{t} < +\infty \forall \check{t} \geq \bar{t} \left(\lim_t \Gamma_{\check{t},t} \geq 1 - \delta \right)$. (5.37)

Dowód. Zgodnie z przyjętymi oznaczeniami mamy:

$$\Gamma_t = \Gamma_{\bar{t}} \cdot \Gamma_{\bar{t},t} \cdot \left(\frac{\alpha_{M,\bar{t}}}{\alpha_{M,t}} \right)^{\bar{t}}$$

($t > \bar{t}$). Ciągi $\{\Gamma_t\}_{t=1}^\infty$, $\{\Gamma_{\bar{t}}\}_{\bar{t}=1}^\infty$ mają oczywiście tę samą granicę:

$$\lim_t \Gamma_t = \lim_{\bar{t}} \Gamma_{\bar{t}} = \bar{c} \geq \rho > 0,$$

ciąg $\{\Gamma_{\bar{t},t}\}_{t=\bar{t}+1}^\infty$ jest nierosnący i też ma granicę:

$$\lim_t \Gamma_{\bar{t},t} = c_{\bar{t}} \geq \rho > 0$$

(zob. Fakt 1). Niech $\varphi_{\bar{t},t} = \left(\frac{\alpha_{M,\bar{t}}}{\alpha_{M,t}}\right)^{\bar{t}}$, $t > \bar{t}$. Wówczas:

$$\forall \bar{t} \forall t > \bar{t} (0 < \varphi_{\bar{t},t} \leq 1). \quad (5.38)$$

Założmy, że:

$$\exists \delta \in (0,1) \forall \bar{t} \exists \check{t} \geq \bar{t} \left(\lim_t \Gamma_{\check{t},t} = c_{\check{t}} < 1 - \delta \right).$$

Wtedy:

$$\forall \bar{t} \exists \check{t} \geq \bar{t} \left(\lim_t \varphi_{\check{t},t} = \frac{1}{c_{\check{t}}} > \frac{1}{1-\delta} > 1 \right),$$

co jest sprzeczne z (5.38) i tym samym zamyka dowód. ■

Fakt 2 uzmysławia, jak ważną rolę gra warunek **(GN13)**. Dzięki niemu z upływem czasu, przy $\bar{t} \rightarrow +\infty$, maleją (asymptotycznie do 0) różnice między osiąganym na magistrali w różnych okresach czasu tempem wzrostu, choć samo tempo może (również asymptotycznie) rosnać.

■ **Fakt 3.** $\forall \delta \in (0,1) \exists \bar{t} < +\infty \forall t > \check{t} \geq \bar{t} (\Gamma_{\check{t},t} \geq 1 - \delta).$

Dowód wynika bezpośrednio z Faktu 2 oraz monotoniczności ciągu $\{\Gamma_{\bar{t},t}\}_{t=\bar{t}+1}^\infty$. ■

■ **Twierdzenie 5.5.** Niech gospodarka Gale’a spełnia warunki **(GN1)-(GN8)**, **(GN10’)**, **(GN12)**, **(GN13)**, **(U1)**, **(U2’)**, **(U3’’)**. Wówczas dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba naturalna $\bar{t}$, że jeżeli (y^0, t_1, u) – optymalny proces wzrostu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ w okresie $\check{t} \geq \bar{t} (< t_1)$ dociera do wielopasmowej magistrali:

$$y^*(\check{t}) \in \mathbb{N}^{t_1},$$

to:

$$\forall t \in \{\check{t} + 1, \dots, t_1\} (d(y^*(t)) < \varepsilon).$$

Dowód. Jeżeli (y^0, t_1, u) – optymalny proces wzrostu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ w okresie $\check{t} < t_1$ dociera do wielopasmowej magistrali $\mathbb{N}$, to proces $\{\check{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$:

$$\check{y}(t) = \begin{cases} y^*(t), & t = 0, 1, \dots, \check{t} \\ \sigma(\prod_{\theta=\check{t}+1}^t \alpha_{M,\theta}) s^*(\check{t}), & t = \check{t} + 1, \dots, t_1 \end{cases}$$

($\sigma = \|y^*(\check{t})\| > 0$, $s^*(\check{t}) = \frac{y^*(\check{t})}{\|y^*(\check{t})\|} \in S(\check{t})$) jest (y^0, t_1) – dopuszczalny, a wobec tego:

$$u(y^*(t_1)) \geq u(\check{y}(t_1)) = \sigma(\prod_{\theta=\check{t}+1}^{t_1} \alpha_{M,\theta}) u(s^*(\check{t})) > 0. \quad (5.39)$$

Z drugiej strony, ponieważ (y^0, t_1, u) – optymalny proces wzrostu spełnia warunek (5.30), prowadzi to do nierówności:

$$\langle \bar{p}(t_1), y^*(t_1) \rangle \leq \sigma \alpha_{M,t_1}^{t_1-\check{t}} \langle \bar{p}(t_1), s^*(\check{t}) \rangle. \quad (5.40)$$

Weźmy dowolną liczbę $\varepsilon > 0$. Wbrew tezie założymy, że w pewnym okresie $\tau \in \{\check{t} + 1, \dots, t_1\}$ zachodzi warunek:

$$d(y^*(\tau), \mathbb{N}) \geq \varepsilon.$$

Zgodnie z lematem 2.3 istnieje taka liczba $\delta_{\varepsilon,t_1} \in (0, \alpha_{M,t_1})$, że:

$$\begin{aligned} \langle \bar{p}(t_1), y^*(\tau + 1) \rangle &\leq (\alpha_{M,t_1} - \delta_{\varepsilon,t_1}) \langle \bar{p}(t_1), y^*(\tau) \rangle = \\ &= \sigma(\alpha_{M,t_1} - \delta_{\varepsilon,t_1}) \langle \bar{p}(t_1), s^*(\tau) \rangle. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Z (5.40), (5.41) wynika nierówność:

$$\langle \bar{p}(t_1), y^*(t_1) \rangle \leq \sigma \alpha_{M,t_1}^{t_1-\check{t}-1} (\alpha_{M,t_1} - \delta_{\varepsilon,t_1}) \langle \bar{p}(t_1), s^*(\check{t}) \rangle,$$

a stąd, wobec (U3''):

$$\begin{aligned} u(y^*(t_1)) &\leq \sigma \alpha_{M,t_1}^{t_1-\check{t}-1} (\alpha_{M,t_1} - \delta_{\varepsilon,t_1}) \langle \bar{p}(t_1), s^*(\check{t}) \rangle = \\ &= \sigma \alpha_{M,t_1}^{t_1-\check{t}-1} (\alpha_{M,t_1} - \delta_{\varepsilon,t_1}) u(s^*(\check{t})). \end{aligned} \quad (5.42)$$

Łącząc (5.39) i (5.42), dostajemy:

$$\sigma \alpha_{M,t_1}^{t_1-\bar{t}-1} (\alpha_{M,t_1} - \delta_{\varepsilon,t_1}) u(s^*(\bar{t})) \geq \sigma (\prod_{\theta=\bar{t}+1}^{t_1} \alpha_{M,\theta}) u(s^*(\bar{t})) > 0,$$

czyli:

$$1 \geq \frac{\alpha_{M,t_1} (\prod_{\theta=\bar{t}+1}^{t_1} \alpha_{M,\theta})}{(\alpha_{M,t_1} - \delta_{\varepsilon,t_1}) \alpha_{M,t_1}^{t_1-\bar{t}}} > 0. \quad (5.43)$$

Weźmy liczbę $\delta \in (0, \frac{\delta_{\varepsilon,t_1}}{\alpha_M})$, gdzie α_M jest granicą monotonicznego (niemalejącego) ciągu $\{\alpha_{M,t}\}_{t=1}^{\infty}$:

$$\forall t (\alpha_{M,t+1} \geq \alpha_{M,t} > 0) \text{ oraz } \lim_t \alpha_{M,t} = \alpha_M < +\infty \quad (5.44)$$

(zob. (5.29)). Niech $\bar{t}$ będzie odpowiadającym liczbie δ okresem czasu spełniającym warunek (5.37) oraz $\bar{t} \geq \bar{t}$ (okres $\bar{t}$ zależy od ε , gdyż zgodnie z Faktem 2 zależy od liczby $\delta \in (0, \frac{\delta_{\varepsilon,t_1}}{\alpha_M})$). Wtedy z (5.43), zgodnie z Faktem 3, otrzymujemy nierówność:

$$\frac{\alpha_{M,t_1} - \delta_{\varepsilon,t_1}}{\alpha_{M,t_1}} \geq \Gamma_{\bar{t},t_1} \geq 1 - \delta > 1 - \frac{\delta_{\varepsilon,t_1}}{\alpha_M},$$

więc:

$$1 - \frac{\delta_{\varepsilon,t_1}}{\alpha_{M,t_1}} > 1 - \frac{\delta_{\varepsilon,t_1}}{\alpha_M}.$$

Warunek ten zachodzi tylko gdy $\alpha_M < \alpha_{M,t_1}$ i jest sprzeczny z (5.44). Sprzeczność otrzymaliśmy zakładając, wbrew tezie, że co najmniej w jednym okresie $\tau \in \{\bar{t} + 1, \dots, t_1\}$ zachodzi warunek $d(y^*(\tau), \mathbb{N}) \geq \varepsilon$. Otrzymana sprzeczność zamyka dowód. ■

Zgodnie z warunkiem **(GN10')** w optymalnym procesie $(\bar{x}(t), \bar{y}(t)) \in Z_{opt}(t)$ każdy wektor produkcji $\bar{y}(t)$ jest jednocześnie wektorem nakładów w pewnym optymalnym procesie $(\bar{x}(t+1), \bar{y}(t+1)) \in Z_{opt}(t+1)$ w okresie następnym, $t = 0, 1, \dots, t_1 - 1$. Zatem $S(t) \subseteq S(t+1)$, czyli $\mathbb{N}^t \subseteq \mathbb{N}^{t+1}$, $t = 0, 1, \dots, t_1 - 1$. Oznacza to, że wiązka magistral z czasem rośnie (ich liczba nigdy

nie ulega redukcji). Złagodzimy to założenie, zastępując je następującym warunkiem głoścącym, że w gospodarce istnieje pewna (przynajmniej jedna) technologia produkcji, która pozostaje optymalną w całym horyzoncie czasu T :

$$(GN10'') \quad \exists \{\bar{x}(t), \bar{y}(t)\}_{t=0}^{t_1} \forall t \in T \left((\bar{x}(t), \bar{y}(t)) \in Z_{opt}(t) \right) \& \forall t < t_1 \\ (\bar{x}(t+1) = \bar{y}(t)).$$

Jeżeli zachodzi ten warunek, to:

$$\exists \bar{s} \in S(0) \exists \{\bar{y}(t)\}_{t=0}^{t_1} \left(\frac{\bar{y}(0)}{\|\bar{y}(0)\|} = \bar{s}, (\bar{y}(t), \bar{y}(t+1)) \in Z(t+1), \bar{y}(t+1) = \right. \\ \left. = \alpha_{M,t+1} \bar{y}(t), t = 0, \dots, t_1 - 1 \right),$$

czyli:

$$\bar{y}(t) = \left(\prod_{\theta=1}^t \alpha_{M,\theta} \right) \bar{y}(0), t = 1, \dots, t_1 \quad (5.45)$$

(zob. (5.8)). Proces (trajektoria) (5.45) w całości leży na promieniu von Neumanna (półprostej):

$$N_{\bar{s}}^0 = \{\lambda \bar{s} | \lambda > 0\}. \quad (5.46)$$

Oczywiście, $N_{\bar{s}}^0 \in \mathbb{N}^t$ w każdym okresie $t \in T$, ale ogólnie:

$$\neg \forall t \in \{0, 1, \dots, t_1 - 1\} (\mathbb{N}^t \subseteq \mathbb{N}^{t+1}).$$

Półprostą (5.46) nazywamy *szczytową magistralą* (szczytowym promieniem von Neumanna) w gospodarce Gale'a spełniającej warunki **(GN1)-(GN8)**. Tylko na szczytowej magistrali gospodarka we wszystkich okresach czasu $t \in T \setminus \{0\}$ osiąga najwyższe tempo wzrostu.

Gdy trajektoria (5.45) leży na szczytowej magistrali:

$$\bar{y}(t) \in N_{\bar{s}}^0, t = 0, \dots, t_1,$$

to dla dowolnej liczby $\lambda > 0$ także:

$$\lambda \bar{y}(t) \in N_{\bar{s}}^0, t = 0, \dots, t_1.$$

Poniższe twierdzenie jest odpowiednikiem twierdzenia 5.4, po zastąpieniu warunku (GN10') przez (GN10'').

■ **Twierdzenie 5.6.** Jeżeli zachodzą warunki (GN1)-(GN8), (GN10''), (GN12), (GN13) (U1), (U2) oraz istnieje $(y^0, \check{t})$ – dopuszczalny proces $\{\check{y}(t)\}_{t=0}^{\check{t}}$ prowadzący w okresie $\check{t} < t_1$ do szczytowej magistrali $N_s^0 \in \mathbb{N}^0 \subseteq \mathbb{N}^{t_1}$, to dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba naturalna k_ε , że liczba okresów czasu, w których (y^0, t_1, u) – optymalny proces wzrostu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ (rozwiązanie zadania (5.29)) spełnia warunek (5.30) nie przekracza k_ε . Liczba k_ε nie zależy od długości horyzontu T .

Dowód przebiega analogicznie jak dowód twierdzenia 5.4 (po zastąpieniu wielopasmowej magistrali $\mathbb{N}^{\check{t}}$ przez $\mathbb{N}^0$). ■

Uwaga 1. Twierdzenie 5.6 pozostaje prawdziwe również gdy warunek (G10'') zastąpimy (słabszym) warunkiem:

$$\begin{aligned} \exists \bar{t} < t_1 \exists \{\bar{x}(t), \bar{y}(t)\}_{t=\bar{t}}^{t_1} \forall t \in \{\bar{t}, \bar{t} + 1, \dots, t_1\} \left((\bar{x}(t), \bar{y}(t)) \in Z_{opt}(t) \right) \& \\ \& \forall t \in \{\bar{t}, \bar{t} + 1, \dots, t_1 - 1\} \left(\bar{x}(t + 1) = \bar{y}(t) \right) \end{aligned}$$

(w tej wersji szczytowa magistrala $N_s^{\bar{t}}$ istnieje od okresu $t = \bar{t}$, a nie od $t = 0$) oraz założymy, że istnieje $(y^0, \check{t})$ – dopuszczalny proces wzrostu $\{\check{y}(t)\}_{t=0}^{\check{t}}$ prowadzący w okresie czasu $\check{t} \geq \bar{t}$ ze stanu początkowego y^0 do szczytowej magistrali:

$$N_s^{\bar{t}} = \{\lambda \bar{s} | \lambda > 0\}; \bar{s} = \frac{\bar{y}(\bar{t})}{\|\bar{y}(\bar{t})\|} \in S(\bar{t}).$$

Aktualne są uwagi 1, 2 do twierdzenia 5.1.

Uwaga 2. Wszystkie twierdzenia 5.1-5.6 zachowują moc, gdy w warunkach (GN8), (GN8') wektory produkcji w optymalnych procesach $(\bar{x}(t), \bar{y}(t)) \in Z(t)$ są półdodatnie (a nie dodatnie), o ile gospodarka spełnia następujący warunek słabej regularności:

$$\forall t \in T \left(\alpha(\bar{x}(t), \bar{y}(t)) = \alpha_{M,t} \ \& \ \bar{y}(t) \geq 0 \right) \exists k < +\infty \ \exists \{z(\theta)\}_{\theta=1}^k$$

$$\left((z(\theta), z(\theta + 1)) \in Z(t), \ z(1) = \bar{y}(t) \ \& \ z(k) > 0 \right)$$

(dzięki temu warunkowi, przy pozostałych założeniach bez zmian, ceny równowagi chwilowej $\bar{p}(t)$ we wszystkich okresach czasu t są dodatnie).

ROZDZIAŁ 6

Magistrala produkcyjna, kapitałowa i konsumpcyjna w gospodarce Leontiefa-Gale'a

Warunki dynamiki inwestycji i kapitału sformułowane w rozdziale 4 miały tak ogólną postać, że już w jego podsumowaniu podkreślaliśmy potrzebę ich dookreślenia. Uczynimy to obecnie. Zajmiemy się gospodarką łączącą ideę przestrzeni produkcyjnej Gale'a z przepływami międzygałęziowymi Leontiefa. W gospodarce, której przyjrzymy się obecnie, są jasno określone reguły akumulacji kapitału produkcyjnego, wytwarzania produkcji oraz jej podziału na inwestycje i konsumpcję, a wzrost mocy produkcyjnych (zdolności wytwórczych) w gospodarce zależy od dynamiki kapitału i zasobów pracy. W całym rozdziale zakładamy, że sfera produkcyjna gospodarki dzieli się na n sektorów. Takie podstawowe zmienne jak kapitał, produkcja, inwestycje i konsumpcja wyrażone są w jednostkach pieniężnych (w cenach stałych).

Wartością dodaną rozdziału jest dowód, że obok efektu magistrali produkcyjnej w gospodarce takiej ujawnia się również efekt magistrali kapitałowej oraz konsumpcyjnej; zob. [45], [46], [48], [49], [51-53] oraz [56, rozdz. 7].

6.1. Gospodarka Leontiefa-Gale'a.

Podstawowe założenia. Dopuszczalne procesy wzrostu

Podobnie jak dotąd zakładamy, że czas zmienia się skokowo, $t \in T = \{0, 1, \dots, t_1\}$; $t_1 < +\infty$. Sfera produkcyjna gospodarki dzieli się na n sektorów, a jej technologię ucieleśni przestrzeń (produkcyjna) $Z \subset R_+^{2n+1}$; $Z \neq \emptyset$, której elementami w okresie t są wektory:

$$\zeta(t) = \begin{pmatrix} k(t) \\ z(t) \\ x(t) \end{pmatrix},$$

gdzie:

$k(t) = (k_1(t), \dots, k_n(t))^T$; $k_i(t)$ oznacza wielkość (wartość) kapitału produkcyjnego (trwałego majątku produkcyjnego) w i -tym sektorze gospodarki w okresie t (zasób, wymiar: zł),

$x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$; $x_i(t)$ oznacza wielkość (wartość) produkcji wytworzonej w i -tym sektorze w okresie t (strumień, wymiar: zł/R),

$z(t)$ jest całkowitą wielkością zatrudnienia w gospodarce w okresie t (zasób, np. w mln osób).

O każdej uporządkowanej trójce:

$$\zeta(t) = \begin{pmatrix} k(t) \\ z(t) \\ x(t) \end{pmatrix} \in Z \quad (6.1)$$

mówimy, że opisuje technologicznie dopuszczalny proces produkcji w okresie t . Zakładamy, że przestrzeń produkcyjna Z spełnia następujące warunki:

$$(LG1) \quad \forall \lambda \geq 0 \quad \forall \begin{pmatrix} k \\ z \\ x \end{pmatrix} \in Z \quad \left(\lambda \begin{pmatrix} k \\ z \\ x \end{pmatrix} \in Z \right)$$

(warunek proporcjonalności nakładów i wyników).

$$(LG2) \quad \forall \begin{pmatrix} k^1 \\ z^1 \\ x^1 \end{pmatrix} \in Z \quad \forall \begin{pmatrix} k^2 \\ z^2 \\ x^2 \end{pmatrix} \in Z \quad \left(\begin{pmatrix} k^1 \\ z^1 \\ x^1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k^2 \\ z^2 \\ x^2 \end{pmatrix} \in Z \right)$$

(warunek addytywności procesów produkcji).

$$(LG3) \quad \begin{pmatrix} k \\ z \\ x \end{pmatrix} \in Z \quad \& \quad (k = 0 \vee z = 0) \Rightarrow x = 0$$

(brak któregoś z czynników powoduje wstrzymanie produkcji).

$$(LG4) \quad \forall \begin{pmatrix} k \\ z \\ x \end{pmatrix} \in Z \quad \forall k' \geq k \quad \forall z' \geq z \quad \left(\begin{pmatrix} k' \\ z' \\ x \end{pmatrix} \in Z \right)$$

(możliwość marnotrawstwa czynników produkcji).

$$(LG5) \quad \forall \begin{pmatrix} k \\ z \\ x \end{pmatrix} \in Z \quad \forall 0 \leq x' \leq x \quad \left(\begin{pmatrix} k \\ z \\ x' \end{pmatrix} \in Z \right)$$

(możliwość marnotrawstwa mocy produkcyjnych).

$$(LG6) \quad \forall \begin{pmatrix} k^i \\ z^i \\ x^i \end{pmatrix} \in Z, \quad i = 1, 2, \dots, \infty \quad \left(\begin{pmatrix} k^i \\ z^i \\ x^i \end{pmatrix} \rightarrow_i \begin{pmatrix} \bar{k} \\ \bar{z} \\ \bar{x} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \bar{k} \\ \bar{z} \\ \bar{x} \end{pmatrix} \in Z \right)$$

(domkniętość przestrzeni produkcyjnej).

$$(LG7) \quad Z \cap \text{int } R_+^{2n+1} \neq \emptyset$$

(możliwość wytworzenia dodatniego wektora produkcji x).

Jeżeli zachodzą powyższe warunki, to w szczególności dopuszczalna jest dowolna kombinacja czynników produkcji:

$$\forall k \geq 0 \quad \forall z \geq 0 \quad \exists x \geq 0 \quad \left(\begin{pmatrix} k \\ z \\ x \end{pmatrix} \in Z \right).$$

Wprowadzając multifunkcję (przekształcenie technologiczne) $a: R_+^{n+1} \rightarrow P(R_+^n)$:

$$a(k, z) = \left\{ x \mid \begin{pmatrix} k \\ z \\ x \end{pmatrix} \in Z \right\},$$

możemy warunek (6.1) zapisać w równoważnej postaci:

$$x(t) \in a(k(t), z(t)). \quad (6.1')$$

Obrazem pary (k, z) w odwzorowaniu $a(\cdot)$ jest zbiór wszystkich wektorów produkcji x możliwych do wytworzenia w gospodarce wyposażonej w kapitał k i dysponującej zasobami pracy (liczbą ludności aktywnej zawodowo) z . Własności przekształcenia technologicznego dotyczy poniższe twierdzenie.

■ **Twierdzenie 6.1.** Jeżeli przestrzeń produkcyjna Z spełnia warunki (LG1)-(LG7), to przekształcenie technologiczne $a(\cdot)$ ma następujące własności:

$$(i) \quad \forall k \geq 0 \quad \forall z \geq 0 \quad \forall \lambda \geq 0 \quad (a(\lambda k, \lambda z) = \lambda a(k, z)).$$

$$(2i) \quad \forall k^1, k^2 \geq 0 \quad \forall z^1, z^2 \geq 0 \quad (a(k^1, z^1) + a(k^2, z^2) \subseteq a(k^1 + k^2, z^1 + z^2)).$$

$$(3i) \quad \forall k \geq 0 \quad \forall z \geq 0 \quad (a(0, z) = a(k, 0) = \{0\}).$$

$$(4i) \quad \forall k, z \geq 0 \quad \forall k' \geq k \quad \forall z' \geq z \quad \forall x \in a(k, z) \quad (x \in a(k', z')).$$

$$(5i) \quad \forall k, z \geq 0 \quad \forall x \in a(k, z) \quad \forall 0 \leq x' \leq x \quad (x' \in a(k, z)).$$

$$(6i) \quad \forall k, z \geq 0 \quad \text{zbiory } a(k, z) \text{ są (niepuste) zwarte i wypukłe.}$$

$$(7i) \quad \text{Multifunkcja } a(\cdot) \text{ jest odwzorowaniem półciągłym.}$$

Dowód przebiega analogicznie jak dowód podobnych własności przekształcenia technologicznego $a(\cdot)$ w twierdzeniu 1.1. ■

Zakładamy, że spełniony jest następujący warunek bilansowy:

$$x(t) = Ax(t) + i^p(t) + c(t), \quad (6.2)$$

gdzie:

$A \geq 0$ jest kwadratową (n, n) macierzą współczynników nakładów bieżących (nazywaną także macierzą nakładów jednostkowych),

$i^p(t) = (i_1^p(t), \dots, i_n^p(t))^T \geq 0$; $i_j^p(t)$ jest wielkością (wartością) produkcji j -tego sektora przeznaczonej na inwestycje produkcyjne w gospodarce w okresie t (strumień, wymiar: zł/R),

$c(t) = (c_1(t), \dots, c_n(t))^T \geq 0$; $c_i(t)$ jest wielkością (wartością) produkcji wytworzonej w i -tym sektorze, przeznaczonej na zaspokojenie popytu konsumpcyjnego w okresie t (strumień, wymiar: zł/R).

Oznaczając przez $i(t) = (i_1(t), \dots, i_n(t))^T$ wektor, którego współrzędne przedstawiają wielkość (wartość) nakładów inwestycyjnych wg sektorów przeznaczenia nakładów (strumienie, wymiar: zł/R) oraz przez $S \geq 0$ kwadratową (n, n) macierz struktury nakładów inwestycyjnych ((i, j) -ty element macierzy S określa udział i -tego sektora gospodarki w jednostce nakładów inwestycyjnych ponoszonych w sektorze j -tym; $\sum_i s_{i,j} = 1, j = 1, \dots, n$) dostajemy:

$$i^p(t) = Si(t). \quad (6.3)$$

Dalej wektory $x(t)$, $i(t)$, $c(t)$ nazywamy krótko wektorami produkcji, inwestycji i konsumpcji w okresie t .

W interesującej nas gospodarce macierz współczynników nakładów bieżących gra istotną rolę, dlatego poświęcimy jej chwilę uwagi. Pomińmy czas t i weźmy dowolny wektor produkcji $x \geq 0$. Wówczas $z = Ax$ jest tzw. wektorem nakładów bieżących towarzyszących wytworzeniu wektora produkcji x (inaczej: wektorem bieżącego zużycia materiałowego). Różnicę:

$$(E - A)x = y$$

nazywamy **wektorem produkcji czystej** (lub **końcowej**; strumień, wymiar: zł/R), $E - A$ nosi nazwę **macierzy Leontiefa**; E jest kwadratową (n, n) macierzą jednostkową.

Mówimy, że **gospodarka (macierz A) jest produktywna**, jeżeli:

$$\exists x \geq 0 (x > Ax).$$

Produktywna gospodarka jest w stanie wytworzyć dodatni wektor produkcji czystej (mówiąc nieprecyzyjnie, ale obrazowo: jest w stanie wytworzyć więcej towarów, niż ich zużywa). Macierz A ma szereg własności. W lemacie zawarte są te, które będą potrzebne w tym rozdziale [16, rozdz. IX].

■ **Lemat 6.1. (i)** Jeżeli macierz współczynników nakładów bieżących A jest produktywna, to:

$$\forall y \geq 0 ((E - A)x = y \Rightarrow x \geq 0)$$

(2i) Jeżeli macierz A jest produktywna, to macierz Leontiefa $E - A$ jest nieosobliwa.

(3i) Macierz A jest produktywna wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$(E - A)^{-1} \geq 0.$$

(4i) Macierz A jest produktywna wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$(E - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$$

(przez A^0 oznaczamy macierz jednostkową; $A^0 = E$).

Dowód. (i) Zgodnie z definicją macierzy produktywnej $\exists \bar{x} \geq 0 (\bar{x} > A\bar{x})$, czyli $\bar{x} > 0$. Załóżmy że:

$$\exists y \geq 0 \exists x (x - Ax = y \ \& \neg x \geq 0).$$

Niech $\theta = \max_i \left(-\frac{x_i}{\bar{x}_i} \right) = -\frac{x_k}{\bar{x}_k}$. Wtedy $\theta > 0$, $x' = x + \theta \bar{x} \geq 0$ oraz $x'_k = 0$.

Jednocześnie:

$$x' = x + \theta \bar{x} > Ax + \theta A\bar{x} = A(x + \theta \bar{x}) = Ax' \geq 0,$$

co przeczy konstrukcji wektora x' , zgodnie z którą $x'_k = 0$. Otrzymana sprzeczność zamyka dowód **(i)**.

(2i) Niech wektor x będzie rozwiązaniem układu:

$$(E - A)x = 0,$$

wtedy zgodnie z **(i)** $x \geq 0$. Wektor $x' = -x$ jest również rozwiązaniem tego układu, a to (zgodnie z **(i)**) oznacza, że $x' = -x \geq 0$. Okazuje się, że jedynym rozwiązaniem układu jest wektor $x = 0$, czyli $\det(E - A) \neq 0$.

(3i) (Konieczność) Załóżmy, że macierz A jest produktywna, czyli $\det(E - A) \neq 0$. Oznaczmy przez x^i rozwiązanie układu:

$$(E - A)x = e^i,$$

gdzie $e^i = (0, \dots, 1, \dots, 0)^T$ jest n -wymiarowym wektorem (kolumnowym) z jedynką na i -tym miejscu, $i = 1, \dots, n$. Wówczas w świetle **(i)** (zważywszy na nieosobliwość macierzy $E - A$):

$$\forall i (x^i = (E - A)^{-1} e^i \geq 0),$$

czyli $(E - A)^{-1} \geq 0$.

(Dostateczność) Jeżeli $(E - A)^{-1} \geq 0$, to:

$$\bar{x} = (E - A)^{-1} e \geq 0,$$

więc $(E - A)\bar{x} = e > 0$, gdzie $e = (1, \dots, 1)^T$. Zatem $\bar{x} > A\bar{x}$, czyli macierz jest produktywna.

(4i) (Konieczność) Załóżmy, że macierz A jest produktywna. Wówczas $\lim_n A^n = 0$. Istotnie, wobec produktywności macierzy A mamy $x > Ax$ dla pewnego wektora $x > 0$. Wówczas $\exists \lambda \in (0, 1)(\lambda x > Ax)$ i przez indukcję łatwo pokazać, że:

$$\forall n (\lambda^n x > A^n x),$$

czyli $\lim_n A^n x = 0$, a ponieważ $A \geq 0$ oraz $x > 0$, więc także $A^n \rightarrow 0$. Ze zbieżności ciągu $\{A^n\}_{n=0}^\infty$ wynika zbieżność szeregu macierzowego $\sum_{n=0}^\infty A^n$. Faktycznie, załóżmy, że szereg ten nie jest zbieżny. Wtedy nie jest także zbieżny szereg $(E - A)(\sum_{n=0}^\infty A^n)$, czyli nie ma granicy ciąg $\{S_n\}_{n=0}^\infty$ z elementami $S_n = (E - A)(\sum_{r=0}^n A^r) = E - A^{n+1}$. Przeczy to jednak temu, że $A^n \rightarrow 0$. Zatem szereg $\sum_{n=0}^\infty A^n$ jest zbieżny. Przyjmijmy oznaczenia $L = (E - A)^{-1}$ oraz $P = \sum_{n=0}^\infty A^n$. Wtedy $(E - A)L = E$ oraz:

$$(E - A)P = (E - A)(\sum_{n=0}^\infty A^n) = E + A - A + A^2 - A^2 + \dots = E,$$

czyli $(E - A)L = (E - A)P$, a ponieważ $\det(E - A) \neq 0$, więc $L = P$, tj. $(E - A)^{-1} = \sum_{n=0}^\infty A^n$.

(Dostateczność) Jeżeli $(E - A)^{-1} = \sum_{n=0}^\infty A^n$, to $(E - A)^{-1} \geq 0$ i produktywność macierzy A wynika z **(3i)**. ■

Jeżeli macierz nakładów bieżących A jest produktywna, to w świetle lematu rozwiązanie x układu:

$$x - Ax = y$$

można przedstawić w postaci:

$$x = (E - A)^{-1}y = y + Ay + A^2y + \dots$$

Interpretacja tego równania jest następująca. Aby dostarczyć na rynek wektor produkcji czystej y , należy oczywiście ją wytworzyć. Wytworzenie wektora towarów y wymaga nakładów $x' = Ay$. Należy zatem wytworzyć także wektor towarów x' , a to wymaga nakładów $x'' = Ax'$ etc. Suma $x = y + x' + x'' + \dots$ to łączna produkcja towarów, która bezpośrednio lub pośrednio towarzyszy wytworzeniu wektora produkcji czystej/końcowej $y = x - Ax$. Element (i, j) -ty macierzy $(E - A)^{-1}$ przedstawia zatem pełny nakład towarów wytwarzanych w i -tym sektorze gospodarki (umownie: nakład i -tego towaru), który bezpośrednio lub pośrednio jest potrzebny do wytworzenia jednostki produkcji czystej w j -tym sektorze (umownie: produkcji j -tego towaru). Macierz $(E - A)^{-1}$ nosi nazwę macierzy współczynników nakładów pełnych.

Zakładamy, że:

(LG8) Macierz A jest produktywna oraz spełnia warunek $(E - A)^{-1} > 0$.

Ustalony jest minimalny poziom spożycia $\bar{c} = (\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n)^T \geq 0$, poniżej którego nie może spadać konsumpcja w przeliczeniu na osobę:

$$c(t) \geq l(t)\bar{c}, \quad (6.4)$$

gdzie $l(t)$ jest liczbą ludności w kraju w okresie t .

Liczba ludności kraju rośnie wykładniczo z dodatnią stopą λ :

$$l(t) = l^0(1 + \lambda)^t. \quad (6.5)$$

Zatrudnienie (liczba ludności aktywnej zawodowo) stanowi część ludności ogółem:

$$z(t) = \sigma l(t), \quad (6.6)$$

$\sigma \in (0,1)$ jest wskaźnikiem aktywności zawodowej.

Wielkość kapitału w sektorach gospodarki w okresie $t + 1$ zależy od wielkości kapitału oraz inwestycji produkcyjnych zrealizowanych w tych sektorach w okresie poprzednim:

$$k(t + 1) = (E - \rho)k(t) + \delta i(t) \quad (6.7)$$

(dla uproszczenia zakładamy roczny cykl skutkowania inwestycji). Elementy ρ_i diagonalnej macierzy $\rho = \text{diag}(\rho_1, \dots, \rho_n)$ wskaźników deprecjacji kapitału w sektorach spełniają warunek $\rho_i \in (0,1)$, $i = 1, \dots, n$. Elementy δ_i diagonalnej macierzy $\delta = \text{diag}(\delta_1, \dots, \delta_n)$ wskaźników skutkowania inwestycji w sektorach spełniają warunek $\rho_i \in (0,1]$, $i = 1, \dots, n$.

W interesującej nas gospodarce kapitał produkcyjny rośnie co najmniej ze stopą wzrostu zatrudnienia (równą stopie wzrostu ludności):

$$\Delta k(t) = k(t+1) - k(t) \geq \lambda k(t) \quad (6.8)$$

oraz dana/ustalona jest jego początkowa wielkość (w okresie $t = 0$):

$$k(0) = k^0 > 0. \quad (6.9)$$

Warunek (6.8) oznacza, że przy założeniu stałej struktury zatrudnienia w gospodarce nigdy nie spada techniczne uzbrojenie pracy (stosunek kapitału do zatrudnienia w sektorach). O czwórce nieujemnych ciągów $\{i(t), k(t), x(t), c(t)\}_{t=0}^{t_1}$ spełniających w horyzoncie $T = \{0, 1, \dots, t_1\}$ warunki (6.1)-(6.9) (równoważnie, warunki (6.1'), (6.2)-(6.9)) mówimy, że tworzą (k^0, t_1) – **dopuszczalny proces wzrostu**. Ciąg $\{i(t)\}_{t=0}^{t_1}$ w (k^0, t_1) – procesie wzrostu nazywamy (k^0, t_1) – dopuszczalną trajektorią inwestycji, ciąg $\{k(t)\}_{t=0}^{t_1}$ nazywamy (k^0, t_1) – dopuszczalną trajektorią kapitału etc.

Gospodarkę spełniającą warunki **(LG1)-(LG8)** oraz (6.1)-(6.9) nazywamy **gospodarką Leontiefa-Gale'a**. Zakładamy, że w gospodarce takiej, niezależnie od długości horyzontu $T = \{0, 1, \dots, t_1\}$, istnieją (k^0, t_1) – dopuszczalne procesy wzrostu.

Oznaczmy przez $X_{k^0,t}$, $K_{k^0,t}$, $I_{k^0,t}$, $C_{k^0,t}$ zbiory (odpowiednio) wektorów produkcji, kapitału, inwestycji i konsumpcji w okresie t we wszystkich (k^0, t_1) – dopuszczalnych procesach wzrostu w gospodarce z horyzontem $T = \{0, 1, \dots, t_1\}$, $t_1 < +\infty$:

$$X_{k^0,0} = a(k^0, z^0),$$

$$\begin{aligned}
X_{k^0,t} &= \{x \mid x \in a(k(t), z(t)), k(t) = (E - \rho)k(t-1) + \delta i(t-1), \\
&\quad Si(t-1) \in [0, (E - A)x(t-1) - l^0(1 + \lambda)^{t-1}\bar{c}], \\
x(t-1) &\in X_{k^0,t-1}, k(t) \geq (1 + \lambda)k(t-1), k(t-1) \in K_{k^0,t-1}\}, \text{ dla } t \geq 1, \\
K_{k^0,0} &= \{k^0\}, \\
K_{k^0,t} &= \{k \mid k = (E - A)k(t-1) + \delta i(t-1), k \geq (1 + \lambda)k(t-1), \\
&\quad k(t-1) \in K_{k^0,t-1}, \\
Si(t-1) &\in [0, (E - A)x(t-1) - l^0(1 + \lambda)^{t-1}\bar{c}], x(t-1) \in X_{k^0,t-1}\}, \\
&\quad \text{dla } t \geq 1, \\
I_{k^0,t} &= \{i \mid i \geq \delta^{-1}\rho k, Si \in [0, (E - A)x - l^0(1 + \lambda)^t\bar{c}], k \in K_{k^0,t}, x \in X_{k^0,t}\}, \\
&\quad \text{dla } t \geq 0, \\
C_{k^0,t} &= \{c \mid c \in [l^0(1 + \lambda)^t\bar{c}, (E - A)x - Si], x \in X_{k^0,t}, i \in I_{k^0,t}\}, \text{ dla } t \geq 0.
\end{aligned}$$

■ **Lemat 6.2.** $\forall t \geq 0$ zbiory $X_{k^0,t}, K_{k^0,t}, I_{k^0,t}, C_{k^0,t}$ są wypukłe i zwarte.

Dowód. (Wypukłość) Zbiór $X_{k^0,0}$ jest wypukły zgodnie z twierdzeniem 6.1(6i).

Niech $x^1, x^2 \in X_{k^0,t}, t \geq 1$. Istnieją więc takie (k^0, t) – dopuszczalne procesy $\{i^j(\theta), k^j(\theta), x^j(\theta), c^j(\theta)\}_{\theta=0}^t$ spełniające warunki (6.1)-(6.9), że $x^j(t) = x^j, j = 1, 2$ (prowadzące w okresie t do wektorów produkcji x^1, x^2). Niech:

$$\begin{aligned}
x(\theta) &= \alpha x^1(\theta) + \beta x^2(\theta), \\
k(\theta) &= \alpha k^1(\theta) + \beta k^2(\theta), \\
i(\theta) &= \alpha i^1(\theta) + \beta i^2(\theta), \\
c(\theta) &= \alpha c^1(\theta) + \beta c^2(\theta),
\end{aligned}$$

$\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$. Podstawiając te trajektorie do układu (6.1)-(6.9), łatwo sprawdzić, że w gospodarce spełniającej warunki (LG1)-(LG8) tworzą one (k^0, t) – dopuszczalny proces wzrostu. Ponieważ $x = \alpha x^1 + \beta x^2 = \alpha x^1(t) + \beta x^2(t) \in X_{k^0,t}$, więc także $\forall t \geq 1$ zbiory $X_{k^0,t}$ są wypukłe.

Jednoelementowy zbiór $K_{k^0,0} = \{k^0\}$ jest oczywiście wypukły. Dowód wypukłości zbiorów $K_{k^0,t}$, $t \geq 1$ przebiega podobnie jak dowód wypukłości zbiorów $X_{k^0,t}$, $t \geq 1$.

Niech teraz $i^1, i^2 \in I_{k^0,t}$, $t \geq 0$. Zatem:

$$\exists k^1, k^2 \in K_{k^0,t} \exists x^1, x^2 \in X_{k^0,t} (i^j \geq \delta^{-1} \rho k^j, Si^j \in [0, (E - A)x^j - l^0(1 + \lambda)^t \bar{c}], j = 1, 2).$$

Ponieważ zbiory $K_{k^0,t}$, $X_{k^0,t}$ są wypukłe, więc dla dowolnych liczb $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$:

$$\alpha i^1 + \beta i^2 \geq \delta^{-1} \rho k \text{ oraz } S(\alpha i^1 + \beta i^2) \in [0, (E - A)x - l^0(1 + \lambda)^t \bar{c}],$$

gdzie $k = \alpha k^1 + \beta k^2 \in K_{k^0,t}$, $x = \alpha x^1 + \beta x^2 \in X_{k^0,t}$. Zbiory $I_{k^0,t}$ są więc wypukłe $\forall t \geq 0$.

Dowód wypukłości zbiorów $C_{k^0,t}$ przebiega podobnie.

(Zwartość) Jednoelementowy zbiór $K_{k^0,0} = \{k^0\}$ jest zwarty. Dowód zwartości zbiorów $X_{k^0,t}$, $I_{k^0,t}$, $C_{k^0,t}$, $K_{k^0,t+1}$ przeprowadzimy metodą indukcji. Pokażemy najpierw, że lemat jest prawdziwy dla $t = 0$. Zbiór wektorów produkcji $X_{k^0,0} = a(k^0, \sigma l^0)$ jest zwarty na mocy twierdzenia 6.1(6i). Zbiór wektorów inwestycji $I_{k^0,0} = I^0 \cap \bar{I}^0$ jest iloczynem domkniętej w R^n półprzestrzeni $I^0 = \{i \in R^n \mid i \geq \delta^{-1} \rho k^0\}$ oraz zbioru:

$$\bar{I}^0 = \{i \in R^n \mid Si \in [0, (E - A)x - l^0 \bar{c}], x \in X_{k^0,0}\}.$$

Pokażemy, że zbiór $\bar{I}^0$ jest zwarty. W tym celu weźmy dowolny ciąg $\{i^j\}_{j=1}^{\infty}$, $i^j \in \bar{I}^0$. Wówczas istnieje taki ciąg $\{x^j\}_{j=1}^{\infty}$, $x^j \in X_{k^0,0}$, że $\forall j (Si^j \in [(E - A)x^j - l^0 \bar{c}])$. Ponieważ każda kolumna póldodatniej macierzy S zawiera element dodatni oraz zbiór $X_{k^0,0}$ jest zwarty, więc zbiór $\bar{I}^0$ jest ograniczony. Zatem:

$$\exists \{i^{j_l}\}_{l=1}^{\infty} \exists \{x^{j_l}\}_{l=1}^{\infty} \exists \bar{x} \in X_{k^0,0} \exists \bar{l} \in [(E - A)\bar{x} - l^0 \bar{c}] (x^{j_l} \rightarrow_l \bar{x} \text{ \& } i^{j_l} \rightarrow_l \bar{l}),$$

czyli $\bar{t} \in \bar{I}^0$, co dowodzi zwartości zbioru $\bar{I}^0$. Zbiór $I_{k^0,0}$ jest zwarty jako iloczyn zbioru zwartego i domkniętego.

Podobnie przebiega dowód zwartości zbioru wektorów konsumpcji $C_{k^0,0}$. W dowodzie wykorzystuje się zwartość zbiorów $X_{k^0,0}$, $I_{k^0,0}$. Zbiór wektorów kapitału:

$$K_{k^0,1} = \{k | k = (E - \rho)k^0 + \delta i^0, i \in I_{k^0,0}\}$$

jest zwarty jako ciągłe (liniowe) odwzorowanie zwartego zbioru $I_{k^0,0}$.

Założmy teraz, że twierdzenie jest prawdziwe dla $t = \theta \geq 0$, tj. że zbiory $X_{k^0,\theta}$, $I_{k^0,\theta}$, $C_{k^0,\theta}$, $K_{k^0,\theta+1}$ są zwarte. Pokażemy, że zwarte są także zbiory $X_{k^0,\theta+1}$, $I_{k^0,\theta+1}$, $C_{k^0,\theta+1}$, $K_{k^0,\theta+2}$. Jeżeli ciąg $\{x^i\}_{i=1}^\infty$ należy do $X_{k^0,\theta+1}$, to istnieje taki ciąg $\{k^i\}_{i=1}^\infty$, $k^i \in K_{k^0,\theta+1}$, że $x^i \in a(k^i, z(\theta + 1))$. Wówczas:

$$\forall i \left(\eta^i = \begin{pmatrix} k^i \\ z(\theta + 1) \\ x^i \end{pmatrix} \in Z \right).$$

Ciąg $\{\eta^i\}_{i=1}^\infty$ ma podciąg zbieżny w Z . Istotnie, ciąg ten jest ograniczony, ponieważ:

- $k^i \in K_{k^0,\theta+1}$ i zbiór $K_{k^0,\theta+1}$ jest zwarty (z założenia), zatem ciąg $\{k^i\}_{i=1}^\infty$ jest ograniczony,
- jeżeli ciąg $\{x^i\}_{i=1}^\infty$ jest nieograniczony, to zawiera podciąg $\|x^{i_j}\| \rightarrow_j +\infty$.

W świetle warunków **(LG1)**, **(LG6)** prowadzi to do konkluzji, że istnieje proces

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{x} \end{pmatrix} \in Z$, w którym $x \neq 0$, co jest sprzeczne z warunkiem **(LG3)**. Ciąg $\{\eta^i\}_{i=1}^\infty$ ma

więc podciąg $\{\eta^{i_j}\}_{j=1}^\infty$ zbieżny do pewnego wektora $\bar{\eta} = \begin{pmatrix} \bar{k} \\ z(\theta + 1) \\ \bar{x} \end{pmatrix}$ i ponieważ przestrzeń produkcyjna Z jest zbiorem domkniętym w R^{2n+1} , więc $\bar{\eta} \in Z$. Podciąg

$\{x^{ij}\}_{j=1}^{\infty}$ jest wówczas zbieżny do granicy $\bar{x} \in a(\bar{k}, z(\theta + 1)) \subset X_{k^0, \theta+1}$. Tym samym zbiór $X_{k^0, \theta+1}$ jest zwarty.

Dowód zwartości zbioru $I_{k^0, \theta+1}$ przebiega podobnie jak dowód zwartości zbioru $I_{k^0, 0}$. W dowodzie wykorzystuje się zwartość zbiorów $X_{k^0, \theta+1}$, $K_{k^0, \theta+1}$. Zwartość zbioru $C_{k^0, \theta+1}$ wynika bezpośrednio ze zwartości zbiorów $X_{k^0, \theta+1}$, $I_{k^0, \theta+1}$. Zbiór:

$$\begin{aligned} K_{k^0, \theta+2} &= \{k | k = (E - \rho)k(\theta + 1) + \delta i(\theta + 1), \\ &k(\theta + 1) \in K_{k^0, \theta+1}, i(\theta + 1) \in I_{k^0, \theta+1}\} \end{aligned}$$

jest zwarty jako ciągle odwzorowanie zwartego zbioru $K_{k^0, \theta+1} \times I_{k^0, \theta+1} \subset R^{2n}$.

■

6.2. Stacjonarne procesy wzrostu.

Magistrała kapitałowa, produkcyjna i konsumpcyjna

Δ Definicja 6.1. Niech $t_1 = +\infty$. Wówczas (k^0, ∞) – dopuszczalny proces $\{i(t), k(t), x(t), c(t)\}_{t=0}^{\infty}$ (spełniający w okresach $t = 0, 1, 2, \dots$ warunki (6.1)–(6.9)) nazywamy *procesem stacjonarnym* (lub *procesem równomiernego wzrostu*), jeżeli w procesie tym kapitał i produkcja rosną ze stałymi, dodatnimi stopami λ_k oraz λ_x :

$$\begin{aligned} k(t) &= (1 + \lambda_k)^t k^0, \\ x(t) &= (1 + \lambda_x)^t x^0. \end{aligned}$$

Δ

W stacjonarnym procesie stałe są stopy wzrostu nie tylko kapitału i produkcji, ale wszystkich podstawowych zmiennych, czyli kapitału, produkcji, konsumpcji i inwestycji. Mówi o tym poniższy lemat.

■ **Lemat 6.3.** W stacjonarnym procesie stopy wzrostu wszystkich trajektorii (inwestycji, kapitału, produkcji i konsumpcji) są równe stopie wzrostu ludności λ .

Dowód. Weźmy (k^0, ∞) – dopuszczalny proces z trajektoriami kapitału $k(t) = (1 + \lambda_k)^t k^0$ ($\lambda_k > 0$) i produkcji $x(t) = (1 + \lambda_x)^t x^0$ ($\lambda_x > 0$). Wówczas, zgodnie z (6.7):

$$(1 + \lambda_k)k^0 = (E - \rho)k^0 + (1 + \lambda_k)^{-t} \delta i(t), \quad t = 0, 1, \dots$$

Ponieważ $\det \delta \neq 0$, więc w procesie stacjonarnym inwestycje rosną z tą samą stopą co kapitał:

$$i(t) = (1 + \lambda_k)^t i^0,$$

gdzie $i^0 = \delta^{-1}(\lambda E + \rho)k^0 > 0$. Podstawiając $x(t) = (1 + \lambda_x)^t x^0$, $i(t) = (1 + \lambda_k)^t i^0$ do równania bilansowego (6.2), zważywszy na (6.4), otrzymujemy:

$$x^0 - Ax^0 \geq \frac{(1 + \lambda_k)^t}{(1 + \lambda_x)^t} Si^0 + l^0 \frac{(1 + \lambda)^t}{(1 + \lambda_x)^t} \bar{c}, \quad t = 0, 1, \dots$$

Aby dla każdego t zachodziła ta nierówność, musi być spełniony warunek:

$$\lambda_x \geq \max \{\lambda, \lambda_k\}.$$

Zgodnie z (6.1') $\forall t \left(x(t) \in a(k(t), z(t)) \right)$, zatem w świetle twierdzenia 6.1(i) zważywszy na postać trajektorii kapitału i produkcji w procesie stacjonarnym dostajemy:

$$x^0 \in a\left(\frac{(1 + \lambda_k)^t}{(1 + \lambda_x)^t} k^0, \sigma l^0 \frac{(1 + \lambda)^t}{(1 + \lambda_x)^t}\right), \quad t = 0, 1, \dots$$

Założmy, że $\lambda_x > \max \{\lambda, \lambda_k\}$. Wówczas z warunku półciągłości przekształcenia technologicznego wynika, że $0 \neq x^0 \in a(0, 0)$, co jest sprzeczne z twierdzeniem 6.1(3i). Zatem $\lambda_x = \max \{\lambda, \lambda_k\}$. Jeżeli $\lambda \neq \lambda_k$, to albo $0 \neq x^0 \in a(0, \sigma l^0)$, albo $0 \neq x^0 \in a(k^0, 0)$, co w świetle tegoż twierdzenia znowu jest niemożliwe. Tak więc $\lambda_k = \lambda_x = \lambda$, a wtedy z równania bilansowego (6.2) otrzymujemy trajektorię konsumpcji w procesie stacjonarnym:

$$c(t) = (1 + \lambda)^t c^0,$$

gdzie $c^0 = (E - A)x^0 - Si^0 \geq \bar{c}$. ■

W szczególności, jeżeli zachodzi inkluzja:

$$\Omega k^0 + (E - A)^{-1} \bar{c} l^0 \in a(k^0, \sigma l^0), \quad (6.10)$$

gdzie $\Omega = (E - A)^{-1} S \delta^{-1} (\lambda E + \rho)$, wtedy w gospodarce Leontiefa-Gale'a (spełniającej warunki **(LG1)-(LG8)** oraz (6.1)-(6.9)) istnieje stacjonarny proces $\{i(t), k(t), x(t), c(t)\}_{t=0}^{\infty}$:

$$\begin{aligned} i(t) &= (1 + \lambda)^t i^0, \quad k(t) = (1 + \lambda)^t k^0, \\ x(t) &= (1 + \lambda)^t x^0, \quad c(t) = l^0 (1 + \lambda)^t \bar{c}, \\ t &= 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

w którym kapitał, produkcja, inwestycje oraz konsumpcja rosną ze stopą równą stopie wzrostu ludności, z tym że w procesie tym konsumpcja startuje z minimalnego dopuszczalnego pułapu $c(0) = \bar{c}$. Zauważmy, że procesy takie (spełniające warunek (6.10)) są dopuszczalne także w gospodarce z wyższymi sektorowymi wskaźnikami skutkowania inwestycji, niższymi wskaźnikami deprecjacji kapitału lub niższą stopą wzrostu ludności. Istotnie, zastępując w układzie (6.1)-(6.9) diagonalne macierze δ, ρ oraz stopę wzrostu ludności λ macierzami $\tilde{\delta} \geq \delta, \tilde{\rho} \leq \rho$ oraz stopą $\tilde{\lambda} \leq \lambda$ dostajemy:

$$\tilde{\omega} = \tilde{\Omega} k^0 + (E - A)^{-1} \bar{c} l^0 < \Omega k^0 + (E - A)^{-1} \bar{c} l^0,$$

gdzie:

$$\tilde{\Omega} = (E - A)^{-1} S \tilde{\delta}^{-1} (\tilde{\lambda} E + \tilde{\rho}).$$

Z twierdzenia 6.1(**5i**) wynika, że:

$$\tilde{\omega} \in a(k^0, \sigma l^0).$$

Wówczas proces:

$$\{\tilde{i}(t), \tilde{i}(t), \tilde{i}(t), \tilde{i}(t)\}_{t=0}^{t_1},$$

w którym:

$$\begin{aligned} \tilde{i}(t) &= (1 + \tilde{\lambda})^t \tilde{i}^0, \quad \tilde{k}(t) = (1 + \tilde{\lambda})^t k^0, \\ \tilde{x}(t) &= (1 + \tilde{\lambda})^t \tilde{x}^0, \quad \tilde{c}(t) = l^0 (1 + \tilde{\lambda})^t \bar{c}, \end{aligned}$$

$$\tilde{t}^0 = \tilde{\delta}^{-1}(\tilde{\lambda}E + \tilde{\rho})k^0, \quad \tilde{x}^0 = (E - A)^{-1}(S\tilde{t}^0 + \tilde{c}l^0),$$

jest (k^0, t_1) – dopuszczalny. Zwiększenie skuteczności inwestowania oraz obniżenie wskaźników deprecjacji kapitału w sektorach umożliwia w dowolnie długich okresach przynajmniej taki wzrost gospodarki, przy którym nigdy nie nastąpi spadek technicznego uzbrojenia pracy (stosunek wartości kapitału do liczby zatrudnionych) ani spadek konsumpcji *per capita*. W świetle przyjętych założeń wzrost taki jest także możliwy przy niższej stopie wzrostu liczby ludności. Spadek liczby ludności w gospodarce Leontiefa-Gale’a oznacza zmniejszenie zatrudnienia, które pociąga za sobą ograniczenie produkcji i tym samym spadek inwestycji oraz konsumpcji w kolejnych okresach. Wydawałoby się, że jest to zjawisko niekorzystne. Okazuje się, że niekoniecznie – przynajmniej w świetle wyżej wymienionych kryteriów, czyli poziomu technicznego uzbrojenia pracy oraz konsumpcji p.c. Spadek stopy wzrostu ludności oznacza bowiem zarówno mniejsze zapotrzebowanie na inwestycje pozwalające na utrzymanie osiągniętego poziomu technicznego uzbrojenia pracy, jak i mniejsze potrzeby konsumpcyjne. W gospodarce przekłada się to na ograniczenie popytu na produkcję sektorów, co sprawia, że nawet przy niższym tempie wzrostu produkcji możliwe jest osiągnięcie nie gorszych wskaźników technicznego uzbrojenia pracy oraz konsumpcji p.c.

Warunek (6.10) jest *de facto* dostatecznym warunkiem istnienia (k^0, t_1) – dopuszczalnego procesu w gospodarce Leontiefa-Walrasa, a więc niesprzeczności układu (6.1)-(6.9). Dalej zakładamy, że w gospodarce Leontiefa-Gale’a istnieją procesy stacjonarne.

Niech $u: R_+^n \rightarrow R_+^1$ będzie standardową ciągłą, wklęsłą i rosnącą funkcją użyteczności. Weźmy dowolny okres czasu $t \geq 0$ i rozpatrzmy następujące zadanie:

$$\max u\left(\frac{1}{l(t)}c(t)\right) \quad (6.11)$$

przy ograniczeniach:

$$x(\theta) \in a(k(\theta), z(\theta)),$$

$$\begin{aligned}
x(\theta) &= Ax(\theta) + Si(\theta) + c(\theta), \\
k(\theta + 1) &= (E - \rho)k(\theta) + \delta i(\theta), \\
c(\theta) &\geq l(\theta)\bar{c}, \\
z(\theta) &= \sigma l^0(1 + \lambda)^\theta, \\
l(\theta) &= l^0(1 + \lambda)^\theta, \\
x(\theta) &= (1 + \lambda)^\theta x^0, \\
k(\theta) &= (1 + \lambda)^\theta k^0, \\
i(\theta) &= (1 + \lambda)^\theta i^0, \\
c(\theta) &= l^0(1 + \lambda)^\theta c^0, \\
\theta &= 0, 1, \dots, t, \dots, \\
k(0) &= k^0 \geq 0.
\end{aligned} \tag{6.12}$$

Jest to zadanie maksymalizacji użyteczności konsumpcji p.c. w okresie t na zbiorze (wiązce) wszystkich procesów stacjonarnych, z dowolnym początkowym zasobem kapitału $k(0) \geq 0$. Łatwo zauważyć, że z uwagi na definicję/postać poszczególnych trajektorii w procesie stacjonarnym oraz własność **(LG1)** przekształcenia technologicznego (twierdzenie 6.1 **(i)**) zadanie to jest równoważne z zadaniem:

$$\max u\left(\frac{c^0}{l^0}\right) \tag{6.11'}$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{aligned}
x(0) &\in a(k^0, \sigma l^0), \\
x^0 &= Ax^0 + Si^0 + c^0, \\
(1 + \lambda)k^0 &= (E - \rho)k^0 + \delta i^0, \\
c^0 &\geq l^0\bar{c}, \\
k^0 &\geq 0.
\end{aligned} \tag{6.12'}$$

W obu zadaniach wektory i^0, k^0, x^0, c^0 są zmiennymi; l^0 jest daną liczbą dodatnią. Równoważność zadań oznacza, że:

- jeżeli proces $\{\bar{l}(\theta), \bar{k}(\theta), \bar{x}(\theta), \bar{c}(\theta)\}_{\theta=0}^t$ jest rozwiązaniem zadania (6.11), (6.12), to czwórka $\{\bar{l}^0, \bar{k}^0, \bar{x}^0, \bar{c}^0\}$ jest rozwiązaniem zadania (6.11'), (6.12'),
- jeżeli czwórka wektorów $\{\bar{l}^0, \bar{k}^0, \bar{x}^0, \bar{c}^0\}$ jest rozwiązaniem zadania (6.11'), (6.12'), to proces $\{\bar{l}(\theta), \bar{k}(\theta), \bar{x}(\theta), \bar{c}(\theta)\}_{\theta=0}^t$, w którym:

$$\begin{aligned}\bar{l}(\theta) &= (1 + \lambda)^\theta \bar{l}^0, \quad \bar{k}(\theta) = (1 + \lambda)^\theta \bar{k}^0, \\ \bar{x}(\theta) &= (1 + \lambda)^\theta \bar{x}^0, \quad \bar{c}(\theta) = l^0 (1 + \lambda)^\theta \bar{c}^0\end{aligned}$$

jest rozwiązaniem wyjściowego zadania (6.11), (6.12). Wobec **(LG8)** układ (6.12') jest równoważny z następującym:

$$\begin{aligned}(E - A)^{-1}c^0 &\in \{a(k^0, \sigma l^0) - \Omega k^0\}, \\ c^0 &\geq l^0 \bar{c}, \quad k^0 \geq 0,\end{aligned}$$

gdzie $\Omega = (E - A)^{-1}S\delta^{-1}(\lambda E + \rho)$. Po wprowadzeniu oznaczeń $\gamma = \frac{1}{l^0}c^0$, $\kappa = \frac{1}{\sigma l^0}k^0$ zadanie (6.11'), (6.12') można zapisać w następującej równoważnej postaci:

$$\max u(\gamma) \tag{6.13}$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{aligned}(E - A)^{-1}\gamma &\in \sigma\{a(\kappa, 1) - \Omega\kappa\}, \\ \gamma &\geq \bar{c}, \quad \kappa \geq 0,\end{aligned} \tag{6.14}$$

gdzie $\Omega = (E - A)^{-1}S\delta^{-1}(\lambda E + \rho)$.

Oznaczmy przez K, Γ odpowiednio zbiory wszystkich wektorów κ, γ spełniających warunki (6.14):

$$K = \{\kappa \geq 0 \mid (E - A)^{-1}\gamma \in \sigma\{a(\kappa, 1) - \Omega\kappa\} \text{ dla pewnego } \gamma \geq \bar{c}\}, \tag{6.15}$$

$$\Gamma = \{\gamma \geq \bar{c} \mid (E - A)^{-1}\gamma \in \sigma\{a(\kappa, 1) - \Omega\kappa\} \text{ dla pewnego } \kappa \geq 0\} \tag{6.16}$$

oraz przez Ξ zbiór odpowiadających im wektorów $\xi = \frac{1}{\sigma l^0}x^0$ (produkcji na jednego zatrudnionego):

$$\Xi = \{\xi \in a(\kappa, 1) \mid \xi = A\xi + S\delta^{-1}(\lambda E + \rho)\kappa + \sigma^{-1}\gamma \text{ dla pewnych } \kappa \in K, \gamma \in \Gamma\}. \quad (6.17)$$

Niech ponadto:

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma} &= \left\{ \bar{\gamma} \mid \bar{\gamma} = \arg \max_{\gamma \in \Gamma} u(\gamma) \right\}, \\ \bar{K} &= \{ \bar{\kappa} \in K \mid (E - A)^{-1} \bar{\gamma} \in \sigma\{a(\bar{\kappa}, 1) - \Omega \bar{\kappa}\} \text{ dla pewnego } \bar{\gamma} \in \bar{\Gamma} \}, \\ \bar{\Xi} &= \{ \bar{\xi} \in \Xi \mid \bar{\xi} \in a(\bar{\kappa}, 1), \bar{\xi} = A\bar{\xi} + S\delta^{-1}(\lambda E + \rho)\bar{\kappa} + \sigma^{-1} \bar{\gamma} \\ &\quad \text{dla pewnych } \bar{\kappa} \in \bar{K}, \bar{\gamma} \in \bar{\Gamma} \} \end{aligned}$$

oraz:

$$\Gamma_{k^0, t} = \left\{ \gamma \mid \gamma = \frac{1}{l^0} (1 + \lambda)^{-t} c \text{ dla pewnego } c \in C_{k^0, t} \right\},$$

gdzie $C_{k^0, t}$ jest zbiorem wektorów konsumpcji w okresie t we wszystkich (k^0, t) – dopuszczalnych procesach wzrostu (zob. lemat 6.2).

■ **Lemat 6.4.** Przy przyjętych założeniach zbiory $K, \bar{K}, \Xi, \bar{\Xi}$ oraz $\Gamma, \bar{\Gamma}$ są zwarte i wypukłe. Ponadto $\forall t \geq 0 (\Gamma_{k^0, t} \subseteq \Gamma)$.

Dowód. Pokażemy najpierw, że $\forall t$ zbiory $\Gamma_{k^0, t}$ zawierają się w Γ . Niech $\gamma \in \Gamma_{k^0, t}$. Istnieje więc taki (k^0, t) – dopuszczalny proces $\{i(\theta), k(\theta), x(\theta), c(\theta)\}_{\theta=0}^t$, że dla $\theta = 0, 1, \dots, t$:

$$\begin{aligned} x(\theta) &\in a(k(\theta), z(\theta)), \\ x(\theta) &= Ax(\theta) + Si(\theta) + c(\theta), \\ k(\theta + 1) &= (E - \rho)k(\theta) + \delta i(\theta), \\ \Delta k(\theta) &\geq \lambda k(\theta), \\ c(\theta) &\geq l(\theta) \bar{c}, \\ z(\theta) &= \sigma l^0 (1 + \lambda)^\theta, \\ l(\theta) &= l^0 (1 + \lambda)^\theta, \\ k(0) &= k^0 > 0 \end{aligned}$$

oraz:

$$\frac{1}{l^0}(1+\lambda)^{-t}c(t) = \gamma.$$

Weźmy:

$$\tilde{i}(t) = \delta^{-1}(\lambda E + \rho)k(t) \quad (\leq i(t)),$$

$$\tilde{x}(t) = (E - A)^{-1}(S\tilde{i}(t) + c(t)) \quad (\leq x(t)).$$

Przy tym poziomie inwestycji $\tilde{i}(t)$ w okresie t kapitał w okresie następnym rośnie ze stopą λ , $k(t+1) = (1+\lambda)k(t)$. Zważywszy na własności **(i)**, **(5i)** przekształcenia technologicznego $a(\cdot)$ (twierdzenie 6.1) proces $\{\hat{i}(\theta), \hat{k}(\theta), \hat{x}(\theta), \hat{c}(\theta)\}_{\theta=0}^t$, w którym:

$$\hat{i}(\theta) = (1+\lambda)^\theta \hat{i}^0, \quad \hat{k}(\theta) = (1+\lambda)^\theta \hat{k}^0,$$

$$\hat{x}(\theta) = (1+\lambda)^\theta \hat{x}^0, \quad \hat{c}(\theta) = l^0(1+\lambda)^\theta \hat{c}^0,$$

jest procesem stacjonarnym z odpowiadającą mu trajektorią konsumpcji p.c. $\{\hat{\gamma}(\theta)\}_{\theta=0}^t$:

$$\hat{\gamma}(\theta) = \frac{1}{l^0}(1+\lambda)^{-t}\hat{c}(\theta), \quad \theta = 0, 1, \dots, t,$$

jeśli tylko weźmiemy:

$$\hat{i}^0 = (1+\lambda)^{-t}\tilde{i}(t), \quad \hat{k}^0 = (1+\lambda)^{-t}k(t),$$

$$\hat{x}^0 = (1+\lambda)^{-t}\tilde{x}(t), \quad \hat{c}^0 = (1+\lambda)^{-t}c(t).$$

Zatem $\gamma \in \Gamma$.

Dowód zwartości i wypukłości zbioru Γ przebiega podobnie jak dowód podobnych własności zbioru $a(k, z)$ w twierdzeniu 6.1**(7i)**. Zwartość zbioru $\bar{\Gamma}$ wynika ze zwartości zbioru Γ i ciągłości funkcji użyteczności $u(\cdot)$. Zbiór $\bar{\Gamma}$ jest ponadto wypukły, ponieważ zbiór Γ jest wypukły, a funkcja użyteczności wklęsła.

Wykażemy teraz, że zbiory $K, \bar{K}, \Xi, \bar{\Xi}$ są zwarte (ograniczone i domknięte) oraz wypukłe. Załóżmy, że zbiór K jest nieograniczony, tzn. zawiera ciąg $\{\kappa^i\}_{i=1}^\infty, \|\kappa^i\| \rightarrow \infty$ odpowiadający pewnemu ciągowi $\{\gamma^i\}_{i=1}^\infty$ w zwartym zbiorze Γ .

Wówczas:

$$\sigma^{-1}(E - A)^{-1}d^i + \Omega g^i \in a\left(g^i, \frac{1}{\|\kappa^i\|}\right),$$

gdzie $d^i = \frac{1}{\|\kappa^i\|} \gamma^i \rightarrow 0$, $g^i = \frac{1}{\|\kappa^i\|} \kappa^i$, $\Omega = (E - A)^{-1} S \delta^{-1} (\lambda E + \rho)$ oraz istnieje podciąg $\{g^{i_j}\}_{j=1}^{\infty}$ zbieżny do pewnej granicy $\bar{g} \neq 0$. Z półciągłości przekształcenia technologicznego $a(\cdot)$, wobec tego, że $\Omega > 0$, wynika, że:

$$0 \neq \Omega \bar{g} \in a(\bar{g}, 0), \quad (6.18)$$

co przeczy twierdzeniu 6.1(3i). Domkniętość i wypukłość zbioru K wynika bezpośrednio ze zwartości zbioru Γ oraz wypukłości i półciągłości przekształcenia technologicznego. Dowód zwartości i wypukłości zbioru $\bar{K}$ przebiega podobnie.

Niech:

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} \kappa \\ \gamma \end{pmatrix} \mid (E - A)^{-1} \gamma \in \sigma\{a(\kappa, 1) - \Omega \kappa\}, \gamma \geq \bar{c}, \kappa \geq 0 \right\}.$$

Wówczas z bilansu produkcji i równania dynamiki kapitału wynika, że:

$$\Xi = \left\{ \xi \mid \xi = \Omega \kappa + \sigma^{-1}(E - A)^{-1} \gamma; \begin{pmatrix} \kappa \\ \gamma \end{pmatrix} \in N \right\}.$$

Zbiór N jest zwarty i wypukły. Dowód wypukłości jest prosty (wystarczy skorzystać z póładdytywności i dodatniej jednorodności przekształcenia technologicznego). Pokażemy, że zbiór jest także ograniczony i domknięty.

Niech $\eta^i = \begin{pmatrix} \kappa^i \\ \gamma^i \end{pmatrix} \in N$, $i = 1, 2, \dots$, oraz $\|\eta^i\| \rightarrow_i \infty$. Zatem albo $\|\kappa^{i_j}\| \rightarrow_j + \infty$ dla pewnego podciągu $\{\kappa^{i_j}\}_{j=1}^{\infty}$, albo $\|\gamma^{i_k}\| \rightarrow_k + \infty$ dla pewnego podciągu $\{\gamma^{i_k}\}_{k=1}^{\infty}$ (albo zachodzi jedno i drugie). Załóżmy, że $\|\kappa^{i_j}\| \rightarrow_j + \infty$. Wtedy z warunku $0 < \Omega \kappa^{i_j} \in a(\kappa^{i_j}, 1)$ i własności przekształcenia technologicznego wynika, że istnieje taki wektor $\bar{g} \neq 0$, iż zachodzi (6.18), co jest niemożliwe (sprzeczne z twierdzeniem 6.1(3i)). Analogicznie dowodzi się, że ograniczony jest także ciąg

$\{\gamma^i\}_{i=1}^{\infty}$. Zbiór N jest zatem ograniczony. Załóżmy teraz, że ciąg $\eta^i = \begin{pmatrix} \kappa^i \\ \gamma^i \end{pmatrix} \in N$, $i = 1, 2, \dots$, jest zbieżny do granicy $\bar{\eta} = \begin{pmatrix} \bar{\kappa} \\ \bar{\gamma} \end{pmatrix}$. Wówczas $\bar{\gamma} \geq \bar{c}$, $\bar{\kappa} \geq 0$ oraz:

$$\forall i \left((\sigma(E - A)^{-1} \gamma^i + \Omega k^i) \in a(\kappa^i, 1) \right).$$

Stąd oraz z półciągłości odwzorowania $a(\cdot)$ wynika, że:

$$(E - A)^{-1} \bar{\gamma} \in \sigma\{a(\bar{\kappa}, 1) - \Omega \bar{\kappa}\},$$

zatem $\bar{\eta} = \begin{pmatrix} \bar{\kappa} \\ \bar{\gamma} \end{pmatrix} \in N$. Zbiór N jest domknięty. Wówczas zbiór Ξ jest zwarty i wypukły jako liniowe odwzorowanie zwartego i wypukłego zbioru N . Podobnie zbiór $\bar{\Xi}$ jest zwarty i wypukły jako liniowe odwzorowanie zwartego i wypukłego zbioru $\bar{N}$ par $\begin{pmatrix} \bar{\kappa} \\ \bar{\gamma} \end{pmatrix}$ tworzących rozwiązanie zadania (6.13)-(6.14), co zamyka dowód. ■

Stacjonarne procesy $\{\bar{l}(t), \bar{k}(t), \bar{x}(t), \bar{c}(t)\}_{t=0}^{\infty}$, w których:

$$\bar{\kappa}(t) = \frac{1}{\sigma l(t)} \bar{k}(t) = \bar{\kappa} \in \bar{K},$$

$$\bar{\xi}(t) = \frac{1}{\sigma l(t)} \bar{x}(t) = \bar{\xi} \in \bar{\Xi},$$

$$\bar{\gamma}(t) = \frac{1}{l(t)} \bar{c}(t) = \bar{\gamma} \in \bar{\Gamma}$$

nazywamy *optymalnymi stacjonarnymi procesami wzrostu w gospodarce Leontiefa-Gale'a*.

Δ **Definicja 6.2.** Promienie:

$$N_{\bar{\kappa}} = \{\lambda \bar{\kappa} | \lambda > 0\}, N_{\bar{\xi}} = \{\lambda \bar{\xi} | \lambda > 0\}, N_{\bar{\gamma}} = \{\lambda \bar{\gamma} | \lambda > 0\},$$

gdzie $\bar{\kappa} \in \bar{K}$, $\bar{\xi} \in \bar{\Xi}$, $\bar{\gamma} \in \bar{\Gamma}$, nazywamy *magistralami (kapitałową, produkcyjną, konsumpcyjną)*. Zbiory:

$$N_{\bar{K}} = \bigcup_{\kappa \in \bar{K}} N_{\kappa}, N_{\bar{\Xi}} = \bigcup_{\xi \in \bar{\Xi}} N_{\xi}, N_{\bar{\Gamma}} = \bigcup_{\gamma \in \bar{\Gamma}} N_{\gamma}$$

nazywamy *wielopasmowymi magistralami w gospodarce Leontiefa-Gale'a* (odpowiednio: kapitałową, produkcyjną i konsumpcyjną). Δ

Wszystkie trajektorie kapitału, produkcji i konsumpcji w optymalnych stacjonarnych procesach leżą na (biegną po) swoich magistralach.

6.3. Optymalne procesy wzrostu. 'Słaby' efekt magistrali

Ustalmy horyzont $T = \{0, 1, \dots, t_1\}$ ($t_1 < +\infty$) i rozpatrzmy następujące zadanie maksymalizacji standardowej ciągłej, wklęsłej, rosnącej funkcji użyteczności konsumpcji na zbiorze wszystkich (k^0, t_1) – dopuszczalnych procesów wzrostu:

$$\max_{\sum_{t=0}^{t_1} u\left(\frac{1}{l(t)}c(t)\right)} \quad \text{p.w. (6.1)-(6.9)} \quad (6.19)$$

(początkowy wektor kapitału $k^0 > 0$ dany).

Przy przyjętych założeniach zadanie to ma rozwiązanie. Mówi o tym poniższe twierdzenie.

■ **Twierdzenie 6.2.** Jeżeli zachodzą warunki **(LG1)-(LG8)** oraz funkcja użyteczności jest ciągłą, to $\forall t_1 < +\infty$ zadanie (6.19) ma rozwiązanie.

Dowód. Oznaczmy przez $C_{k^0, T}$ zbiór (wiązkę) trajektorii konsumpcji we wszystkich (k^0, t_1) – dopuszczalnych procesach wzrostu (spełniających warunki (6.1)-(6.9)). Elementy zbioru $C_{k^0, T}$ (ciągi) oznaczamy przez $c_T = \{c(t)\}_{t=0}^{t_1}$. Niech $\|c_T^1 - c_T^2\| = \sum_{t=0}^{t_1} \|c^1(t) - c^2(t)\|$ będzie miarą odległości między elementami zbioru. Jeżeli $c_T \in C_{k^0, T}$, to $\forall t \in T (c(t) \in C_{k^0, t})$. Weźmy ciąg $\{c_T^i\}_{i=1}^{\infty}$, $c_T^i \in C_{k^0, T}$, $i = 1, 2, \dots$. Wówczas $\forall t \forall i (c^i(t) \in C_{k^0, t})$. Ponieważ zbiory $C_{k^0, t}$ są zwarte, $C_{k^0, T} \subseteq C_{k^0, 0} \times C_{k^0, 1} \times \dots \times C_{k^0, t_1}$ oraz $t_1 < +\infty$, więc istnieje podciąg

$\{c_T^{i_j}\}_{j=1}^\infty$ ciągu $\{c_T^i\}_{i=1}^\infty$ zbieżny do granicy $\bar{c}_T = \{\bar{c}(t)\}_{t=0}^{t_1} \in C_{k^0, T}$. Zbiór trajektorii konsumpcji $C_{k^0, T}$ jest więc zwarty, a zatem (6.19) jest zadaniem maksymalizacji ciągłej funkcji na zwartym zbiorze $C_{k^0, T}$ wszystkich (k^0, t_1) – dopuszczalnych trajektorii konsumpcji, które zgodnie z twierdzeniem Weierstrassa ma rozwiązanie $c_T^* = \{c^*(t)\}_{t=0}^{t_1} \in C_{k^0, T}$. Istnieją zatem także trajektorie inwestycji $\{i^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$, kapitału $\{k^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ i produkcji $\{x^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$, które łącznie z trajektorią konsumpcji $\{c^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ tworzą rozwiązanie zadania (6.19). ■

Rozwiązanie $\{i^*(t), k^*(t), x^*(t), c^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ zadania (6.19) nazywamy $(k^0, T, u(\cdot))$ – *optymalnym procesem wzrostu w gospodarce Leontiefa-Gale’a*. Ciągi $\{i^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$, $\{k^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$, $\{x^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$, $\{c^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ nazywamy *optymalną trajektorią inwestycji, kapitału, produkcji oraz konsumpcji*.

Przyjmijmy następującą miarę $d(\cdot)$ odległości wektora $z \in R^n$ od (zwartego) zbioru $Z \subset R^n$:

$$d(z, Z) = \min_{z' \in Z} \|z - z'\|.$$

■ **Twierdzenie 6.3. ('Słabe' twierdzenie o magistrali)** Przyjmijmy oznaczenia:

$$\kappa^*(t) = \frac{1}{\sigma l(t)} k^*(t), \quad \xi^*(t) = \frac{1}{\sigma l(t)} x^*(t), \quad \gamma^*(t) = \frac{1}{l(t)} c^*(t).$$

Jeżeli:

- zachodzą warunki (LG1)-(LG8),
- proces $\{i^*(t), k^*(t), x^*(t), c^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ jest rozwiązaniem zadania (6.19),
- istnieje $(k^0, \check{t})$ – dopuszczalny proces wzrostu $\{i(t), k(t), x(t), c(t)\}_{t=0}^{\check{t}}$, który w okresie $\check{t} < t_1$ prowadzi do wielopasmowej magistrali $N_{\bar{\Gamma}}$, tj. $\gamma(\check{t}) = \frac{1}{l(\check{t})} c(\check{t}) \in \bar{\Gamma}$, to $\forall \varepsilon > 0$ istnieje taka liczba naturalna k_ε , że liczba okresów czasu, w których ma miejsce choćby jedna z nierówności:

$$d(\kappa^*(t), \bar{K}) \geq \varepsilon, d(\xi^*(t), \bar{\Xi}) \geq \varepsilon, d(\gamma^*(t), \bar{\Gamma}) \geq \varepsilon, \quad (6.20)$$

nie przekracza k_ε . Liczba k_ε nie zależy od t_1 .

Dowód. Weźmy liczbę $\varepsilon > 0$. Przy przyjętych założeniach zbiory:

$$\bar{K}(\varepsilon) = \{\kappa \in K | d(\kappa, \bar{K}) \geq \varepsilon\},$$

$$\bar{\Xi}(\varepsilon) = \{\xi \in \Xi | d(\xi, \bar{\Xi}) \geq \varepsilon\},$$

$$\bar{\Gamma}(\varepsilon) = \{\gamma \in \Gamma | d(\gamma, \bar{\Gamma}) \geq \varepsilon\}$$

są zwarte jako domknięte podzbiory zwartych zbiorów K, Ξ, Γ . Istnieją zatem takie dodatnie liczby ε_i , że $\bar{u}_i < \bar{u} - \varepsilon_i$, $i = 1, 2, 3$, gdzie:

$$\bar{u} = \max_{\gamma \in \Gamma} u(\gamma) > 0, \bar{u}_1 = \max_{\gamma \in \bar{\Gamma}(\varepsilon)} u(\gamma), \bar{u}_2 = \max_{\gamma \in \bar{\Gamma} \& \kappa \in \bar{K}(\varepsilon)} u(\gamma), \bar{u}_3 = \max_{\gamma \in \bar{\Gamma} \& \xi \in \bar{\Xi}(\varepsilon)} u(\gamma).$$

Niech $\varepsilon' = \min_i \varepsilon_i > 0$. Z założenia istnieje $(k^0, \check{t})$ – dopuszczalny proces wzrostu $\{i(t), k(t), x(t), c(t)\}_{t=0}^{\check{t}}$, w którym trajektoria konsumpcji $\{c(t)\}_{t=0}^{\check{t}}$ prowadzi w okresie $\check{t} < t_1$ do wielopasmowej magistrali $\bar{N}_{\bar{\Gamma}}$, $\gamma(\check{t}) = \frac{1}{l(\check{t})} c(\check{t}) = \bar{\gamma} \in \bar{\Gamma}$. Odpowiadające jej trajektorie kapitału $\{k(t)\}_{t=0}^{\check{t}}$ i produkcji $\{x(t)\}_{t=0}^{\check{t}}$ spełniają warunek $\kappa(\check{t}) = \frac{1}{\sigma l(\check{t})} k(\check{t}) = \bar{\kappa} \in \bar{K}$, $\xi(\check{t}) = \frac{1}{\sigma l(\check{t})} x(\check{t}) = \bar{\xi} \in \bar{\Xi}$, a wówczas (k^0, t_1) – dopuszczalny jest następujący proces wzrostu $\{\tilde{i}(t), \tilde{k}(t), \tilde{x}(t), \tilde{c}(t)\}_{t=0}^{\check{t}}$:

$$\tilde{i}(t) = \begin{cases} i(t), & t = 0, 1, \dots, \check{t}, \\ (1 + \lambda)^{t-\check{t}} i(\check{t}), & t = \check{t} + 1, \dots, t_1, \end{cases}$$

$$\tilde{k}(t) = \begin{cases} k(t), & t = 0, 1, \dots, \check{t}, \\ (1 + \lambda)^{t-\check{t}} k(\check{t}), & t = \check{t} + 1, \dots, t_1, \end{cases}$$

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} x(t), & t = 0, 1, \dots, \check{t}, \\ (1 + \lambda)^{t-\check{t}} x(\check{t}), & t = \check{t} + 1, \dots, t_1, \end{cases}$$

$$\tilde{c}(t) = \begin{cases} c(t), & t = 0, 1, \dots, \check{t}, \\ (1 + \lambda)^{t-\check{t}} c(\check{t}), & t = \check{t} + 1, \dots, t_1. \end{cases}$$

Założmy, że w okresach $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_k$ zachodzi którakolwiek z nierówności (6.20). Ponieważ funkcja użyteczności jest nieujemna oraz $\Gamma_{k^0,t} \subseteq \Gamma$, więc:

$$(t_1 - \check{t})\bar{u} \leq \sum_{t=0}^{t_1} u(\gamma^*(t)) \leq (t_1 + 1 - \check{t})\bar{u} + k(\bar{u} - \varepsilon'),$$

czyli $k \leq (\check{t} + 2) \frac{\bar{u}}{\varepsilon'} = A$. W celu zakończenia dowodu wystarczy w charakterze liczby k_ε wziąć najmniejszą liczbę naturalną większą od A . ■

Uwaga 1. Gdy w szczególności $\Gamma_{k^0,0} \cap \bar{\Gamma} \neq \emptyset$ (czyli $\kappa(0) = \frac{1}{\sigma l^0} k^0 = \bar{\kappa} \in \bar{K}$), wtedy łatwo zauważyć, że istnieje rozwiązanie zadania (6.19), w którym trajektoria konsumpcji $c^*(t) = l^0(1 + \lambda)^t \bar{\gamma}$, gdzie $\bar{\gamma} \in \bar{\Gamma}$. Innymi słowy, jeżeli $\Gamma_{k^0,0} \cap \bar{\Gamma} \neq \emptyset$, to optymalna trajektoria konsumpcji leży zawsze na magistrali niezależnie od długości horyzontu T . Wtedy na odpowiednich magistralach leżą także tworzące optymalny proces trajektorie kapitału i produkcji. Jeżeli natomiast $\Gamma_{k^0,0} \cap \bar{\Gamma} = \emptyset$, to optymalne trajektorie kapitału, produkcji konsumpcji zbliżają się do swoich magistral w sposób przedstawiony w twierdzeniu. Dowód twierdzenia jest konstruktywny i umożliwia empiryczne wyznaczenie magistrali po skonkretyzowaniu postaci funkcji użyteczności oraz przekształcenia technologicznego.

Uwaga 2. Twierdzenie pozostaje prawdziwe także gdy w okresie $\check{t} < t_1$ w pewnym $(k^0, \check{t})$ – dopuszczalnym procesie $\{i(t), k(t), x(t), c(t)\}_{t=0}^{\check{t}}$ do magistrali prowadzi którakolwiek z trajektorii kapitału $\{k(t)\}_{t=0}^{\check{t}}$ lub produkcji $\{x(t)\}_{t=0}^{\check{t}}$, tj. gdy warunek $\gamma(\check{t}) = \frac{1}{l(\check{t})} c(\check{t}) \in \bar{\Gamma}$ zastąpimy jednym z warunków:

$$\kappa(\check{t}) = \frac{1}{\sigma l(\check{t})} k(\check{t}) \in \bar{K}, \xi(\check{t}) = \frac{1}{\sigma l(\check{t})} x(\check{t}) \in \bar{E}.$$

Uwaga 3. Twierdzenie pozostaje prawdziwe również gdy zadanie (6.19) zastąpimy następującym zadaniem maksymalizacji zdyskontowanej użyteczności konsumpcji w horyzoncie T (ze stopą dyskonta $\nu \in (0,1)$):

$$\max \sum_{t=0}^{t_1} (1 - \nu)^t u\left(\frac{1}{l(t)} c(t)\right)$$

p.w. (6.1)-(6.9).

6.4. 'Bardzo silny' efekt magistrali

W kolejnym twierdzeniu skoncentrujemy się na szczególnej wersji gospodarki Leontiefa-Gale'a, mianowicie z pojedynczą magistralą kapitałową, produkcyjną i konsumpcyjną. W tym celu, aby zapewnić jednoznaczność magistrali, warunek **(LG2)** zastąpimy silniejszym warunkiem:

$$(\mathbf{LG2'}) \quad \forall k^1, k^2 \geq 0 \quad \forall z^1, z^2 \geq 0 \quad (a(k^1 + k^2, z^1 + z^2) \supseteq a(k^1, z^1) + a(k^2, z^2)).$$

Ponadto, jeżeli:

$$k^i \geq 0, z^i > 0 \quad (i = 1, 2), \quad \frac{1}{z^1} k^1 \neq \frac{1}{z^2} k^2, \quad x^1 \in a(k^1, z^1), \quad x^2 \in a(k^2, z^2),$$

to:

$$\begin{aligned} \forall \alpha, \beta > 0 (\alpha + \beta = 1) \exists x \in a(\alpha k^1 + \beta k^2, \alpha z^1 + \beta z^2) \\ (x \neq \alpha x^1 + \beta x^2 \text{ \& } (E - A)x \geq (E - A)(\alpha x^1 + \beta x^2)) \end{aligned}$$

(prawo korzyści skali dla kombinacji czynników o różnej strukturze).

Pozostałe warunki nie zmieniają się. Jeżeli zachodzą warunki **(LG1)**, **(LG2')**, **(LG3)**-**(LG8)**, to podobnie jak dotąd $\forall k \geq 0 \quad \forall z \geq 0$ zbiory wektorów produkcji $a(k, z)$ są zwarte oraz wypukłe (twierdzenie 6.1). O funkcji użyteczności $u(\cdot)$ zakładamy, że jest ciągła, rosnąca i silnie wklęsła.

Pokażemy, że przy tak zmodyfikowanych założeniach rozwiązanie zadania (6.13)-(6.14) jest jednoznaczne (istnieje dokładnie jeden optymalny stacjonarny proces wzrostu).

■ **Lemat 6.5.** Jeżeli zachodzą warunki **(LG1)**, **(LG2')**, **(LG3)**-**(LG9)** oraz funkcja użyteczności $u(\cdot)$ jest ciągła, rosnąca i silnie wklęsła, to rozwiązanie zadania (6.13)-(6.14) istnieje i jest jednoznaczne.

Dowód. W zadaniu (6.13)-(6.14) poszukujemy maksimum ciągłej funkcji na zwartym i wypukłym zbiorze:

$$\Gamma = \{\gamma \geq \bar{c}[(E - A)^{-1}\gamma \in \sigma[a(\kappa, 1) - \Omega\kappa] \text{ dla pewnego } \kappa \geq 0\}$$

(lemat 6.4). Zgodnie z twierdzeniem Weierstrassa ma ono rozwiązanie $\bar{\kappa}, \bar{\gamma}$. Pokażemy, że rozwiązanie jest jednoznaczne. Załóżmy, że istnieją dwa różne wektory

$\bar{\gamma}^1, \bar{\gamma}^2$ będące rozwiązaniami zadania (6.13)-(6.14). Wówczas $\bar{\gamma}^1, \bar{\gamma}^2 \in \bar{\Gamma} \subseteq \Gamma$. Wobec tego, że zbiór Γ jest wypukły oraz funkcja użyteczności silnie wklęsła, dochodzimy do sprzeczności:

$\exists \alpha, \beta > 0 (\alpha + \beta = 1 \Rightarrow \bar{\gamma} = \alpha \bar{\gamma}^1 + \beta \bar{\gamma}^2 \in \Gamma \text{ \& } \bar{u} = u(\bar{\gamma}) > \alpha u(\bar{\gamma}^1) + \beta u(\bar{\gamma}^2) = \bar{u})$,
co jest niemożliwe. Zatem:

$$\exists! \bar{\gamma} \in \Gamma \left(u(\bar{\gamma}) = \max_{\gamma \in \Gamma} u(\gamma) > 0 \right).$$

Zbiór $\bar{\Gamma}$ jest jednoelementowy. Załóżmy teraz, że istnieją dwa różne wektory $\bar{\kappa}^1, \bar{\kappa}^2 \in \bar{K} \subseteq K$ tworzące wraz wektorem $\bar{\gamma}$ rozwiązanie zadania (6.13)-(6.14). Weźmy dowolne dodatnie liczby α, β o sumie równej 1. Własności (i), (2i) przekształcenia technologicznego $a(\cdot)$, o których mowa w twierdzeniu 6.1, oraz inkluzja:

$$(E - 1)^{-1} \bar{\gamma} \in \sigma\{a(\bar{\kappa}^i, 1) - \Omega \bar{\kappa}^i\}, \quad i = 1, 2$$

(zob. (6.14)) prowadzą do wniosku, że:

$$\begin{aligned} \exists \tilde{\gamma} \in \Gamma ((E - 1)^{-1} \tilde{\gamma} \geq (E - 1)^{-1} \bar{\gamma} \text{ \& } (E - 1)^{-1} \tilde{\gamma} \in \\ \in \sigma\{a(\alpha \bar{\kappa}^1 + \beta \bar{\kappa}^2) - \Omega(\alpha \bar{\kappa}^1 + \beta \bar{\kappa}^2)\}) \end{aligned}$$

($\tilde{\gamma} \neq \bar{\gamma}$). Wówczas, wobec (LG8), $\tilde{\gamma} \geq \bar{\gamma}$. Z monotoniczności funkcji użyteczności dostajemy $u(\tilde{\gamma}) > u(\bar{\gamma})$, co jest niemożliwe. Zbiór $\bar{K}$ jest więc jednoelementowy. Jednoznaczność wektora $\bar{\xi}$ w optymalnym stacjonarnym procesie wynika z jednoznaczności odwzorowania:

$$\bar{\xi} = \Omega \bar{\kappa} + \sigma^{-1}(E - A)^{-1} \bar{\gamma}.$$

■

Trójkę $\{\bar{\kappa}, \bar{\xi}, \bar{\gamma}\}$ nazywamy **złotym trypletem**. Ciąg $\{\bar{l}(t), \bar{k}(t), \bar{x}(t), \bar{c}(t)\}_{t=0}^{\infty}$,
w którym:

$$\bar{k}(t) = z(t)\bar{\kappa}, \quad \bar{x}(t) = z(t)\bar{\xi}, \quad \bar{c}(t) = l(t)\bar{\gamma},$$

gdzie $l(t) = l^0(1 + \lambda)^t$, $z(t) = \sigma l(t)$ tworzy optymalny stacjonarny proces wzrostu biegnący po magistrali. Promienie:

$$N_{\bar{\kappa}} = \{\lambda \bar{\kappa} | \lambda > 0\}, N_{\bar{\xi}} = \{\lambda \bar{\xi} | \lambda > 0\}, N_{\bar{\gamma}} = \{\lambda \bar{\gamma} | \lambda > 0\}$$

wyznaczają pojedynczą magistralę kapitałową, produkcyjną i konsumpcyjną w gospodarce Leontiefa-Gale'a spełniające warunki **(LG1)**, **(LG2')**, **(LG3)**-**(LG8)**, **(6.1)**-**(6.8)**.

Niech podobnie jak w twierdzeniu 6.3:

$$\kappa^*(t) = \frac{1}{z(t)} k^*(t), \quad \xi^*(t) = \frac{1}{z(t)} x^*(t), \quad \gamma^*(t) = \frac{1}{l(t)} c^*(t).$$

■ **Twierdzenie 6.4. ('Bardzo silne' twierdzenie o magistrali)** Jeżeli zachodzą warunki **(LG1)**, **(LG2')**, **(LG3)**-**(LG8)** oraz sam $(k^0, t_1, u(\cdot))$ – optymalny proces wzrostu $\{i^*(t), k^*(t), x^*(t), c^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ w okresie $\check{t} < t_1$ prowadzi do magistrali $N_{\bar{\gamma}}$, czyli spełnia warunek:

$$\gamma^*(\check{t}) = \frac{1}{l(\check{t})} c^*(\check{t}) = \bar{\gamma}, \quad (6.21)$$

to $\forall t \in \{\check{t} + 1, \dots, t_1\}$:

$$\begin{aligned} \kappa^*(t) &= \frac{1}{z(t)} k^*(t) = \bar{\kappa}, \\ \xi^*(t) &= \frac{1}{z(t)} x^*(t) = \bar{\xi}, \\ \gamma^*(t) &= \frac{1}{l(t)} c^*(t) = \bar{\gamma}, \end{aligned}$$

gdzie $\{\bar{\kappa}, \bar{\xi}, \bar{\gamma}\}$ jest złotym trypletem.

Dowód. Załóżmy, że w pewnym okresie $\check{t} < t_1$ optymalna trajektoria konsumpcji p.c. spełnia warunek (6.21) oraz:

$$d_{max}^*(\tau) = \max\{\|\kappa^*(\tau) - \bar{\kappa}\|, \|\xi^*(\tau) - \bar{\xi}\|, \|\gamma^*(\tau) - \bar{\gamma}\|\} > 0$$

w pewnym okresie $\tau \in \{\check{t} + 1, \dots, t_1\}$. Ponieważ (k^0, t_1) – dopuszczalny jest proces:

$$\begin{aligned}\tilde{i}(t) &= \begin{cases} i^*(t), & t = 0, 1, \dots, \check{t}, \\ z(t)\delta^{-1}(\lambda E + \rho)\bar{\kappa}, & t = \check{t} + 1, \dots, t_1, \end{cases} \\ \tilde{k}(t) &= \begin{cases} k^*(t), & t = 0, 1, \dots, \check{t}, \\ z(t)\bar{\kappa}, & t = \check{t} + 1, \dots, t_1, \end{cases} \\ \tilde{x}(t) &= \begin{cases} x^*(t), & t = 0, 1, \dots, \check{t}, \\ z(t)\bar{\xi}, & t = \check{t} + 1, \dots, t_1, \end{cases} \\ \tilde{c}(t) &= \begin{cases} c^*(t), & t = 0, 1, \dots, \check{t}, \\ l(t)\bar{\gamma}, & t = \check{t} + 1, \dots, t_1, \end{cases}\end{aligned}$$

więc:

$$\sum_{t=0}^{t_1} u(\gamma^*(t)) \geq \sum_{t=0}^{t_1} u(\tilde{\gamma}(t)),$$

gdzie $\tilde{\gamma}(t) = \frac{1}{l(t)} \tilde{c}(t)$. Stąd, wobec tego, że $\forall t \geq \check{t} (\tilde{\gamma}(t) = \bar{\gamma})$, otrzymujemy nierówność:

$$\sum_{t=\check{t}}^{t_1} u(\gamma^*(t)) \geq (t_1 - \check{t} + 1)u(\bar{\gamma}). \quad (6.22)$$

Z założenia $d_{\max}^*(\tau) > 0$, funkcja użyteczności jest silnie wklęsła oraz zgodnie z lematem 6.4 $\forall t (\Gamma_{k^0, t} \subseteq \Gamma)$, zatem:

$$\forall t \in \{\check{t}, \check{t} + 1, \dots, t_1\} \left(u(\gamma^*(t)) \leq u(\bar{\gamma}) \right)$$

oraz w okresie $\tau > \check{t}$:

$$u(\gamma^*(\tau)) < u(\bar{\gamma}) - \varepsilon_\tau,$$

gdzie ε_τ jest pewną liczbą dodatnią. Wówczas:

$$(t_1 - \check{t} + 1)u(\bar{\gamma}) - \varepsilon_\tau > \sum_{t=\check{t}}^{t_1} u(\gamma^*(t)). \quad (6.23)$$

Z (6.22), (6.23) wynika, że $\varepsilon_\tau < 0$. Otrzymana sprzeczność kończy dowód. ■

Twierdzenie pozostaje prawdziwe również gdy w optymalnym procesie magistralę osiąga którakolwiek z pozostałych trajektorii (kapitału, produkcji). Aktualna jest uwaga 3 do twierdzenia 6.3.

ROZDZIAŁ 7

Magistrale w gospodarce Solowa

Od zdezagregowanej gospodarki n -produktowej/sektorowej przechodzimy do maksymalnie zagregowanej jednosektorowej gospodarki Solowa [90] z neoklasycznym równaniem dynamiki kapitału i dodatnio jednorodną stopnia 1 funkcją produkcji typu Cobba-Douglasa. W odróżnieniu od rozdziałów poprzednich obecnie zakładamy, że czas biegnie/zmienia się w sposób ciągły, $t \in T = [0, t_1]$, $t_1 < +\infty$. Za wyborem tej wersji czasu przemawia nie tylko elegancja matematyczna modelu Solowa z czasem ciągłym, ale (przede wszystkim) aparat teorii sterowania optymalnego, który stosujemy do wyznaczenia/konstrukcji optymalnych procesów wzrostu w tym rozdziale. Wszędzie wcześniej (w poprzednich rozdziałach) dowody magistralnych własności optymalnych procesów wzrostu miały abstrakcyjną postać twierdzeń egzystencjalnych. Obecnie, dzięki prostej strukturze matematycznej modelu Solowa, możliwe będzie otrzymanie na gruncie teorii sterowania optymalnego analitycznej postaci interesujących nas optymalnych trajektorii/procesów wzrostu; zob. [44] oraz [50], [56, cz. 3]. Dwa twierdzenia o warunkach optymalności, z których korzystamy w tym rozdziale (określane jako zasada maksimum Pontriagina), formułujemy w punkcie 7.1. Z podstawami teorii sterowania optymalnego można zapoznać się w [56, cz. 3 rozdz. 7]; zob. także np. [1], [4], [5], [6, cz. III], [29], [85], [87].

7.1. Dwa zadania sterowania optymalnego. Warunki optymalności

Z matematycznego punktu widzenia interesujący nas neoklasyczny model wzrostu jest przykładem tzw. gładkiego, niestacjonarnego systemu dynamicznego, którego dynamikę opisuje układ równań różniczkowych typu:

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t), u(t), t), \quad (7.1)$$

$$\begin{aligned}
x(t) &= (x_1(t), \dots, x_n(t)), u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t)), f = (f_1, \dots, f_n); \frac{d}{dt}x(t) = \\
&= \left(\frac{d}{dt}x_1(t), \dots, \frac{d}{dt}x_n(t) \right); f_i, \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \in C^0(R^n \times R^m \times R^1 \rightarrow R^1), i, j = 1, \dots, n; \\
u &\in \tilde{C}^0(T \rightarrow U), U \subseteq R^m, t \in T = [0, t_1] \subset R^1, t_1 < +\infty.
\end{aligned}$$

Zmienna wektorowa $x(t)$ przedstawia stan systemu w momencie t ; $u(t)$ jest tzw. zmienną sterującą (sterowaniem) w momencie t ; U jest zbiorem dopuszczalnych sterowań, przedział czasu $T = [0, t_1]$ jest horyzontem funkcjonowania systemu z ustalonym momentem końcowym $t_1 < +\infty$. Zakładamy, że znany jest stan systemu w momencie początkowym $t = 0$:

$$x(0) = x^0. \quad (7.2)$$

Każdą funkcję u z klasy $\tilde{C}^0(u: T \rightarrow U)$ nazywamy trajektorią sterowań i oznaczamy przez u_T . Odpowiadającą trajektorii sterowań u_T funkcję $x: T \rightarrow R^n$ (rozwiązanie układu równań (1) z warunkiem początkowym (7.2)) nazywamy trajektorią stanów systemu i oznaczamy przez x_T . Rozwiązanie równania różniczkowego (7.1) odpowiadające dopuszczalnej trajektorii sterowań pojmujemy w sensie całkowym – jako ciągłą, przedziałami gładką (różniczkowalną) funkcję spełniającą to równanie wszędzie poza (co najwyżej) punktami nieciągłości sterowania u . Przy przyjętych założeniach spełnione są warunki istnienia i jednoznaczności rozwiązania równania różniczkowego (7.1), zgodnie z którymi każdej dopuszczalnej trajektorii sterowań u_T odpowiada dokładnie jedna trajektoria stanów x_T – rozwiązanie równania (7.1). O parze $(u, x)_T$ mówimy, że opisuje dopuszczalny proces sterowania.

Na dopuszczalnych procesach zdefiniowany jest funkcjonał całkowity:

$$\phi((u, x)_T) = \int_0^{t_1} f_0(x(t), u(t), t) dt, \quad (7.3)$$

którego wartość nazywamy wskaźnikiem jakości procesu $(u, x)_T$. O funkcji podcałkowej $f_0(\cdot)$ zakładamy, że ma te same własności co funkcja $f(\cdot)$ w równaniu (7.1), tj. $f_0, \frac{\partial f_0}{\partial x} \in C^0(R^n \times U \times T \rightarrow R^1)$.

Interesuje nas następujące zadanie sterowania optymalnego (wyboru procesu maksymalizującego wartość funkcjonału (7.3)):

$$\max \int_0^{t_1} f_0(x(t), u(t), t) dt, \quad (7.4)$$

$$\frac{d}{dt} x(t) = f(x(t), u(t), t),$$

$$u \in \tilde{C}^0(u: T \rightarrow U), T = [0, t_1], \quad (7.5)$$

$$x(0) = x_0.$$

Jego rozwiązanie $(u^*, x^*)_T$ nazywamy procesem optymalnym, u_T^* – optymalną trajektorią sterowań, x_T^* – optymalną trajektorią stanów. O warunkach optymalności procesu $(u^*, x^*)_T$ mówi następujące twierdzenie.

■ **Twierdzenie 7.1 (Zasada maksimum Pontriagina;** [56], tw. 7.6). Utwórzmy funkcję H (tzw. hamiltonian) zmiennych $x = (x_1, \dots, x_n)$, $u = (u_1, \dots, u_m)$, t oraz dodatkowej zmiennej $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$:

$$H(\psi, x, u, t) = f_0(x, u, t) + \langle \psi, f(x, u, t) \rangle.$$

Jeżeli proces $(u^*, x^*)_{T^*}$ jest rozwiązaniem zadania (7.4)-(7.5), to istnieje takie rozwiązanie $\psi_{T^*}^* = (\psi_1^*, \dots, \psi_n^*)_{T^*}$ układu równań:

$$\frac{d}{dt} \psi(t) = - \frac{\partial H(\psi(t), x, u^*(t), t)}{\partial x} \Big|_{x=x^*(t)}, \quad (7.6)$$

$(\frac{d}{dt} \psi = (\frac{d}{dt} \psi_1, \dots, \frac{d}{dt} \psi_n), \frac{\partial H}{\partial x} = (\frac{\partial H}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial x_n}))$, z warunkiem:

$$\psi^*(t_1) = 0,$$

że w każdym momencie $t \in T$:

$$H(\psi^*(t), x^*(t), u^*(t), t) = \max_{u \in U} H(\psi^*(t), x^*(t), u, t).$$

■

Zadanie (7.4)-(7.5) jest tzw. niestacjonarnym zadaniem sterowania optymalnego z kryterium całkowym, ustalonym horyzontem i swobodnym końcem trajektorii stanów. Równanie różniczkowe (7.6) nazywa się równaniem sprzężonym z równaniem dynamiki (7.1). Zmienną $\psi(t)$ nazywamy sprzężoną ze zmienną stanu $x(t)$.

W drugim tzw. minimalnoczasowym problemie sterowania optymalnego, który formułujemy poniżej, poza stanem początkowym x^0 ustalony jest pożądaný, docelowy zbiór stanów $X \subset R^n$ ($x^0 \notin X$). Jeżeli u_T jest taką trajektoriá sterowań (określoná na przedziale $T = [0, t_1]$, z momentem końcowym $t_1 < +\infty$), że odpowiadająca jej trajektoria stanów spełnia warunek:

$$x(t_1) \in X,$$

wtedy proces $(u, x)_T$ nazywamy dopuszczalnym, u_T nazywamy dopuszczalną trajektoriá sterowań, x_T nazywamy dopuszczalną trajektoriá stanów systemu. O dopuszczanym procesie $(u, x)_T$ mówimy, że przeprowadza system ze stanu początkowego x^0 do zbioru stanów docelowych X . W minimalnoczasowym zadaniu sterowania należy wskazać proces, który w najkrótszym czasie przeprowadza system ze stanu początkowego x^0 do zbioru stanów docelowych X . Zapisujemy je następująco:

$$\min t_1 \tag{7.7}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x(t) &= f(x(t), u(t), t), \\ u &\in \tilde{C}^0(T \rightarrow U), T = [0, t_1], \\ x(0) &= x^0, \\ x(t_1) &\in X. \end{aligned} \tag{7.8}$$

Moment końcowy t_1 horyzontu T w zadaniu tym jest nieustalony. Jest on, obok trajektorii sterowań u_T , zmienną decyzyjną zadania. Proces dopuszczalny $(u^*, x^*)_{T^*}$ przeprowadzający system ze stanu początkowego x^0 do zbioru stanów docelowych X^1 w najkrótszym czasie t_1^* nazywamy procesem optymalnym. Trajektorie $u_{T^*}^*$ oraz $x_{T^*}^*$ nazywamy (odpowiednio) optymalną trajektoriá sterowań

i optymalną trajektorią stanów systemu, horyzont $T^* = [0, t_1^*]$ nazywamy optymalnym (najkrótszym) horyzontem.

O zbiorze stanów docelowych X zakładamy, że jest gładką rozmaitością w R^n , tj.

$$X = \{x \in R^n \mid g(x) = 0\},$$

gdzie $g = (g_1, \dots, g_k)$, $g_i \in C^1(R^n \rightarrow R^1)$, $i = 1, \dots, k \leq n$. O warunkach optymalności procesu $(u^*, x^*)_{T^*}$ mówi następujące twierdzenie.

■ **Twierdzenie 7.2** ([56], tw. 7.10). Utwórzmy funkcję $H(\cdot)$ (hamiltonian) zmiennych $x = (x_1, \dots, x_n)$, $u = (u_1, \dots, u_m)$, t oraz dodatkowej zmiennej $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$:

$$H(\psi, x, u, t) = \langle \psi, f(x, u, t) \rangle.$$

Jeżeli proces $(u^*, x^*)_{T^*}$ jest rozwiązaniem zadania (7.8), (7.9), to istnieje takie rozwiązanie $\psi^*_{T^*} = (\psi^*_1, \dots, \psi^*_n)_{T^*}$ układu równań:

$$\frac{d}{dt} \psi(t) = - \frac{\partial H(\psi(t), x^*(t), u^*(t), t)}{\partial x} \Big|_{x=x^*(t)}, \quad (7.9)$$

$$\left(\frac{d}{dt} \psi = \left(\frac{d}{dt} \psi_1, \dots, \frac{d}{dt} \psi_n \right), \frac{\partial H}{\partial x} = \left(\frac{\partial H}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial x_n} \right) \right), \text{ że } \forall t \in T^* = [0, t_1^*]:$$

$$\psi^*(t) \neq 0,$$

$$H(\psi^*(t), x^*(t), u^*(t), t) = \max_{u \in U} H(\psi^*(t), x^*(t), u, t),$$

$$H(\psi^*(t_1^*), x^*(t_1^*), u^*(t_1^*), t_1^*) \geq 0$$

oraz w momencie końcowym t_1^* :

$$\forall x \in P_{x^*(t_1^*)} (\langle \psi^*(t_1^*), x - x^*(t_1^*) \rangle = 0),$$

gdzie $P_{x^*(t_1^*)}$ jest płaszczyzną styczną do gładkiej rozmaitości X w punkcie $x^*(t_1^*) \in X$. ■

Uwaga 1. Łatwo zauważyć, że w twierdzeniu 7.2 funkcja ψ^* (rozwiązanie równań (7.9)) jest określona z dokładnością do mnożenia przez stałą dodatnią, tzn. jeżeli

funkcja ψ^* spełnia warunki twierdzenia, to spełnia je także każda funkcja $\lambda\psi^* = (\lambda\psi^*(t))_{t \in T^*}$, gdzie $\lambda > 0$.

Uwaga 2. Twierdzenia mówią o warunkach koniecznych optymalności, więc może zdarzyć się, że bez ewentualnych dodatkowych założeń warunki te mogą spełniać także procesy niebędące optymalnymi lub zadania mogą w ogóle nie mieć rozwiązania. Żadna z tych okoliczności nie zachodzi w przypadku problemów sterowania optymalnego wzrostem interesujących nas w tym rozdziale. Pokażemy, że formułowane dalej problemy wzrostu optymalnego w gospodarce Solowa mają jednoznaczne rozwiązania, a teoria sterowania dostarcza efektywnego narzędzia umożliwiającego wyznaczanie optymalnych ścieżek wzrostu oraz analizę ich własności.

7.2. Optymalny podział dochodu w gospodarce Solowa¹. Sformułowanie problemu

Zakładamy, że czas t zmienia się w sposób ciągły, $t \in T = [0, t_1]$, $t_1 < +\infty$. Przedział czasu T jest interesującym nas horyzontem funkcjonowania gospodarki. Przez $k(t)$ oznaczamy wielkość kapitału (produkcyjnego) w gospodarce w momencie t (zasób, wymiar: zł), przez $z(t)$ – nakłady pracy/zatrudnienie w momencie t (zasób, np. w mln osób – L), przez $y(t)$, $i(t)$, $c(t)$ – dochód (utożsamiany z produkcją czystą), inwestycje (produkcyjne brutto) oraz konsumpcję w momencie t (strumień, wymiar: zł/R, gdzie R jest ustaloną jednostką czasu, np. R = 1 rok)². Wszystkie zmienne pieniężne (kapitał, dochód, inwestycje, konsumpcja) wyrażone są w cenach stałych. Kapitał $k(t)$ oraz praca $z(t)$ są czynnikami produkcji niezbędnymi do wytworzenia dochodu $y(t)$ w momencie t . Wielkości dochodu wytwarzanego w momencie t zależy nie tylko od rozmiarów kapitału i pracy, ale także

¹ Zarówno w makroekonomii, jak i w ekonomii matematycznej model Solowa zajmuje miejsce szczególne, będąc punktem wyjścia niemal każdej makroekonomicznej analizy wzrostu; zob. np. [86, rozdz. 1], [92, rozdz. 5].

² Ponieważ czas zmienia się w sposób ciągły, zmienne $y(t)$, $i(t)$, $c(t)$ oznaczają, ściśle rzecz biorąc, gęstość strumienia dochodu, inwestycji i konsumpcji.

od „poziomu techniki”, jaką dysponuje gospodarka w tym momencie. Zależność tę opisuje uogólniona, multiplikatywna funkcja produkcji Cobba-Douglasa jednorodna stopnia 1 z egzogenicznym postępowem technologiczno-organizacyjnym:

$$y(t) = F(k(t), z(t), t) = ae^{\nu t} k^\varepsilon(t) z^{1-\varepsilon}(t) > 0. \quad (7.10)$$

Składnik $ae^{\nu t} > 0$ jest miarą wpływu technologii (oraz organizacji produkcji) na wielkość dochodu wytwarzanego w momencie t . Parametr $\nu = \frac{\partial F(k, z, t)}{\partial t} \cdot \frac{1}{F(k, z, t)} > 0$ nazywamy wskaźnikiem (czystego) postępu technologiczno-organizacyjnego (wymiar: R^{-1}). Dzięki postępowi technologiczno-organizacyjnemu z tego samego zasobu kapitału, przy takim samym zatrudnieniu, dochód rośnie z czasem ze stopą $\nu > 0$. Parametr $\varepsilon \in (0, 1)$ jest elastycznością dochodu względem kapitału (wielkość niemianowana, mówi o ile % wzrośnie dochód, gdy wielkość kapitału wzrośnie o 1%), $1 - \varepsilon$ jest elastycznością dochodu względem pracy.

Dynamikę kapitału standardowo opisuje równanie różniczkowe:

$$\frac{d}{dt} k(t) = i(t) - \mu k(t), \quad (7.11)$$

gdzie:

$$k(0) = k_0 > 0 \quad (7.12)$$

jest ustaloną początkową wielkością kapitału w gospodarce w momencie $t = 0$; $\mu > 0$ jest wskaźnikiem deprecjacji kapitału (wymiar: R^{-1}).

Na konsumpcję $c(t)$ przeznaczają się część dochodu pozostającą po odliczeniu inwestycji $i(t)$:

$$c(t) = y(t) - i(t), \quad (7.13)$$

$$c(t), i(t) \geq 0.$$

Zauważmy, że rozwiązanie równania (7.11) z warunkiem początkowym (7.12) jest zawsze dodatnie, bez względu na wielkość inwestycji $i(t) \geq 0$. Praca (zatrudnienie) rośnie egzogenicznie ze stopą $\lambda > 0$:

$$z(t) = z_0 e^{\lambda t} > 0. \quad (7.14)$$

Przyjmując oznaczenia:

$$s(t) = \frac{i(t)}{y(t)} \in [0,1]$$

(stopa inwestycji w momencie t , wielkość niemianowana),

$$u(t) = \frac{k(t)}{z(t)}$$

(techniczne uzbrojenie pracy w momencie t , wymiar: zł/L),

$$\gamma(t) = \frac{c(t)}{z(t)}$$

(konsumpcja *per capita*, wymiar: zł/R · L) z (7.10)-(7.14) otrzymujemy następujące równanie dynamiki technicznego uzbrojenia pracy:

$$\frac{d}{dt}u(t) = as(t)u^\varepsilon(t)e^{vt} - (\mu + \lambda)u(t), t \in T, \quad (7.15)$$

$$u(0) = u_0 (= \frac{k_0}{z_0}) > 0,$$

któremu odpowiada konsumpcja p.c.

$$\gamma(t) = a(1 - s(t))u^\varepsilon(t)e^{vt}, t \in T.$$

W równaniu (7.15) stopa inwestycji $s(t) \in [0,1]$, $t \in T$.

Użyteczność chwilową konsumpcji opisuje funkcja:

$$U(\gamma(t), t) = \gamma(t)e^{-\rho t} = a(1 - s(t))u^\varepsilon(t)e^{(v-\rho)t}$$

(ze stopą dyskonta $\rho = -\frac{\partial U(\gamma, t)}{\partial t} \cdot \frac{1}{U(\gamma, t)} > 0$) charakteryzująca się stałą w czasie (jednostkową) elastycznością użyteczności konsumpcji p.c.

$$\forall t \left(\frac{\partial U(\gamma, t)}{\partial \gamma} \cdot \frac{\gamma}{U(\gamma, t)} = 1 \right).$$

Interesuje nas następujące zadanie maksymalizacji użyteczności konsumpcji p.c. w horyzoncie czasu T :

znaleźć:

$$\max \int_0^{t_1} a(1-s(t))u^\varepsilon(t)e^{(v-\rho)t}dt \quad (7.16)$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(t) &= as(t)u^\varepsilon(t)e^{vt} - (\mu + \lambda)u(t), \\ s &\in \tilde{C}^0(T \rightarrow [0, 1]), \quad T = [0, t_1], \\ u(0) &= u_0 (= \frac{k_0}{z_0}) > 0. \end{aligned} \quad (7.17)$$

W celu uproszczenia wywodów o parametrach zadania zakładamy, że spełniają następujące warunki:

$$0 < \rho < v, \quad (7.18)$$

(stopa dyskonta użyteczności konsumpcji jest niższa od wskaźnika postępu techniczno-organizacyjnego) oraz:

$$\frac{1}{2} > \varepsilon > \frac{v}{\mu + \lambda}. \quad (7.19)$$

Nierówność $\frac{1}{2} > \varepsilon$ oznacza, że elastyczność dochodu względem kapitału jest niższa od elastyczności dochodu względem pracy. Gospodarka taka jest czulsza na zmianę zasobów pracy niż kapitału. Warunek $\varepsilon > \frac{v}{\mu + \lambda}$ zachodzi, gdy wstrzymanie inwestycji powoduje spadek (ujemną stopę wzrostu) średniej wydajności pracy $w(t) = \frac{y(t)}{z(t)}$. Istotnie, jeżeli $s(t) = 0$ na pewnym przedziale $[\tau_1, \tau_2] \subset T$ oraz $\varepsilon > \frac{v}{\mu + \lambda}$, to $u(t) = u(\tau_1)e^{-(\mu + \lambda)(t - \tau_1)}$, $w(t) = au^\varepsilon(\tau_1)e^{v\tau_1 + [v - \varepsilon(\mu + \lambda)(t - \tau_1)]}$, zatem:

$$\frac{d}{dt}w(t) \cdot \frac{1}{w(t)} = v - \varepsilon(\mu + \lambda) < 0 \text{ na } [\tau_1, \tau_2].$$

W zadaniu sterowania optymalnego (7.16)-(7.17) zmienna $u(t)$ jest stanem systemu (gospodarki), a zmienna $s(t)$ – sterowaniem w momencie t . Odcinek $[0, 1]$ (przedział dopuszczalnych wartości stopy inwestycji) tworzy zbiór sterowań dopuszczalnych. Równanie różniczkowe opisuje przekształcenie stanów systemu. Dopuszczalnej trajektorii sterowań s_T odpowiada dokładnie jedna trajektoria

stanów u_T , rozwiązanie układu (7.16)-(7.17). O parze $(s, u)_T$ mówimy, że opisuje dopuszczalny proces wzrostu. Proces dopuszczalny $(s^*, u^*)_T$ będący rozwiązaniem zadania (7.16)-(7.17) nazywamy *optymalnym procesem wzrostu*.

Równanie różniczkowe (7.15) z trajektorią sterowań $s \in \tilde{C}^0(T \rightarrow [0, 1])$ spełnia warunki istnienia i jednoznaczności rozwiązań, a zadanie (7.16)-(7.17) posiada rozwiązanie. Mając optymalną trajektorię stopy inwestycji s_T^* i optymalną trajektorię technicznego uzbrojenia pracy u_T^* , możemy wyznaczyć trajektorie wszystkich pozostałych zmiennych ekonomicznych: kapitału $k^*(t) = z(t)u^*(t)$, dochodu $y^*(t) = ak^*(t)^\varepsilon z(t)^{1-\varepsilon} e^{\nu t}$, inwestycji $i^*(t) = s^*(t)y^*(t)$, konsumpcji p.c. $\gamma^*(t) = a(1 - s^*(t))u^*(t)^\varepsilon e^{\nu t}$ oraz konsumpcji $c^*(t) = (1 - s^*(t))y^*(t)$ ($= z(t)\gamma^*(t)$).

Hamiltonian naszego zadania ma postać następującą:

$$H(\psi, u, s, t) = a(1 - s)u^\varepsilon e^{(\nu - \rho)t} + [asu^\varepsilon e^{\nu t} - (\mu + \lambda)u]\psi. \quad (7.20)$$

Zbiorem sterowań (dopuszczalnych stóp inwestycji) jest odcinek $[0, 1]$. Z twierdzenia 7.1 otrzymujemy wówczas następujące warunki, które spełnia optymalny proces wzrostu $(s^*, u^*)_T$, rozwiązanie zadania (7.16)-(7.17).

■ **Twierdzenie 7.3.** Jeżeli proces $(s^*, u^*)_T$ jest rozwiązaniem zadania (7.16)-(7.17), to istnieje takie rozwiązanie ψ_T^* równania:

$$\frac{d}{dt}\psi(t) = -[a\varepsilon s^*(t)u^*(t)^{\varepsilon-1}e^{\nu t} - (\mu + \lambda)]\psi(t) - a\varepsilon(1 - s^*(t))u^*(t)^{\varepsilon-1}e^{(\nu - \rho)t} \quad (7.21)$$

z warunkiem:

$$\psi^*(t_1) = 0, \quad (7.22)$$

że w każdym momencie $t \in T$:

$$H(\psi^*(t), u^*(t), s^*(t), t) = \max_{0 \leq s \leq 1} H(\psi^*(t), u^*(t), s, t). \quad (7.23)$$

Nietrudno zauważyć, że bez względu na długość horyzontu T oraz postać dopuszczalnej trajektorii sterowań s_T , odpowiadająca jej trajektoria stanów u_T jest

zawsze dodatnia. Istotnie, założmy, że w pewnym dopuszczalnym procesie $(s, u)_T$ w momencie $t' \in T \setminus \{0\}$ zachodzi warunek $u(t') = 0$. Wówczas jedynym rozwiązaniem równania (7.15) jest trajektoria u_T z wartościami $u(t) = 0$ dla każdego $t \in T$, co jest sprzeczne z warunkiem początkowym $u(0) = u_0 > 0$. Podobnie, gdyby w pewnym momencie $t' \in T \setminus \{0\}$ zachodziła nierówność $u(t') < 0$, to wobec ciągłości trajektorii u_T musiałby istnieć moment $t'' \in (0, t')$, w którym $u(t'') = 0$, a wtedy znowu jedynym rozwiązaniem równania (7.15) byłaby trajektoria u_T tożsamościowo równa 0.

Ponieważ:

- każde rozwiązanie u_T równania (7.15) z warunkiem początkowym $u(0) = u_0 > 0$ jest dodatnie bez względu na postać dopuszczalnej trajektorii sterowań s_T ,
- hamiltonian $H(\cdot)$ (zob. (7.20)) jest w każdym momencie $t \in T$ liniową funkcją sterowania s ,
- zbiór sterowań dopuszczalnych jest przedziałem domkniętym $[0, 1]$

oraz:

$$\frac{\partial H(\psi, u, s, t)}{\partial s} = au^\varepsilon e^{\nu t}(\psi - e^{-\rho t}), \quad (7.24)$$

więc ostatecznie z twierdzenia 7.3 otrzymujemy następujące warunki optymalności, które spełnia optymalny proces wzrostu – rozwiązanie zadania (7.16)-(7.17).

■ **Twierdzenie 7.4.** Przyjmijmy oznaczenie: $\varphi^*(t) = \psi^*(t) - e^{-\rho t}$. Jeżeli proces $(s^*, u^*)_T$ jest rozwiązaniem zadania (7.16)-(7.17) oraz parametry zadania spełniają warunki (7.18), (7.19), to istnieje takie rozwiązanie ψ_T^* równania (7.21) spełniające warunek (7.22), że zachodzą następujące implikacje:

(i) Jeżeli $\varphi^*(t) > 0$, to $s^*(t) = 1$.

(2i) Jeżeli $\varphi^*(t) < 0$, to $s^*(t) = 0$.

(3i) Jeżeli $\varphi^*(t) = 0$ na przedziale $[\tau_1, \tau_2] \subset T$, to $\forall t \in [\tau_1, \tau_2]^3$:

$$s^*(t) = \bar{s} = \frac{\varepsilon[(1-\varepsilon)(\mu+\lambda)+\nu]}{(1-\varepsilon)(\mu+\lambda+\rho)} \in (0,1), \quad (7.25)$$

$$u^*(t) = \bar{u}e^{\frac{\nu}{1-\varepsilon}t}, \quad \bar{u} = \left(\frac{a\varepsilon}{\mu+\lambda+\rho}\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}. \quad (7.26)$$

Dowód. Warunki (i), (2i) są oczywiste w świetle (7.24), zważywszy na postać zbioru sterowań oraz fakt, że każda dopuszczalna trajektoria technicznego uzbrojenia pracy (trajektoria stanów) jest dodatnia. Aby przekonać się, że zachodzi także warunek (3i), zauważmy, iż jeżeli $\varphi^*(t) = 0$ na przedziale $[\tau_1, \tau_2] \subset T$, to $\forall t \in [\tau_1, \tau_2]$ spełniony jest układ równań:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\psi^*(t) &= -[a\varepsilon s^*(t)u^*(t)^{\varepsilon-1}e^{\nu t} - (\mu + \lambda)]\psi^*(t) - a\varepsilon(1 - \\ &\quad s^*(t))u^*(t)^{\varepsilon-1}e^{(\nu-\rho)t} = -\rho e^{-\rho t}, \\ \frac{d}{dt}u^*(t) &= as^*(t)u^*(t)^{\varepsilon}e^{\nu t} - (\mu + \lambda)u^*(t). \end{aligned}$$

Rozwiązując go dostajemy (7.25), (7.26). ■

7.3. Pomocnicze fakty

7.3.1. Pokażemy, że funkcja ψ_T^* w twierdzeniu 7.3 (rozwiązanie równania (7.21) sprzężonego z równaniem dynamiki systemu (7.15)) jest w momencie początkowym dodatnia:

$$\psi^*(0) > 0.$$

Istotnie, rozwiązanie ψ_T^* równania (7.21) odpowiadające optymalnemu procesowi $(s^*, u^*)_T$ spełnia warunek

³ Przejście od przedziału domkniętego $[\tau_1, \tau_2]$ do prawostronnie otwartego przedziału $[\tau_1, \tau_2)$, z którym będziemy mieli także kilkakrotnie do czynienia dalej, wiąże się z własnością trajektorii sterowań należących do klasy $\tilde{C}^0[T \rightarrow U]$.

$$\begin{aligned} \psi^*(t) = & \psi^*(0)e^{-\int_0^t [a\epsilon s^*(\theta)u^*(\theta)^{\epsilon-1}e^{v\theta} - (\mu+\lambda)]d\theta -} \\ & - a\epsilon e^{-\int_0^t [a\epsilon s^*(\theta)u^*(\theta)^{\epsilon-1}e^{v\theta} - (\mu+\lambda)]d\theta} \times \\ & \times \int_0^t e^{\int_0^\theta [a\epsilon s^*(\tau)u^*(\tau)^{\epsilon-1}e^{v\tau} - (\mu+\lambda)]d\tau} (1 - s^*(\theta)u^*(\theta)^{\epsilon-1}e^{(v-\rho)\theta})d\theta. \end{aligned} \quad (7.27)$$

Założmy, że $\psi^*(0) \leq 0$ (czyli $\varphi^*(0) \leq -1$). Funkcja φ^* jest ciągła, więc:

$$\exists t' > 0 \forall t \in (0, t') (\varphi^*(t) < 0),$$

a to oznacza, że $\forall t \in [0, t') (s^*(t) = 0)$. Wówczas jednak (zważywszy na (7.27)):

$$\forall t \in T \setminus \{0\} (\psi^*(t) < 0).$$

W szczególności $\psi^*(t_1) < 0$, co jest sprzeczne z (7.22).

7.3.2. Prześledzimy niektóre własności rozwiązania układu równań:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(t) &= as(t)u^\epsilon(t)e^{vt} - (\mu + \lambda)u(t), \\ \frac{d}{dt}\psi(t) &= -[a\epsilon s(t)u^{\epsilon-1}(t)e^{vt} - (\mu + \lambda)]\psi(t) - a\epsilon(1 - s(t))u^{\epsilon-1}(t)e^{(v-\rho)t}, \end{aligned} \quad (7.28)$$

z warunkiem $u(0) = u_0 > 0$ oraz funkcją $s \in \tilde{C}^0(T \rightarrow [0, 1])$ na przedziale $T = [0, t_1]$ z dowolnym momentem końcowym $t_1 < +\infty$, a więc *de facto* na półosi $[0, +\infty)$, w dwóch przypadkach:

- (a) $\psi(0) > 1$ (równoważnie, $\varphi(0) > 0$) oraz $s(t) = 1$ wszędzie na T ,
- (b) $\psi(0) < 1$ (równoważnie, $\varphi(0) < 0$) oraz $s(t) = 0$ wszędzie na T .

Ad (a). Układ (7.28) przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(t) &= au^\epsilon(t)e^{vt} - (\mu + \lambda)u(t), \\ \frac{d}{dt}\psi(t) &= -[a\epsilon u^{\epsilon-1}(t)e^{vt} - (\mu + \lambda)]\psi(t) \end{aligned} \quad (7.29)$$

($u(0) = u_0 > 0$, $\psi(0) > 1$). Rozwiązaniem pierwszego równania jest funkcja/trajektoria:

$$u(t) = [ce^{-(1-\epsilon)(\mu+\lambda)t} + de^{vt}]^{\frac{1}{1-\epsilon}} > 0,$$

$$c = u_0^{1-\varepsilon} - d, \quad d = \frac{a(1-\varepsilon)}{(1-\varepsilon)(\mu+\lambda)+\nu} > 0. \quad (7.30)$$

Po jej podstawieniu do równania drugiego otrzymujemy:

$$\frac{d}{dt}\psi(t) = \Phi(t) \psi(t),$$

gdzie:

$$\Phi(t) = -\left[\frac{a\varepsilon}{y(t)}e^{\nu t} - (\mu + \lambda)\right], \quad y(t) = ce^{-(1-\varepsilon)(\mu+\lambda)t} + de^{\nu t} = u^{1-\varepsilon}(t) > 0,$$

a stąd:

$$\psi(t) = \psi(0)e^{\int_0^t \Phi(\theta)d\theta}.$$

Ponieważ $\psi(0) > 1$, więc funkcja ta jest zawsze dodatnia, niezależnie od długości horyzontu T . Analiza przebiegu funkcji Φ prowadzi do następujących wniosków.

- Jeżeli:

$$-\frac{a(1-\varepsilon)}{(1-\varepsilon)(\mu+\lambda)+\nu} < c < \frac{a\varepsilon}{\mu+\lambda} - \frac{a(1-\varepsilon)}{(1-\varepsilon)(\mu+\lambda)+\nu}$$

(równoważnie: $0 < u_0 < \left(\frac{a\varepsilon}{\mu+\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$), to funkcja ψ (rozwiązanie drugiego równania w układzie (7.29)) ma następujące własności:

$$\exists! \tau > 0 \left(\frac{d}{dt}\psi(t) \Big|_{t=\tau} = 0 \right),$$

$$\forall t \in [0, \tau) \left(\frac{d}{dt}\psi(t) \cdot \frac{1}{\psi(t)} < 0 \right) \& \forall t > \tau \left(\frac{d}{dt}\psi(t) \cdot \frac{1}{\psi(t)} > 0 \right)$$

oraz:

$$\lim_t \frac{d}{dt}\psi(t) \cdot \frac{1}{\psi(t)} = -\frac{\varepsilon[(1-\varepsilon)(\mu+\lambda)+\nu]}{1-\varepsilon} + (\mu + \lambda) = \bar{c} > 0 \quad (7.31)$$

(warunek $\bar{c} > 0$ jest konsekwencją założenia (7.19)).

- Jeżeli:

$$c = \frac{a\varepsilon}{\mu+\lambda} - \frac{a(1-\varepsilon)}{(1-\varepsilon)(\mu+\lambda)+\nu}$$

(równoważnie: $u_0 = \left(\frac{a\varepsilon}{\mu+\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$), to:

$$\frac{d}{dt}\psi(t)\Big|_{t=0} = 0,$$

a następnie:

$$\forall t > 0 \left(\frac{d}{dt}\psi(t) \cdot \frac{1}{\psi(t)} > 0 \right)$$

oraz zachodzi warunek (7.31).

• Jeżeli:

$$c \left(= u_0^{1-\varepsilon} - \frac{a(1-\varepsilon)}{(1-\varepsilon)(\mu+\lambda)+\nu} \right) > \frac{a\varepsilon}{\mu+\lambda} - \frac{a(1-\varepsilon)}{(1-\varepsilon)(\mu+\lambda)+\nu} (< 0)$$

(równoważnie: $u_0 > \left(\frac{a\varepsilon}{\mu+\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$), to:

$$\forall t \geq 0 \left(\frac{d}{dt}\psi(t) \cdot \frac{1}{\psi(t)} > 0 \right)$$

oraz zachodzi warunek (7.31).

Konkluzja 1. Jeżeli para u, ψ jest rozwiązaniem układu (7.29) ze sterowaniem $s(t) = 1$ na półosi czasu $[0, +\infty)$ i warunkiem początkowym $u(0) = u_0 > 0$, $\psi(0) > 1$, to (przy założeniu (7.19)) istnieje nie więcej niż jeden punkt/moment $\tau \geq 0$, w którym $\frac{d}{dt}\psi(t)\Big|_{t=\tau} = 0$ oraz $\lim_t \psi(t) = +\infty$. Analogiczne własności ma funkcja $\varphi(t) = \psi(t) - e^{-\rho t}$. W szczególności prawdziwy jest następujący warunek:

$$\frac{d}{dt}\varphi(t)\Big|_{t=t'} \geq 0 \Rightarrow \forall t > t' (\varphi(t) > \varphi(t')). \quad (7.32)$$

Zachowuje on moc także wówczas, gdy w układzie (7.29) półoś czasu $[0, +\infty)$ zastąpimy przedziałem $[t_0, +\infty)$ z dowolnym momentem początkowym z momentem $t_0 > 0$ oraz warunkiem początkowym: $u(t_0) = u_0 > 0$, $\psi(t_0) > 1$.

Ad (b). Układ (7.28) przyjmuje postać:

$$\frac{d}{dt}u(t) = -(\mu + \lambda)u(t), \quad (7.33)$$

$$\frac{d}{dt}\psi(t) = (\mu + \lambda)\psi(t) - a\varepsilon u^{\varepsilon-1}(t)e^{(v-\rho)t}$$

($u(0) = u_0 > 0, 0 < \psi(0) < 1$). Rozwiązaniem pierwszego równania jest trajektoria:

$$u(t) = u_0 e^{-(\mu+\lambda)t},$$

wobec czego drugie równanie przyjmuje postać:

$$\frac{d}{dt}\psi(t) = (\mu + \lambda)\psi(t) - a\varepsilon u_0^{\varepsilon-1}(t)e^{[(1-\varepsilon)(\mu+\lambda)+v-\rho]t}.$$

Jego rozwiązaniem jest funkcja:

$$\psi(t) = \left(\psi(0) + \frac{a\varepsilon u_0^{\varepsilon-1}}{-\varepsilon(\mu+\lambda)+v-\rho} \right) e^{(\mu+\lambda)t} - \frac{a\varepsilon u_0^{\varepsilon-1}}{-\varepsilon(\mu+\lambda)+v-\rho} e^{[(1-\varepsilon)(\mu+\lambda)+v-\rho]t},$$

której pochodna ma następującą postać:

$$\frac{d}{dt}\psi(t) = e^{(\mu+\lambda)t} [\Psi_0 + \Xi_0 e^{[-\varepsilon(\mu+\lambda)+v-\rho]t}], \quad (7.34)$$

gdzie:

$$\Psi_0 = (\mu + \lambda) \psi(0) + \frac{a\varepsilon(\mu+\lambda)u_0^{\varepsilon-1}}{-\varepsilon(\mu+\lambda)+v-\rho}, \quad \Xi_0 = \frac{-a\varepsilon[(1-\varepsilon)(\mu+\lambda)+v-\rho]u_0^{\varepsilon-1}}{-\varepsilon(\mu+\lambda)+v-\rho} (> 0).$$

Analiza (prawej strony) równania (7.34) prowadzi do następujących wniosków (obowiązują założenia (7.18), (7.19)):

- Jeżeli:

$$0 < u_0 < \left[\frac{a\varepsilon}{(\mu+\lambda)\psi(0)} \right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}},$$

wtedy:

$$\forall t \geq 0 \left(\frac{d}{dt}\psi(t) < 0 \right)$$

oraz:

$$\lim_t \frac{d}{dt}\psi(t) = -\infty.$$

- Jeżeli:

$$u_0 = \left[\frac{a\varepsilon}{(\mu+\lambda)\psi(0)} \right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}},$$

to:

$$\frac{d}{dt}\psi(t)\Big|_{t=0} = 0,$$

a następnie:

$$\forall t > 0 \left(\frac{d}{dt}\psi(t) < 0 \right) \& \lim_t \frac{d}{dt}\psi(t) = -\infty.$$

• Jeżeli:

$$\left[\frac{a\varepsilon}{(\mu+\lambda)\psi(0)} \right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}} < u_0 < \left[\frac{a\varepsilon}{(\varepsilon(\mu+\lambda)-\nu+\rho)\psi(0)} \right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}},$$

wtedy:

$$\exists! \tau > 0 \left(\frac{d}{dt}\psi(t)\Big|_{t=\tau} = 0 \right),$$

$$\forall t \in [0, \tau) \left(\frac{d}{dt}\psi(t) > 0 \right) \& \forall t > \tau \left(\frac{d}{dt}\psi(t) < 0 \right)$$

oraz:

$$\lim_t \frac{d}{dt}\psi(t) = -\infty.$$

• Jeżeli:

$$u_0 = \left[\frac{a\varepsilon}{(\varepsilon(\mu+\lambda)-\nu+\rho)\psi(0)} \right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}},$$

to:

$$\forall t \geq 0 \left(\frac{d}{dt}\psi(t) > 0 \right) \& \lim_t \frac{d}{dt}\psi(t) = 0.$$

• Jeżeli:

$$u_0 > \left[\frac{a\varepsilon}{(\varepsilon(\mu+\lambda)-\nu+\rho)\psi(0)} \right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}},$$

wtedy:

$$\forall t > 0 \left(\frac{d}{dt}\psi(t) > 0 \right) \& \lim_t \frac{d}{dt}\psi(t) = +\infty.$$

Konkluzja 2. Jeżeli para u, ψ jest rozwiązaniem układu (7.33) ze sterowaniem $s(t) = 0$ na półosi czasu $[0, +\infty)$ i warunkiem początkowym $u(0) = u_0 > 0$,

$0 < \psi(0) < 1$, wówczas (przy założeniach (7.18), (7.19)) funkcja ψ spełnia alternatywnie jeden z następujących warunków:

- ✓ monotonicznie rośnie,
- ✓ monotonicznie maleje,
- ✓ istnieje nie więcej niż jeden moment/punkt $\tau > 0$, w którym $\frac{d}{dt}\psi(t)\Big|_{t=\tau} = 0$;
jeżeli punkt taki istnieje, wówczas funkcja rośnie na przedziale $[0, \tau)$ oraz maleje do $-\infty$ na przedziale $(\tau, +\infty)$. Analogiczne własności ma funkcja $\varphi(t) = \psi(t) - e^{-\rho t}$. Zachodzi więc następujący warunek:

$$\frac{d}{dt}\varphi(t)\Big|_{t=t'} = 0 \Rightarrow \forall t > t' (\varphi(t) < \varphi(t')). \quad (7.35)$$

Warunek ten zachowuje moc także wówczas, gdy w układzie (7.33) pól czasu $[0, +\infty)$ zastąpimy przedziałem $[t_0, +\infty)$ z dowolnym momentem początkowym $t_0 > 0$ oraz warunkiem początkowym $u(t_0) = u_0 > 0$, $0 < \psi(t_0) < 1$.

7.4. Rozwiązanie zadania sterowania optymalnego wzrostem

W twierdzeniu, które formułujemy poniżej, zakładamy, że parametry zadania $\varepsilon, \lambda, \mu, \nu, \rho$ spełniają warunki (7.18), (7.19).

■ **Twierdzenie 7.5.** Postać rozwiązania zadania (7.16)-(7.17) zależy od początkowego technicznego uzbrojenia pracy u_0 oraz długości horyzontu T .

- $u_0 > \bar{u} = \left(\frac{a\varepsilon}{\mu+\lambda+\rho}\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$. Jeżeli horyzont T jest długi, tzn. spełnia warunek:

$$t_1 > c_1 \ln d_1 + c_2 \ln d_2,$$

$$c_1 = \frac{1-\varepsilon}{(1-\varepsilon)(\mu+\lambda)+\nu} (> 0), d_1 = u^0 \left(\frac{\mu+\lambda}{a\varepsilon}\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}} (= \frac{u_0}{\bar{u}} > 1),$$

$$c_2 = \frac{1}{\varepsilon(\mu+\lambda)-\nu+\rho} (> 0), d_2 = \frac{\mu+\lambda}{(1-\varepsilon)(\mu+\lambda)+\nu-\rho} (> 1),$$

wtedy rozwiązaniem zadania jest proces $(s^*, u^*)_T$:

$$s^*(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \tau_1), \\ \bar{s}, & t \in [\tau_1, \tau_2), \\ 0, & t \in [\tau_2, t_1], \end{cases} \quad (7.36)$$

$$u^*(t) = \begin{cases} u_0 e^{-(\mu+\lambda)t}, & t \in [0, \tau_1), \\ u^*(\tau_1) e^{\frac{\nu}{1-\varepsilon}(t-\tau_1)}, & t \in [\tau_1, \tau_2), \\ u^*(\tau_2) e^{-(\mu+\lambda)(t-\tau_2)}, & t \in [\tau_2, t_1], \end{cases}$$

gdzie $\tau_1 = c_1 \ln d_1$, $\tau_2 = t_1 - c_2 \ln d_2$, $\bar{s} = \frac{\varepsilon[(1-\varepsilon)(\mu+\lambda)+\nu]}{(1-\varepsilon)(\mu+\lambda+\rho)} \in (0,1)$, $u^*(\tau_1) = \bar{u} e^{\frac{\nu}{1-\varepsilon}\tau_1}$.

Jeżeli $t_1 \leq c_1 \ln d_1 + c_2 \ln d_2$, wtedy znika faza środkowa (przedział $[\tau_1, \tau_2)$) i rozwiązaniem zadania jest proces $(s^*, u^*)_T$:

$$s^*(t) = 0, u^*(t) = u_0 e^{-(\mu+\lambda)t}, t \in T. \quad (7.37)$$

- $u_0 = \bar{u} = \left(\frac{a\varepsilon}{\mu+\lambda+\rho}\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$. Jeżeli horyzont T jest długi, $t_1 > c_2 \ln d_2$, to rozwiązaniem zadania jest proces $(s^*, u^*)_T$:

$$s^*(t) = \begin{cases} \bar{s}, & t \in [0, \tau), \\ 0, & t \in [\tau, t_1], \end{cases} \quad (7.38)$$

$$u^*(t) = \begin{cases} \bar{u} e^{\frac{\nu}{1-\varepsilon}t}, & t \in [0, \tau), \\ u^*(\tau) e^{-(\mu+\lambda)(t-\tau)}, & t \in [\tau, t_1], \end{cases}$$

gdzie: $\tau = t_1 - c_2 \ln d_2$.

Jeżeli horyzont T jest krótki, $t_1 \leq c_2 \ln d_2$, wówczas znika faza pierwsza i optymalny proces $(s^*, u^*)_T$ ma postać (7.37).

- $u_0 < \bar{u} = \left(\frac{a\varepsilon}{\mu+\lambda+\rho}\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$. Jeżeli horyzont T jest długi, $t_1 > c_2 \ln d_2 + c_4 \ln d_4$,
gdzie:

$$c_4 = \frac{1}{(1-\varepsilon)(\mu+\lambda)+\nu-\rho} (> 0)$$

$$d_4 = \frac{c_5 - u_0^{\frac{1-\varepsilon}{a\varepsilon}}}{c_5 - \frac{1}{\mu+\lambda}} (> 1), c_5 = \frac{a(1-\varepsilon)}{(1-\varepsilon)(\mu+\lambda)+\nu-\rho} (> 0),$$

wtedy rozwiązaniem zadania jest proces $(s^*, u^*)_T$:

$$s^*(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \tau_1), \\ \bar{s}, & t \in [\tau_1, \tau_2), \\ 0, & t \in [\tau_2, t_1], \end{cases} \quad (7.39)$$

$$u^*(t) = \begin{cases} [ce^{-(1-\varepsilon)(\mu+\lambda)t} + de^{\nu t}]^{\frac{1}{1-\varepsilon}}, & t \in [0, \tau_1), \\ u^*(\tau_1)e^{\frac{\nu}{1-\varepsilon}(t-\tau_1)}, & t \in [\tau_1, \tau_2), \\ u^*(\tau_2)e^{-(\mu+\lambda)(t-\tau_2)}, & t \in [\tau_2, t_1], \end{cases}$$

gdzie (zob. (7.30)):

$$c = u_0^{1-\varepsilon} - d, \quad d = \frac{a(1-\varepsilon)}{(1-\varepsilon)(\mu+\lambda)+\nu} > 0,$$

$$\tau_1 = c_4 \ln d_4, \quad \tau_2 = t_1 - c_2 \ln d_2$$

oraz, podobnie jak w (7.36), $u^*(\tau_1) = \bar{u}e^{\frac{\nu}{1-\varepsilon}\tau_1}$ (parametry c_2, d_2 nie zmieniają się).

Jeżeli $c_2 \ln d_3 < t_1 \leq c_2 \ln d_2 + c_4 \ln d_4$, gdzie:

$$d_3 = \frac{a\varepsilon u_0^{\varepsilon-1}}{a\varepsilon u_0^{\varepsilon-1-\varepsilon(\mu+\lambda)+\nu-\rho}} (> 1),$$

wtedy znika faza środkowa, $\tau_1 = \tau_2 = \tau \in \text{int } T$ i optymalny proces $(s^*, u^*)_T$ przyjmuje postać:

$$s^*(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \tau), \\ 0, & t \in [\tau, t_1], \end{cases} \quad (7.40)$$

$$u^*(t) = \begin{cases} [ce^{-(1-\varepsilon)(\mu+\lambda)t} + de^{\nu t}]^{\frac{1}{1-\varepsilon}}, & t \in [0, \tau), \\ u^*(\tau)e^{-(\mu+\lambda)(t-\tau)}, & t \in [\tau, t_1], \end{cases}$$

moment τ jest pierwiastkiem równania:

$$1 + d(\tau)e^{-(v-\rho)\tau} = e^{[\varepsilon(\mu+\lambda)-v+\rho](\tau-t_1)}, \quad (7.41)$$

$$d(\tau) = \frac{[-\varepsilon(\mu+\lambda)+v-\rho]u^*(\tau)^{1-\varepsilon}}{a\varepsilon} (< 0).$$

Jeżeli horyzont T jest krótki, $t_1 \leq c_2 \ln d_3$, wtedy optymalny proces $(s^*, u^*)_T$ redukuje się do postaci (7.37).

Dowód podzielimy na dwie części.

Część I. W myśl twierdzenia 7.4 postać trajektorii optymalnej stopy inwestycji s^* zależy od przebiegu funkcji $\varphi^*(t) = \psi^*(t) - e^{-\rho t}$, $t \in T$. Rozpatrzmy kolejno następujące przypadki.

I.1. $\varphi^*(0) > 0$. Z (7.22) wynika, że:

$$\varphi^*(t_1) = \psi^*(t_1) - e^{-\rho t_1} = -e^{-\rho t_1} < 0, \quad (7.42)$$

więc (wobec ciągłości funkcji φ^*):

$$\exists \tau_1 \in (0, t_1)(\varphi^*(\tau_1) = 0) \text{ \& \& } \forall t \in [0, \tau_1)(\varphi^*(t) > 0)$$

oraz:

$$\forall t \in [0, \tau_1)(s^*(t) = 1).$$

Nie może zachodzić warunek $\left. \frac{d}{dt} \varphi^*(t) \right|_{t=\tau_1} > 0$. Gdyby zachodził, wtedy z (7.32) wynikałoby, że $\forall t \neq \tau_1(\varphi^*(t) > 0)$, czyli $s^*(t) = 1$ wszędzie na T zważywszy, że sterowanie s^* jest funkcją z klasy $\tilde{C}^0(T \rightarrow U)$. Wtedy w szczególności $\varphi^*(t_1) = \psi^*(t_1) - e^{-\rho t_1} > 0$, tj. $\psi^*(t_1) > e^{-\rho t_1} > 0$, wbrew (7.22).

Niemożliwy jest także przypadek $\left. \frac{d}{dt} \varphi^*(t) \right|_{t=\tau_1} \leq 0$ oraz $\varphi^*(\theta) > 0$ w pewnym momencie $\theta \in (\tau_1, t_1]$. Istotnie, musiałby wówczas istnieć moment $t' \in (\tau_1, \theta]$, w którym $\varphi^*(t') > 0$ oraz $\left. \frac{d}{dt} \varphi^*(t) \right|_{t=t'} > 0$, a to, zgodnie z (7.32), oznacza, że $\forall t \in [t', t_1](\varphi^*(t) > \varphi^*(t') > 0)$, w szczególności:

$$\varphi^*(t_1) = \psi^*(t_1) - e^{-\rho t_1} = -e^{-\rho t_1} > 0,$$

co jest oczywiście niemożliwe. Zatem, jeżeli $\varphi^*(0) > 0$, to istnieje taki moment $\tau_1 \in \text{int } T$, że $\varphi^*(\tau_1) = 0$ oraz:

$$\forall t \in [0, \tau_1)(\varphi^*(t) > 0) \ \& \ \forall t \in (\tau_1, t_1](\varphi^*(t) \leq 0).$$

Na przedziale $[0, \tau_1)$ sterowanie $s^*(t) = 1$. Z (7.32) oraz ciągłości funkcji φ^* wynika, iż istnieje taki moment $\tau_2 \in [\tau_1, t_1)$, że $\forall t \in (\tau_2, t_1](\varphi^*(t) < 0)$. Wówczas (zważywszy, że sterowanie jest w punkcie τ_2 funkcją ciągłą prawostronnie) dochodzimy do konkluzji, że na całym przedziale $[\tau_2, t_1]$ $s^*(t) = 0$.

Na przedziale $[\tau_1, \tau_2]$ mamy $\varphi^*(t) \leq 0$.

I.2. $\varphi^*(0) = 0$. Rozumując jak w punkcie I.1, dochodzimy do wniosku, że:

$$\exists \tau \in T \setminus \{t_1\} \ \forall t \in [0, \tau](\varphi^*(t) \leq 0) \ \& \ \forall t \in (\tau, t_1](\varphi^*(t) < 0).$$

Na przedziale $[\tau, t_1]$ sterowanie $s^*(t) = 0$.

I.3. $\varphi^*(0) < 0$. Wówczas albo $\varphi^*(t) < 0$ (czyli $s^*(t) = 0$) wszędzie na T , albo:

$$\exists \tau_1 \in \text{int } T (\varphi^*(\tau_1) = 0) \ \& \ \forall t \in [0, \tau_1)(\varphi^*(t) < 0).$$

Warunek $\varphi^*(\tau_1) = 0$ & $\left. \frac{d}{dt} \varphi^*(t) \right|_{t=\tau_1} > 0$ jest wykluczony, gdyż wtedy (zgodnie z (7.32)) $\forall t \in (\tau_1, t_1](\varphi^*(t) > 0)$, co jest sprzeczne z (7.42). Podobnie jak w punkcie I.1, niemożliwy jest również przypadek $\varphi^*(\tau_1) = 0$, $\left. \frac{d}{dt} \varphi^*(t) \right|_{t=\tau_1} \leq 0$ oraz $\varphi^*(\theta) > 0$ w pewnym momencie $\theta \in (\tau_1, t_1]$. Jednocześnie $\exists \tau_2 \in [\tau_1, t_1) \ \forall t \in (\tau_2, t_1](\varphi^*(t) < 0)$, czyli $s^*(t) = 0$ na $[\tau_2, t_1]$.

Reasumując, jeżeli $\varphi^*(0) < 0$, wtedy albo $\forall t \in T (\varphi^*(t) < 0)$ i $s^*(t) = 0$ wszędzie na T , albo $\exists \tau_1, \tau_2$ ($0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 < t_1$):

$$\forall t \in [0, \tau_1)(\varphi^*(t) < 0) \ \& \ \forall t \in [\tau_1, \tau_2](\varphi^*(t) \leq 0) \ \& \ \forall t \in (\tau_2, t_1](\varphi^*(t) < 0).$$

Na przedziałach $[0, \tau_1)$, $[\tau_2, t_1]$ sterowanie $s^*(t) = 0$.

I.4. Istnieją momenty $\tau_1, \tau_2 \in T$ ($0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 < t_1$), w których $\varphi^*(\tau_1) = \varphi^*(\tau_2) = 0$. Pokażemy, że wówczas $\forall t \in [\tau_1, \tau_2] (\varphi^*(t) = 0)$, a wtedy:

$$\forall t \in [\tau_1, \tau_2) \left(s^*(t) = \bar{s} = \frac{\varepsilon[(1-\varepsilon)(\mu+\lambda)+\nu]}{(1-\varepsilon)(\mu+\lambda+\rho)} \in (0,1), \quad u^*(t) = \bar{u}e^{\frac{\nu}{1-\varepsilon}t} \right),$$

gdzie $\bar{u} = \left(\frac{a\varepsilon}{\mu+\lambda+\rho} \right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$; zob. (7.25), (7.26). Istotnie, z dotychczasowych wywodów wynika, że $\varphi^*(t) \leq 0$ na przedziale $[\tau_1, \tau_2]$. Załóżmy więc, że $\exists \tau \in (\tau_1, \tau_2)(\varphi^*(\tau) < 0)$. Wówczas:

$$\exists (\tau'_1, \tau'_2) \subset (\tau_1, \tau_2) \quad \forall t \in (\tau'_1, \tau'_2)(\varphi^*(t) < 0) \text{ \& }$$

$$\& \exists t' \in (\tau'_1, \tau'_2) \left(\frac{d}{dt} \varphi^*(t) \Big|_{t=t'} = 0 \right)$$

(na przedziale (τ'_1, τ'_2) sterowanie $s^*(t) = 0$, a funkcja φ^* jest w punkcie t' różniczkowalna) oraz:

$$\forall t \in (\tau'_1, t') \left(\frac{d}{dt} \varphi^*(t) \Big|_{t=\tau_0} < 0 \right) \& \forall t \in (t', \tau'_2) \left(\frac{d}{dt} \varphi^*(t) \Big|_{t=\tau_0} > 0 \right),$$

co jest sprzeczne z (7.35).

Dochodzimy do następujących wniosków.

Wniosek 1. Jeżeli funkcja φ^* w twierdzeniu 7.4 spełnia warunek $\varphi^*(0) > 0$, to albo sterowanie optymalne ma postać:

$$s^*(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \tau_1), \\ \bar{s}, & t \in [\tau_1, \tau_2), \\ 0, & t \in [\tau_2, t_1] \end{cases} \quad (7.43)$$

($\tau_1, \tau_2 \in \text{int } T$; $\tau_1 < \tau_2$), albo

$$s^*(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \tau), \\ 0, & t \in [\tau, t_1] \end{cases} \quad (7.44)$$

($\tau \in \text{int } T$).

Wniosek 2. Jeżeli $\varphi^*(0) = 0$, to:

$$s^*(t) = \begin{cases} \bar{s}, & t \in [0, \tau) \\ 0, & t \in [\tau, t_1] \end{cases} \quad (7.45)$$

($\tau \in \text{int } T$) albo

$$s^*(t) = 0, \quad t \in T. \quad (7.46)$$

Wniosek 3. Jeżeli $\varphi^*(0) < 0$, wtedy:

$$s^*(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \tau_1) \\ \bar{s}, & t \in [\tau_1, \tau_2) \\ 0, & t \in [\tau_2, t_1] \end{cases} \quad (7.47)$$

($\tau_1, \tau_2 \in \text{int } T$; $\tau_1 < \tau_2$) albo sterowanie optymalne ma postać (7.46).

Część II. Konkretna postać trajektorii s_T^* zależy więc od wartości funkcji φ^* w momencie $t = 0$, a o tym decyduje początkowy poziom technicznego uzbrojenia pracy u_0 oraz długość horyzontu T .

II.1. $u_0 > \bar{u} = \left(\frac{a\varepsilon}{\mu + \lambda + \rho}\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$ oraz horyzont T jest długi (ocenę długości horyzontu podamy dalej). Załóżmy, że w pewnym momencie $\tau \in T$ spełnione są jednocześnie warunki:

$$\varphi^*(\tau) \geq 0 \text{ oraz } u^*(\tau) > \bar{u}e^{\frac{\nu}{1-\varepsilon}\tau}.$$

Wówczas:

(i) Jeżeli $\varphi^*(\tau) = 0$ (równoważnie $\psi^*(\tau) = e^{-\rho\tau}$), to:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \varphi^*(t) \Big|_{t=\tau} &= \frac{d}{dt} \psi^*(t) \Big|_{t=\tau} + \rho e^{-\rho\tau} = -[a\varepsilon s^*(\tau)u^*(\tau)^{\varepsilon-1}e^{\nu\tau} - \\ &\quad - (\mu + \lambda)]\psi^*(\tau) - a\varepsilon(1 - s^*(\tau))u^*(\tau)^{\varepsilon-1}e^{(\nu-\rho)\tau} + \rho e^{-\rho\tau} = \\ &= -[a\varepsilon s^*(\tau)u^*(\tau)^{\varepsilon-1}e^{\nu\tau} - (\mu + \lambda)]e^{-\rho\tau} - a\varepsilon(1 - s^*(\tau))u^*(\tau)^{\varepsilon-1}e^{(\nu-\rho)\tau} + \\ &\quad + \rho e^{-\rho\tau} = \\ &= e^{-\rho\tau}[\mu + \lambda + \rho - a\varepsilon u^*(\tau)^{\varepsilon-1}e^{\nu\tau}] > \rho e^{-\rho\tau} > 0. \end{aligned}$$

(ii) Jeżeli $\varphi^*(t) > 0$ (równoważnie $\psi^*(\tau) > e^{-\rho\tau}$), to $s^*(t) = 1$, czyli:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \varphi^*(t) \Big|_{t=\tau} &= \frac{d}{dt} \psi^*(t) \Big|_{t=\tau} + \rho e^{-\rho\tau} = -[a\varepsilon u^*(\tau)^{\varepsilon-1}e^{\nu\tau} - (\mu + \lambda)]\psi^*(\tau) + \\ &\quad + \rho e^{-\rho\tau} > \rho e^{-\rho\tau}. \end{aligned}$$

W obu przypadkach w świetle (7.32) dochodzimy do sprzeczności z warunkiem transwersalności (7.22). Prawdziwa jest zatem implikacja:

$$\forall t \in T \left(u^*(t) > \bar{u} e^{\frac{\nu}{1-\varepsilon}t} \Rightarrow \varphi^*(t) < 0 \right),$$

gdzie $\bar{u} = \left(\frac{a\varepsilon}{\mu+\lambda+\rho} \right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$. Warunek ten nie zależy od długości horyzontu T . Ponieważ $u(0) = u_0 > \bar{u}$, więc w szczególności $\varphi^*(0) < 0$ i wobec tego na pewnym przedziale $[0, \tau_1)$ sterowanie $s^*(t) = 0$. Trajektoria u_T^* jest na tym przedziale funkcją malejącą ze stopą $-(\mu + \lambda)$ jako rozwiązanie równania różniczkowego:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u(t) &= -(\mu + \lambda)u(t), \\ u(0) &= u_0, \end{aligned}$$

co umożliwia wyznaczenie momentu τ_1 , w którym $u^*(\tau_1) = \bar{u} e^{\frac{\nu}{1-\varepsilon}\tau_1}$:

$$\tau_1 = c_1 \ln d_1, \quad (7.48)$$

$$c_1 = \frac{1-\varepsilon}{(1-\varepsilon)(\mu+\lambda)+\nu} (> 0), \quad d_1 = u_0 \left(\frac{\mu+\lambda+\rho}{a\varepsilon} \right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}} (= \frac{u_0}{\bar{u}} > 1).$$

Taki moment $\tau_1 \in T$ istnieje, o ile horyzont T jest odpowiednio długi, $t_1 > c_1 \ln d_1$. Jest to jednocześnie moment, w którym $\varphi^*(\tau_1) = 0$. Na przedziale $[0, \tau_1)$ sterowaniu $s^*(t) = 0$ odpowiada optymalna trajektoria technicznego uzbrojenia pracy:

$$u^*(t) = u_0 e^{-(\mu+\lambda)t}.$$

Gdy $t_1 > \tau_1 = c_1 \ln d_1$, wówczas wobec (7.22) musi istnieć moment $\tau_2 \in (\tau_1, t_1)$, w którym $\varphi^*(\tau_2) = 0$ oraz $\varphi^*(t) < 0$ na przedziale $(\tau_2, t_1]$, tzn. $\forall t \in [\tau_2, t_1] (s^*(t) = 0)$ i trajektoria technicznego uzbrojenia pracy u_T^* jest w tej fazie znowu funkcją malejącą ze stopą $-(\mu + \lambda)$. Moment τ_2 można ustalić, zważywszy że $\forall t \in [\tau_2, t_1]$ spełniony jest układ równań:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u^*(t) &= -(\mu + \lambda)u^*(t), \\ \frac{d}{dt} \psi^*(t) &= (\mu + \lambda) \psi^*(t) - a\varepsilon u^*(t)^{\varepsilon-1} e^{(\nu-\rho)t}, \end{aligned} \quad (7.49)$$

$$\begin{aligned}\psi^*(\tau_2) &= e^{-\rho\tau_2} \text{ (tj. } \varphi^*(\tau_2) = 0), \quad \psi^*(t_1) = 0, \quad u^*(\tau_2) = \bar{u}e^{\frac{\nu}{1-\varepsilon}\tau_2}, \quad \bar{u} = \\ &= \left(\frac{a\varepsilon}{\mu+\lambda+\rho}\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}.\end{aligned}$$

Rozwiązując ten układ, dostajemy:

$$\tau_2 = t_1 - c_2 \ln d_2, \quad (7.50)$$

$$c_2 = \frac{1}{\varepsilon(\mu+\lambda)-\nu+\rho} (> 0), \quad d_2 = \frac{\mu+\lambda}{(1-\varepsilon)(\mu+\lambda)+\nu-\rho} (> 1).$$

Gdy $\tau_2 > \tau_1$, wtedy $\varphi^*(\tau_1) = \varphi^*(\tau_2) = 0$ i zgodnie z I.4:

$$\forall t \in [\tau_1, \tau_2] (\varphi^*(t) = 0).$$

Pojawia się wówczas środkowy przedział czasu $[\tau_1, \tau_2]$, na którym optymalny proces ma postać (7.25)-(7.26). Przejście od domkniętego przedziału $[\tau_1, \tau_2]$ do prawostronnie otwartego przedziału $[\tau_1, \tau_2]$ jest konsekwencją prawostronnej ciągłości trajektorii s_T^* w punkcie τ_2 . Z takimi przypadkami będziemy mieli jeszcze niekiedy do czynienia w dalszej części.

Jeżeli więc początkowe techniczne uzbrojenie pracy jest wysokie, $u_0 > \bar{u} = \left(\frac{a\varepsilon}{\mu+\lambda+\rho}\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$ oraz horyzont T jest długi, $t_1 > c_1 \ln d_1 + c_2 \ln d_2$, wtedy sterowanie optymalne ma postać (7.47) i warunki optymalności spełnia proces $(s^*, u^*)_T$ postaci (7.36) z momentami przełączenia τ_1, τ_2 zdefiniowanymi w (7.48), (7.50).

Jeżeli horyzont T jest krótki, $t_1 \leq c_1 \ln d_1 + c_2 \ln d_2$, wówczas warunki optymalności spełnia proces $(s^*, u^*)_T$ postaci (7.37) ze sterowaniem tożsamościowo równym 0. Wraz z rosnącą długością horyzontu T rośnie długość fazy środkowej (przedział $[\tau_1, \tau_2]$).

II.2. $u_0 = \bar{u} = \left(\frac{a\varepsilon}{\mu+\lambda+\rho}\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$. Załóżmy, że w pewnym momencie $\tau \in T$ zachodzą jednocześnie warunki:

$$\varphi^*(\tau) > 0 \text{ oraz } u^*(\tau) = \bar{u}e^{\frac{\nu}{1-\varepsilon}\tau}.$$

Rozumując podobnie jak w **II.1(ii)**, dochodzimy do sprzeczności z warunkiem transwersalności (7.22). Prawdziwa jest zatem implikacja:

$$\forall t \in T \left(u^*(t) = \bar{u} e^{\frac{\nu}{1-\varepsilon}t} \Rightarrow \varphi^*(t) \leq 0 \right).$$

W szczególności $\varphi^*(0) \leq 0$. Zatem: $\forall t \in T (\varphi^*(t) < 0)$, albo $\varphi^*(0) = 0$ & $\forall t \in T \setminus \{0\} (\varphi^*(t) < 0)$ (w obu przypadkach sterowanie $s^*(t) = 0$ wszędzie na T), albo $\exists \tau \in \text{int } T \forall t \in [0, \tau] (\varphi^*(t) = 0)$ & $\forall t \in (\tau, t_1] (\varphi^*(t) < 0)$ (zob. **I.4**); wówczas sterowanie ma postać (7.46). Moment $\tau \in \text{int } T$ rozpoczynający końcową fazę wzrostu ze sterowaniem $s^*(t) = 0$ jest identyczny z momentem τ_2 w (7.50):

$$\tau = t_1 - c_2 \ln d_2. \quad (7.51)$$

Moment ten pojawia się, gdy $t_1 > c_2 \ln d_2$. W fazie pierwszej (na przedziale $[0, \tau)$, na którym $\varphi^*(t) = 0$) optymalny proces $(s^*, u^*)_T$ ma postać (7.25), (7.26), natomiast w fazie drugiej (na przedziale $[\tau, t_1]$):

$$s^*(t) = 0 \text{ oraz } u^*(t) = u^*(\tau) e^{-(\mu+\lambda)(t-\tau)}.$$

Jeżeli zatem początkowe techniczne uzbrojenie pracy $u_0 = \bar{u} = \left(\frac{a\varepsilon}{\mu+\lambda+\rho} \right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$ oraz horyzont T jest długi, $t_1 > c_2 \ln d_2$, to sterowanie ma postać (7.45) i warunki optymalności spełnia proces $(s^*, u^*)_T$ postaci (7.38) z momentem przełączenia τ zdefiniowanym w (7.51). Jeżeli horyzont T jest krótki, $t_1 \leq c_2 \ln d_2$, wtedy warunki optymalności spełnia proces $(s^*, u^*)_T$ postaci (7.37) ze sterowaniem tożsamościowo równym 0. Wraz ze wzrostem długości horyzontu T rośnie długość fazy pierwszej (przedział $[0, \tau]$).

II.3. $u_0 < \bar{u} = \left(\frac{a\varepsilon}{\mu+\lambda+\rho} \right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$. Możliwe są wszystkie trzy przypadki:

$$\varphi^*(0) > 0, \quad \varphi^*(0) = 0, \quad \varphi^*(0) < 0.$$

Jeżeli $\varphi^*(0) > 0$, to zgodnie z **Wnioskiem 1** sterowanie optymalne s_T^* ma postać (7.43) lub (7.44).

Jeżeli $\varphi^*(0) = 0$, to wprowadź zgodnie z **Wnioskiem 2** sterowanie optymalne może mieć postać (7.45) lub (7.46), ale przy niskim technicznym uzbrojeniu pracy $u_0 < \bar{u}$ dopuszczalna jest tylko postać druga. Faktycznie, zakładając, że $s^*(t) = \bar{s}$ na pewnym przedziale $[0, \tau)$, dostajemy:

$$u^*(t) = \bar{u} e^{\frac{\nu}{1-\varepsilon} t}, \quad t \in [0, \tau),$$

czyli, wbrew założeniu, $u^*(0) = u_0 = \bar{u}$.

Jeżeli $\varphi^*(0) < 0$, wówczas wprowadź zgodnie z **Wnioskiem 3** możliwe jest sterowanie (7.47) lub (7.46), ale przy założeniu $u_0 < \bar{u}$ dopuszczalna jest tylko trajektoria (7.46). Gdyby bowiem sterowanie miało postać (7.47), wtedy w optymalnym procesie $(s^*, u^*)_T$ w pierwszej fazie (na przedziale $[0, \tau_1)$ mielibyśmy:

$$\begin{aligned} s^*(t) &= 0, \\ u^*(t) &= u_0 e^{-(\mu+\lambda)t}, \end{aligned}$$

a następnie w momencie τ_1 :

$$u^*(\tau_1) = \bar{u} e^{\frac{\nu}{1-\varepsilon} \tau_1},$$

co prowadzi do sprzeczności z założeniem:

$$u_0 = \bar{u} e^{(\mu+\lambda+\frac{\nu}{1-\varepsilon})\tau_1} > \bar{u} (> 0).$$

Reasumując, gdy $u_0 < \bar{u}$, wtedy sterowanie optymalne s_T^* ma postać (7.43) lub (7.44) lub (7.46).

Sterowanie ma postać (7.46), gdy horyzont jest krótki. Wówczas $\forall t \in T$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u^*(t) &= -(\mu + \lambda) u^*(t), \\ \frac{d}{dt} \psi^*(t) &= (\mu + \lambda) \psi^*(t) - a \varepsilon u^*(t)^{\varepsilon-1} e^{(v-\rho)t}, \\ \psi^*(0) &= 1 \text{ (tj. } \varphi^*(0) = 0), \quad \psi^*(t_1) = 0, \quad u^*(0) = u_0. \end{aligned}$$

Rozwiązanie tego układu przebiega podobnie jak rozwiązanie układu (7.49) (należy postawić 0, u_0 zamiast τ_2 , $u^*(\tau_2)$). Rozwiązując go, dostajemy ocenę długości horyzontu:

$$t_1 \leq c_2 \ln d_3, \quad (7.52)$$

$$d_3 = \frac{a\varepsilon u_0^{\varepsilon-1}}{a\varepsilon u_0^{\varepsilon-1} - \varepsilon(\mu+\lambda) + \nu - \rho} (> 1)$$

(wartość parametru c_2 nie zmienia się; zob. (7.50)). Gdy $t_1 \leq c_2 \ln d_3$, proces optymalny $(s^*, u^*)_T$ ma postać (7.37).

Jeżeli $t_1 > c_2 \ln d_3$, to sterowanie optymalne s_T^* ma postać (7.43) lub (7.44). Wszystkie trzy fazy wzrostu występują, gdy horyzont T jest długi:

$$t_1 > c_2 \ln d_2 + c_4 \ln d_4, \quad (7.53)$$

$$c_4 = \frac{1}{(1-\varepsilon)(\mu+\lambda) + \nu - \rho} (> 0)$$

$$d_4 = \frac{c_5 - u_0^{1-\varepsilon}}{c_5 - \frac{a\varepsilon}{\mu+\lambda}} (> 1), \quad c_5 = \frac{a(1-\varepsilon)}{(1-\varepsilon)(\mu+\lambda) + \nu - \rho} (> 0).$$

(wartości parametrów c_2, d_2 nie zmieniają się; zob. (7.50)). Wówczas:

$$\tau_1 = c_4 \ln d_4, \quad \tau_2 = t_1 - c_2 \ln d_2. \quad (7.54)$$

Moment τ_1 jest punktem przecięcia/połączenia $[0, \tau_1)$ – segmentu trajektorii u_T^* z warunkiem początkowym $u^*(0) = u_0$ (odpowiadającej sterowaniu $s^*(t) = 1$) z jej $[\tau_1, \tau_2)$ – segmentem postaci (7.26) (odpowiadającej sterowaniu $s^*(t) = \bar{s}$). Otrzymujemy go, rozwiązując układ równań:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u(t) &= a u^\varepsilon(t) e^{\nu t} - (\mu + \lambda) u(t), \quad t \in [0, \tau_1), \\ u^*(\tau_1) &= \bar{u} e^{\frac{\nu}{1-\varepsilon} \tau_1}, \quad \bar{u} = \left(\frac{a\varepsilon}{\mu+\lambda+\rho} \right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Ocena momentu τ_2 (przełączenia sterowania z $s^*(t) = \bar{s}$ na $s^*(t) = 0$) jest analogiczna jak w (7.50). Sterowaniu optymalnemu (7.43) odpowiada wówczas optymalny proces wzrostu (7.39).

Jeżeli $c_2 \ln d_3 < t_1 \leq c_2 \ln d_2 + c_4 \ln d_4$, wtedy znika faza środkowa, $\tau_1 = \tau_2 = \tau \in \text{int } T$ i optymalny proces przyjmuje postać (7.40). Moment τ jest pierwiastkiem równania (41), w którym $u^*(\tau)$ jest technicznym uzbrojeniem pracy w optymalnym procesie $(s^*, u^*)_T$ ze sterowaniem $s^*(t) = 1$ na przedziale $[0, \tau)$ oraz warunkiem początkowym $u^*(0) = u_0$.

Faza środkowa (przedział $[\tau_1, \tau_2]$) pojawia się, gdy $t_1 > c_2 \ln d_2 + c_4 \ln d_4$ i rośnie wraz ze wzrostem długości horyzontu T . Jeżeli dane jest początkowe techniczne uzbrojenie pracy oraz ustalona długość horyzontu T , wtedy odpowiada im dokładnie jeden optymalny proces $(s^*, u^*)_T$ spełniający warunki twierdzenia 3. Proces ten jest rozwiązaniem zadania. ■

7.5. Charakterystyka rozwiązania

Postać rozwiązania zależy od początkowego technicznego uzbrojenia pracy u_0 oraz długości horyzontu, o której mowa w twierdzeniu 7.5.

1⁰. $u_0 > \left(\frac{a\varepsilon}{\mu+\lambda+\rho}\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$. Jeżeli horyzont T jest krótki, wówczas w celu osiągnięcia maksymalnej użyteczności konsumpcji p.c. w całym horyzoncie należy wstrzymać całkowicie inwestycje, a wytworzony dochód przeznaczyć w całości na zaspokojenie potrzeb konsumpcyjnych. Zaprzestanie inwestycji powoduje kurczenie się kapitału produkcyjnego (ze stopą $-\mu$) oraz spadek technicznego uzbrojenia pracy (ze stopą $-(\mu + \lambda)$). Dynamikę dochodu w tym okresie opisuje równanie:

$$\frac{d}{dt} y^*(t) = [(1 - \varepsilon)\lambda - \varepsilon\mu + \nu] y^*(t),$$

zatem (przy zerowych inwestycjach) stopa wzrostu dochodu:

$$\sigma_{y^*(t)} = \frac{d}{dt} y^*(t) \cdot \frac{1}{y^*(t)} = (1 - \varepsilon)\lambda - \varepsilon\mu + \nu, t \in T,$$

zależy od wartości parametrów $\varepsilon, \lambda, \mu, \nu$. Realistyczny przypadek $\sigma_{y^*(t)} < 0$ zachodzi, gdy:

$$0 < \lambda < \frac{\varepsilon\mu - \nu}{1 - \varepsilon}.$$

Ponieważ cały dochód zostaje przeznaczony na konsumpcję, więc jej dynamika w całym horyzoncie jest analogiczna jak dynamika dochodu. Przy założeniu (7.19) wydajność pracy (dochód p.c.) maleje:

$$\sigma_{w^*(t)} = \frac{d}{dt} w^*(t) \cdot \frac{1}{w^*(t)} = -\varepsilon(\mu + \lambda) + \nu < 0, t \in T.$$

Jeżeli horyzont T jest długi, to w optymalnym procesie pojawia się faza równomiernego wzrostu wszystkich trajektorii. Techniczne uzbrojenie pracy oraz wydajność pracy rosną w niej ze stopą:

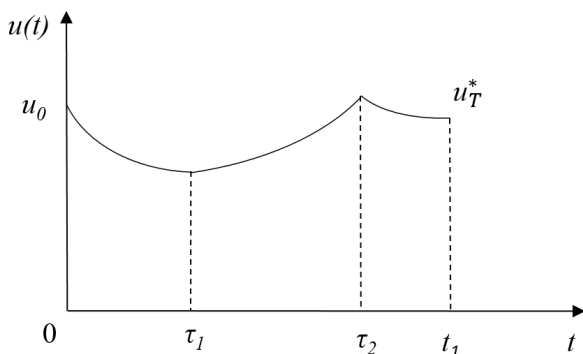
$$\sigma_{u^*}(t) = \frac{d}{dt} u^*(t) \cdot \frac{1}{u^*(t)} = \sigma_{w^*}(t) = \frac{\nu}{1-\varepsilon} > 0.$$

Z taką samą stopą rośnie również konsumpcja p.c. Kapitał produkcyjny, dochód, konsumpcja oraz inwestycje rosną ze stopą o λ wyższą:

$$\sigma_{k^*}(t) = \sigma_{y^*}(t) = \sigma_{c^*}(t) = \sigma_{i^*}(t) = \frac{\nu}{1-\varepsilon} + \lambda.$$

Fazę tę poprzedza oraz zamyka (początkowa i końcowa) faza konsumpcyjna z zerowymi inwestycjami, kurczącym się kapitałem, malejącym technicznym uzbrojeniem pracy i malejącą wydajnością pracy.

Wraz ze wzrostem długości horyzontu rośnie długość fazy środkowej (rys. 7.1).



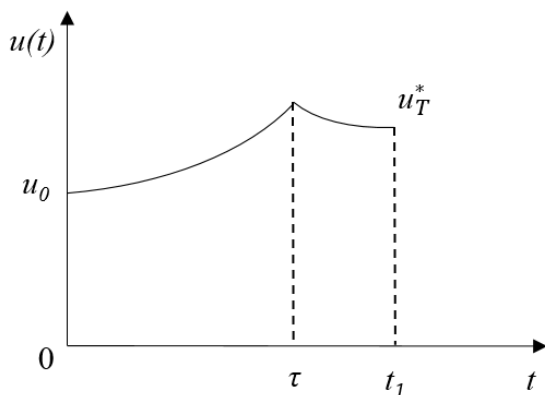
Rysunek 7.1. Optymalna trajektoria u_T^* – rozwiązanie zadania (7.16)-(7.17) – w przypadku wysokiego początkowego technicznego uzbrojenia pracy u_0 (długi horyzont czasu T)

2^0 . $u_0 = \left(\frac{a\varepsilon}{\mu + \lambda + \rho} \right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$. Jeżeli horyzont T jest krótki, to podobnie jak poprzednio maksymalną użyteczność konsumpcji p.c. w całym horyzoncie uzyskujemy, wstrzymując całkowicie inwestycje, co powoduje kurczenie się kapitału, spadek technicznego uzbrojenia pracy oraz wydajności pracy etc.

W długim horyzoncie czasu wzrost optymalny przebiega w dwóch fazach. W fazie pierwszej obserwujemy równomierny wzrost inwestycji, kapitału, dochodu

oraz konsumpcji ze stopą $\frac{v}{1-\varepsilon} + \lambda$ (analogicznie jak w środkowej fazie równomiernego wzrostu w przyp. 1⁰), a więc także technicznego uzbrojenia pracy, wydajności pracy oraz konsumpcji p.c. ze stopą $\frac{v}{1-\varepsilon} > 0$. Faza druga, konsumpcyjna, przebiega podobnie jak końcowa faza wzrostu w przyp. 1⁰.

Wraz ze wzrostem długości horyzontu rośnie długość fazy pierwszej – równomiernego wzrostu (rys. 7.2).



Rysunek 7.2. Optymalna trajektoria u_T^* – rozwiązanie zadania (7.16)-(7.17) – w przypadku, gdy początkowe techniczne uzbrojenie pracy $u_0 = \left(\frac{a\varepsilon}{\mu+\lambda+\rho}\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$ (długi horyzont czasu T)

3⁰. $u_0 < \left(\frac{a\varepsilon}{\mu+\lambda+\rho}\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$. Przy niskim początkowym technicznym uzbrojeniu pracy mamy trzy typy procesów wzrostu. Jeżeli horyzont T jest krótki, wtedy optymalny proces wzrostu przebiega podobnie jak w krótkim okresie czasu w każdym z poprzednio przedstawionych przypadków 1⁰, 2⁰. Maksymalną użyteczność konsumpcji p.c. w krótkim okresie daje wstrzymanie inwestycji (z wszystkimi tego konsekwencjami) i przeznaczenie całego wytworzonego dochodu na konsumpcję.

Jeżeli horyzont jest średniej długości, to optymalny proces wzrostu dzieli się na dwie fazy: w fazie pierwszej – inwestycyjnej – cały dochód zostaje przeznaczony na zwiększenie kapitału, w drugiej – konsumpcyjnej – cały dochód zostaje

skonsumowany. W fazie pierwszej techniczne uzbrojenie pracy szybko rośnie. W momencie początkowym jego stopa wzrostu jest równa:

$$\sigma_{u^*(0)} = au_0^{\varepsilon-1} - (\mu + \lambda) > 0$$

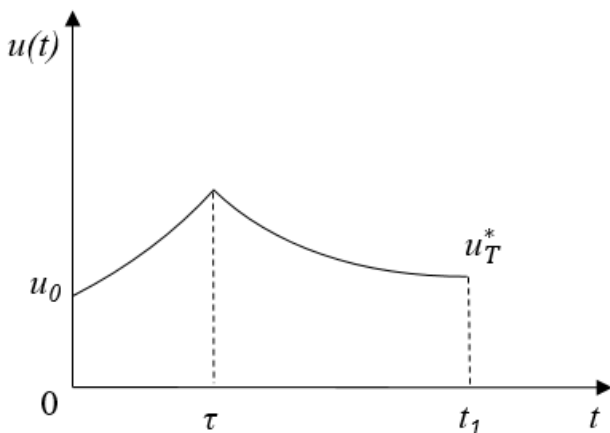
i jest tym wyższa, im niższy jest początkowy poziom technicznego uzbrojenia pracy. Wydajność pracy w tej fazie rośnie ze stopą:

$$\sigma_{w^*(t)} = \varepsilon\sigma_{u^*(t)} + \nu > 0,$$

kapitał i dochód rosną ze stopami (odpowiednio):

$$\sigma_{k^*(t)} = \sigma_{u^*(t)} + \lambda, \quad \sigma_{y^*(t)} = \varepsilon\sigma_{u^*(t)} + \nu + \lambda.$$

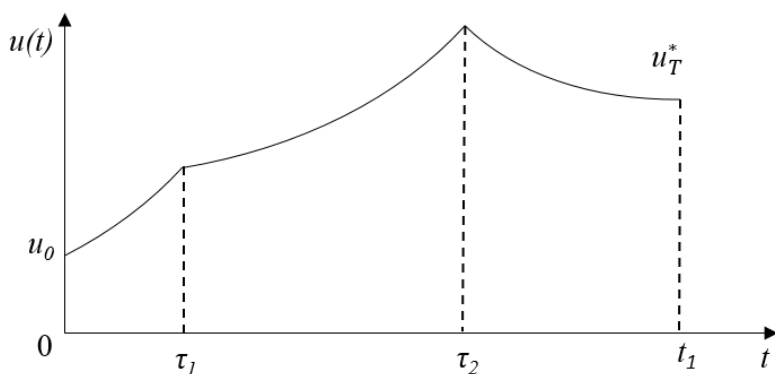
W fazie drugiej, konsumpcyjnej, wzrost przebiega podobnie jak w końcowej fazie w przyp. 1⁰ (rys. 7.3).



Rysunek 7.3. Optymalna trajektoria u_T^* – rozwiązanie zadania (7.16)-(7.17) – w przypadku niskiego początkowego technicznego uzbrojenia pracy u_0 i średniej długości horyzontu T

W długim horyzoncie czasu T optymalny proces wzrostu przebiega w trzech fazach: rozpoczyna go faza (pierwsza) inwestycyjna, po której następuje faza (druga) równomiernego wzrostu, a zamyka faza (trzecia) konsumpcyjna.

Im dłuższy jest horyzont T , tym dłuższa jest środkowa faza równomiernego wzrostu (rys.7.4).



Rysunek 7.4. Optymalna trajektoria u_T^* – rozwiązanie zadania (7.16)-(7.17) – w przypadku niskiego początkowego technicznego uzbrojenia pracy u_0 (długi horyzont czasu T)

We wszystkich rozwiązaniach, w optymalnym procesie wzrostu w fazie inwestycyjnej należy całkowicie wstrzymać konsumpcję, a w fazie konsumpcyjnej wstrzymać inwestycje. Poza tym, każdorazowo przejściu od jednej fazy do drugiej towarzyszą gwałtowne skoki w poziomach inwestycji i konsumpcji. Z ekonomicznego punktu widzenia są to rozwiązania nierealne. W realnej gospodarce niemożliwe jest ani całkowite wstrzymanie konsumpcji, ani inwestycji. Żadna gospodarka nie wytrzyma też tak gwałtownych skoków inwestycji między poszczególnymi fazami wzrostu, jakie sugeruje rozwiązanie zadania.

Rozwiązanie jest naturalnie tylko konsekwencją przyjętych założeń o mechanizmie funkcjonowania gospodarki. Do założeń tych wrócimy w punkcie 8, gdzie wyjaśnione zostaną powody ich przyjęcia. Przedstawiona będzie także postać optymalnych procesów wzrostu otrzymywanych przy dodatkowym założeniu, że stopa inwestycji $s(t)$, a tym samym także stopa konsumpcji $1 - s(t)$, w żadnym momencie czasu $t \in T$ nie może przyjmować skrajnych wartości 0 ani 1. Pokazane zostanie, że uwzględnienie tego założenia daje rozwiązania realne w świetle naszej wiedzy o funkcjonowaniu gospodarki, wskazując uprzednio, że w długich okresach czasu wszystkie optymalne procesy wzrostu w gospodarce Solowa charakteryzują się magistralnymi własnościami.

7.6. Efekt magistrali

Niezależnie od początkowego technicznego uzbrojenia pracy u_0 , w optymalnym procesie wzrostu $(s^*, u^*)_T$ w długim okresie czasu pojawia się faza równomiernego wzrostu. Gdy $u_0 \neq \bar{u} = \left(\frac{a\varepsilon}{\mu+\lambda+\rho}\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$ jest to faza środkowa, gdy $u_0 = \bar{u}$ jest to faza początkowa. Wszystkie zmienne *per capita* (techniczne uzbrojenie pracy, wydajność pracy, inwestycje p.c., konsumpcja p.c.) rosną w niej z taką samą stopą $\frac{\nu}{1-\varepsilon}$. Kapitał, dochód, inwestycje, konsumpcja rosną ze stopą odpowiednio o λ wyższą. Faza ta dominuje w długich okresach czasu (w długim horyzoncie T). Jej długość rośnie nieograniczenie, gdy $t_1 \rightarrow +\infty$.

W ekonomii matematycznej tego rodzaju procesy (trajektorie) wzrostu ze stałymi dodatnimi stopami nazywamy procesami stacjonarnymi lub trajektoriami równomiernego wzrostu. Aby w gospodarce Solowa dynamikę technicznego uzbrojenia pracy u_T oraz na przykład konsumpcji p.c. γ_T opisywały trajektorie równomiernego wzrostu, czyli funkcje postaci:

$$u(t) = u_0 e^{\sigma_u t}, \gamma(t) = \gamma_0 e^{\sigma_\gamma t} \quad (7.55)$$

($\sigma_u, \sigma_\gamma > 0$), muszą jednocześnie zachodzić warunki (7.15) i (7.55). Podstawiając (7.55) do (7.15), stwierdzamy, że:

$$\forall t \in T \left(\sigma u_0 e^{\sigma_u t} = a s(t) u_0^\varepsilon e^{(\sigma_u \varepsilon + \nu)t} - (\mu + \lambda) u_0 e^{\sigma_u t} \right)$$

oraz:

$$\forall t \in T \left(\gamma_0 e^{\sigma_\gamma t} = a(1 - s(t)) u_0^\varepsilon e^{(\varepsilon \sigma_u + \nu)t} \right),$$

a stąd $\sigma_u = \sigma_\gamma = \sigma = \frac{\nu}{1-\varepsilon} > 0$ oraz:

$$s(t) = s = \frac{u_0^{1-\varepsilon} [\nu + (1-\varepsilon)(\mu+\lambda)]}{a(1-\varepsilon)} \in (0,1). \quad (7.56)$$

Z taką samą stopą $\sigma = \frac{\nu}{1-\varepsilon}$ w stacjonarnym procesie rośnie także wydajność pracy. Kapitał, dochód, inwestycje i konsumpcja rosną ze stopą o λ wyższą. Nie ma innych stacjonarnych procesów ze stopami $\sigma \neq \frac{\nu}{1-\varepsilon}$. Natomiast stacjonarnych

procesów z trajektoriami technicznego uzbrojenia pracy i konsumpcji postaci (7.55) oraz stopami wzrostu $\sigma_u = \sigma_y = \sigma = \frac{\nu}{1-\varepsilon} > 0$ jest nieskończenie wiele. We wszystkich stopa inwestycji s oraz początkowe techniczne uzbrojenie pracy u_0 związane są warunkiem (7.56). Do równomiernego wzrostu ze stopą inwestycji $\sigma = \frac{\nu}{1-\varepsilon}$ w gospodarce Solowa prowadzą zatem różne strategie akumulacji spełniające warunek (7.55). Różnym strategiom akumulacji (stopom inwestycji s) odpowiadają (z dokładnością do stanu początkowego u_0) różne trajektorie równomiernego wzrostu technicznego uzbrojenia pracy, a w konsekwencji wydajności pracy, konsumpcji p.c. etc.

Powróćmy do rozwiązania $(s^*, u^*)_T$ zadania (7.16)-(7.17). W długich okresach czasu w optymalnym procesie zawsze pojawia się faza równomiernego wzrostu. Z jaką regułą akumulacji kapitału mamy do czynienia w tej fazie? Odpowiedź daje rozwiązanie następującego zadania (w dowolnie wybranym momencie czasu $t \in T$):

znaleźć:

$$\max \{y(t) - (\mu + \lambda + \rho)k(t)\}$$

przy założeniach:

$$y(t) = ak^\varepsilon(t)z^{1-\varepsilon}(t)e^{\nu t}, \quad k(t) = u(t)z(t),$$

$$u(t) = u_0 e^{\frac{\nu}{1-\varepsilon}t}, \quad z(t) = z_0 e^{\lambda t}, \quad u_0 > 0.$$

Jest to zadanie wyboru w zbiorze wszystkich stacjonarnych procesów wzrostu w gospodarce Solowa (z początkowym technicznym uzbrojeniem pracy $u_0 > 0$) takiego procesu, który w każdym momencie czasu t zapewnia maksymalną nadwyżkę dochodu ponad jego część potrzebną na odtworzenie zużytego kapitału (inwestycje restytucyjne) oraz jego wzrost:

- przeciwdziałający spadkowi konsumpcji p.c.,
- rekompensujący dyskonto użyteczności chwilowej konsumpcji p.c. w czasie.

Techniczne uzbrojenie pracy u_0 jest w nim zmienną decyzyjną. Zatrudnienie $z_0 > 0$ w momencie początkowym jest dane. Zadanie to jest równoważne z następującym prostym zadaniem wyznaczenia maksimum warunkowego funkcji wkleślej:

$$\max_{u_0 > 0} \{au_0^{\varepsilon-1} - (\mu + \lambda + \rho)u_0\},$$

które ma rozwiązanie $\bar{u}_0 = \bar{u} = \left(\frac{a\varepsilon}{\mu+\lambda+\rho}\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}} > 0$. Odpowiada mu zgodnie z (7.56)

stopa inwestycji:

$$\bar{s} = \frac{\varepsilon[(1-\varepsilon)(\mu+\lambda)+\nu]}{(1-\varepsilon)(\mu+\lambda+\rho)} \in (0,1)$$

(zob. (7.25)). Proces $(\bar{s}, \bar{u})_T$ ze stopą inwestycji $\bar{s}(t) = \bar{s}$ oraz trajektorią technicznego uzbrojenia pracy:

$$\bar{u}(t) = \bar{u}e^{\frac{\nu}{1-\varepsilon}t}, \quad t \in T, \quad (7.57)$$

nazywamy optymalnym stacjonarnym procesem wzrostu (lub procesem maksymalnego równomiernego wzrostu). W gospodarce Solowa jest on identyczny z optymalnym procesem $(s^*, u^*)_T$ w fazie równomiernego wzrostu i ma szczególnie klarowną, prostą interpretację w przypadku statycznej funkcji produkcji Cobb-Douglasa (ze wskaźnikiem postępu techniczno-organizacyjnego $\nu = 0$) oraz zerowym dyskontem użyteczności konsumpcji p.c. ($\rho = 0$). Wówczas $\bar{s} = \varepsilon$, $\bar{u} = \left(\frac{a\varepsilon}{\mu+\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$ i w każdym momencie $t \in T$ cała nadwyżka dochodu ponad jego część kierowaną na inwestycje przeciwdziałające spadkowi technicznego uzbrojenia pracy zostaje przeznaczona na konsumpcję. W ekonomii matematycznej reguła ta jest nazywana złotą regułą akumulacji.

Trajektoria $\bar{u}_T$ postaci (7.57) jest w gospodarce Solowa znaną nam z poprzednich rozdziałów magistralą technicznego uzbrojenia pracy. Mając ją, możemy wyznaczyć magistralę kapitałową $\bar{k}_T$:

$$\bar{k}(t) = \bar{k}e^{\left(\frac{\nu}{1-\varepsilon}+\lambda\right)t}, \quad t \in T \quad (7.58)$$

($\bar{k} = \bar{u}z_0$), produkcyjną $\bar{y}_T$:

$$\bar{y}(t) = \bar{y}e^{\left(\frac{\nu}{1-\varepsilon}+\lambda\right)t}, \quad t \in T \quad (7.59)$$

($\bar{y} = a\bar{u}^\varepsilon z_0$), konsumpcyjną $\bar{c}_T$:

$$\bar{c}(t) = \bar{c}e^{\left(\frac{\nu}{1-\varepsilon}+\lambda\right)t}, \quad t \in T \quad (7.60)$$

($\bar{c} = a(1 - \bar{s})\bar{u}^\varepsilon z_0$), inwestycyjną $\bar{i}_T$:

$$\bar{i}(t) = \bar{i}e^{\left(\frac{\nu}{1-\varepsilon}+\lambda\right)t}, \quad t \in T \quad (7.61)$$

($\bar{i} = a\bar{s}\bar{u}^\varepsilon z_0$) etc.

Poniższe twierdzenie pokazuje, że również w gospodarce Solowa magistrale grają kluczową rolę jako swoiste drogi optymalnego, a jednocześnie stabilnego, równomiernego wzrostu gospodarczego.

■ **Twierdzenie 7.6.** Jeżeli spełnione są warunki (7.18), (7.19), to:

$$\forall u_0 > 0 \exists \theta > 0 \forall t_1 > 2\theta \forall t \in [\theta, t_1 - \theta] (u^*(t) = \bar{u}(t)), \quad (7.62)$$

gdzie u_T^* jest optymalną trajektorią technicznego uzbrojenia pracy w zadaniu (7.16)-(7.17), $\bar{u}_T$ jest trajektorią technicznego uzbrojenia pracy w optymalnym stacjonarnym procesie wzrostu (magistrala). Własność (7.62) mają także wszystkie pozostałe magistrale.

Dowód jest prosty, wystarczy przyjąć:

$$\theta = \theta_1 = \max \{c_1 \ln d_1, c_2 \ln d_2\}, \text{ gdy } u_0 > \bar{u},$$

$$\theta = \theta_2 = c_2 \ln d_2, \text{ gdy } u_0 = \bar{u},$$

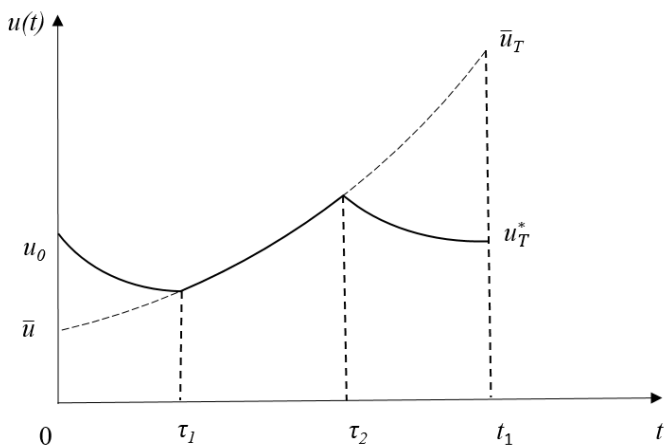
$$\theta = \theta_3 = \max \{c_2 \ln d_2, c_4 \ln d_4\}, \text{ gdy } u_0 < \bar{u}.$$

Wartości parametrów c_i, d_i ($i = 1, 2, 4$), $\bar{u}$ podaje twierdzenie 7.5. Ocena parametru θ pozostaje aktualna po zastąpieniu optymalnej trajektorii technicznego uzbrojenia pracy u_T^* :

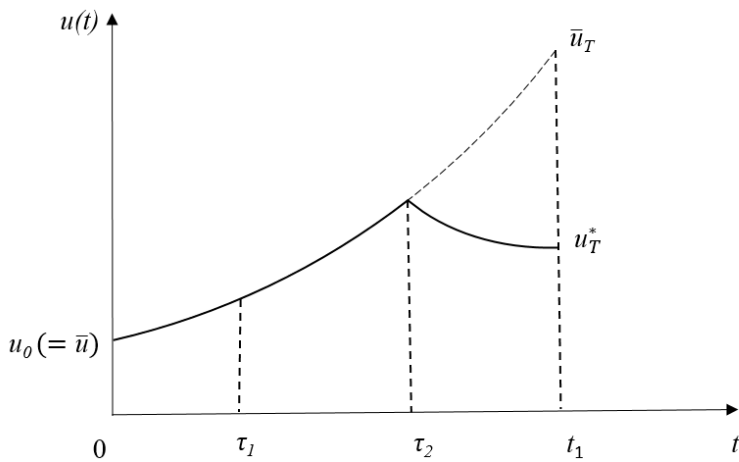
- optymalną trajektorią kapitału $k^*(t) = u^*(t)z(t)$,
- optymalną trajektorią dochodu $y^*(t) = au^*(t)^\varepsilon z(t)$,

etc. oraz zastąpieniu magistrali $\bar{u}_T$ postaci (7.57) (odpowiednio) magistralą kapitałową (7.58), produkcyjną (7.59) etc. (zob. rys. 7.5). ■

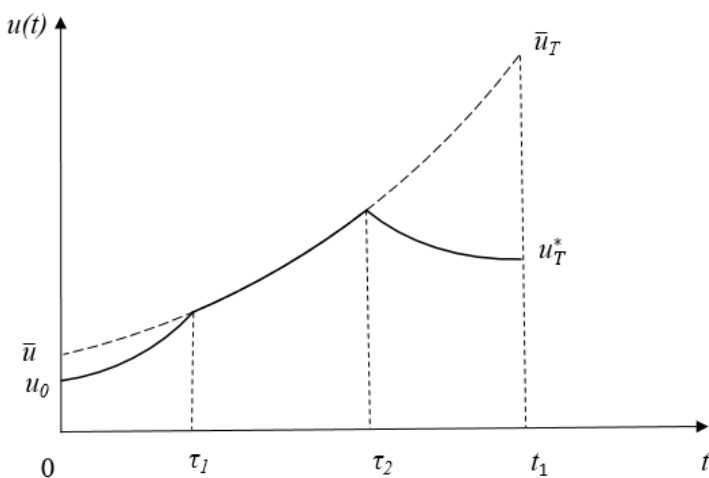
a)



b)



c)



Rysunek 7.5. Optymalna trajektoria u_T^* – rozwiązanie zadania (7.16)–(7.17) – i magistrala $\bar{u}_T$ (linia przerywana) w przypadku: (a) wysokiego ($u_0 > \bar{u}$), (b) średniego ($u_0 = \bar{u}$) oraz (c) niskiego ($u_0 < \bar{u}$) początkowego technicznego uzbrojenia pracy

Na zakończenie tego punktu przedstawiona zostanie jeszcze jedną ‘magistralna’ własność gospodarki Solowa mówiąca o zbieżności w procesie optymalnym – w miarę wydłużania horyzontu T – średniej stopy wzrostu technicznego uzbrojenia pracy do jego stopy wzrostu na magistrali.

■ **Twierdzenie 7.7.** Jeżeli gospodarka Solowa spełnia warunki (7.18), (7.19), to:

$$\delta_{u_T^*} \rightarrow \frac{\nu}{1-\varepsilon} \text{ przy } t_1 \rightarrow +\infty,$$

gdzie

$$\delta_{u_T^*} = \int_0^{t_1} \frac{d}{dt} u^*(t) \cdot \frac{1}{u^*(t)} dt.$$

Dowód. Niech⁴:

⁴ Nieciągłość trajektorii s_T^* sprawia, że liczby $\max_{t \in [0, \theta]} \delta_{u^*(t)}$, $\max_{t \in [t_1, t_1 - \theta]} \delta_{u^*(t)}$, podobnie jak $\min_{t \in [0, \theta]} \delta_{u^*(t)}$, $\min_{t \in [t_1, t_1 - \theta]} \delta_{u^*(t)}$ mogą nie istnieć. Natomiast liczby $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ istnieją zawsze.

$$\alpha_1 = \sup_{t \in [0, \theta]} \delta_{u^*(t)}, \alpha_2 = \sup_{t \in [t_1, t_1 - \theta]} \delta_{u^*(t)}, \beta_1 = \inf_{t \in [0, \theta]} \delta_{u^*(t)}, \beta_2 = \inf_{t \in [t_1 - \theta, t_1]} \delta_{u^*(t)},$$

gdzie parametr θ jest taki jak w twierdzeniu 7.6 oraz:

$$\delta_{u^*(t)} = \frac{d}{dt} u^*(t) \cdot \frac{1}{u^*(t)}.$$

Jeżeli $t_1 > 2\theta$, to:

$$\frac{1}{t_1} \left((\beta_1 + \beta_2)\theta + \frac{\nu}{1-\varepsilon} (t_1 - 2\theta) \right) \leq \delta_{u_T^*} \leq \frac{1}{t_1} \left((\alpha_1 + \alpha_2)\theta + \frac{\nu}{1-\varepsilon} (t_1 - 2\theta) \right),$$

więc:

$$\delta_{u_T^*} \rightarrow \frac{\nu}{1-\varepsilon}, \text{ gdy } t_1 \rightarrow +\infty.$$

■

Podobnie przebiega dowód, że wraz ze wzrostem długości horyzontu T średnie stopy wzrostu kapitału, dochodu etc. w procesie optymalnym są asymptotycznie zbliżone do ich stóp wzrostu na magistrali:

$$\delta_{k_T^*} \rightarrow \frac{\nu}{1-\varepsilon} + \lambda, \quad \delta_{y_T^*} \rightarrow \frac{\nu}{1-\varepsilon} + \lambda, \text{ gdy } t_1 \rightarrow +\infty,$$

gdzie:

$$\delta_{k_T^*} = \int_0^{t_1} \frac{d}{dt} k^*(t) \cdot \frac{1}{k^*(t)} dt, \quad \delta_{y_T^*} = \int_0^{t_1} \frac{d}{dt} y^*(t) \cdot \frac{1}{y^*(t)} dt.$$

7.7. Inna wersja modelu

Przy budowie modelu matematycznego realnego zjawiska/procesu ekonomicznego stosujemy właściwe dla matematyki ujęcie aksjomatyczne. Matematyczny model wzrostu jest układem założeń (matematycznych), z których staramy się wyciągnąć interesujące wnioski na temat funkcjonowania gospodarki. Opowiadając się za wykorzystaniem określonej teorii matematycznej do rozwiązywania problemu ekonomicznego, musimy rozstrzygnąć, czy przyjmowane założenia nie upraszczają zbyt mocno problemu, czyniąc go nierealnym, a więc praktycznie nieciekawym. Jedno-

częściej, aby problem mógł być efektywnie rozwiązany na gruncie teorii matematycznej, powinien zostać sformułowany w możliwie prostej postaci. Pytanie o przydatność teorii sterowania do budowy optymalnych procesów wzrostu gospodarczego sprowadza się więc w szczególności do tego, czy na jej gruncie możliwe jest takie sformułowanie problemu, aby pomimo mocnych założeń był on interesujący także z punktu widzenia rzeczywistości pozamatematycznej. Z tego względu, aby otrzymać możliwie prostą postać rozwiązania zadania (7.16)-(7.17), w punkcie 7.2 przyjęliśmy m.in. założenie, że w gospodarce dopuszczalne jest zarówno całkowite wstrzymanie inwestycji ($s(t) = 0$), co oznacza przeznaczenie całego dochodu na konsumpcję, jak i skierowanie całego dochodu na inwestycje ($s(t) = 1$), co oznacza z kolei całkowite wstrzymanie konsumpcji. Dzięki temu „mocnemu” założeniu wszystkie optymalne procesy w twierdzeniu 7.5 mogliśmy przedstawić w postaci analitycznej. Zmienimy je obecnie, zakładając, że stopa inwestycji $s(t)$ w zadaniu (7.16)-(7.17) może przyjmować wartości tylko z pewnego przedziału $[s_0, s_1] \subset [0, 1]$, gdzie:

$$0 < s_0 < \frac{\varepsilon[(1-\varepsilon)(\mu+\lambda)+v]}{(1-\varepsilon)(\mu+\lambda+\rho)} < s_1 < 1, \quad (7.63)$$

$s_0 > 0$ jest minimalną, a $s_1 < 1$ maksymalną dopuszczaną stopą inwestycji w gospodarce.

Postępując podobnie jak w punkcie 7.2, otrzymujemy zadanie:
znaleźć

$$\max \int_0^{t_1} a(1-s(t))u^\varepsilon(t)e^{(v-\rho)t} dt \quad (7.64)$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(t) &= as(t)u^\varepsilon(t)e^{vt} - (\mu + \lambda)u(t), \\ s &\in \tilde{C}^0(T \rightarrow [s_0, s_1]), \\ u(0) &= u_0 (= \frac{k_0}{l_0}) > 0. \end{aligned} \quad (7.65)$$

Jego rozwiązanie prezentujemy poniżej przy założeniu, że istnieje moment $\check{t} < +\infty$ oraz $(u_0, \check{t})$ – dopuszczalny proces $(\check{s}, \check{u})_{\check{T}}$, $\check{T} = [0, \check{t}]$, prowadzący do magistrali:

$$\bar{u}(\check{t}) = \bar{u}e^{\frac{v}{1-\varepsilon}\check{t}},$$

gdzie $\bar{u} = \left(\frac{a\varepsilon}{\mu+\lambda+\rho}\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}} > 0$. W zadaniu (7.16)-(7.17) warunek ten jest spełniony.

Obecnie, bez tego założenia, mogłoby się zdarzyć, że przy pewnym układzie parametrów żaden proces dopuszczalny nigdy nie prowadziłby do magistrali.

Rozwiązanie zadania (7.64)-(7.65) jest podobne (co do struktury) do rozwiązania zadania (7.16)-(7.17), ale poza środkową fazą równomiernego wzrostu trajektoria u_T^* ma zasadniczo inną postać. W większości przypadków (poza jednym) nie można też wyznaczyć analitycznie długości poszczególnych faz wzrostu w optymalnym procesie (momentów ich rozpoczęcia i zakończenia). Wyjątkiem jest moment τ_1 kończący pierwszą fazę wzrostu, gdy horyzont T jest długi, a początkowe techniczne uzbrojenie pracy wysokie. Obowiązują założenia (7.18), (7.19) oraz (7.63). Postać rozwiązania zależy od początkowego technicznego uzbrojenia pracy u_0 i długości horyzontu T .

1⁰. $u_0 > \bar{u} = \left(\frac{a\varepsilon}{\mu+\lambda+\rho}\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$. Istnieją takie momenty $\tau_1, \tau_2 > 0$, że jeżeli horyzont T jest długi, tzn. spełnia warunek $t_1 > \tau_1 + \tau_2$, wtedy rozwiązaniem zadania jest proces $(s^*, u^*)_T$:

$$s^*(t) = \begin{cases} s_0, & t \in [0, \tau_1), \\ \bar{s}, & t \in [\tau_1, t_1 - \tau_2), \\ s_0, & t \in [t_1 - \tau_2, t_1], \end{cases}$$

$$u^*(t) = \begin{cases} [c_1 e^{-(1-\varepsilon)(\mu+\lambda)t} + d e^{vt}]^{\frac{1}{1-\varepsilon}}, & t \in [0, \tau_1), \\ u^*(\tau_1) e^{\frac{v}{1-\varepsilon}(t-\tau_1)}, & t \in [\tau_1, t_1 - \tau_2), \\ [c_2 e^{-(1-\varepsilon)(\mu+\lambda)(t-t_1+\tau_2)} + d e^{v(t-t_1+\tau_2)}]^{\frac{1}{1-\varepsilon}}, & t \in [t_1 - \tau_2, t_1], \end{cases}$$

gdzie $\bar{s} = \frac{\varepsilon[(1-\varepsilon)(\mu+\lambda)+v]}{(1-\varepsilon)(\mu+\lambda+\rho)} \in (0,1)$, $c_1 = u_0^{1-\varepsilon} - d$, $d = \frac{a(1-\varepsilon)s_0}{(1-\varepsilon)(\mu+\lambda)+v} > 0$,

$$c_2 = u^*(t_1 - \tau_2)^{1-\varepsilon} - d.$$

Jeżeli $t_1 \leq \tau_1 + \tau_2$, wtedy znika faza środkowa (przedział $[\tau_1, \tau_2]$) i rozwiązaniem zadania jest proces $(s^*, u^*)_T$:

$$s^*(t) = s_0, \quad u^*(t) = [c_1 e^{-(1-\varepsilon)(\mu+\lambda)t} + d e^{\nu t}]^{\frac{1}{1-\varepsilon}}, \quad t \in T. \quad (7.66)$$

2⁰. $u_0 = \bar{u} = \left(\frac{a\varepsilon}{\mu+\lambda+\rho}\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$. Istnieje taki moment $\tau > 0$, że jeżeli horyzont T jest długi, $t_1 > \tau$, to rozwiązaniem zadania jest proces $(s^*, u^*)_T$:

$$s^*(t) = \begin{cases} \bar{s}, & t \in [0, t_1 - \tau), \\ s_0, & t \in [t_1 - \tau, t_1], \end{cases}$$

$$u^*(t) = \begin{cases} \bar{u} e^{\frac{\nu}{1-\varepsilon}t}, & t \in [0, t_1 - \tau), \\ [c e^{-(1-\varepsilon)(\mu+\lambda)(t-t_1+\tau)} + d e^{\nu(t-t_1+\tau)}]^{\frac{1}{1-\varepsilon}}, & t \in [t_1 - \tau, t_1], \end{cases}$$

gdzie $c = u^*(t_1 - \tau)^{1-\varepsilon} - d$.

Jeżeli horyzont T jest krótki, $t_1 \leq \tau$, wtedy znika faza pierwsza i optymalny proces $(s^*, u^*)_T$ ma postać (7.66).

3⁰. $u_0 < \bar{u} = \left(\frac{a\varepsilon}{\mu+\lambda+\rho}\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$. Istnieją takie momenty $\tau, \tau_1, \tau_2 > 0$ ($\tau < \tau_1 + \tau_2$), że jeżeli horyzont T jest długi, tzn. spełnia warunek $t_1 > \tau_1 + \tau_2$, wtedy rozwiązaniem zadania jest proces $(s^*, u^*)_T$:

$$s^*(t) = \begin{cases} s_1, & t \in [0, \tau_1), \\ \bar{s}, & t \in [\tau_1, t_1 - \tau_2), \\ s_0, & t \in [t_1 - \tau_2, t_1], \end{cases}$$

$$u^*(t) = \begin{cases} [c_3 e^{-(1-\varepsilon)(\mu+\lambda)t} + d e^{\nu t}]^{\frac{1}{1-\varepsilon}}, & t \in [0, \tau_1), \\ u^*(\tau_1) e^{\frac{\nu}{1-\varepsilon}(t-\tau_1)}, & t \in [\tau_1, t_1 - \tau_2), \\ [c_4 e^{-(1-\varepsilon)(\mu+\lambda)(t-t_1+\tau_2)} + d e^{\nu(t-t_1+\tau_2)}]^{\frac{1}{1-\varepsilon}}, & t \in [t_1 - \tau_2, t_1], \end{cases}$$

gdzie $c_3 = u_0^{1-\varepsilon} - d$, $d = \frac{a(1-\varepsilon)s_1}{(1-\varepsilon)(\mu+\lambda)+\nu} > 0$, $c_4 = u^*(t_1 - \tau_2)^{1-\varepsilon} - d (= c_2)$.

Jeżeli $\tau < t_1 \leq \tau_1 + \tau_2$, wtedy znika faza środkowa i optymalny proces $(s^*, u^*)_T$ przyjmuje postać:

$$s^*(t) = \begin{cases} s_1, & t \in [0, \tau), \\ s_0, & t \in [t_1 - \tau, t_1], \end{cases}$$

$$u^*(t) = \begin{cases} [c_3 e^{-(1-\varepsilon)(\mu+\lambda)t} + d e^{\nu t}]^{\frac{1}{1-\varepsilon}}, & t \in [0, t_1 - \tau), \\ [c e^{-(1-\varepsilon)(\mu+\lambda)(t-t_1+\tau)} + d e^{\nu(t-t_1+\tau)}]^{\frac{1}{1-\varepsilon}}, & t \in [t_1 - \tau, t_1], \end{cases}$$

gdzie $c = u^*(t_1 - \tau)^{1-\varepsilon} - d$.

Jeżeli horyzont T jest krótki, $t_1 \leq \tau$, wtedy optymalny proces $(s^*, u^*)_T$ redukuje się do postaci (7.66).

W środkowej fazie równomiernego wzrostu rozwiązanie zadania (7.64)-(7.65) jest analogiczne do rozwiązywania zadania (7.16)-(7.17). Ich rozwiązania różnią się postacią trajektorii sterowań i stanów poza tą fazą. Ponadto, w odróżnieniu od rozwiązania pierwszego zadania, obecnie w optymalnym procesie $(s^*, u^*)_T$ we wszystkich fazach wzrostu, niezależnie od długości horyzontu T , możliwy jest wzrost technicznego uzbrojenia pracy, a w ślad za tym wszystkich pozostałych zmiennych ekonomicznych – z dodatnią stopą.

W zadaniu (7.16)-(7.17) optymalna stopa wzrostu technicznego uzbrojenia pracy w fazie początkowej (dochodzenia do magistrali) oraz fazie końcowej (oddalania się od magistrali) była zawsze ujemna (równa $-(\mu + \lambda)$). Obecnie może być ujemna, ale nie musi. W obu przypadkach zależy to od poziomu minimalnej stopy inwestycji s_0 .

Aktualne pozostają wszystkie magistralne własności optymalnych procesów wzrostu, o których mówią twierdzenia 7.6, 7.7.

7.8. Minimalnoczasowy problem wzrostu w gospodarce z endogenicznym postępem techniczno-organizacyjnym

W gospodarce Solowa, która była przedmiotem naszego zainteresowania w poprzednich punktach, zależność wytwarzanego dochodu od kapitału i pracy opisywała jednorodna stopnia 1 multiplikatywna funkcja produkcji Cobba-Douglasa:

$$F(k, z, t) = ae^{vt}k^\varepsilon(t)z^{1-\varepsilon}(t)$$

z egzogenicznym postępowem techniczno-organizacyjnym reprezentowanym przez składnik ae^{vt} (zob. (7.10)). Obecnie zakładamy, że zależność wytwarzanego w gospodarce dochodu $y(t)$ od kapitału $k(t)$ i zatrudnienia (pracy) $z(t)$ opisuje jednorodna stopnia 1 funkcja produkcji Cobba-Douglasa:

$$y(t) = a(t)k^\varepsilon(t)z^{1-\varepsilon}(t) \quad (7.67)$$

z endogenicznym postępowem techniczno-organizacyjnym reprezentowanym przez składnik $a(t)$ ucieleśniający wpływ technologii oraz organizacji produkcji na wielkość wytwarzanego dochodu (będący miarą tzw. łącznej produktywności czynników produkcji; TFP). Aktualne są warunki (7.11)-(7.14).

Z (7.11)-(7.14), (7.67) po wprowadzeniu oznaczenia $s(t) = \frac{i(t)}{y(t)}$ otrzymujemy równanie dynamiki kapitału:

$$\frac{d}{dt}k(t) = a(t)s(t)k^\varepsilon(t)z^{1-\varepsilon}(t) - \mu k(t). \quad (7.68)$$

Podobnie jak w punkcie 7.7 zakładamy, że ustalona jest minimalna (s_0) oraz maksymalna (s_1) stopa inwestycji w gospodarce ($0 < s_0 < s_1 < 1$):

$$\forall t \in T(s(t) \in [s_0, s_1]).$$

Po zastąpieniu zmiennej $k(t)$ w (7.68) przez zmienną $u(t) = \frac{k(t)}{z(t)}$ otrzymujemy równanie dynamiki technicznego uzbrojenia pracy:

$$\frac{d}{dt}u(t) = a(t)s(t)u^\varepsilon(t) - (\mu + \lambda)u(t). \quad (7.69)$$

Aby wykluczyć gwałtowne skoki stopy inwestycji, zakładamy, że jej dynamikę opisuje równanie:

$$\frac{d}{dt}s(t) = \omega(\alpha(t) - s(t)), \quad (7.70)$$

gdzie:

$$\alpha \in \tilde{C}^0(T \rightarrow [s_0, s_1]) \quad (7.71)$$

($\omega > 0$) z warunkiem początkowym:

$$s(0) = s^0 \in [s_0, s_1]. \quad (7.72)$$

Rolę sterowania w (7.70) pełni zmienna $\alpha(t)$ przyjmująca zgodnie z (7.71) wartości z przedziału $[s_0, s_1]$. Jeżeli $\alpha(t) > s(t)$, wtedy $\frac{d}{dt}s(t) > 0$ i w otoczeniu momentu t stopa inwestycji rośnie. Jeżeli $\alpha(t) < s(t)$, wówczas $\frac{d}{dt}s(t) < 0$ i stopa inwestycji w otoczeniu momentu t maleje. Każde rozwiązanie równania (7.70) z warunkiem początkowym (7.72) odpowiadające trajektorii sterowań $\alpha \in \tilde{C}^0(T \rightarrow [s_0, s_1])$ jest ciągłą (przedziałami gładką) funkcją spełniającą warunek: $\forall t \in T(s(t) \in [s_0, s_1])$.

Zakładamy ponadto, że stopa inwestycji $s(t)$ decyduje o dynamice zarówno technicznego uzbrojenia pracy $u(t)$ (a w konsekwencji także o dynamice kapitału, dochodu, inwestycji i konsumpcji), jak i o dynamice łącznej produktywności czynników produkcji $a(t)$, zgodnie z równaniem:

$$\frac{d}{dt}a(t) = \sigma s(t)a(t), \quad (7.73)$$

$$a(0) = a^0 > 0 \quad (7.74)$$

($\sigma > 0$). W świetle (7.73), (7.74) $\frac{d}{dt}a(t) \cdot \frac{1}{a(t)} = \sigma s(t) > 0$, zatem stopa wzrostu łącznej produktywności czynników produkcji jest proporcjonalna do stopy inwestycji.

Konsumpcja $c(t) = (1 - s(t))y(t) = (1 - s(t))a(t)k^\varepsilon(t)z^{1-\varepsilon}(t)$, więc konsumpcja p.c. $\gamma(t) = a(t)(1 - s(t))u^\varepsilon(t)$. Oznaczmy przez γ^1 pożądaną, docelową wielkość konsumpcji p.c.

$$\gamma^1 = a(t_1)(1 - s(t_1))u^\varepsilon(t_1) > \gamma^0 = a^0(1 - s^0)(u^0)^\varepsilon$$

($u^0 = \frac{k^0}{z^0} > 0$). Interesuje nas następujące minimalnoczasowe zadanie sterowania optymalnego wzrostem:

$$\min t_1$$

$$\frac{d}{dt}u(t) = a(t)s(t)u^\varepsilon(t) - (\mu + \lambda)u(t),$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}s(t) &= \omega(\alpha(t) - s(t)), \\ \frac{d}{dt}a(t) &= \sigma s(t)a(t),\end{aligned}\tag{7.75}$$

$$\begin{aligned}\alpha &\in \tilde{C}^0(T \rightarrow [s_0, s_1]), T = [0, t_1], \\ u(0) &= u^0 > 0, s(0) = s^0 \in [s_0, s_1], a(0) = a^0 > 0, \\ (u(t_1), s(t_1)) &\in X_{t_1} = \{(u, s) | a(t_1)(1-s)u^\varepsilon = \gamma^1\}.\end{aligned}$$

7.9. Charakterystyka rozwiązania

Zastępując w zadaniu (7.75) zmienną $u(t)$ przez zmienną:

$$\kappa(t) = \frac{k(t)}{y(t)} = a^{-1}(t)u^{1-\varepsilon}(t)$$

otrzymujemy równanie dynamiki kapitałochłonności produkcji:

$$\frac{d}{dt}\kappa(t) = -[\sigma s(t) + (1-\varepsilon)(\mu + \lambda)]\kappa(t) + (1-\varepsilon)s(t)$$

oraz równanie konsumpcji p.c.:

$$\gamma(t) = a^{\frac{1}{1-\varepsilon}}(t)(1-s(t))\kappa^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}(t),$$

co prowadzi ostatecznie do następującego minimalnoczasowego zadania sterowania wzrostem (równoważnego z (7.75)):

$$\min t_1\tag{7.76}$$

$$\frac{d}{dt}\kappa(t) = -[\sigma s(t) + (1-\varepsilon)(\mu + \lambda)]\kappa(t) + (1-\varepsilon)s(t),$$

$$\frac{d}{dt}s(t) = \omega(\alpha(t) - s(t)),$$

$$\alpha \in \tilde{C}^0(T \rightarrow [s_0, s_1]), T = [0, t_1]\tag{7.77}$$

$$\kappa(0) = \kappa^0 \left(= \frac{(u^0)^{1-\varepsilon}}{a^0} > 0 \right),$$

$$s(0) = s^0 \in [s_0, s_1],$$

$$(\kappa(t_1), s(t_1)) \in \tilde{X}_{t_1} = \left\{ (\kappa, s) | a^{\frac{1}{1-\varepsilon}}(t_1)(1-s)\kappa^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} = \gamma^1 \right\}$$

($a^0 > 0$, $\gamma^1 > \gamma^0$). W zadaniu (7.76)-(7.77) funkcja a_T z wartościami w $[s_0, s_1]$ pełni funkcję trajektorii sterowania. Odpowiada jej ciągła, przedziałami gładka trajektoria stopy inwestycji s_T (rozwiązanie równania (7.70) z warunkiem początkowym (7.72)). Para równań różniczkowych w układzie (7.77) opisuje przekształcenie stanów gładkiego, dwuwymiarowego systemu dynamicznego, którego współrzędnymi są kapitałochłonność produkcji $\kappa(t)$ oraz stopa inwestycji $s(t)$. Trójka $(a, \kappa, s)_T$ spełniająca układ (7.77) tworzy dopuszczalny proces wzrostu. Odpowiadająca mu trajektoria łącznej produktywności czynników produkcji a_T jest rozwiązaniem równania (7.73) z warunkiem początkowym (7.74). Dopuszczalny proces wzrostu prowadzi gospodarkę w horyzoncie czasu $T = [0, t_1]$, $t_1 < +\infty$ do takiego poziomu jej rozwoju, który w momencie końcowym t_1 horyzontu T zapewnia konsumpcję p.c. na postulowanym poziomie $\gamma^1 > \gamma^0$. Proces wzrostu $(a^*, \kappa^*, s^*)_{T^*}$ prowadzący w najkrótszym czasie t_1^* od początkowego poziomu konsumpcji $\gamma^0 = (a^0)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}(1-s^0)(\kappa^0)^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}$ do postulowanego docelowego poziomu $\gamma^1 = a^*(t_1^*)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}(1-s^*(t_1^*))\kappa^*(t_1^*)^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} > \gamma^0$ nazywamy procesem optymalnym. Funkcję $\kappa_{T^*}^*$ nazywamy optymalną trajektorią kapitałochłonności produkcji, funkcję $s_{T^*}^*$ – optymalną trajektorią stopy inwestycji; przedział czasu $T^* = [0, t_1^*]$ nazywamy optymalnym horyzontem.

Każda dopuszczalna trajektoria kapitałochłonności κ_T w układzie (7.77) jest równomiernie ograniczona na horyzoncie $T = [0, t_1]$ dowolnej długości:

$$\forall t_1 > 0 \forall t \in [0, t_1] (\kappa(t) \in [\underline{\kappa}, \bar{\kappa}]),$$

$\underline{\kappa} = \min \left\{ \kappa^0, \frac{(1-\varepsilon)s_0}{(1-\varepsilon)(\mu+\lambda)+\sigma s_1} \right\}$, $\bar{\kappa} = \max \left\{ \kappa^0, \frac{(1-\varepsilon)s_1}{(1-\varepsilon)(\mu+\lambda)+\sigma s_0} \right\}$. Nie dotyczy to już jednak ani technicznego uzbrojenia pracy (produkcji p.c.), ani konsumpcji p.c. Dzięki endogenicznemu postępowi technicznemu zarówno techniczne uzbrojenie pracy, jak i konsumpcja p.c. w długich okresach czasu, przy $t \rightarrow +\infty$, rosną nieograniczenie (szybciej lub wolniej, w zależności od realizowanej stopy inwestycji). Kapitał, dochód, inwestycje i konsumpcja rosną odpowiednio szybciej.

Dla uproszczenia dalszych wywodów przedstawimy rozwiązanie zadania (7.76)-(7.77), gdy jego parametry spełniają następujące warunki:

$$0 < \sigma < \frac{1-\varepsilon}{\bar{\kappa}}, \quad (7.78)$$

$$\omega > (1 - \varepsilon)(\mu + \lambda) + \sigma s_1. \quad (7.79)$$

Są to założenia realistyczne. Warto jednak zauważyć, że zadanie ma rozwiązanie także gdy warunki te nie zachodzą. Należy wtedy rozpatrywać kolejno przypadki:

$$\sigma = \frac{1-\varepsilon}{\bar{\kappa}} \text{ oraz } \kappa^0 < \frac{s_1}{\mu+\lambda}, \quad \sigma > \frac{1-\varepsilon}{\bar{\kappa}} \text{ oraz } \kappa^0 < \frac{s_1}{\mu+\lambda}, \quad \sigma > \frac{1-\varepsilon}{\bar{\kappa}} \text{ oraz } \kappa^0 = \frac{s_1}{\mu+\lambda} \text{ itd.}$$

Z twierdzenia 7.2 otrzymujemy następujące warunki optymalności.

Utwórzmy funkcję:

$$H(\psi_1, \psi_2, k, s, \alpha, t) = \psi_1 \{ -[\sigma s + (1 - \varepsilon)(\mu + \lambda)]\kappa + (1 - \varepsilon)s \} + \psi_2 \omega(\alpha - s).$$

Jeżeli spełnione są warunki (7.78), (7.79) i proces $(\alpha^*, \kappa^*, s^*)_{T^*}$ jest rozwiązaniem zadania (7.76)-(7.77), to istnieje takie rozwiązanie $\psi_{T^*}^* = (\psi_1^*, \psi_2^*)_{T^*}$ układu równań:

$$\frac{d}{dt} \psi_1(t) = [\sigma s^*(t) + (1 - \varepsilon)(\mu + \lambda)]\psi_1(t), \quad (7.80)$$

$$\frac{d}{dt} \psi_2(t) = [\sigma \kappa^*(t) - (1 - \varepsilon)]\psi_1(t) + \omega \psi_2(t),$$

że $\forall t \in T^* = [0, t_1^*]$:

$$\psi^*(t) = (\psi_1^*(t), \psi_2^*(t)) \neq 0,$$

$$\begin{aligned} \psi_1^*(t) [-(\sigma s^*(t) + (1 - \varepsilon)(\mu + \lambda))\kappa^*(t) + (1 - \varepsilon)s^*(t)] + \psi_2^*(t) \omega(\alpha^*(t) - \\ - s^*(t)) = \max_{\alpha \in [s_0, s_1]} \{ \psi_1^*(t) [-(\sigma s^*(t) + (1 - \varepsilon)(\mu + \lambda))\kappa^*(t) + (1 - \varepsilon)s^*(t)] + \\ + \psi_2^*(t) \omega(\alpha - s^*(t)) \}. \end{aligned} \quad (7.81)$$

W zadaniu (7.76)-(7.77) zbiór stanów docelowych $\tilde{X}_{t_1}$ jest w każdym momencie czasu $t_1 > 0$ gładką rozmaitością w R^2 :

$$\tilde{X}_{t_1} = \{(\kappa, s) | g_{t_1}(\kappa, s) = 0\},$$

gdzie $g_{t_1}(k, s) = a^{\frac{1}{1-\varepsilon}}(t_1)(1-s)\kappa^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} - \gamma^1$. Zgodnie z twierdzeniem 7.2, wektor $\psi^*(t_1^*) = (\psi_1^*(t_1^*), \psi_2^*(t_1^*))$ jest gradientem funkcji $g_{t_1^*}$ w punkcie $(k, s) = (k^*(t_1^*), s^*(t_1^*))$, czyli:

$$\begin{aligned} & (\psi_1^*(t_1^*), \psi_2^*(t_1^*)) = \\ & = \left((a^*(t_1^*))^{\frac{1}{1-\varepsilon}} \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} (1-s^*(t_1^*)) k^*(t_1^*)^{\frac{2\varepsilon-1}{1-\varepsilon}}; - (a^*(t_1^*))^{\frac{1}{1-\varepsilon}} k^*(t_1^*)^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} \right). \end{aligned} \quad (7.82)$$

Ponieważ w naszym zadaniu hamiltonian jest w każdym momencie t liniową funkcją sterowania $\alpha(t)$, a zbiór dopuszczalnych sterowań przedziałem $[s_0, s_1]$, więc warunek maksimum hamiltonianu (7.81) można zastąpić następującym:

- Jeżeli $\psi_2^*(t) > 0$, to $a^*(t) = s_1$.
- Jeżeli $\psi_2^*(t) < 0$, to $a^*(t) = s_0$.

Zgodnie z (7.82) w momencie końcowym t_1^* mamy:

$$\psi_1^*(t_1^*) > 0 \text{ oraz } \psi_2^*(t_1^*) < 0,$$

a to oznacza, że:

$$\forall t \in T^* \left(\psi_1^*(t) = \psi_1^*(t_1^*) e^{\int_{t_1^*}^t [\sigma s^*(\theta) + (1-\varepsilon)(\mu+\lambda)] d\theta} > 0 \right) \quad (7.84)$$

oraz:

$$\exists \varepsilon > 0 \forall t \in U_\varepsilon^-(t_1^*) (\psi_2^*(t) < 0),$$

czyli:

$$\forall t \in U_\varepsilon^-(t_1^*) (a^*(t) = s_0).$$

Zatem albo $\psi_2^*(t) < 0$ na $T^* \setminus \{0\}$ i wówczas $\forall t \in T^* (a^*(t) = s_0)$, albo:

$$\exists \tau \in \text{int } T^* (\psi_2^*(\tau) = 0). \quad (7.85)$$

Gdy zachodzi warunek (7.85), wtedy wobec (7.77) (zważywszy na (7.84)) dostajemy:

$$\frac{d}{dt} \psi_2^*(t)|_{t=\tau} = [\sigma \kappa^*(\tau) - (1-\varepsilon)] \psi_1^*(\tau) < 0.$$

Optymalna trajektoria $\alpha_{T^*}^*$ ma więc jedną z następujących postaci:

- albo:

$$\alpha^*(t) = s_0, \quad t \in T^*, \quad (7.86)$$

• albo:

$$\alpha^*(t) = \begin{cases} s_1, & t \in [0, \tau), \\ s_0, & t \in [\tau, t_1^*], \end{cases} \quad (7.87)$$

gdzie $\tau \in \text{int } T^*$. Pokażemy, że długość optymalnego horyzontu rośnie wraz ze wzrostem docelowego poziomu konsumpcji p.c., a moment $\tau \in \text{int } T^*$ pojawia się, gdy horyzont T^* jest odpowiednio długi. W tym celu weźmy dwa docelowe poziomy konsumpcji γ^1 oraz $\tilde{\gamma}^1 > \gamma^1$. Oznaczmy przez $(\alpha^*, \kappa^*, s^*)_{T^*}$ rozwiązanie zadania (7.76)-(7.77) z docelowym poziomem konsumpcji p.c. γ^1 i optymalnym horyzontem $T^* = [0, t_1^*]$, a przez $(\tilde{\alpha}^*, \tilde{\kappa}^*, \tilde{s}^*)_{\tilde{T}^*}$ jego rozwiązanie z docelowym poziomem konsumpcji p.c. $\tilde{\gamma}^1 > \gamma^1$ i horyzontem $\tilde{T}^* = [0, \tilde{t}_1^*]$. Załóżmy, że $\tilde{t}_1^* \leq t_1^*$. Proces $(\tilde{\alpha}^*, \tilde{\kappa}^*, \tilde{s}^*)_{\tilde{T}^*}$ prowadzi zatem w momencie $\tilde{t}_1^* \leq t_1^*$ do konsumpcji p.c. $\tilde{\gamma}^1 > \gamma^1$. Trajektoria konsumpcji p.c. $\tilde{\gamma}_{\tilde{T}^*}^*$ jest funkcją ciągłą, $\tilde{\gamma}(0) = \gamma^0 < \gamma^1 < \tilde{\gamma}^1$, więc:

$$\exists t' < t_1^* (\tilde{\gamma}^*(t') = \gamma^1).$$

Wówczas jednak t_1^* nie jest najwcześniejszym momentem, w którym gospodarka osiąga docelowy poziom konsumpcji p.c. γ^1 , czyli proces $(\alpha^*, \kappa^*, s^*)_{T^*}$ nie jest procesem optymalnym, wbrew założeniu. Nietrudno również pokazać, że gdy $\gamma^1 \rightarrow +\infty$, wtedy także $t_1^* \rightarrow +\infty$.

Analiza układu (7.80) z warunkiem transversalności (7.82) prowadzi do wniosku, że jeżeli w optymalnym procesie $(\alpha^*, \kappa^*, s^*)_{T^*}$ moment końcowy t_1^* spełnia warunek:

$$t_1^* > \theta = \frac{1}{A} \ln B, \quad (7.88)$$

gdzie:

$$A = -[\sigma s_0 + (1 - \varepsilon)(\mu + \lambda) - \omega],$$

$$B = 1 + \frac{\varepsilon(1 - s_0)[\sigma \bar{\kappa} - (1 - \varepsilon)]}{(1 - \varepsilon)\underline{\kappa} [\sigma s_0 + (1 - \varepsilon)(\mu + \lambda) - \omega]}$$

(przy założeniach (7.78), (7.79): $A > 0$ oraz $B > 1$), to istnieje dokładnie jeden moment $\tau \in [t_1^* - \theta, t_1^*)$, w którym $\psi_2^*(\tau) = 0$ i sterowanie optymalne ma postać (7.87). Moment τ spełnia zawsze warunek:

$$\tau \geq t_1^* - \theta, \quad (7.89)$$

więc przy $t_1^* \rightarrow +\infty$ rośnie długość pierwszego przedziału $[0, \tau)$, na którym sterowanie optymalne $\alpha^*(t) = s_1$. Długość drugiego przedziału $[\tau, t_1^*]$ (na którym $\alpha^*(t) = s_0$) jest zawsze ograniczona: $\forall t_1^* > \theta (t_1^* - \tau \leq \theta)$.

Konkluzja. Jeżeli horyzont T^* jest długi (wystarczy $t_1^* > \theta$; zob. (7.88)), wtedy istnieje taki moment $\tau \geq t_1^* - \theta$, że rozwiązaniem zadania (7.76)-(7.77) jest proces $(\alpha^*, \kappa^*, s^*)_{T^*}$:

$$\alpha^*(t) = \begin{cases} s_1, & t \in [0, \tau), \\ s_0, & t \in [\tau, t_1^*], \end{cases}$$

$$s^*(t) = \begin{cases} (s^0 - s_1)e^{-\omega t} + s_1, & t \in [0, \tau), \\ (s^*(\tau) - s_0)e^{-\omega(t-\tau)} + s_0, & t \in [\tau, t_1^*], \end{cases}$$

$$\kappa^*(t) = \begin{cases} \kappa^0 e^{A(t)} + e^{A(t)} \int_0^t e^{-A(\theta)} B(\theta) d\theta, & t \in [0, \tau), \\ \kappa^*(\tau) e^{C(\tau, t)} + e^{C(\tau, t)} \int_\tau^t e^{-C(\tau, \theta)} D(\tau, \theta) d\theta, & t \in [\tau, t_1^*], \end{cases}$$

$$A(t) = \omega^{-1} \sigma (s^0 - s_1) (e^{-\omega t} - 1) - [\sigma s_1 + (1 - \varepsilon)(\mu + \lambda)] t,$$

$$B(t) = (1 - \varepsilon) [(s^0 - s_1) e^{-\omega t} + s_1],$$

$$C(\tau, t) = \omega^{-1} \sigma (s^*(\tau) - s_0) (e^{-\omega(t-\tau)} - 1) - [\sigma s_0 + (1 - \varepsilon)(\mu + \lambda)] (t - \tau),$$

$$D(\tau, t) = (1 - \varepsilon) [(s^*(\tau) - s_0) e^{-\omega(t-\tau)} + s_0].$$

Jeżeli horyzont jest krótki, wtedy rozwiązanie $\psi_2^*(t)$ w układzie (7.80) z warunkiem (7.82) jest wszędzie na $T^* \setminus \{0\}$ ujemne i optymalny proces $(\alpha^*, \kappa^*, s^*)_{T^*}$ redukuje się do postaci:

$$\alpha^*(t) = s_0,$$

$$s^*(t) = (s^0 - s_0) e^{-\omega(t-\tau)} + s_0,$$

$$\kappa^*(t) = \kappa^0 e^{C(t)} + e^{C(t)} \int_0^t e^{-C(\theta)} D(\theta) d\theta$$

wszędzie na T^* , gdzie $C(t) = C(\tau, t)$, $D(t) = D(\tau, t)$ dla $\tau = 0$ oraz $s^*(\tau) = s^0$. Wraz ze wzrostem długości horyzontu T^* (tj. w miarę podwyższania docelowego poziomu konsumpcji p.c.) wydłuża się pierwsza faza wzrostu (przedział czasu $[0, \tau)$). Faza druga (przedział $[\tau, t_1^*]$) niezależnie od długości horyzontu jest zawsze ograniczona (jej długość nigdy nie przekracza θ ; zob. (7.89)). Optymalnemu procesowi $(\alpha^*, \kappa^*, s^*)_{T^*}$, odpowiadają optymalne trajektorie wszystkich pozostałych zmiennych:

- łącznej produktywności czynników produkcji:

$$a^*(t) = \begin{cases} a^0 e^{\sigma s_1 t}, & t \in [0, \tau), \\ a^*(\tau) e^{\sigma s_0 (t-\tau)}, & t \in [\tau, t_1^*], \end{cases}$$

gdy $t_1^* > \tau$ oraz:

$$a^*(t) = a^0 e^{\sigma s_0 t}, \quad t \in T^*,$$

gdy $t_1^* \leq \tau$,

- technicznego uzbrojenia pracy:

$$u^*(t) = a^*(t)^{\frac{1}{1-\varepsilon}} \kappa^*(t)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}, \quad t \in T^*,$$

- kapitału:

$$k^*(t) = a^*(t)^{\frac{1}{1-\varepsilon}} \kappa^*(t)^{\frac{1}{1-\varepsilon}} z(t), \quad t \in T^*,$$

- dochodu:

$$y^*(t) = a^*(t)^{\frac{1}{1-\varepsilon}} \kappa^*(t)^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} z(t), \quad t \in T^*,$$

- inwestycji $i_{T^*}^*$:

$$i^*(t) = s^*(t) a^*(t)^{\frac{1}{1-\varepsilon}} \kappa^*(t)^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} z(t), \quad t \in T^*,$$

- konsumpcji:

$$c^*(t) = (1 - s^*(t)) a^*(t)^{\frac{1}{1-\varepsilon}} \kappa^*(t)^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} z(t), \quad t \in T^*,$$

- konsumpcji p.c.:

$$\gamma^*(t) = (1 - s^*(t))a^*(t)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}\kappa^*(t)^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}, t \in T^*.$$

Postać rozwiązania zależy od początkowej kapitałochłonności produkcji κ^0 , początkowej stopy inwestycji s^0 oraz docelowego poziomu konsumpcji p.c. γ^1 . Przykładowo, gdy początkowa kapitałochłonność produkcji jest niska, $\kappa^0 < \frac{(1-\varepsilon)s_1}{(1-\varepsilon)(\mu+\lambda)+\sigma s_0}$, początkowa stopa inwestycji maksymalna, $s^0 = s_1$ oraz poziom konsumpcji γ^1 na tyle wysoki, że można go osiągnąć w dwóch fazach wzrostu – podtrzymując maksymalną stopę inwestycji w fazie pierwszej, a następnie obniżając ją (tym samym zwiększając stopę konsumpcji) w fazie drugiej – wówczas przebieg optymalnego procesu jest następujący. Maksymalnej stopie inwestycji w fazie pierwszej towarzyszy gasnący wzrost kapitałochłonności produkcji, która zbliża się do poziomu $\frac{(1-\varepsilon)s_1}{(1-\varepsilon)(\mu+\lambda)+\sigma s_1}$ (jednak go nie osiąga). Powoli rośnie techniczne uzbrojenie pracy. W fazie drugiej stopa inwestycji maleje, w rezultacie kapitałochłonność produkcji oraz kapitał rosną coraz wolniej; przy pewnej konfiguracji parametrów kapitałochłonność produkcji może w końcowej części tej fazy maleć. Łączna produktywność czynników produkcji w obu fazach rośnie (w pierwszej fazie szybciej, ze stopą ωs_1 , w drugiej fazie wolniej, ze stopą ωs_0). Dzięki temu kapitał, dochód, inwestycje, konsumpcja, techniczne uzbrojenie pracy oraz konsumpcja p.c. rosną w całym horyzoncie T^* .

7.10. Magistrała kapitałochłonności produkcji

W gospodarce spełniającej układ równań:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \kappa(t) &= -[\sigma s(t) + (1 - \varepsilon)(\mu + \lambda)]\kappa(t) + (1 - \varepsilon)s(t), \\ \frac{d}{dt} s(t) &= \omega(\alpha(t) - s(t)) \end{aligned} \tag{7.90}$$

(zob. (7.77)) interesują nas takie procesy wzrostu, w których kapitałochłonność produkcji $\kappa(t)$ oraz udział inwestycji w dochodzie $s(t)$ (zmienne stanu systemu) rosną ze stałymi stopami:

$$\frac{d}{dt}\kappa(t) \cdot \frac{1}{\kappa(t)} = \text{const.} \geq 0, \quad \frac{d}{dt}s(t) \cdot \frac{1}{s(t)} = \text{const.} \geq 0.$$

Ponieważ w układzie powyższym wszystkie trajektorie kapitałochłonności produkcji oraz stopy inwestycji są równomiernie ograniczone (na dowolnej długości horyzoncie T), dostajemy:

$$\kappa(t) = \frac{(1-\varepsilon)s}{(1-\varepsilon)(\mu+\lambda)+\sigma s} = \text{const.} > 0,$$

$$s(t) = s = \text{const.} \in [s_0, s_1].$$

Odpowiadająca tym procesom łączna produktywność czynników produkcji $a(t)$ rośnie równomiernie z dodatnią stopą:

$$\frac{d}{dt}a(t) \cdot \frac{1}{a(t)} = \sigma s \quad (7.91)$$

(zob. (7.73)). Są to tzw. procesy stacjonarne. Spośród nich wyróżnia się proces:

$$\bar{\kappa}(t) = \frac{(1-\varepsilon)s_1}{(1-\varepsilon)(\mu+\lambda)+\sigma s_1} = \bar{\kappa} > 0, \quad (7.92)$$

$$\bar{s}(t) = \bar{s} = s_1,$$

któremu towarzyszy maksymalna łączna produktywność czynników produkcji:

$$\bar{a}(t) = a^0 e^{\sigma s_1 t}$$

(rosnąca z najwyższą możliwą stopą $\sigma s_1 > 0$). Trajektoria (7.92) jest określona na horyzoncie T dowolnej długości, w szczególności także dla $T = T^*$. Nazywamy ją **magistralą kapitałochłonności produkcji** i oznaczamy przez $\bar{\kappa}_{T^*}$.

Śledząc przebieg optymalnego procesu $(\alpha^*, \kappa^*, s^*)_{T^*}$ (rozwiązanie zadania (7.76)-(7.77)), można zauważyć, że im dłuższy jest horyzont T^* , tym dłużej optymalna trajektoria kapitałochłonności produkcji $\kappa_{T^*}^*$ prawie zawsze – poza pewnym

ograniczonym okresem na początku i pod koniec horyzontu T^* – przebiega w bliskim otoczeniu trajektorii $\bar{\kappa}_{T^*}$. Obserwujemy zatem swoistą zbieżność optymalnej trajektorii kapitałochłonności produkcji do jej poziomu na magistrali.

■ **Twierdzenie 7.8.** Jeżeli spełnione są założenia (7.78), (7.79), to:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \theta_\varepsilon > 0 \forall t \in (\theta_\varepsilon, t_1^* - \theta) (|\kappa^*(t) - \bar{\kappa}| < \varepsilon),$$

gdzie $\kappa_{T^*}^*$ jest optymalną trajektorią kapitałochłonności produkcji (rozwiązaniem zadania (7.76)-(7.77)), $\bar{\kappa}$ jest kapitałochłonnością produkcji na magistrali.

Dowód w ogólnym przypadku jest żmudny i sprowadza się do prześledzenia przebiegu optymalnej trajektorii kapitałochłonności produkcji w długim okresie czasu (w pierwszej fazie wzrostu, na przedziale $[0, \tau)$) przy wszystkich możliwych kombinacjach początkowej kapitałochłonności κ^0 i stopy inwestycji s^0 , tj. $\kappa^0 < \bar{\kappa}$, $s^0 < \alpha_1$; $\kappa^0 = \bar{\kappa}$, $s^0 < \alpha_1$; $\kappa^0 > \bar{\kappa}$, $s^0 < \alpha_1$; $\kappa^0 = \bar{\kappa}$, $s^0 = \alpha_1$; $\kappa^0 = \bar{\kappa}$, $s^0 > \alpha_1$; $\kappa^0 > \bar{\kappa}$, $s^0 < \alpha_1$; $\kappa^0 > \bar{\kappa}$, $s^0 = \alpha_1$; $\kappa^0 > \bar{\kappa}$, $s^0 > \alpha_1$.

Prosty dowód lokalnej stabilności otrzymujemy natomiast po przejściu od układu (28) ze sterowaniem $\alpha(t) = s_1$ do jego liniowej aproksymacji:

$$\frac{d}{dt} x(t) = Ax(t), \quad (7.93)$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad x_1(t) = \kappa(t) - \bar{\kappa}, \quad x_2(t) = s(t) - \alpha_1,$$

w otoczeniu stanu równowagi $(\bar{\kappa}, \bar{s}) = \left(\frac{(1-\varepsilon)s_1}{(1-\varepsilon)(\mu+\lambda)+\sigma s_1}, s_1 \right)$, gdzie:

$$A = \begin{pmatrix} -[\sigma s_1 + (1-\varepsilon)(\mu+\lambda)] & -\sigma \bar{\kappa} + 1 - \varepsilon \\ 0 & -\omega \end{pmatrix}.$$

Macierz A ma dwie rzeczywiste, ujemne wartości własne:

$$\lambda_1 = -[\sigma s_1 + (1-\varepsilon)(\mu+\lambda)], \quad \lambda_2 = -\omega,$$

zatem aproksymacja liniowa (7.93) jest globalnie asymptotycznie stabilna w 0, czyli wyjściowy układ (28) ze sterowaniem $\alpha(t) = s_1$ jest co najmniej lokalnie

asymptotycznie stabilny w otoczeniu stanu $(\bar{\kappa}, \bar{s})$. Istnieje więc taka liczba $\varepsilon^0 > 0$, że jeżeli $(\kappa^0, s^0) \in U_{\varepsilon^0}(\bar{\kappa}, \bar{s})$, to wraz ze wzrostem długości horyzontu $T^* = [0, t_1^*]$, przy $t \rightarrow t_1^* - \theta$, optymalna trajektoria kapitałochłonności produkcji $\kappa^*(t) \rightarrow \bar{\kappa}$ oraz stopy inwestycji $s^*(t) \rightarrow \bar{s}$. Wówczas:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \theta_\varepsilon > 0 \forall t_1^* > \theta_\varepsilon + \theta \quad \forall t \in (\theta_\varepsilon, t_1^* - \theta) (|\kappa^*(t) - \bar{\kappa}| < \varepsilon). \quad \blacksquare$$

Własności magistralne – podobne do tych, o których mowa w twierdzeniu 7.8 – wykazują także optymalne trajektorie technicznego uzbrojenia pracy, konsumpcji p.c. kapitału, dochodu inwestycji oraz konsumpcji. Jeżeli przez $\bar{u}_{T^*}, \bar{\gamma}_{T^*}, k_{T^*}, \bar{y}_{T^*}, \bar{l}_{T^*}, \bar{c}_{T^*}$ oznaczymy odpowiadające $\bar{\kappa}, \bar{s}$ magistralne trajektorie (odpowiednio) technicznego uzbrojenia pracy, konsumpcji p.c., kapitału, dochodu, inwestycji i konsumpcji:

$$\begin{aligned} \bar{u}(t) &= (a^0)^{\frac{1}{1-\varepsilon}} \bar{\kappa}^{\frac{1}{1-\varepsilon}} e^{\frac{\sigma s_1}{1-\varepsilon} t}, \quad \bar{\gamma}(t) = a^0 z^0 (1 - \bar{s}) \bar{u}^\varepsilon(t) e^{\sigma s_1 t}, \\ \bar{k}(t) &= \bar{u}(t) z^0 e^{\lambda t}, \quad \bar{y}(t) = a^0 z^0 \bar{u}^\varepsilon(t) e^{(\sigma s_1 + \lambda)t}, \\ \bar{l}(t) &= a^0 z^0 \bar{s} \bar{u}^\varepsilon(t) e^{(\sigma s_1 + \lambda)t}, \quad \bar{c}(t) = a^0 z^0 (1 - \bar{s}) \bar{u}^\varepsilon(t) e^{(\sigma s_1 + \lambda)t}, \end{aligned}$$

to przy założeniach (7.78), (7.79) mają miejsce następujące prawidłowości:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \theta_\varepsilon > 0 \quad \forall t \in (\theta_\varepsilon, t_1^* - \theta):$$

$$|u^*(t) - \bar{u}(t)| < \varepsilon, \quad |\gamma^*(t) - \bar{\gamma}(t)| < \varepsilon,$$

$$|k^*(t) - \bar{k}(t)| < \varepsilon, \quad |y^*(t) - \bar{y}(t)| < \varepsilon,$$

$$|l^*(t) - \bar{l}(t)| < \varepsilon, \quad |c^*(t) - \bar{c}(t)| < \varepsilon.$$

W odróżnieniu od stałego magistralnego poziomu kapitałochłonności produkcji $\bar{\kappa}$, obecnie techniczne uzbrojenie pracy oraz konsumpcja p.c. na magistrali rosną ze stopą $\frac{\sigma s_1}{1-\varepsilon} > 0$. Kapitał produkcyjny, dochód, inwestycje i konsumpcja rosną ze stopą odpowiednio wyższą o stopę wzrostu ludności λ .

PODSUMOWANIE

Próba syntezy. Idea σ – równowagi dynamicznej¹

Każdy z przedstawionych w książce modeli wzrostu zawiera warunki (inkluzyje i/lub równania) wiążące zmienne ekonomiczne z różnych okresów/momentów czasu, poczynając od prostej inkluzji:

$$(y(t), y(t+1)) \in Z, \quad t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1,$$

(równoważnie: $y(t+1) \in a(y(t)) = \{y | (y(t), y) \in Z\}$) lub inaczej:

$$\Delta y(t) \in \Phi(y(t)) = \{y - y(t) | y \in a(y(t))\}, \quad t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1,$$

($\Delta y(t) = y(t+1) - y(t)$) uzależniającej wielkość wektora produkcji $y(t+1) = (y_1(t+1), \dots, y_n(t+1))$ możliwej do wytworzenia w stacjonarnej gospodarce Gale'a w okresie $t+1$ od rozmiarów produkcji $y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$ wytworzonej w okresie t (rozdz. 1, wzór (1.23)), kończąc na równaniu różniczkowym:

$$\frac{d}{dt} u(t) = as(t)u^\varepsilon(t)e^{\nu t} - (\mu + \lambda)u(t), \quad t \in [t_0, t_1],$$

dynamiki technicznego uzbrojenia pracy $u(t)$ w zależności od stopy inwestycji $s(t)$ (oraz czasu t) w gospodarce Solowa (rozdz. 7, wzór (7.17)) oraz układzie równań:

$$\frac{d}{dt} \kappa(t) = -[\sigma s(t) + (1 - \varepsilon)(\mu + \lambda)]\kappa(t) + (1 - \varepsilon)s(t),$$

$$\frac{d}{dt} s(t) = \omega(\alpha(t) - s(t)), \quad t \in [t_0, t_1],$$

dynamiki kapitałochłonności produkcji i stopy inwestycji w gospodarce typu Solowa z endogenicznym postępem techniczno-organizacyjnym (rozdz. 7, wzór (7.77)); $0 \leq t_0 < t_1 \leq +\infty$.

¹ Prezentowana idea σ – równowagi była po raz pierwszy przedstawiona przez autora w [50]; zob. także [56, rozdz. 7, p. 7.1].

Z matematycznego punktu widzenia modele te są przykładami systemów dynamicznych opisywanych (w zależności od sposobu ujęcia czasu) za pomocą równań różnicowych typu:

$$\Delta x(t) = F(x(t), u(t), t), \quad (1)$$

lub inkluzji:

$$\Delta x(t) \in \Phi(x(t), u(t), t), \quad (2)$$

gdy czas zmienia się skokowo, bądź równań różniczkowych typu:

$$\frac{d}{dt} x(t) = f(x(t), u(t), t), \quad (3)$$

lub inkluzji:

$$\frac{d}{dt} x(t) \in \varphi(x(t), u(t), t) \quad (4)$$

w przypadku czasu ciągłego [56, rozdz. 7, pkt 7.1].

W warunkach (1)-(4) $x(t) \in X \subseteq R^n$ ($n \geq 1$) jest tzw. stanem wewnętrznym systemu w okresie/momencie $t \in T$, $u(t) \in U \subseteq R^m$ ($m \geq 1$) jest wielkością wejściową systemu w okresie/momencie $t \in T$ (sterowaniem, za pomocą którego otoczenie oddziałuje na system), X jest zbiorem dopuszczalnych stanów wewnętrznych, U – zbiorem dopuszczalnych sterowań. Przez T oznaczamy horyzont funkcjonowania systemu. Jeżeli czas zmienia się skokowo, wówczas $T = \{t_0, t_0 + 1, \dots, t_1\}$; gdy zakładamy czas ciągły, wtedy $T = [t_0, t_1]$; $0 \leq t_0 < t_1 \leq +\infty$. Odwzorowania $F(\cdot), f(\cdot)$ są funkcjami, natomiast $\Phi(\cdot), \varphi(\cdot)$ multifunkcjami. Gdy odwzorowania te zdefiniowane są wyłącznie na stanach wewnętrznych systemów (nie zależą ani od czasu t , ani od sterowań $u(t)$), ich dynamikę opisują układy równań albo inkluzji różnicowych:

$$\Delta x(t) = F(x(t)) \text{ lub } \Delta x(t) \in \Phi(x(t)), t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1, \quad (5)$$

bądź różniczkowych:

$$\frac{d}{dt} x(t) = f(x(t)) \text{ lub } \frac{d}{dt} x(t) \in \varphi(x(t)), t \in [t_0, t_1]. \quad (6)$$

Systemy dynamiczne opisywane przez takie układy nazywamy stacjonarnymi. System stacjonarny jest w równowadze, gdy znajduje się w takim stanie $\bar{x}$, w którym:

$$F(\bar{x}) = 0 \text{ lub } f(\bar{x}) = 0,$$

(gdy ich dynamikę opisują układy równań różnicowych lub różniczkowych), albo:

$$0 \in \Phi(\bar{x}) \text{ lub } 0 \in \varphi(\bar{x})$$

(w przypadku inkluzji).

Stacjonarny system, który choćby w jednym okresie/momencie t' jest w równowadze, pozostaje w niej zawsze (zarówno przed, jak i po okresie/momencie t'). Jest to równowaga statyczna systemu pozostającego w swoistym „stanie spoczynku”. Takie rozumienie równowagi jako stanu gospodarki wyrażającego się m.in. w wielkości produkcji, czynników wytwórczych oraz poziomie cen, przy których popyt na produkcję i czynniki jest równy podaży, obowiązuje m.in. w teorii równowagi konkurencyjnej L. Walrasa (zob. np. [43, rozdz. 5], [56, rozdz. 3, 4]). W technice odpowiednikiem walrasowskiej równowagi jest stan równowagi autonomicznego obiektu wyposażonego we własne „prawa ruchu”, na który nie działają żadne siły zewnętrzne. Jest to np. położenie wahadła, do którego dochodzi ono samoczynnie, bez jakiegokolwiek wymuszającej siły i w którym pozostaje ono tak długo, dopóki nie zadziała określony impuls zewnętrzny. W systemach niestacjonarnych, z przekształceniami $F(\cdot), f(\cdot), \Phi(\cdot), \varphi(\cdot)$ zależnymi w (1)-(4) od czasu oraz wrażliwymi na wpływ otoczenia, tak rozumiany stan równowagi $\bar{x}$ musiałby być rozwiązaniem (odpowiednio) układu równań lub inkluzji:

$$\forall t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1 (F(\bar{x}, 0, t) = 0 \vee 0 \in \Phi(\bar{x}, 0, t))$$

bądź:

$$\forall t \in [0, t_1] (f(\bar{x}, 0, t) = 0 \vee 0 \in \varphi(\bar{x}, 0, t)).$$

Takie rozwiązania, poza trywialnymi przypadkami, nie istnieją. Równowaga statyczna jest właściwością/cechą systemów stacjonarnych. Walrasowska teoria równowagi konkurencyjnej opiera się na fałszywej hipotezie, że istnieją gospodarki:

a) stacjonarne, b) bezwzględnie odosobnione, mogące funkcjonować w izolacji od otaczającego świata, niewymagające zewnętrznych zasileń energetyczno-informacyjnych (ze zmienną wejściową/sterowaniem $u(t) \equiv 0$).

Realne gospodarki nie są ani stacjonarne, ani bezwzględnie odosobnione. Nie oznacza to, że są pozbawione zdolności/możliwości funkcjonowania i rozwoju w równowadze. Potrzebne jest natomiast szersze spojrzenie na istotę równowagi.

Przyjrzyjmy się trzem najbliższym nam koncepcjom równowagi w ekonomii matematycznej, tj. równowadze konkurencyjnej Walrasa, równowadze von Neumanna w systemach input-output oraz tzw. równowadze wzrostu w gospodarce Solowa. We wszystkich równowaga oznacza istnienie pewnych „niezmienników” ekonomicznych, swoistych stanów inwariantnych gospodarki. W równowadze konkurencyjnej niezmiennie w czasie są m.in. rozmiary wytwarzanej produkcji, wielkość podaży czynników (w tym pracy), rozmiary popytu konsumpcyjnego i ceny. Odmierna jest idea równowagi neumannowskiej, zgodnie z którą gospodarka jest w równowadze, gdy może dowolnie długo równomiernie (ze stałym tempem) zwiększać produkcję, zachowując jej strukturę oraz swoistą zgodność wzrostu technologicznego ze wzrostem ekonomicznym. W neoklasycznej gospodarce Solowa w równowadze ma miejsce równomierny wzrost wszystkich podstawowych wielkości ekonomicznych: czynników produkcji, produkcji (dochodu) i konsumpcji przy zachowaniu stałej stopy inwestycji.

Mówiąc o równowadze w modelach wzrostu, zawsze mamy na myśli pewien okres, w którym stwierdzamy jej występowanie lub brak. Zbiór cech – atrybutów równowagi systemu – może zmieniać się w czasie zarówno pod wpływem czynników zewnętrznych (adaptacja), jak i czynników wewnętrznych (samoregulacja). Dotyczy to zwłaszcza systemów tak złożonych jak gospodarka. Zmiana cech, atrybutów równowagi, oznacza *de facto* zmianę typu równowagi. W odniesieniu do złożonych systemów społeczno-ekonomicznych należy zatem raczej mówić o różnych typach równowag niż o jednej równowadze absolutnej. W świetle przedstawionych uwag potrzebna jest definicja, która:

- uogólniałyby klasyczną definicję równowagi statycznej,
- relatywizowałyby pojęcie równowagi, nie utożsamiając jej z pojedynczym „stanem spoczynku” systemu oraz nie wykluczając wpływu otoczenia systemu na proces kształtowania/kreowania określonej równowagi,
- stosowałyby się w równej mierze do systemów stacjonarnych i niestacjonarnych.

Przyjmując, że symptomem równowagi powinna być niezmiennosc pewnych charakterystyk systemu, nie wymagamy, aby charakterystykę tę tworzył bezwarunkowo jego stan wewnętrzny odpowiadający zerowemu sterowaniu, a więc najprostszemu, klasycznemu stanowi równowagi statycznej, z jakim mamy do czynienia w systemach stacjonarnych. „Niezmiennikami” mogą być nie same stany wewnętrzne systemu, lecz wartości pewnych funkcji zdefiniowanych zarówno na tych stanach, jak i ewentualnie na sterowaniach, np. stopa wzrostu (oraz struktura) produkcji, konsumpcji (a nie ich wielkości bezwzględne), odpowiadające określonej stopie inwestycji etc. Myśl tę zawrzemy w następującej definicji.

Δ Definicja. Oznaczmy przez T interesujący nas horyzont funkcjonowania systemu (w zależności od sposobu ujęcia czasu $T = \{t_0, t_0 + 1, \dots, t_1\}$ lub $T = [t_0, t_1]$; $0 \leq t_0 < t_1 \leq +\infty$). Niech odwzorowanie $\sigma: X \times U \times T \rightarrow R^k$ będzie określoną w horyzoncie czasu T na stanach wewnętrznych systemu $x(t) \in X \subseteq R^n$ oraz sterowaniach $u(t) \in U \subseteq R^m$ miarą tych jego charakterystyk, których utrzymanie na stałym poziomie uznajemy za symptom równowagi systemu. Mówimy, że system z trajektorią stanów $\bar{x}(t)$ odpowiadającą trajektorii sterowań $\bar{u}(t)$ pozostaje w horyzoncie T w σ – równowadze, jeżeli:

$$\forall t \in T(\sigma(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t) = \text{const.}).$$

Δ

Bezwzględnie odosobnione stacjonarne systemy (5), (6) pozbawione są sterowania $u(t)$, więc w świetle powyższej definicji systemy takie z trajektorią $\bar{x}(t)$ będą w horyzoncie T w σ – równowadze, gdy:

$$\forall t \in T(\sigma(\bar{x}(t), 0, t) = \text{const.}).$$

W szczególności, postulując $\sigma(x, 0, t) = x$, otrzymujemy klasyczną definicję równowagi statycznej.

Syndromem równowagi w stacjonarnej gospodarce Gale'a w rozdziałach 1-3 oraz w rozdz. 4, pkt 4.1-4.3 jest (odpowiadające zerowemu sterowaniu) stałe, maksymalne tempo (równoważnie: stopa) wzrostu produkcji oraz jej niezmienna struktura:

$$\sigma(\bar{y}(t), 0, t) = \left(\frac{\Delta \bar{y}(t)}{\bar{y}(t)}, \frac{\bar{y}(t)}{\|\bar{y}(t)\|} \right) = (\alpha_M, \bar{s}), \quad t \in T$$

(tutaj: $\frac{\Delta y}{y} = \left(\frac{\Delta y_1}{y_1}, \dots, \frac{\Delta y_n}{y_n} \right)$, $\frac{y}{\|y\|} = \left(\frac{y_1}{\|y_1\|}, \dots, \frac{y_n}{\|y_n\|} \right)$). Gospodarka w takiej σ – równowadze pozostaje przez cały czas na magistrali $N = \{\lambda \bar{s} | \lambda > 0\}$ zwiększając produkcję w maksymalnym (stałym) tempie α_M :

$$\bar{y}(t) = \alpha_M^t \bar{y}, \quad t \in T.$$

W rozdz. 4 pkt 4.4 gospodarka z trajektorią produkcji $\bar{y}(t)_{t=t_0}^{t_1}$ (odpowiadającą dopuszczalnej trajektorii inwestycji $\{\bar{l}(t)\}_{t=t_0}^{t_1-1}$) nie zmienia w równowadze struktury produkcji, tj. spełnia warunek:

$$\sigma(\bar{y}(t), \bar{l}(t), t) = \frac{\bar{y}(t)}{\|\bar{y}(t)\|} = \bar{s}, \quad t \in T$$

(inwestycje grają rolę sterowania).

W rozdz. 5 gospodarka Gale'a w σ – równowadze rozwija się w maksymalnym (ale ogólnie różnym) tempie:

$$\bar{y}(t) = \prod_{\tau=0}^t \alpha_{M,\tau} \bar{y},$$

zachowując (przy zerowym sterowaniu) stałą strukturę produkcji:

$$\sigma(\bar{y}(t), 0, t) = \frac{\bar{y}(t)}{\|\bar{y}(t)\|} = \bar{s}, \quad t \in T.$$

Atrybutem σ – równowagi w gospodarce Leontiefa-Gale'a w rozdz. 6 jest stała wielkość (wartość) kapitału $\bar{\kappa}(t) = \frac{1}{\sigma l(t)} \bar{k}(t)$ i produkcji $\bar{\xi}(t) = \frac{1}{\sigma l(t)} \bar{x}(t)$

w sektorach gospodarki w przeliczeniu na zatrudnionego oraz konsumpcji p.c.

$$\bar{\gamma}(t) = \frac{1}{l(t)} \bar{c}(t):$$

$$\sigma(\bar{k}(t), \bar{x}(t), \bar{c}(t), \bar{l}(t), t) = \left(\frac{1}{\sigma l(t)} \bar{k}(t), \frac{1}{\sigma l(t)} \bar{x}(t), \frac{1}{l(t)} \bar{c}(t) \right) = (\bar{\kappa}, \bar{\xi}, \bar{\gamma}), t \in T$$

(inwestycje grają rolę sterowania).

W rozdz. 7 pkt. 7.2-7.7 gospodarka Solowa w σ – równowadze charakteryzuje się stałą stopą wzrostu technicznego uzbrojenia pracy oraz stałą stopą inwestycji:

$$\sigma(\bar{u}(t), \bar{s}(t), t) = \left(\frac{d}{dt} \bar{u}(t) \cdot \frac{1}{\bar{u}(t)}, \bar{s}(t) \right) = \left(\frac{\nu}{1-\varepsilon}, \bar{s} \right), t \in T,$$

$$\bar{s} = \frac{\varepsilon[(1-\varepsilon)(\mu + \lambda) + \nu]}{(1-\varepsilon)(\mu + \lambda + \rho)} \in (0,1)$$

(stopa inwestycji gra rolę sterowania). Trajektorii technicznego uzbrojenia pracy oraz stopie inwestycji w równowadze odpowiadają – rosnące ze stałymi stopami – trajektorie kapitału, produkcji (dochodu), konsumpcji oraz inwestycji.

W p. 7.10 syndromem σ – równowagi w gospodarce jest stała kapitałochłonność produkcji (przy stałej, maksymalnej stopie inwestycji):

$$\sigma(\bar{\kappa}(t), \bar{s}(t), t) = (\bar{\kappa}(t), \bar{s}(t)) = (\bar{\kappa}, \bar{s}), t \in T,$$

$$\bar{\kappa} = \frac{(1-\varepsilon)s_1}{(1-\varepsilon)(\mu + \lambda) + \sigma s_1}, \quad \bar{s} = s_1 \in (0,1)$$

(s_1 jest maksymalną dopuszczalną stopą inwestycji w gospodarce).

Konkluzja. W świetle przytoczonej definicji bezzasadne staje się poszukiwanie „absolutnej” równowagi ekonomicznej. Atrybutem, a zarazem niewątpliwą zaletą definicji jest możliwość jej stosowania na gruncie dowolnie złożonych zarówno stacjonarnych, jak i niestacjonarnych systemów społeczno-ekonomicznych.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Athans M., Falb P. (1966), *Optimal Control*, McGraw Hill, New York.
- [2] Blott J., Crettez B. (2007), On the smoothness of optimal paths II: some local turnpike results, *Decisions in Economics and Finance*, Vol. 30(2), s. 137-150.
- [3] Bewley T. (1982), An Integration of Equilibrium Theory and Turnpike Theory, *Journal of Mathematical Economics*, Vol. 10(2-3), s. 233-287.
- [4] Bołtiański W.G. (1970), *Metody matematyczne sterowania optymalnego*, WNT, Warszawa.
- [5] Caputo M.R. (2005), *Foundations of Dynamic Economic Analysis: Optimal Control Theory and Applications*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [6] Chiang A.C. (1992), *Elements of Dynamic Optimization*, McGraw-Hill, New York.
- [7] *Contribution to the von Neumann Growth Model* (1971), ed. G. Bruckman, W. Weber, Springer Verlag, New York–Wien.
- [8] Czeremnych J.N. (1982), *Analiz powiedienija trajektorii dynamiki narodnochaziajstwiennych modeliej*, Nauka, Moskwa.
- [9] Czeremnych J.N. (1986), *Matematiczieskije modeli razwitija narodnogo chaziajstwa*, MGU, Moskwa.
- [10] Dai D., Shen K. (2013), A turnpike theorem involving a modified Golden Rule, *Theoretical and Applied Economics*, Vol. XX(11), s. 25-40.
- [11] Dove M.H.I., Chakravarty S., Goodwin R.M. (1989), *John von Neumann and Modern Economics*, Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, New York.
- [12] *Equilibrium, Trade and Growth: Selected Papers of Lionel W. McKenzie* (2009), eds. T. Mitra and Nishimura K., The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London.
- [13] Evstignejev I.V. and Schenk-Hoppe K.R. (2006), The von Neumann-Gale growth model and its stochastic generalization, [in:] *Handbook of Optimal Growth*, eds. R.-A. Dana, C. Le Van, T. Mitra and K. Nishimura, Vol. I, s. 337-383, Springer, New York, <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.887409>.
- [14] Gale D. (1956), *The closed Linear Model of Production*, [in:] *Linear Inequalities and Related Systems*, eds. H.W. Kuhn and A.W. Tucker, Princeton Univ. Press, Princeton.
- [15] Gale D. (1967), On optimal Development in a Multi-Sector Economy, *Review of Economic Studies*, Vol. 34(1), s. 1-18.
- [16] Gale D. (1969), *Teoria liniowych modeli ekonomicznych*, PWN, Warszawa.
- [17] Gantz D.T. (1980), A Strong Turnpike Theorem for Nonstationary von Neumann-Gale Production Model, *Econometrica*, Vol. 48(7), s. 1777-1790, [https://doi.org/0012-9682\(198011\)48:7<1777:ASTTFA>2.0.CO;2-6](https://doi.org/0012-9682(198011)48:7<1777:ASTTFA>2.0.CO;2-6).
- [18] Giorgi G. and Zuccotti C. (2016), *Equilibrium and Optimality in Gale-von Neumann Models*, DEM Working Papers (118), Univ. of Pavia, Dep. of Economics and Management, <http://economia.web.unipv.it/wp-content/uploads/201706/DEMWP0119.pdf>.

- [19] Guerrero-Luchtenberg C.L. (2000), A Uniform Neighborhood Turnpike Theorem and Applications, *Journal of Mathematical Economics*, Vol. 34(3), s. 329-357.
- [20] Gurman V.I., Gusiewa I.S. (2013), The Control System Models with the Turnpike Solutions in the Optimal Control Problems, *Program Systems: Theory and Applications*, Vol. 4(4), s. 107-125, <https://www.mathnet.ru/eng/ps/v4/i4/p107>.
- [21] Jensen M.K. (2012), Global Stability and the “Turnpike” in Optimal Unbounded Growth Models, *Journal of Economic Theory*, Vol. 147(2), s. 802-832, <https://doi.org/10.1016/j.jet.2010.07.010>.
- [22] Joshi S. (1997), Turnpike Theorems in Nonconvex Nonstationary Environments, *International Economic Review*, Vol. 38(1), s. 225-248, <https://doi.org/10.2307/2527416>.
- [23] Keeler E.B. (1972), A twisted Turnpike, *International Economic Review*, Vol. 13(1), s. 160-166, <https://doi.org/10.2307/2525912>.
- [24] Kemeny J.G., Morgenstern O., Thompson G.L. (1956), A Generalization of the von Neumann Model of Expanding Economy, *Econometrica*, Vol. 24(2), s. 115-135, [https://doi.org/0012-9682\(195604\)24:2<115:AGOTVN>2.0.CO;2-H](https://doi.org/0012-9682(195604)24:2<115:AGOTVN>2.0.CO;2-H).
- [25] Khan M.A., Piazza A. (2011), An Overview of Turnpike Theory: Towards the Discounted Deterministic Case, [w:] *Advanced in Mathematical Economics*, eds. S. Kusuoka & T. Maruyama, Vol. 14, s. 39-67, Springer, https://doi.org/10.1007/978-4-431-53883-7_3.
- [26] Khan M. A. and Piazza A. (2012), Turnpike Theory: a current perspective, [in:] *The New Palgrave Dictionary of Economics*, eds. S.N. Durlauf and L.E. Blume, Vol. 6, s. 1-13, Online Edition, Palgrave Macmillan.
- [27] Krass J.A. (1976), *Matematyczne modele ekonomicznej dynamiki*, Sowietkoje Radio, Moskwa.
- [28] Lancaster K. (1968), *Mathematical Economics*, The Macmillan Company, New York–London.
- [29] Levis F.L. and Syrmos V.L. (1995), *Optimal Control* (2nd ed.), John Wiley & Sons Inc.
- [30] Makarov V.L., Rubinov A.M. (1977), *Mathematical Theory of Economic Dynamics and Equilibria*, Springer–Verlag, New York, Heidelberg, Berlin.
- [31] Mammedov M.A. (2014), Turnpike Theorem for Infinite Horizon Optimal Control Problem with Time Delay, *Journal of Control and Optimization*, Vol. 52(1), s. 420-438.
- [32] Marena M., Montrucchio L. (1999), Neighborhood Turnpike Theorem for Continuous Time Optimization Models, *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 101(3), s. 651-676.
- [33] *Mathematical Models of Economics* (1974), eds. J. Łoś, M. Łoś, North-Holland, Amsterdam.
- [34] McKenzie L.W. (1963), Turnpike Theorems for a Generalized Leontief Model, *Econometrica*, Vol. 31(1-2), s. 165-180.
- [35] McKenzie L.W. (1976), Turnpike Theory, *Econometrica*, Vol. 44(5), s. 841-865.
- [36] McKenzie L.W. (1998), Turnpikes, *American Economic Review*, Vol. 88(2), s. 1-14.

- [37] Mc Kenzie L.W. (2005), Optimal Economic Growth, Turnpike Theorems and Comparative Dynamics, [w:] *Handbook of Mathematical Economics*, eds. K.J. Arrow, M.D. Intriligator (Eds), 2nd ed. 2, Vol. III, chapter 26, s. 1281-1355.
- [38] Montrucchio L. (1995), A New Turnpike Theorem for Discounted Programs, *Economic Theory*, Vol. 5(3), s. 371-382.
- [39] Morishima M. (1964), *Equilibrium, Stability and Growth*, Clarendon Press, Oxford.
- [40] Morishima M. (1969), *Theory of Economic Growth*, Clarendon Press, Oxford.
- [41] Mowszowicz S.M. (1969), Teoriemy o magistrali w modelach Neumanna-Gale'a, *Ekonomika i matematyckeskie metody*, t. 5(6), s. 877-889.
- [42] Mowszowicz S.M., Pittel B.G. (1970), Magistralnyje swojstwa zamknutoj ekonomiki i dynamiczeskich processow priniatija rieszenii, *Ekonomika i matematyckeskie metody*, t. 6(2), s. 279-310.
- [43] Nikaido H. (1968), *Convex Structures and Economic Theory*, Acad. Press, New York.
- [44] Panek E. (1984), Makroekonomiczne problemy sterowania optymalnego w matematycznej teorii wzrostu, *Ruch Prawniczy, Ekonomiczny i Socjologiczny*, t. 46(4), s. 239-257.
- [45] Panek E. (1985), Asymptotyka optymalnych trajektorii w wielosektorowym modelu wzrostu, *Przegląd Statystyczny*, t. 32(2), s. 151-163.
- [46] Panek E. (1985), „Słabe” twierdzenie o magistrali konsumpcyjnej w wielosektorowym modelu wzrostu, *Przegląd Statystyczny*, t. 32(3), s. 143-154.
- [47] Panek E. (1986), Asymptotyka trajektorii produkcji w dynamicznym modelu Leontiefa, *Przegląd Statystyczny*, t. 33(2), s. 161-171.
- [48] Panek E. (1987), O pewnej wersji twierdzenia o magistrali w wielosektorowym modelu wzrostu, *Przegląd Statystyczny*, t. 34(1), s. 57-66.
- [49] Panek E. (1988), Consumption Turnpike in a Nonlinear of Input-Output Type, [w:] *Input-output Analysis: Current Development*, ed. M. Ciaschini, chapter 16, Chapman and Hall Ltd., London.
- [50] Panek E. (1989), *Optymalizacja procesów wzrostu gospodarczego w świetle teorii sterowania*, PWN, Warszawa-Poznań.
- [51] Panek E. (1992), Optimal trajectories in a Multisectoral Model of Economic Growth, *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 24(8/9), s. 99-109.
- [52] Panek E. (1992), „Bardzo silne” twierdzenie o magistrali w wielosektorowym modelu wzrostu, *Przegląd Statystyczny*, t. 39(3-4), s. 341-349.
- [53] Panek E. (1997), „Silne” twierdzenie o magistrali w wielosektorowym modelu wzrostu (wersja szczególna), *Przegląd Statystyczny*, t. 44(1), s. 55-67.
- [54] Panek E. (1997), *Elementy ekonomii matematycznej*, tom II: *Równowaga i wzrost*, PWN, Warszawa.
- [55] Panek E. (2001), Three Theories of Equilibrium in Mathematical Economics. An Attempt at Synthesis, *The Poznań University of Economics Review*, Vol. 1(1), s. 69-90.
- [56] Panek E. (2003), *Ekonomia matematyczna*, wyd. II, Wydawnictwo Naukowe AEP, Poznań.

- [57] Panek E. (2011), O pewnej prostej wersji „słabego” twierdzenia o magistrali w modelu von Neumanna, *Przegląd Statystyczny*, t. 58(1-2), s. 75-87.
- [58] Panek E., Runka H. (2011), Efekt magistrali w gospodarce Gale’a. Wersja szczególna, [w:] *Matematyka i informatyka na usługach ekonomii. Modelowanie zjawisk gospodarczych. Elementy teorii*, red. E. Panek, Zeszyty Naukowe UE w Poznaniu, nr 211, s. 220-231.
- [59] Panek E., Runka H. (2012), Dwa twierdzenia o magistrali w modelu von Neumanna, *Przegląd Statystyczny*, t. 59(2), s. 125-137.
- [60] Panek E. (2013), Niestacjonarny model von Neumanna z graniczną technologią, *Studia Oeconomica Posnaniensia*, Vol. 1, nr 1(250), Wydawnictwo UEP, s. 49-68.
- [61] Panek E. (2013), „Słaby” i „bardzo silny” efekt magistrali w niestacjonarnej gospodarce Gale’a z graniczną technologią, *Przegląd Statystyczny*, t. 60(3), s. 291-304.
- [62] Panek E. (2013), „Silny” efekt magistrali w modelu dynamiki ekonomicznej typu Gale’a. Zagadnienie wzrostu docelowego, *Przegląd Statystyczny*, t. 60(4), s. 447-459.
- [63] Panek E. (2014), Model von Neumanna niestacjonarnej gospodarki ze zmienną technologią i szczególną postacią kryterium wzrostu, [w:] *Teoria i praktyka gospodarowania we współczesnym świecie*, red. M. Knapińska, K. Szarzec, Wydawnictwo UE w Poznaniu, s. 128-140.
- [64] Panek E. (2014), Niestacjonarna gospodarka Gale’a z rosnącą efektywnością produkcji na magistrali, *Przegląd Statystyczny*, t. 61(1), s. 5-14.
- [65] Panek E. (2014), O pewnej wersji twierdzenia o magistrali w gospodarce Gale’a ze zmienną technologią, *Przegląd Statystyczny*, t. 61(2), s. 105-114.
- [66] Panek E. (2014), Model Gale’a ze zmienną technologią, rosnącą efektywnością produkcji i szczególną postacią kryterium wzrostu. „Słaby” efekt magistrali, *Przegląd Statystyczny*, t. 61(4), s. 325-334.
- [67] Panek E. (2015), Zakrzywiona magistrala w niestacjonarnej gospodarce Gale’a. Część I, *Przegląd Statystyczny*, t. 62(2), s. 149-163.
- [68] Panek E. (2015), „Silny” efekt magistrali w modelu dynamiki ekonomicznej typu Gale’a. Zagadnienie wzrostu docelowego (Autopoprawka), *Przegląd Statystyczny*, t. 62(2), s. 253-257.
- [69] Panek E. (2015), Zakrzywiona magistrala w niestacjonarnej gospodarce Gale’a. Część II, *Przegląd Statystyczny*, t. 62(4), s. 349-360.
- [70] Panek E. (2015), A turnpike theorem for non-stationary Gale economy with limit technology. A particular case, *Economics and Business Review*, Vol. 1(15), No 4, s. 3-13.
- [71] Panek E. (2016), „Silny” efekt magistrali w modelu niestacjonarnej gospodarki Gale’a z graniczną technologią, *Przegląd Statystyczny*, t. 63(2), s. 109-121.
- [72] Panek E. (2016), Gospodarka Gale’a z wieloma magistralami. „Słaby” efekt magistrali, *Przegląd Statystyczny*, t. 63(4), s. 355-374.
- [73] Panek E. (2017), Gospodarka Gale’a z wieloma magistralami. „Silny” i „bardzo silny” efekt magistrali, *Przegląd Statystyczny*, t. 64(2), s. 137-152.

- [74] Panek E. (2017), „Słaby” efekt magistrali w niestacjonarnej gospodarce Gale’a z graniczną technologią i wielopasmową magistralą produkcyjną, [w:] *Matematyka i informatyka na usługach ekonomii*, red. D. Appenzeller, Wyd. Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu, s. 94-110.
- [75] Panek E. (2018), Niestacjonarna gospodarka Gale’a z graniczną technologią i wielopasmową magistralą produkcyjną. „Słaby”, „silny” i „bardzo silny” efekt magistrali, *Przegląd Statystyczny*, t. 65(4), s. 373-393.
- [76] Panek E. (2019), Non-Stationary Gale Economy with Limit Technology, Multilane Turnpike and General Form of Optimality Criterion, *Argumenta Oeconomica Cracoviensia*, No 1(20), s. 9-22.
- [77] Panek E. (2019), Optimal growth processes in non-stationary Gale economy with multilane production turnpike, *Economics and Business Review*, Vol. 5(19), No 2, pp. 3-23.
- [78] Panek E. (2019), O pewnej wersji twierdzenia o wielopasmowej magistrali w niestacjonarnej gospodarce Gale’a, *Przegląd Statystyczny*, t. 66(2), s. 143-157
- [79] Panek E. (2020), A multilane turnpike in a non-stationary input-output economy with a temporary von Neumann equilibrium, *Statistical Review*, Vol. 67(1), s. 77-92.
- [80] Panek E. (2020), Almost „very strong” multilane turnpike effect in the non-stationary Gale economy with a temporary von Neumann equilibrium and price constraints, *Economics and Business Review*, Vol. 6(20), No 2, s. 66-80.
- [81] Panek E. (2021), The minimal-time growth problem and turnpike effect in the stationary Gale economy, *Economics and Business Review*, Vol. 7(21), No 1, s. 7-25.
- [82] Panek E. (2021), The minimal-time growth problem and „very strong” turnpike theorem, *Statistical Review*, Vol. 68(4), s. 45-58.
- [83] Panek E. (2022), Gale Economy with Investments and Limit Technology, *Central European Journal of Economic Modelling and Econometrics (CEJEME)*, Vol. 14(1), s. 57-80.
- [84] Pontriagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. (1962), *Mathematical Theory of Optimal Processes*, Wiley-Interscience, New York.
- [85] Radner R. (1961), Path of Economic Growth that are Optimal with Regard only to Final States: A Turnpike Theorem, *Review of Economic Studies*, Vol. 28(2), s. 98-104.
- [86] Romer D. (2000), *Makroekonomia dla zaawansowanych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- [87] Rojtenberg J.N. (1978), *Teoria sterowania*, PWN, Warszawa.
- [88] Sakamoto N., Pighin D., Zuazua E. (2019), The Turnpike Property in Nonlinear Optimal Control – a Geometric Approach, *2019 IEEE 58th Conference on Decision and Control (CDC)*, Nice, France, 2422-2427, DOI: 10.11.09/CDC40024.2019.9028863.
- [89] Samuelson P.A. (1960), Efficient Paths of Capital Accumulation in Terms of The Calculus of Variations, [w:] *Mathematical Methods in the Social Sciences*, eds. K.J. Arrow, S. Karlin, P. Suppes, Stanford, California.

- [90] Solow R.M. (1956), A Contribution to the Theory of Economic Growth, *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 70(1), s. 65-94.
- [91] Takayama A. (1985), *Mathematical Economics*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [92] Tokarski T. (2011), *Ekonomia matematyczna. Modele makroekonomiczne*, PWE, Warszawa.
- [93] Trelat E., Zahn C., Zuazua E. (2018), Steady-State and Periodic Exponential Turnpike Property for Optimal Control Problems in the Hilbert Space, *SIAM Journal of Control and Optimization*, Vol. 56(2), s. 1222-1252.
- [94] Tsukui J. (1967), The Consumption and the Output Turnpike Theorems in a von Neumann Type of Model – A Finite Term Problem, *Review of Economic Studies*, Vol. 34(1), s. 85-93.
- [95] Tsukui J., Murakami Y. (1978), *Turnpike Optimality in Input-Output Systems. Theory and Applications for Planning*, North-Holland, Amsterdam–New York–Oxford.
- [96] von Neumann J. (1945-46), A Model of General Economic Equilibrium, *Review of Economic Studies*, Vol. 13(1), s. 1-9.
- [97] Zaslowski A.J. (2006), *Turnpike Properties in the Calculus of Variations and Optimal Control*, Springer Science & Business Media Inc., New York.
- [98] Zaslowski A.J. (2014), *Turnpike Phenomenon and Infinite Horizon Optimal Control. Springer Optimization and its Applications*, Springer, New York.
- [99] Zaslowski A.J. (2015), *Turnpike Theory of Continuous-Time Linear Optimal Control Problems*, Springer International Publishing, Switzerland.

SPIS RYSUNKÓW

Rysunek 1.1. Przestrzeń produkcyjna $Z \subset R_+^2$ i obraz $a(x^0)$ przekształcenia technologicznego (multifunkcji) $a: R_+^1 \rightarrow P(R_+^1)$ w punkcie x^0	20
Rysunek 1.2. Obraz $a(x^0) \subset R_+^2$ multifunkcji $a: R_+^2 \rightarrow P(R_+^2)$ w punkcie x^0	25
Rysunek 1.3. Magistrała N w R_+^2 i optymalny stacjonarny proces wzrostu $\{\tilde{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$ postaci (1.26) z wektorem $y^0 = \bar{y} \in N$	50
Rysunek 1.4. Magistrała $N \subset R_+^2$ i (y^0, t_1) – dopuszczalny proces $\{\tilde{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$ prowadzący w okresie $\tilde{t} > t_1$ do magistrali	51
Rysunek 1.5. Przebieg $(y^0, t_1, \bar{p})$ – optymalnego procesu wzrostu w otoczeniu promienia von Neumanna w R_+^2 – ilustracja ‘silnego’ twierdzenia o magistrali	67
Rysunek 1.6. Ilustracja „efektu magistrali” (po współrzędnych) w gospodarce Gale’a z dwoma towarami, przestrzenią produkcyjną (1.59), cenami (1.61) i kryterium maksymalizacji łącznej wartości produkcji wytworzonej w całym horyzoncie $T = \{0, 1, \dots, 10\}$	78
Rysunek 1.7. Ilustracja rozwiązania zadania (1.80)-(1.81). Przebieg (y^0, Y^1, t_1^*) – optymalnego procesu wzrostu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1^*}$ w otoczeniu magistrali $N = \{\lambda \bar{s} \lambda > 0\} \subset R_+^2$	98
Rysunek 1.8. Ilustracja twierdzenia 1.24. Przebieg (y^0, Y^1, t_1^*) – optymalnego procesu wzrostu (rozwiązania zadania (1.80)-(1.81) ze zbiorem stanów docelowych (1.95)) w otoczeniu magistrali $N = \{\lambda \bar{s} \lambda > 0\} \subset R_+^2$	106
Rysunek 2.1. Przykładowy przebieg (y^0, t_1) – dopuszczalnej trajektorii $\{\tilde{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$ postaci (2.18) w otoczeniu wielopasmowej magistrali $N \subset R_+^2$	117
Rysunek 7.1. Optymalna trajektoria u_T^* – rozwiązanie zadania (7.16)-(7.17) – w przypadku wysokiego początkowego technicznego uzbrojenia pracy u^0 (długi horyzont czasu T)	299
Rysunek 7.2. Optymalna trajektoria u_T^* – rozwiązanie zadania (7.16)-(7.17) – w przypadku, gdy początkowe techniczne uzbrojenie pracy $u^0 = \left(\frac{a\varepsilon}{\mu + \lambda + \rho}\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$ (długi horyzont czasu T) ...	300
Rysunek 7.3. Optymalna trajektoria u_T^* – rozwiązanie zadania (7.16)-(7.17) – w przypadku niskiego początkowego technicznego uzbrojenia pracy u^0 i średniej długości horyzontu T	301
Rysunek 7.4. Optymalna trajektoria u_T^* – rozwiązanie zadania (7.16)-(7.17) – w przypadku niskiego początkowego technicznego uzbrojenia pracy u^0 (długi horyzont czasu T)	302
Rysunek 7.5. Optymalna trajektoria u_T^* – rozwiązanie zadania (7.16)-(7.17) – i magistrała $\bar{u}_T$ (linia przerywana) w przypadku: (a) wysokiego ($u_0 > \bar{u}$), (b) średniego ($u_0 = \bar{u}$) oraz (c) niskiego ($u_0 < \bar{u}$) początkowego technicznego uzbrojenia pracy	307-308



Profesor Emil Panek specjalizuje się w ekonomii matematycznej i cybernetyce ekonomicznej, dziedzinach unikatowych w środowisku polskich ekonomistów. Jest autorem kilkuset prac naukowych, w tym kilkunastu monografii z zakresu ekonomii matematycznej, teorii sterowania i matematycznej teorii wzrostu gospodarczego. Ważniejsze książki: *Modelowanie i planowanie wzrostu gospodarki narodowej* (1982) (współautor), *Optymalizacja procesów wzrostu gospodarczego w świetle teorii sterowania* (1989), *Elementy ekonomii matematycznej. Statyka* (1993), *Elementy ekonomii matematycznej. Równowaga i wzrost* (1997), *Ekonomia matematyczna* (2000 i 2003), *Dynamika niestacjonarnych systemów ekonomicznych* (2006).

Profesor jest wybitnym uczonym i wyróżniającym się nauczycielem akademickim, powszechnie uznawanym za twórcę poznańskiej szkoły ekonomii matematycznej. Odznaczony m.in. Krzyżem Kawalerskim Orderu Odrodzenia Polski, Złotym Krzyżem Zasługi oraz Medalem Komisji Edukacji Narodowej.

Pracuje na Wydziale Ekonomii i Zarządzania Uniwersytetu Zielonogórskiego, w Instytucie Ekonomii i Finansów (Katedra Innowacji i Przedsiębiorczości).

W drugiej połowie lat 50. XX wieku Paul A. Samuelson sformułował hipotezę o zbieżności w długich okresach czasu optymalnych ścieżek wzrostu do pewnej ścieżki „wzorcowej”, na której gospodarka osiąga maksymalne, równomierne tempo wzrostu. Samuelson ową ścieżkę wzorcową, charakteryzującą gospodarkę w swoistej równowadze dynamicznej (równowadze wzrostu), porównuje do magistrali w transporcie drogowym [...]. Utożsamiając położenie miejscowości ze stanami gospodarki, regułę magistrali można sformułować następująco: wychodząc z historycznie ukształtowanych warunków początkowych, prawidłowo (optymalnie) funkcjonująca gospodarka powinna możliwie szybko dojść do wzorcowej ścieżki wzrostu (lub jej bliskiego otoczenia), następnie się rozwijać, pozostając na tej ścieżce (lub w jej pobliżu), by ostatecznie – w końcowej fazie rozpatrywanego horyzontu czasu – oddalić się ewentualnie od niej w celu osiągnięcia założonego/pożądanego stanu końcowego.

Przedstawiona hipoteza wzrostu gospodarczego wzbudziła na świecie duże zainteresowanie ekonomistów matematycznych, którzy udowodnili dotąd wiele tzw. twierdzeń o magistrali (produkcyjnej, kapitałowej, konsumpcyjnej) w różnych typach modeli wzrostu [...], a prowadzone w ciągu minionych kilku dekad badania doprowadziły do powstania teorii magistral będącej dzisiaj jednym z filarów ekonomii matematycznej.